Отчет о выполнении лабораторной работы 3.2.1
Сдвиг фаз в цепи переменного тока.

Исламов Сардор, группа Б02-111

7 октября 2022 г.

Аннотация. В работе исследована зависимость сдвига фаз между током и напряжением от сопротивления в $RC-$ и в $RL-$ цепи; определена добротность колебательного контура путем снятия зависимости сдвига фаз от частоты вблизи резонанса; оценен диапазон работы фазовращателя.

Теоретическое введение

Удобным, хотя и не очень точным прибором для измерения фазовых соотношений служит электронный осциллограф. Пусть нужно измерить сдвиг фаз между двумя напряжениями U_1 и U_2. Подадим эти напряжения на горизонтальную и вертикальную развёртки осциллографа. Смещение луча по горизонтали и вертикали определяется выражениями

$$x = x_0 \cos \Omega t, \quad y = y_0 \cos(\Omega t + \alpha),$$

где α — сдвиг фаз между напряжениями U_1 и U_2, а x_0 и y_0 — амплитуды напряжений, умноженные на коэффициенты усиления соответствующих каналов осциллографа. Исключив время, после несложных преобразований найдём:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 + \frac{2xy}{x_0 y_0}\cos\alpha = \sin^2\alpha.$$

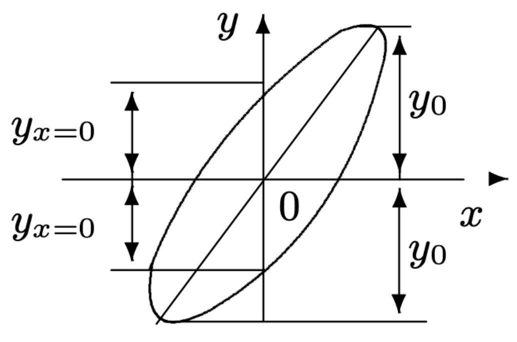

Рис. 1: Эллипс на экране осциллографа

Полученное выражение определяет эллипс, описываемый электронным лучом на экране осциллографа (рис. 1). Ориентация эллипса зависит как от искомого угла α, так и от усиления каналов осциллографа. Для расчёта сдвига фаз можно измерить отрезки $2y_{x=0}$ и $2y_0$ (или $2x_{y=0}$ и $2x_0$, на рисунке не указанные) и, подставляя эти значения в уравнение эллипса, найти

$$\alpha = \pm \arcsin\left(\frac{y_{x=0}}{y_0}\right).$$

Для правильного измерения отрезка $2y_{x=0}$ важно, чтобы центр эллипса лежал на оси у.

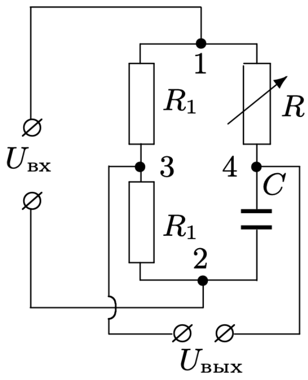

Рис. 2: Принципиальная схема фазовращателя

Другой способ измерения сдвига фаз изложен в описании экспериментальной установки.

На практике часто используются устройства, позволяющие в широких пределах изменять фазу напряжения ($0 < \psi < \pi$). Такие устройства называются фазовращателями. Схема простого фазовращателя приведена на рис. 2. Она включает в себя два одинаковых резистора R_1, ёмкость C и переменное сопротивление R.

Используя метод комплексных амплитуд, найдём зависимость сдвига фаз между входным напряжением $U_{\text{вх}} = U_0 \cos \Omega t$ и выходным $U_{\text{вых}}$ от соотношения между импедансами сопротивления R и ёмкости C. Для этого выразим выходное напряжение $U_{\text{вых}}$ через $U_{\text{в}}$х, параметры контура и частоту внешнего источника $\Omega:\ U_{34} = f(U_{12},\, R,\, C,\, \Omega)$.

Обозначим комплексную амплитуду входного напряжения через $\widehat{U}_0$. Тогда напряжение между точками 1 и 3 в силу равенства сопротивлений R_1

$$\widehat{U}_{13} = \frac{\widehat{U}_0}{2}.$$

Если фазу напряжения $\widehat{U}_{\text{вх}}$ положить равной нулю, то $\widehat{U}_0$ будет действительной величиной: $\widehat{U}_0 = U_0$. Приняв напряжение в точке 1 равным нулю, получим амплитуду напряжения в точке 3:

$$\widehat{U}_{03} = \frac{U_0}{2}.$$

Расчитаем $\widehat{U}_{04}$ – амплитуду напряжения в точке 4. Импеданс Z последовательно соединённых сопротивления R и ёмкости C равен

$$Z = R - \frac{i}{\Omega C}.$$

Для комплексной амплитуды тока

$$\widehat{I}_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{R - i/\Omega C},$$

а для комплексной амплитуды напряжения в точке 4 –

$$\widehat{U}_{04} = \widehat{I}_0 R = U_0 \frac{R}{R - i/\Omega C}.$$

Выходное напряжение

$$\widehat{U}_{\text{вых}} = \widehat{U}_{04} - \widehat{U}_{03} = \widehat{U}_{04} - U_0/2 = \frac{U_0}{2} \frac{R + i/\Omega C}{R - i/\Omega C}.$$

В числитель и знаменатель последнего выражения входят комплексно-сопряжённые выличины, модули которых одинаковы, поэтому величина выходного напряжения не меняется при изменении R. Модуль $U_{\text{вых}}$ всегда равен $U_0/2$ – половине $U_{\text{вх}}$. Сдвиг фаз между входным и выходным напряжениями равен $2\arctan(1/\Omega RC)$ и меняется от π (при $R \longrightarrow 0$) до 0 (при $R \longrightarrow \infty$).

Экспериментальная установка

Схема для исследования сдвига фаз между током и напряжением в цепи переменного тока представлена на рис. 3. Эталонная катушка L, магазин емкостей C и магазин сопротивлений R соединены последовательно и через дополнительное сопротивление r подключены к источнику синусоидального напряжения — звуковому генератору.

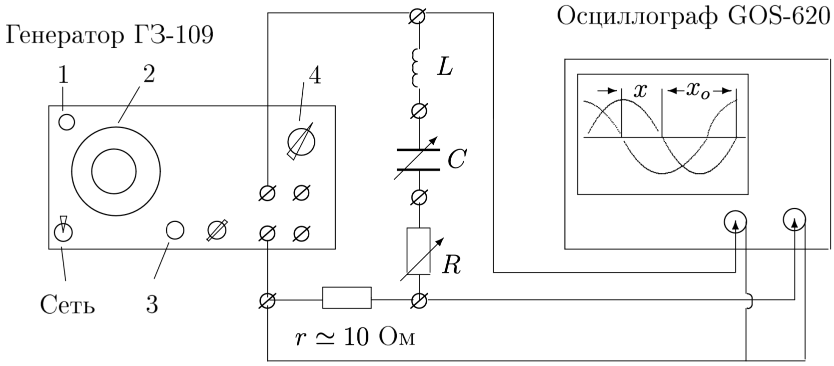

Рис. 3: Схема установки для исседования сдвига фаз между током и напряжением

Сигнал, пропорциональный току, снимается с сопротивления r, пропорциональный напряжению — с генератора. Оба сигнала подаются на универсальный осциллограф. Этот осциллограф имеет два канала вертикального отклонения, что позволяет одновременно наблюдать на экране два сигнала. В нашей работе это две синусоиды (рис. 3), смещённые друг относительно друга на расстояние x, зависящее от сдвига фаз между током и напряжением в цепи.

Измерение сдвига фаз удобно проводить следующим образом:

1) подобрать частоту развертки, при которой на экране осциллографа укладывается чуть больше половины периода синусоиды;

2) отцентрировать горизонтальную ось;

3) измерить расстояние x_0 между нулевыми значениями одного из сигналов, что соответствует смещению по фазе на π;

4) измерить расстояние x между нулевыми значениями двух синусоид и пересчитать в сдвиг по фазе: $\psi = \pi \cdot x/x_0$.

На рис. 1 синусоиды на экране ЭО сдвинуты по фазе на $\pi/2$.

Схема фазовращателя, изображённая на рис. 4, содержит два одинаковых резистора R_1, смонтированных на отдельной плате, магазин сопротивлений R и магазин емкостей C.

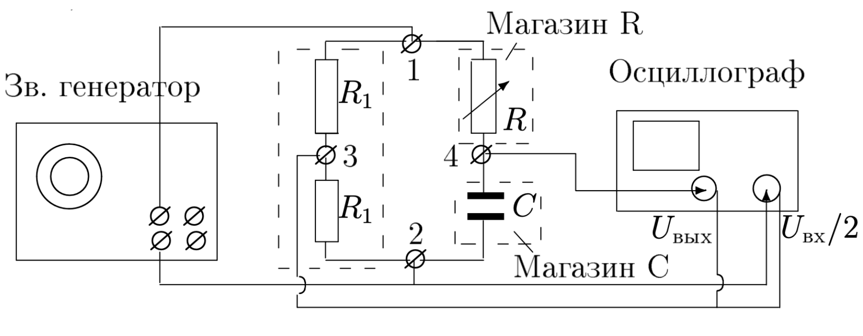

Рис. 4: Схема установки для исследования фазовращателя

Результаты измерений и обработка данных

После сборки схемы (рис. 4) установим на катушке индуктивности максимальное значение $L = 50$ мГн, а в магазине емкостей $C = 0.5$ мкФ, сопротивление R занулим. На генераторе установим частоту $\nu = 1$ кГц и нагрузку 5 Ом.

Пересоберем схему по рис. 3 и закоротим катушку ($RC-$цепь).

В такой цепи зависимость разности фаз можно вычислить по простой формуле

$$\psi = \arctan\left(\frac{x}{R_\Sigma}\right), \tag{1}$$

где $x = X_L - X_C$ - разность реактивных сопротивлений катушки и конденсантора, R_Σ - суммарное активное сопротивление цепи.

Реактивное сопротивление в цепи $X_1 = \frac{1}{\omega C} = 31.83$ Ом.

Будем увеличивать сопротивление R от 0 до $10X_1$ и проведем измерения (табл. 1), подбирая R так, чтобы приращения разности фаз были примерно одинаковы.

R, Ом	0	40	80	120	190	240	300
ψ, $2\pi/50$	12.5	11.5	10.5	9.5	8.5	7.5	6.5

Таблица 1: $RC-$цепь

Изобразим полученные данные на графике (рис. 5) и сравним с теоретическим значением (1).

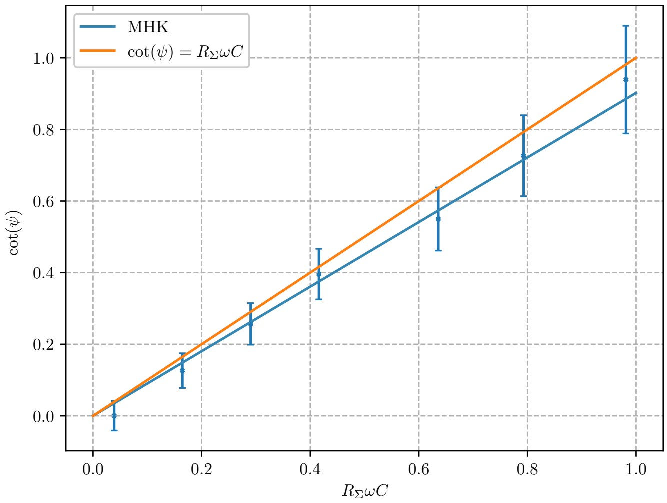

Рис. 5: Зависимость разности фаз от сопротивления в $RC-$цепи

Из графика видно, что измеренные величины довольно хорошо кореллируют с теоретической зависимостью. По МНК коэффициент наклона $k_c = 0.9 \pm 0.1$, что в пределах погрешности совпадает с теоретическим $k = 1$.

Теперь в схеме на рис. 3 закоротим магазин емкостей (RL−цепь).

Реактивное сопротивление $X_2 = \omega L = 314.16$ Ом.

Измерим зависимость сдвига фаз от сопротивления (табл. 2), меняя его от 0 до $10X_2$. Также заметим, что сигнал на осциллографе колеблется, что приводит к дополнительной случайной погрешности при снятии показаний.

R, Ом	0	380	700	1100	1500	2000	3000
ψ, $2\pi/50$	11.5	5.5	3	2.5	2	1.5	1

Таблица 2: RL−цепь

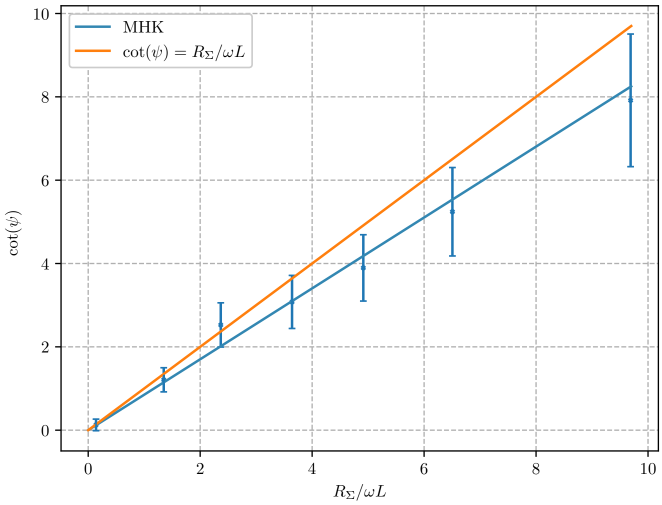

Рис. 6: Зависимость разности фаз от сопротивления в RL−цепи

В этом случае экспериментальные данные расходятся с теоретическим значением, что может быть связано с упомянутым выше колебанием сигнала. По МНК $k = 0.85 \pm 0.11$, что несколько не совпадает с $k = 1$.

Теперь проведем измерения в RLC−цепи.

Резонансная частота $\nu_0 = \frac{2}{1\pi\sqrt{LC}} = 1006.58$ Ом. На практике это значение несколько отличается от полученного и $\nu_0 \approx 990$ Ом.

Снимем зависимость сдвига фаз (от $-\pi/3$ до $\pi/3$) от частоты (табл. 3) при $R = 0$ и при $R = 100$ Ом.

$R = 0$							
ν, Ом	890	930	970	990	1040	1080	1120
x/x_0	-1/3	-9/35	-4/33	0	1/5	8/29	1/3
$R = 100$ Ом							
ν, Ом	700	800	900	990	1100	1200	1400
x/x_0	-7/22	-5/19	-5/34	0	1/12	3/13	7/22

Таблица 3: RCL−цепь

24.09.22.

Изобразим данные на одном графике (рис. 7)

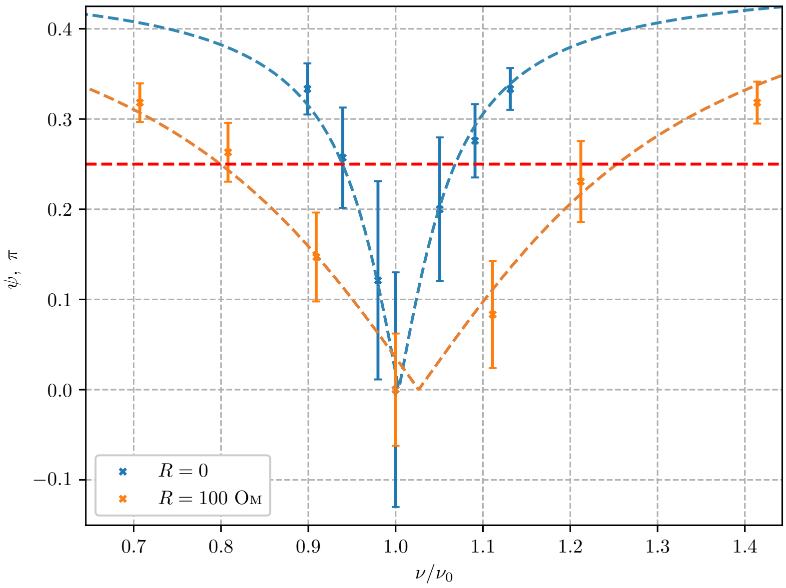

Рис. 7: Зависимость разности фаз от частоты

При сдвиге фаз $\psi = \pi/4$ ширины графиков равны соответственно 0.128 и 0.434 Тогда добротности схем равны $Q_{\text{прак}}(0) = 7.8$, $Q_{\text{прак}}(100) = 2.3$.

Также запишем параметры установки: сопротивление $r = 12.4$ Ом, индуктивность $L =$ 50 мГн и активное сопротивление $R_L = 31.5$ Ом.

Теоретически добротность контура равна

$$Q = \frac{1}{R_\Sigma}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Тогда при $R = 0$ $Q_{\text{теор}} = 7.2$, при $R = 100$ Ом $Q_{\text{теор}} = 2.2$, что примерно совпадает с экспериментальными значениями.

Соберем установку по рис. 4 и оценим диапазон изменения сдвига фаз при $\nu = 1$ кГц и $C = 0.5$ мкФ: он меняется от $\psi(0) = 0$ до $\psi(10\text{кОм}) = \pi/2$.

Подведение итогов

В ходе работы исследована зависимость сдвига фаз между током и напряжением от сопротивления. В $RC-$цепи экспериментальные значения в пределах погрешности совпадают с теоретическими, в $RL-$цепи значения несколько разнятся с теоретическими, что может быть связано с неидеальностью установки и колебанием сигнала на экране осциллографа, что затруднило снятие показаний. Также определена добротность колебательного контура путем снятия зависимости сдвига фаз от частоты вблизи резонанса: для $R = 0$ значение $Q = 7.8$, что примерно совпадает с теоретическим $Q = 7.2$ ($\varepsilon \approx 9\%$), для $R = 100$ Ом добротность контура $Q = 2.3$, что также хорошо кореллирует с теоретическим значением $Q = 2.2$ ($\varepsilon \approx 5\%$).