

# Отчет о выполнении лабораторной работы 3.6.1 Спектральный анализ электрических сигналов

Исламов Сардор, группа Б02-111

17 сентября 2022 г.

**Аннотация.** В работе изучен спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: последовательности прямоугольных импульсов и цугов, а также амплитудно- и фазо-модулированных гармонических колебаний). Спектры этих сигналов наблюдались с помощью спектроанализатора, входящего в состав USB-осциллографа и сравнены с рассчитанными теоретически.

## Теоретическое введение

### Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Используется разложение в сумму синусов и косинусов с различными аргументами или, как чаще его называют, *разложение в ряд Фурье*.

Пусть задана функция  $f(t)$ , которая периодически повторяется с частотой  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n). \quad (2)$$

Если сигнал чётен относительно  $t = 0$ , в тригонометрической записи остаются только члены с косинусами. Для нечетной наоборот.

Коэффициенты определяются по формуле

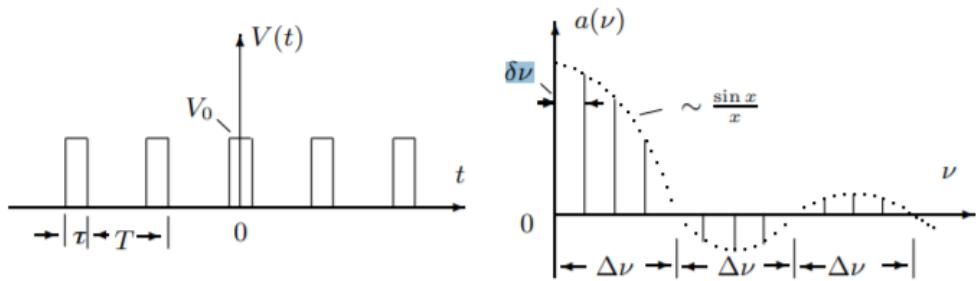
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $t_1$  — время, с которого мы начинаем отсчет.

Сравнив формулы (1) и (2) можно получить выражения для  $A_n$  и  $\psi_n$ :

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \\ \psi_n &= \arctan \frac{b_n}{a_n}. \end{aligned} \quad (4)$$

## Периодическая последовательность прямоугольных импульсов



Введем величину:  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  — период повторения импульсов.

Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}. \quad (5)$$

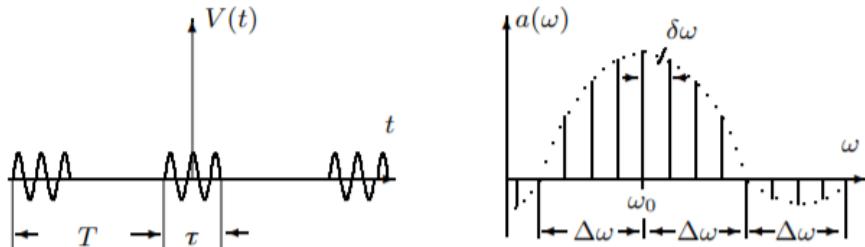
Здесь  $V_0$  - амплитуда сигнала.

Поскольку наша функция четная, то  $b_n = 0$ .

Пусть  $T$  кратно  $\tau$ . Тогда введем ширину спектра, равную  $\Delta\omega$  — расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающей, как нетрудно убедиться при  $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$ . При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1. \quad (6)$$

## Периодическая последовательность цугов

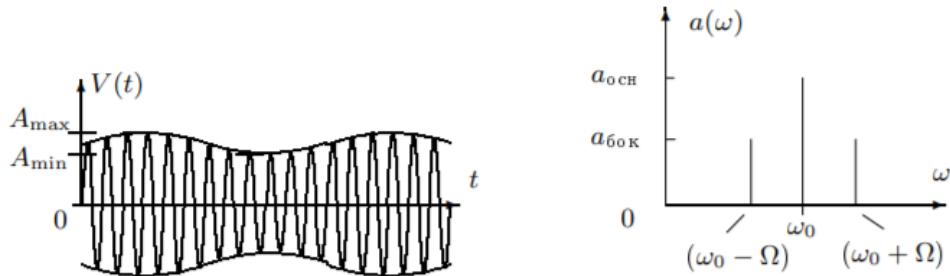


Возьмём цуги колебания  $V_0 \cos(\omega_0 t)$  с длительностью цуга  $\tau$  и периодом повторений  $T$ . Функция  $f(t)$  снова является четной относительно  $t = 0$ . Коэффициент при  $n$ -ой гармонике согласно формуле (3) равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left( \frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right). \quad (7)$$

Пусть  $T$  кратно  $\tau$ . Тогда спектры последовательности прямоугольных сигналов и цугов аналогичны, но максимумы сдвинуты на  $\omega_0$ .

## Амплитудно-модулированные колебания



Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты  $\omega_0$ , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой  $\Omega \ll \omega_0$ .

$$f(t) = A_0 [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t. \quad (8)$$

Коэффициент  $m$  называется *глубиной модуляции*. При  $m < 1$  амплитуда меняется от минимальной  $A_{\min} = A_0(1 - m)$  до максимальной  $A_{\max} = A_0(1 + m)$ . Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}. \quad (9)$$

Простым тригонометрическим преобразованием уравнения (8) можно найти спектр колебаний

$$f(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 - \Omega) t. \quad (10)$$

## Экспериментальная установка

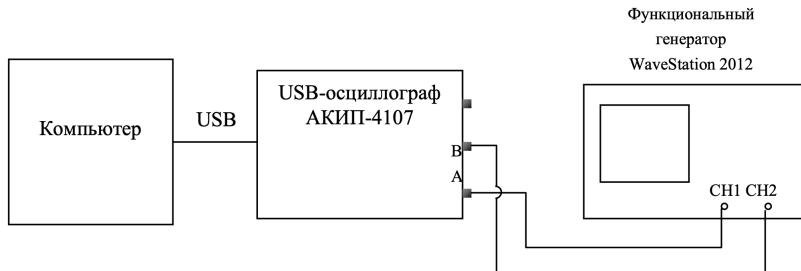


Рис. 1: Схема установки

Функциональный генератор WaveStation 2012 позволяет сформировать два различных электрических сигнала, которые выводятся на два независимых канала – CH1 и CH2. Сигнал с канала CH1 подается на вход A, а сигнал с канала CH2 – на вход B USB-осциллографа. Затем эти сигналы подаются на вход компьютера через USB-соединение. При работе USB-осциллографа в режиме осциллографа, на экране компьютера можно наблюдать каждый из сигналов в отдельности, а также их произведение. В режиме спектроанализатора можно наблюдать спектры этих сигналов.

## Результаты измерений и обработка данных

### Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

На изображениях 2, 3, 4 приведены фото развертки при различных  $t$  и  $f_{\text{повт}}$

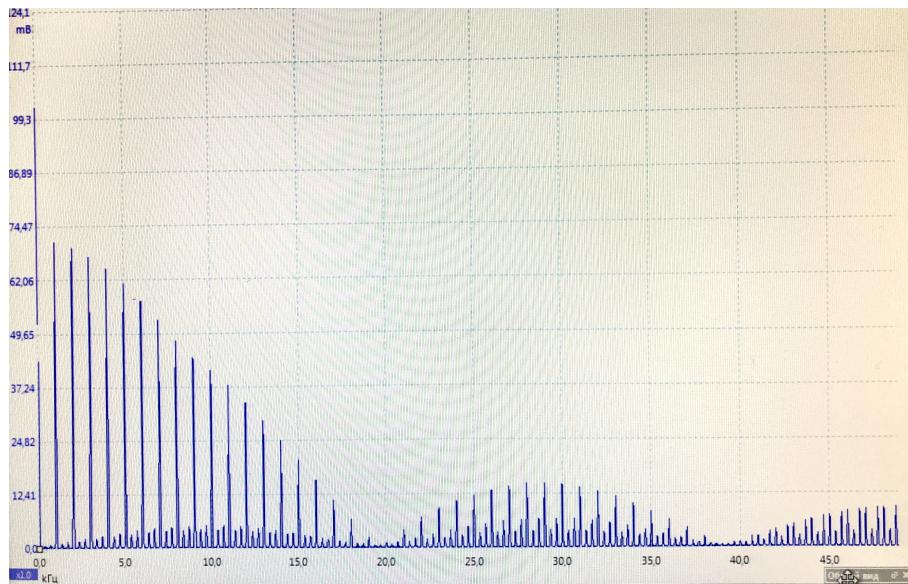


Рис. 2:  $\tau = 50\text{мкс}$ ,  $f_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$

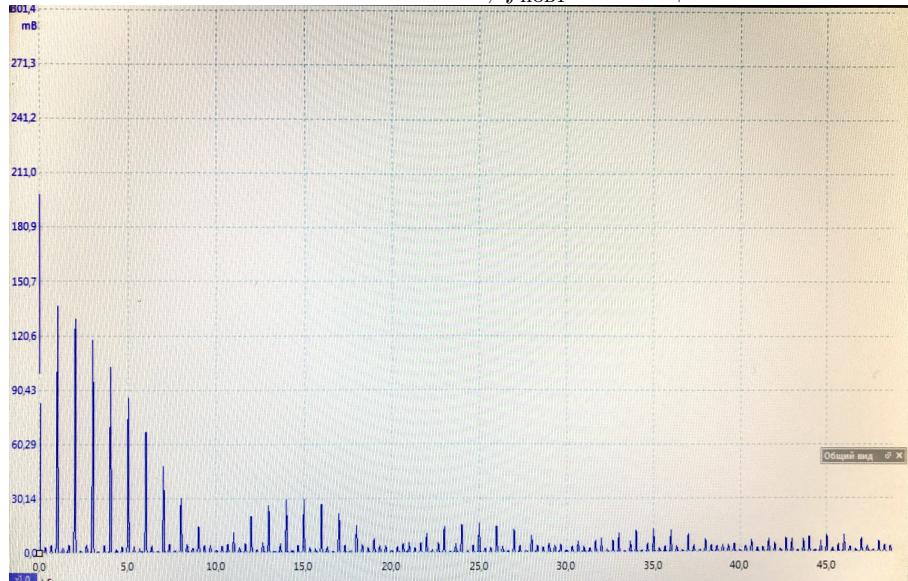


Рис. 3:  $\tau = 100\text{мкс}$ ,  $f_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$

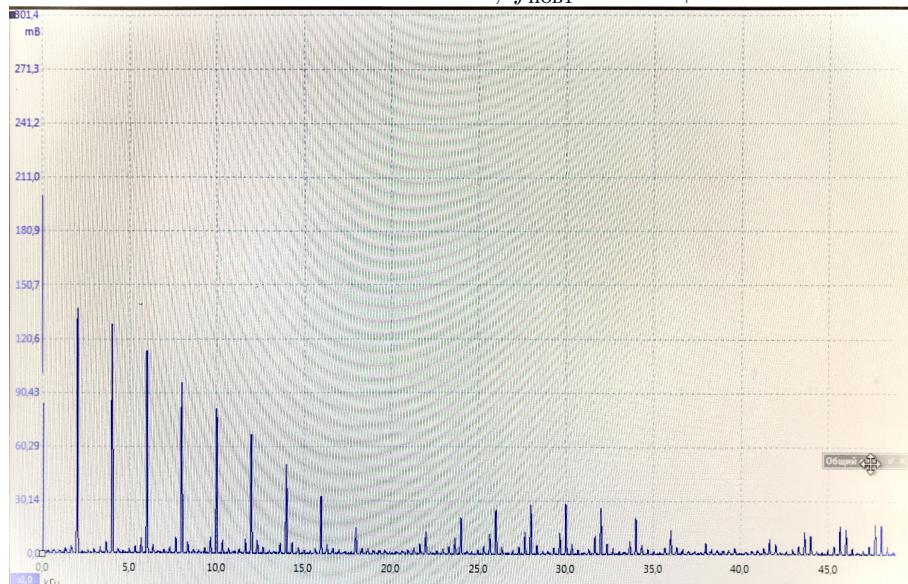


Рис. 4:  $\tau = 50\text{мкс}$ ,  $f_{\text{повт}} = 2\text{кГц}$

Теперь исследуем зависимость ширины спектра  $\Delta\nu$  от  $\tau$  при  $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$

$\tau, \text{ мкс}$	25	50	75	100	125	175	200
$\Delta\nu, \text{ кГц}$	39.6	20.0	13.0	10.0	7.9	5.5	5.0
$1/\tau, \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$	40	20	13.3	10	8	5.7	5

Таблица 1: Исследование зависимости  $\Delta\nu(\tau)$

Проведем измерения частот и амплитуд у различных гармоник сигналов с различной длительностью импульсов

$$\tau = 50 \text{ мкс}, f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$$

n	2	5	7	9	12
$\nu, \text{ кГц}$	2	5	7	9	12
A, мВ	2.8	2.5	2.1	1.8	1.4

$$\tau = 100 \text{ мкс}, f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$$

n	1	2	3	4	5	8
$\nu, \text{ кГц}$	1	2	3	4	5	8
A, мВ	5.7	5.3	4.8	4.2	3.45	1.2

На рис. 5 изображен график, построенный по полученным значениям. По МНК получаем, что  $k \approx 0.99 \pm 0.01$ , что подтверждает теоретические расчеты.

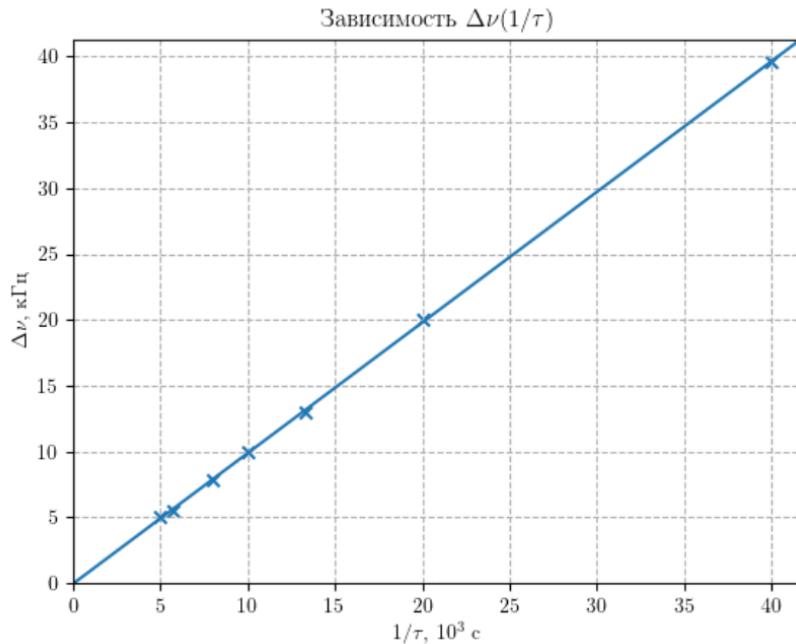


Рис. 5: Зависимость  $\Delta\nu(1/\tau)$

## Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

При увеличении длительности импульса вдвое произошли изменения, аналогичные с первой частью работы. Изображения представлены на рис. 6 и рис. 7

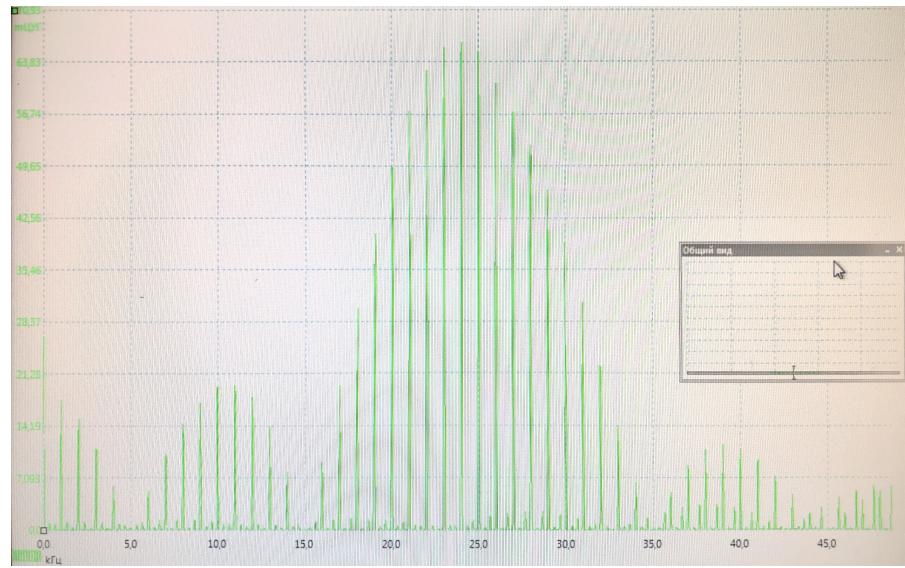


Рис. 6:  $\tau = 50\text{мкс}$ ,  $f_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$

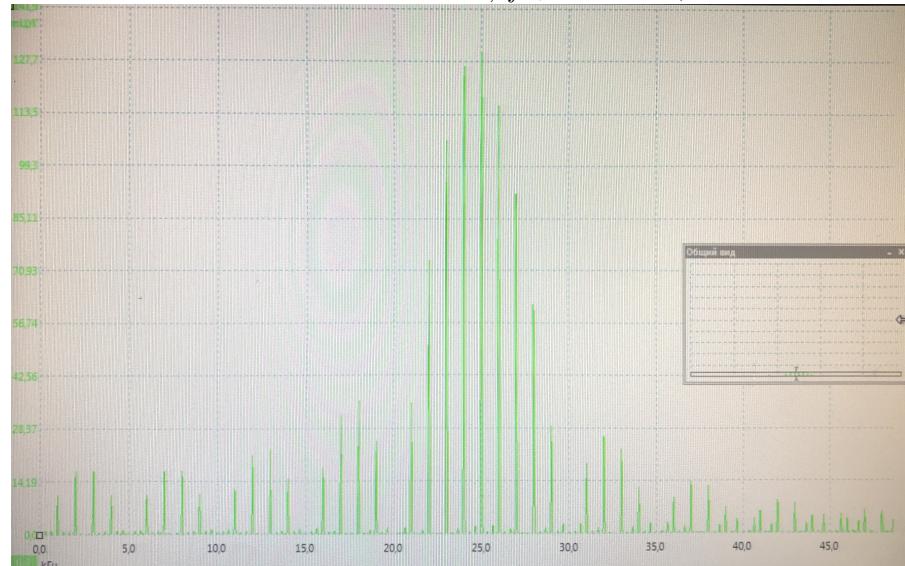


Рис. 7:  $\tau = 100\text{мкс}$ ,  $f_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$

При изменении  $f_{\text{повт}}$  (10, 25 и 40 кГц) изображение меняло свое положение по горизонтальной оси (рис. 7, 8, 9).

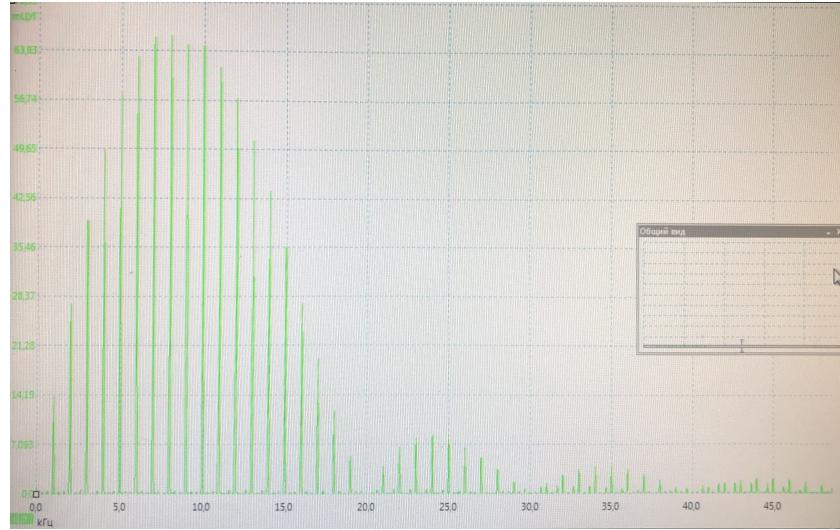


Рис. 8:  $f_{\text{повт}} = 10$  кГц

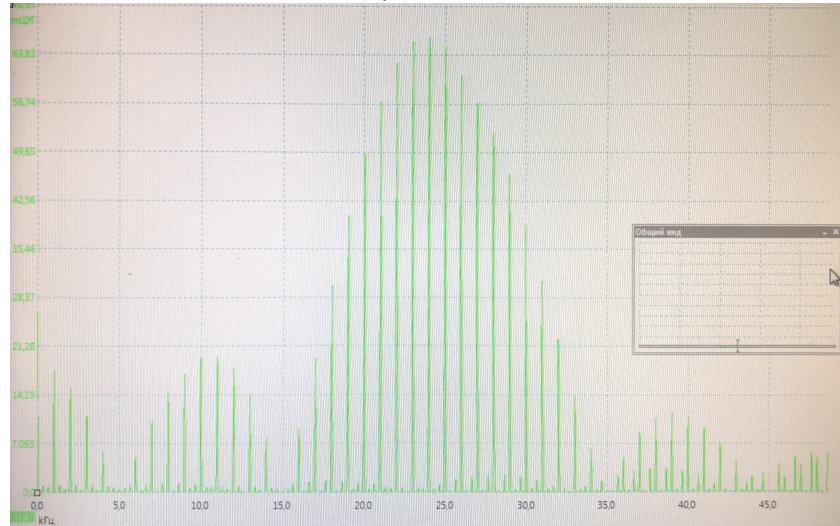


Рис. 9:  $f_{\text{повт}} = 25$  кГц

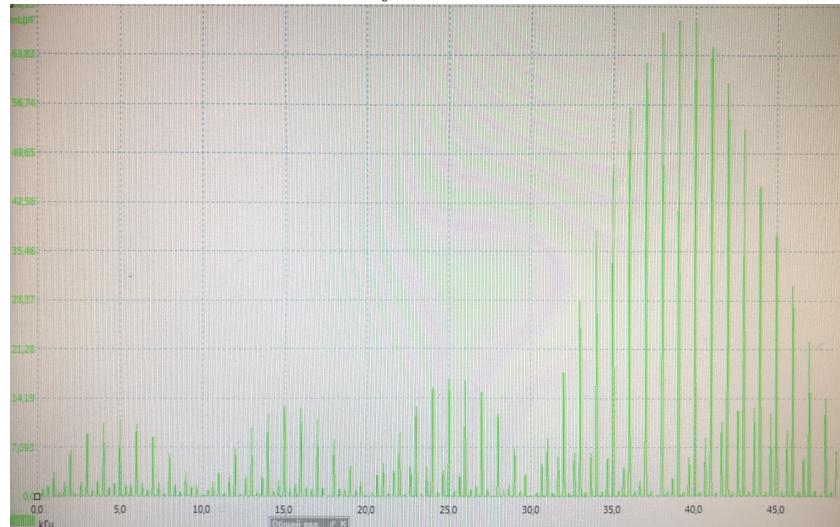


Рис. 10:  $f_{\text{повт}} = 40$  кГц

Теперь установим значения  $\nu_0 = 30$  кГц,  $\tau = 100$  мкс и проведем измерение зависимости  $\delta\nu$  от  $f_{\text{повт}}$

$f_{\text{повт}}, \text{ кГц}$	0.5	1	2	4	5
$\delta\nu, \text{ кГц}$	0.5	1	2	4	5

Таблица 2: Исследование зависимости  $\delta\nu(f_{\text{повт}})$

Измерим частоты и амплитуды различных гармоник при  $f_{\text{повт}} = 100$  и 200 кГц

$$f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}, \tau = 100 \text{ мкс}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\nu, \text{ кГц}$	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
A, мЦУГ	68.0	66.5	62.8	57.3	50.0	41.5	32.3	23.4	14.2	7.1	0.0	4.7	8.5	10.7

$$f_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}, \tau = 100 \text{ мкс}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\nu, \text{ кГц}$	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
A, мЦУГ	135.4	125.4	100.2	65.12	28.37	0.0	17.0	21.9	19.45	10.0

Построим график по полученным значениям (рис. 11). Здесь коэффициент наклона также равен 1, что соответствует расчетам.

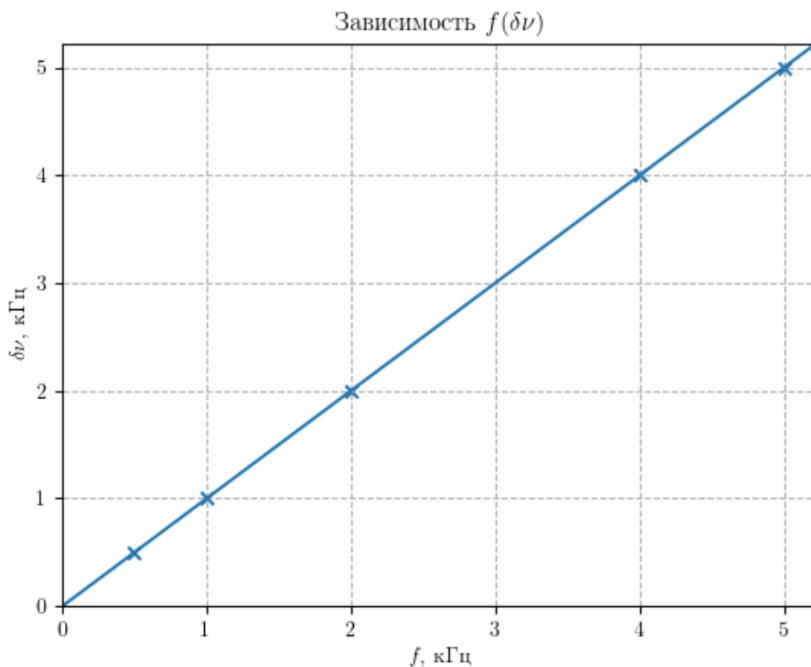


Рис. 11: Зависимость  $\delta\nu(f_{\text{повт}})$

## Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Установим  $\nu_0 = 25$  кГц и  $f_{mod} = 1$  кГц.

Обозначим  $\frac{A_{max}-A_{min}}{A_{max}+A_{min}} = m$ ,  $\frac{A_{бок}}{A_{осн}} = k$  и снимем зависимость  $k(m)$

A, мВ	2	0.8	1.2	1.6	0.4
$A_{max}$ , мЦУГ	990	707	790	890	601
$A_{min}$ , мЦУГ	17	293	200	103	398
$A_{осн}$ , мЦУГ	317.5	321	322	322	321
$A_{бок}$ , мЦУГ	163.5	63.5	96	125	31
$m$	6.3	1.6	2.6	4.0	0.7
$k$	0.5	0.2	0.3	0.4	0.1

Таблица 3: Исследование зависимости  $k(m)$

03.09.22

Дениса

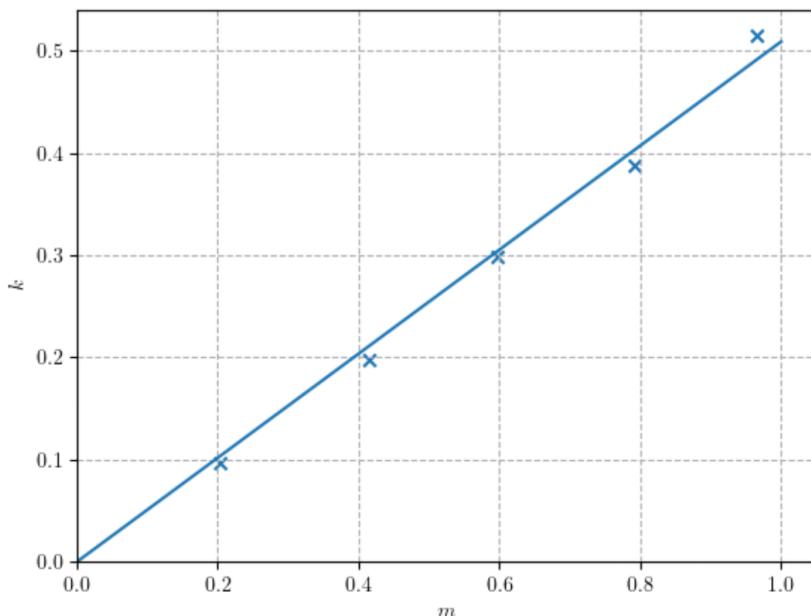


Рис. 12: Исследование зависимости  $k(m)$

Полученное значение углового наклона  $k' = 0.51 \pm 0.01$ , что сходится с теоретическим значением.

## Подведение итогов

В ходе работы был изучен спектральный состав периодических электрических сигналов различных форм: прямоугольные импульсы, цуги гармонических колебаний и сигналы, модулированные по амплитуде. Полученные результаты подтверждают установленные соотношения.