04.10.2019.

I Уводни појмови о нумеричкој математици

[2] ~ Појам и врсте грешака ~

* проблем одређивања неке величине y на основу дате величине x:

$$y = A(x)$$

- ако је A компликовано, задатак решавамо приближно

нпр. $y = \int_a^b x(t)\,dt$ (овај интеграл није могуће израчунати аналитички)

- можемо извршити замену:

1) $x \sim \bar{x}$ → полином или нека др. ф-ја чији се интеграл може израчунати (блиска величини x)

2) $\int \sim \sum$ → мењамо интеграл сумом коју можемо израчунати (замена оператора A блиским оператором $\bar{A}$)

$$\bar{y} = \bar{A}(\bar{x})$$

- грешком се оцењује колико је приближно решење $\bar{y}$ блиско тачном решењу y $|\bar{y} - y|$

* Узроци грешке могу бити различити и оне може бити:

1. неотклоњива – настаје због недостатака математичког модела или грешака улазних података (не зависи од примењеног математ. апарата)

2. грешка методе – настаје услед тога што се оператор или улазне величине замењују приближним вредностима или што се бесконачни итеративни процес замењује коначним алгоритмом.

3. рачунска грешка – настаје када рачунамо са приближним вредностима (рад са зарезима, децималама)

1 ~Приближни бројеви~

* Неки бројеви не могу да се запишу помоћу коначног броја цифара (π, e, $2/3$, $\sqrt{2}$, ...) па користимо њихове приближне вредности

* Рачунари за интерни запис броја користе фиксиран број места n. (дужина речи)

* Начин записи броја:

  1. запис у фиксном зарезу – дефинисан природним бројевима n_1 и n_2, $n_1+n_2=n$, т.д. се број записује са n_1 цифара испред и n_2 цифара иза децималне тачке

  пример $n=9$, $n_1=4$, $n_2=5$, број је 31.207:

  $$0031.20700$$

  2. запис у покретном зарезу – положај децималне тачке није фиксан већ се он у односу на прву цифру записа одређује задавањем експонента

  $a = p \cdot 10^q$, $|p|<1$, $q \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$

  p – мантиса, q – експонент

  $m+e=n$, m – број цифара мантисе, e – број цифара експонента } фиксни су

  пример $n=10$, $m=7$ и $e=3$, број 31.207:

  3120700.002 (нормализован запис) или 0312070.003

  • запис броја није једнозначно одређен па се дефинише нормализовани запис броја у покретном зарезу – запис у коме прва цифра мантисе мора бити $\neq 0$.

* Ако је a тачна вредност неке величине, а $\bar{a}$ њена приближна вредност, онда је величина $|a-\bar{a}|$ апсолутна грешка, а $\frac{|a-\bar{a}|}{|\bar{a}|}$ релативна грешка.

- $|a-\bar{a}| \leq \Delta(\bar{a})$ граница апс. грешке
- $\frac{|a-\bar{a}|}{|\bar{a}|} \leq \delta(\bar{a})$ граница рел. грешке

$\Big\}$ (*)

- $\delta(\bar{a}) \cdot 100$ грешка у процентима
- $\delta(\bar{a}) \cdot 1000$ грешка у промилима
- $\delta(\bar{a}) = \frac{\Delta(\bar{a})}{|\bar{a}|}$

$\boxed{3}$

Деф Значајне цифре броја су све цифре његовог записа, почевши од прве ненула цифре са леве стране.

- ако је у запису броја $\bar{a} = \alpha_1 \cdot 10^n + \ldots + \alpha_k \cdot 10^{n-k+1} + \ldots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1}$, $\alpha_1 \neq 0$, онда су све цифре $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ значајне.

Пример $\bar{a} = 0.0\underbrace{3120700}_{\text{значајне цифре}}$

- нуле на почетку нису значајне јер број може да се напише без њих: $3.120700 \cdot 10^{-2}$
- последње две нуле су значајне јер указују на тачност

Деф За значајну цифру броја се каже да је сигурна цифра ако апсолутна грешка броја није већа од декадног чиниоца који одговара тој цифри тј. α_k је сигурна цифра ако је:

$$\Delta(\bar{a}) \leq \omega \cdot 10^{n-k+1}, \quad \omega \in (0,1].$$

- $\omega \in (0, \frac{1}{2}] \rightarrow$ цифра је сигурна у ужем смислу
- $\omega \in (\frac{1}{2}, 1] \rightarrow$ цифра је сигурна у ширем смислу
- ако је цифра α_k сигурна $\Rightarrow$ цифре $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ су сигурне
- ако је цифра сигурна у ужем смислу $\Rightarrow$ сигурна је у ширем смислу

$\Delta(\bar{a})$

Пример Ако се зна да је граница апсолутне грешке $0.5\cdot 10^{-5}$ (*) за $\bar{a} = 0.03120700$, онда су сигурне цифре 3, 1, 2 и 0.

(*) говори да после децималне тачке имамо 5 позиција/цифара

$$\bar{a} = 0.0\underbrace{3120}_{k=4}700 = 3\cdot 10^{-2} + 1\cdot 10^{-3} + 2\cdot 10^{-4} \qquad \alpha_1 = 3$$

$$0.5\cdot 10^{-5} \leq 0.5\cdot 10^{-2-k+1}$$

$$-5 = -2-k+1 \Rightarrow k=4$$

- 7, 0, 0 нису сигурне јер у броју a чија је $\bar{a}$ приближна вр., уместо ових цифара могу стајати било које друге. На основу (*) важи: $0.03120700 - 0.5\cdot 10^{-5} \leq a \leq 0.03120700 + 0.5\cdot 10^{-5}$

$$0.0312\boxed{0}200 \leq a \leq 0.0312\boxed{1}200$$

- несигурне цифре можемо да „одбацимо", а последњу сигурну мењамо т.д. буде сигурна у ужем смислу.
- Заокругљивање: последња сигурна цифра α_k се не мења ако је $\alpha_{k+1} < 5$ или ако је $\alpha_{k+1} = 5$, а α_k је паран број. У свим осталим случајевима повећавамо α_k за 1.

$\boxed{3}$

~ Веза између броја сигурних цифара (k) и релативне грешке броја ($\delta(\bar{a})$) ~

$$\boxed{\frac{\omega}{(\alpha_1+1)\cdot 10^k} \leq \delta(\bar{a}) \leq \frac{\omega}{\alpha_1\cdot 10^{k-1}}}, \quad \omega\in(0,1]$$

- α_1 - прва сигурна цифра броја a

Доказ

Крећемо од дефиниције: $\Delta(\bar{a}) \leq \omega\cdot 10^{n-k+1}$ (важи јер је α_k сигурна цифра, а α_{k+1} није, па важи: $\omega\cdot 10^{n-k} < \Delta(\bar{a})$).

$$\omega\cdot 10^{n-k} < \Delta(\bar{a}) \leq \omega\cdot 10^{n-k+1} \quad /:|\bar{a}|$$

$$\frac{\omega\cdot 10^{n-k}}{\alpha_1\cdot 10^n + \ldots + \alpha_k\cdot 10^{n-k+1}} < \frac{\Delta(\bar{a})}{|\bar{a}|} \leq \frac{\omega\cdot 10^{n-k+1}}{\alpha_1\cdot 10^n + \ldots + \alpha_k\cdot 10^{n-k+1}} \Rightarrow$$

- $\alpha_1\cdot 10^n \leq \alpha_1\cdot 10^n + \underbrace{\ldots + \alpha_k\cdot 10^{n-k+1}}_{<10^n \text{ (иначе би се цифра из } \alpha_1 \text{ повећала)}} < \alpha_1\cdot 10^n + 10^n = (\alpha_1+1)\cdot 10^n$

$$\Rightarrow \frac{\omega \cdot 10^{n-k}}{(\alpha_1+1)\cdot 10^{k}} < \delta(\bar{a}) \le \frac{\omega \cdot 10^{n-k+1}}{\alpha_1 \cdot 10^{n}}$$

$$\frac{\omega}{(\alpha_1+1)\cdot 10^{k}} \le \delta(\bar{a}) \le \frac{\omega}{\alpha_1 \cdot 10^{k-1}}.$$

* $\delta(\bar{a}) = \frac{\omega}{\alpha_1} \cdot 10^{-k+1}$

пример $a = 0.03120700$, $\Delta(\bar{a}) = 0.5 \cdot 10^{-5}$

$\bar{a} = 0.03121$, $\delta(\bar{a}) = ?$

$$\delta(\bar{a}) = \frac{\Delta(\bar{a})}{|\bar{a}|} \approx \frac{\omega}{\alpha_1} \cdot 10^{-k+1}$$

$$\delta(\bar{a}) = \frac{0.5}{3} \cdot 10^{-4+1} = \underset{(1)}{0.167} \cdot 10^{-3} \overset{(2)}{=} 1.67 \cdot 10^{-4}$$

- ако трапимо обрнуто (колико је k), тада ако је (1) између 0 и 1 и (2) записујемо као $-k+1$.

[4] ~ Стабилни и нестабилни алгоритми ~

* Ако се рачунска грешка не акумулира, кажемо да је нумерички алгоритам стабилан. Иначе, је нестабилан и због акумулирања рачунске грешке се јавља велика грешка коначног резултата.

пример Израчунати $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+10} dx$, $n = 0, 1, 2, \dots$

I начин рекурентна ф-ла

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n + 10x^{n-1} - 10x^{n-1}}{x+10} dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+10)}{x+10} dx - 10\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+10} dx =$$

$$= \frac{x^n}{n}\Big|_0^1 - 10 I_{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{1}{n} - 10 I_{n-1}$$

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+11} dx = \ln|x+11|\Big|_0^1 = \ln 11 - \ln 10 = \ln\frac{11}{10} = \ln 1.1$$

- I_0 је израчунат са грешком, I_1 са још већом грешком...
- нестабилан алгоритам

II начин Тејлоров ред

$$\frac{x^n}{x+10} = \frac{x^n}{10\left(1+\frac{x}{10}\right)} = 0.1\cdot x^n\left(1+\frac{x}{10}\right)^{-1} = 0.1\cdot x^n\left(1-\frac{x}{10}+\frac{x^2}{100}-\ldots\right)$$

$$\int_0^1 0.1x^n\left(1-\frac{x}{10}+\frac{x^2}{100}-\ldots\right)dx = 0.1\int_0^1\left(x^n-\frac{x^{n+1}}{10}+\frac{x^{n+2}}{100}-\ldots\right)dx$$

- алгоритам је стабилан
- ред брзо конвергира па се постиже задовољавајућа тачност

пример $x^2-140x+1=0$, $x_2 = 70-\sqrt{4899}$

- $x_2 \approx 70-69.99 = \underset{\overline{x_2}}{0.01}$ → има 1 сигурну цифру а имали смо 4 (69.99)

  релативна грешка је $\delta(\overline{x}_2)=1=100\%$

  - алгоритам је нестабилан

- стабилан алгоритам – рационализација:

$$70-\sqrt{4899}\cdot\frac{70+\sqrt{4899}}{70+\sqrt{4899}} = \frac{70^2-4899}{70+69.99} = \frac{1}{140.0} = \underbrace{0.007143}_{\text{4 сигурне цифре}} = \overline{x}_2$$

$$\delta(\overline{x}_2) = \frac{1}{7}\cdot 10^{-4+1} = 0.14\cdot10^{-3} = 1.4\cdot10^{-4}$$

$\boxed{5}$ ~ Грешке приближних вредности ф-ја ~

* Нека је y ф-ја параметара $(a_1,\ldots,a_n)\in G$, $y=y(a_1,\ldots,a_n)$, и нека је $\overline{y}$ приближна вр. за y.

деф Апсолутна грешка величине $\overline{y}$ је:

$$A(\overline{y}) = \sup\left|y(a_1,\ldots,a_n)-\overline{y}\right|,$$

а релативна грешка је:

$$\delta(\overline{y}) = \frac{A(\overline{y})}{|\overline{y}|}.$$

- ако је област G n-димензиони правоугаоник,

  $G=\{(a_1,\ldots,a_n) \mid |a_k-\overline{a}_k|\le\Delta(\overline{a}_k),\ k=\{1,\ldots,n\}\}$, $\overline{y}=y(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n)$

  и ако је y непрекидно дифер. ф-ја својих аргумената, према Лагранжовој теореми о средњој вредности је:

$$y(a_1,\dots,a_n)-\bar{y} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial a_k} \underbrace{(\bar{a}_1 + \underbrace{\theta}_{\in[0,1]}(a_1-\bar{a}_1), \dots, \bar{a}_n + \theta(a_n-\bar{a}_n))}_{c_1}(a_k-\bar{a}_k)$$

$$\Rightarrow \Delta(\bar{y}) \le \sum_{k=1}^{n} \sup_{c_1} \left| \frac{\partial y}{\partial a_k}(a_1,\dots,a_n) \right| \Delta(\bar{a}_k)$$, апроксимацијом добијамо:

Деф Линеарна оцена апсолутне грешке ф-је, $\Delta(\bar{y})$, је:

$$\Delta(\bar{y}) = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n) \right| \Delta(\bar{a}_k)$$

$\boxed{6}$

Теорема Линеарна оцена апс. грешке збира или разлике бројева је једнака збиру апс. грешака тих појединачних бројева.

Доказ

$y = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_k a_k + \dots + \mu_n a_n$, $\mu_i \in \{-1, 1\}$. Користимо претходну дефиницију. $\frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n) = \mu_k$.

$$\Delta(\bar{y}) = \sum_{k=1}^{n} |\mu_k| \Delta(\bar{a}_k) = \sum_{k=1}^{n} \Delta(\bar{a}_k).$$

∟

Теорема Релативна грешка производа или количника приближних бројева једнака је збиру релативних грешака тих појединачних аргумената.

Доказ

$y = a_1^{e_1} \cdot a_2^{e_2} \cdot \dots \cdot a_k^{e_k} \cdot \dots \cdot a_n^{e_n}$, $e_i \in \{-1, 1\}$. Користимо претх. дефиницију. $\frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n) = \bar{a}_1^{e_1} \cdot \dots \cdot e_k \bar{a}_k^{e_k-1} \cdot \dots \cdot \bar{a}_n^{e_n} =$

$$= e_k \frac{\bar{a}_1^{e_1} \cdot \dots \cdot \bar{a}_k^{e_k} \cdot \dots \cdot \bar{a}_n^{e_n}}{\bar{a}_k} = \frac{e_k}{\bar{a}_k} \cdot \bar{y} \Rightarrow \Delta(\bar{y}) = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{e_k \cdot \bar{y}}{\bar{a}_k} \right| \cdot \Delta(\bar{a}_k) \; / : \bar{y}$$

$$\Rightarrow \delta(\bar{y}) = \frac{\Delta(\bar{y})}{\bar{y}} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{\Delta(\bar{a}_k)}{|\bar{a}_k|}}_{=\delta(\bar{a}_k)}.$$

∟

7 ~ Обратан проблем грешке ~

* Подразумева налажење граница допустивих грешака аргумената при којима грешка ф-је не прелази дозвољену вредност.
* Задатак је једнозначно решив само за ф-ју једног аргумента $y = y(a)$. Ако y зависи од више аргумената, $y = y(a_1, \dots, a_n)$, онда се задавањем грешке ф-је задаје само једна веза између n непознатих $\Delta(\bar{a}_1), \dots, \Delta(\bar{a}_n)$

$$y = y(a) \quad , \quad y = \bar{y} + y'(\xi)(a - \bar{a}) \quad , \quad \xi = \bar{a} + \theta(a - \bar{a}) \quad , \quad \theta \in [0,1]$$

$$|a - \bar{a}| = \left| \frac{y - \bar{y}}{y'(\xi)} \right| \Rightarrow \Delta(\bar{a}) = \frac{\Delta(\bar{y})}{y'(\bar{a})} \text{, за } \theta = 0$$

* Ако је задата линеарна оцена апсолутне грешке ф-је $\Delta(\bar{y}) = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \right| \Delta(\bar{a}_k)$, додатни услови које апсолутне грешке аргумената треба да задовољавају се дефинишу на сл. начине:

1. Принцип једнаких утицаја:

$$\left| \frac{\partial y}{\partial a_1}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \right| \Delta(\bar{a}_1) = \dots = \left| \frac{\partial y}{\partial a_n}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \right| \Delta(\bar{a}_n)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta(\bar{y}) = n \left| \frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \right| \Delta(\bar{a}_k)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta(\bar{a}_k) = \frac{\Delta(\bar{y})}{n \left| \frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \right|} \quad , \quad k = \overline{1,n}$$

2. Принцип једнаких апсолутних грешака:

$$\Delta(\bar{a}_1) = \dots = \Delta(\bar{a}_n)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta(\bar{y}) = \Delta(\bar{a}_j) \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \right|$$

$$\Rightarrow \quad \Delta(\bar{a}_j) = \frac{\Delta(\bar{y})}{\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \right|} \quad , \quad j = \overline{1,n}$$

3. Принцип једнаких релативних грешака:

$$\delta(\bar{a}_1) = \dots = \delta(\bar{a}_n) \quad , \quad \delta(\bar{a}_k) = \frac{\Delta(\bar{a}_k)}{|\bar{a}_k|}$$

$$\Rightarrow \Delta(\bar{y}) = \sum_{k=1}^{n} \left| \bar{a}_k \cdot \frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \right| \cdot \frac{\Delta(\bar{a}_k)}{|\bar{a}_k|} = \frac{\Delta(\bar{a}_j)}{|\bar{a}_j|} \sum_{k=1}^{n} \left| \bar{a}_k \cdot \frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \right|$$

$$\Rightarrow \quad \Delta(\bar{a}_j) = \frac{\Delta(\bar{y}) \cdot |\bar{a}_j|}{\sum_{k=1}^{n} \left| \bar{a}_k \frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \right|} \quad , \quad j = \overline{1,n}$$

11.10.2019.

II Интерполација

$\boxed{8}$

* Некада је неопходно заменити ф-ју $f(x)$ приближном ф-јом $g(x)$:

$$f(x) \approx g(x) \rightarrow g(x) \text{ апроксимира ф-ју } f(x)$$

Оптимална блискост ф-ја $f(x)$ и $g(x)$ се достиже одговарајућим избором слободних параметара $(c_0, \ldots, c_n)$ ф-је $g(x)$. Ако је $g(x)$ линеарна ф-ја, апроксимација је линеарна:

$$g(x) = c_0\phi_0(x) + \ldots + c_n\phi_n(x)$$, $\phi_i(x)$ - линеарно независне ф-је које чине основни систем ф-ја

- $\{\phi_i\}_{i=1} := \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ – алгебарски полином степена n
  $:= \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx\}$ – тригонометријски полином реда n

* Уколико се постави захтев да је $g(x_k) = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$, онда се такав облик апроксимације назива интерполација.
  - $\{x_i\}_{i=1}^{n} \rightarrow$ чворови мреже тј. интерполације

$\boxed{9}$ ~ Интерполациони полином Лагранжа ~

* Ако је у $g(x) = c_0\phi_0(x) + \ldots + c_n\phi_n(x)$, $\phi_k(x) = x^k$, $k = \overline{0,n}$, онда се интерполациона ф-ја $g(x)$ назива интерполационим полиномом:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

Теорема Постоји јединствено одређен полином $L_n(x)$ степена n који у $(n+1)$-ој различитој тачки x_k, $k=\overline{0,n}$ задовољава услове:

$$\underbrace{L_n(x_k) = f(x_k)}_{\text{услов интерполације}}, \quad k = \overline{0,n}$$

доказ →

Доказ

• Јединственост: Ппс, нека постоје $L_n^1(x)$ и $L_n^2(x)$ и нека оба задовољавају услов интерполације: $L_n^1(x_k) = L_n^2(x_k) = f(x_k)$.

$P_n(x) = L_n^1(x) - L_n^2(x)$. $P_n(x_k) = L_n^1(x_k) - L_n^2(x_k) = 0$ (јер важи), $k = \overline{0,n}$

$\Rightarrow P_n(x_k) = 0$, $k=\overline{0,n}$ ↯ (значи да имамо $n+1$ нулу полинома степена n)

• Постојање: $L_n(x) = ?$, $l_i(x)$, $i = \overline{0,n}$ је базни полином степена n

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad l_i(x) = a_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)$$

водећи коеф. (ax^2+bx+c
$a(x-x_1)(x-$

$$l_i(x_i) = 1 = a_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j) \Rightarrow a_i = \frac{1}{\prod_{j=0}^{n} (x_i - x_j)}$$

$$\Rightarrow \boxed{l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}.$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot f(x_i), \quad x = x_k \Rightarrow L_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{l_i(x_k)}_{i=k}^{1} \cdot f(x_i) = f(x_k)$$

$$\Rightarrow \boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \cdot f(x_i)}$$ интерполациони полином Лагран

* Уводимо ознаку: $\omega_{n+1} = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$

$$\Rightarrow \omega_{n+1}'(x) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \Rightarrow \omega_{n+1}'(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)$$

$$\Rightarrow l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)}{\underbrace{(x-x_i)}_{} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\cdot \omega_{n+1}'(x)}$$

јер је за горњи производ $j \neq i$

$$\Rightarrow \boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\cdot \omega_{n+1}'(x)} \cdot f(x_i)}$$

10 ~ Грешка полиномијалне интерполације ~

* Грешка полиномијалне интерполације у тачки x је разлика вредности ф-је и интерполационог полинома у тој тачки: $f(x) - L_n(x)$

Теорема Ако је ф-ја $f(x)$ диференцијабилна и то $n+1$ пута, $f^{(n+1)}(x)$, тада за сваки аргумент $\bar{x}$ постоји тачка ξ која припада минималном интервалу који садржи све тачке $x_0, \dots, x_n, \bar{x}$ и тако да важи:

$$\boxed{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(\bar{x})}, \quad \omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

шоминант полином

Доказ

$f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(\bar{x})$. Пп да $\bar{x}$ није чвор, $\bar{x} \neq x_j$, $j = \overline{0,n}$.

$F(x) = f(x) - L_n(x) - k \cdot \omega_{n+1}(x)$, $\bar{x}$ је нула од $F(x)$;

$$0 = F(\bar{x}) = f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) - k \cdot \omega_{n+1}(\bar{x}) \Rightarrow k = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\omega_{n+1}(\bar{x})} \quad (*)$$

$x_0, \dots, x_n$: $F(x_k) = \cancel{f(x_k)} - \underbrace{\cancel{L_n(x_k)}}_{f(x_k)} - \underbrace{k \cdot \omega_{k+1}(x_k)}_{\text{јер је } x_k \text{ чвор}}^{\to 0} \Rightarrow F(x_k) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0, \dots, x_n, \bar{x}$ су нуле од $F(x)$ (има их $n+2$).

Ролова тм: $f(a) = f(b)$, ф-ја је непр. и дифер. $\Rightarrow \exists c$ т.д. $f'(c) = 0$.

тј. између сваке две нуле постоји нула извода:

F' има $n+1$ нула; F'' их има n; $\dots$; $F^{(n+1)}$ има 1 нулу ξ.

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \underbrace{L_n^{(n+1)}(x)}_{\text{јер је извод већи од степена}}^{\to 0} - k \cdot \underbrace{\omega_{n+1}^{(n+1)}(x)}_{=(x^{n+1} + P_n(x))^{(n+1)} = (x^{n+1})^{(n+1)} = (n+1)!} = f^{(n+1)}(x) - k \cdot (n+1)!$$

$$\Rightarrow F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! \Rightarrow k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (**)$$

$$\overset{(*)(**)}{\Longrightarrow} f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(\bar{x}).$$

* $|f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(\bar{x})|$, $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|$, $x \in [x_0, x_n]$

Пример Интерполационим полиномом другог степена одређеним тачкама (100, 10), (121, 11) и (144, 12) израчунај приближну вредност ф-је $f(x) = \sqrt{x}$ за $x = 115$ и оцени тачност добијеног решења.

x_i	100	121	144
f_i	10	11	12

$$L_2(x) = \frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)} \cdot 10 + \frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)} \cdot 11 + \frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)} \cdot 12 =$$

$$= -0.00009411\,x^2 + 0.06842\,x + 4.099$$

$$L_2(115) = 10.723$$

$$|f(115) - L_2(115)| \le \frac{M_3}{6} |(115-100)(115-121)(115-144)| = 0.16 \cdot 10^{-12}$$

- $(\sqrt{x})''' = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$
- $M_3 = \left|\frac{3}{8\sqrt{x^5}}\right| =$ (добија се за $x = 100$) $= 0.375 \cdot 10^{-5}$

~ Интерполациони полином Њутна са подељеним разликама ~

* Лагранжов интер. полином се може записати и у другом облику који указује да се овај полином може сматрати уопштењем парцијалне суме Тејлоровог реда.

$\boxed{M}$

* Подељена разлика:

$f[x_0] = f(x_0)$ – 0. реда

$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ – 1. реда

$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$ – 2. реда

...

$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$ – n. реда

Лема Подељене разлике реда k се преко вредности ф-је у чворовима изражавају на сл. начин:

$$\boxed{f[x_0,\dots,x_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k} (x_i - x_j)}}.$$

Доказ

1° $k=1$: $f[x_0,x_1] = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \dfrac{f(x_0)}{x_0-x_1} + \dfrac{f(x_1)}{x_1-x_0} = \sum\limits_{i=0}^{1} \dfrac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{1} (x_i-x_j)}$ ✓

2° ИХ: знамо да важи за $k=n-1$. Треба доказати за $k=n$:

$$f[x_0,\dots,x_n] = \frac{f[x_1,\dots,x_n]-f[x_0,\dots,x_{n-1}]}{x_n-x_0} \overset{ИХ}{=} \frac{1}{x_n-x_0}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)} - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1}(x_i-x_j)}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_n-x_0}\cdot\frac{f(x_n)}{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(x_n-x_j)} + \frac{1}{x_n-x_0}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)} - \frac{1}{x_n-x_0}\cdot\frac{f(x_0)}{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(x_0-x_j)} - \frac{1}{x_n-x_0}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1}(x_i-x_j)} =$$

$$= \frac{f(x_0)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(x_0-x_j)} + \frac{1}{\cancel{x_n-x_0}}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\overset{(x_n-x_0)}{\cancel{(x_i-x_0)-(x_i-x_n)}}}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}f(x_i) + \frac{f(x_n)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1}(x_n-x_j)} = \sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}.$$

∟

*** Особине:**

1. подељена разлика је симетрична ф-ја својих аргумената (редослед чворова није битан)
2. важи линеарност: $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)[x_0,\dots,x_k] = \alpha_1 f_1[x_0,\dots,x_k] + \alpha_2 f_2[x_0,\dots,x_k]$
3.

	0. реда	1. реда	2. реда		
x_0	f_0				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	f_1		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$		$\dots$	$f[x_0,\dots,x_n]$
x_2	f_2		$f[x_1,x_2,x_3]$		
$\dots$	$\dots$		$\dots$		
		$f[x_{n-1},x_n]$			
x_n	f_n				

12 ~Њутнов интерполациони полином са подељеним разликама~

13

* Како изразити грешку интерполације преко подељених разлика?

$$(1)\quad f(x) - L_k(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{k} \frac{\omega_{k+1}(x)\cdot f(x_i)}{(x-x_i)\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}(x_i-x_j)} = f(x) - \omega_{k+1}(x)\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{(x-x_i)\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}(x_i-x_j)} =$$

$$= \omega_{k+1}(x)\left(\frac{f(x)}{\underbrace{\prod_{j=0}^{k}(x-x_j)}_{\omega_{k+1}(x)}} + \sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{(x-x_i)\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}(x_i-x_j)}\right) = (x := x_{k+1}) =$$

$$= \omega_{k+1}(x)\underbrace{\sum_{i=0}^{k+1}\frac{f(x_i)}{(x-x_i)\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}(x_i-x_j)}}_{\text{подељена разлика}} = \omega_{k+1}(x)\, f[x_0,\dots,x_k,x].$$

* Полином $L_n(x)$ може да се нађе у облику:

$$L_n(x) = L_0(x) + \underbrace{(L_1(x)-L_0(x))}_{m\text{-тог степена}} + \dots + \underbrace{(L_n(x)-L_{n-1}(x))}$$

- $L_m(x_k) - L_{m-1}(x_k) = f(x_k) - f(x_k) = 0, \quad k=\overline{0,m-1}$

  ↳ интерполациони полином одр. чворовима $x_0,\dots,x_m$

  - $x_0,\dots,x_{m-1}$ су нуле полинома $L_m(x)-L_{m-1}(x)$

    $$\Rightarrow\quad L_m(x) - L_{m-1}(x) = \underbrace{a_m}_{?}\cdot\omega_m(x), \quad \omega_m(x) = \prod_{j=0}^{m-1}(x-x_j) \qquad (3)$$

    - $x = x_m:\quad L_m(x_m) - L_{m-1}(x_m) = a_m\,\omega_m(x_m)$

    $$(2)\quad \underbrace{f(x_m) - L_{m-1}(x_m)}_{\text{греш. питање}} = a_m\,\omega_m(x_m)$$

    - у (1) за $x=x_m$, $k=m-1$: $\quad f(x_m) - L_{m-1}(x_m) = \omega_m(x_m)\cdot f[x_0,\dots,x_{m-1},x]$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow}\quad a_m = f[x_0,\dots,x_{m-1},x]$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow}\quad L_m(x) - L_{m-1}(x) = \underbrace{f[x_0,\dots,x_m]}_{m\text{-тог реда}}\ \underbrace{\omega_m(x)}_{m\text{-тог степена}}$$

- $P_n = L_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots + f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-$

  ↳ Њутнов интерполациони полином са подељеним разликама

* Веза између подељене разлике ф-је и извода ф-је:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x), \quad \xi \text{ између } x_0,\dots,x_n,x$$

$$f(x) - L_n(x) = \omega_{n+1}(x)\cdot \underbrace{f[x_0,x_1,\dots,x_n,x]}_{(n+1)\text{-ог реда}}$$

$$\boxed{f[x,x_0,\dots,x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}$$

Пример Наћи подељену разлику n-тог реда за полином k-тог степена.

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i$$

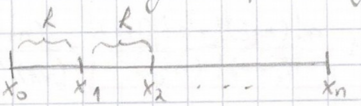
$$P_k[x_0,\dots,x_n] = \begin{cases} b_n, & k=n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \rightarrow \frac{(b_n x^n + \overset{0}{\cancel{P_{n-1}(x)}})^{(n)}}{n!} = \frac{(b_n x^n)^{(n)}}{n!} = \frac{b_n\cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = b_n$$

18.10.2019.

Њутнов интерполациони полином са коначним разликама

[14]

* захтева се да чворови буду подједнако удаљени међусобно



$$x_i = x_0 + ih, \quad i=\overline{0,n}$$

→ еквидистантна мрежа

Деф Разлика $f_{i+1} - f_i$, $f_i = f(x_i)$, се назива коначна разлика 1. реда.

$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ – коначна разлика унапред

$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ – коначна разлика уназад

$\delta f_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+1} - f_i$ – централна разлика

Деф Коначне разлике вишег реда:

$$\Delta^k f_i = \Delta(\Delta^{k-1} f_i) = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$$

$$\nabla^k f_i = \nabla(\nabla^{k-1} f_i) = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}$$

$$\delta^k f_i = \delta(\delta^{k-1} f_i) = \delta^{k-1} f_{i+\frac{1}{2}} - \delta^{k-1} f_{i-\frac{1}{2}}$$

*

$$\begin{array}{cccccc}
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & \Delta f_0 & & & \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & & \\
 & & \Delta f_1 & & \Delta^3 f_0 & \\
x_2 & f_2 & & \Delta^2 f_1 & & \dots \\
 & & \Delta f_2 & & \Delta^3 f_1 & \\
x_3 & f_3 & & \Delta^2 f_2 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & &
\end{array}$$

Лема Коначне разлике реда k се изражавају помоћу вредности ф-је у чворовима сл. формулом:

$$\boxed{\Delta^k f_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j f_{i+k-j}} \qquad C_k^j = \binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

доказ (индукцијом)

1° $k=1$: $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$

2° $k \le n \Rightarrow k = n+1$:

$$\Delta^{n+1} f_i = \Delta(\Delta^n f_i) = \Delta^n f_{i+1} - \Delta^n f_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j f_{i+1+n-j} - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j f_{i+n-j} =$$

$$= C_n^0 f_{i+n+1} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j C_n^j f_{i+1+n-j} - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_n^j f_{i+n-j} - (-1)^n C_n^n f_i =$$

$$= C_n^0 f_{i+n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} C_n^{j+1} f_{i+n-j} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} C_n^j f_{i+n-j} - (-1)^n C_n^n f_i =$$

- $C_n^0 = C_{n+1}^0 = C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1$

$$= C_{n+1}^0 f_{i+n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} (C_n^{j+1} + C_n^j) f_{i+n-j} - (-1)^n C_{n+1}^{n+1} f_i =$$

- $C_n^{j+1} + C_n^j = \frac{n!}{(j+1)!(n-j-1)!} + \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{n!(n-j)! + n!(j+1)!}{(j+1)!(n-j)!} = \frac{(n+1)!}{(j+1)!(n-j)!}$

$$= C_{n+1}^0 f_{i+n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} C_{n+1}^{j+1} f_{i+n-j} - (-1)^n C_{n+1}^{n+1} f_i =$$

$$= C_{n+1}^0 f_{i+n+1} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j C_{n+1}^j f_{i+n-(j-1)} + (-1)^{n+1} C_{n+1}^{n+1} f_i =$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j C_{n+1}^j f_{i+n-(j-1)}.$$

∟

15 (веза између подељених и коначних разлика)

Лема Ако су чворови равномерно распоређени, $x_i = x_0 + ih$, онда важи:

$$\boxed{\underbrace{f[x_i, \dots, x_{i+k}]}_{k\text{-тог реда}} = \frac{\Delta^k f_i}{h^k k!}}$$

→ најмањи индекс чворова

→ ред

доказ (индукцијом)

1° $k=1$: $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{\Delta f_i}{h \cdot 1!}$

2° $k \le n \Rightarrow k = n+1$:

$$f[x_i, \dots, x_{i+n+1}] = \frac{\underbrace{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}]}_{n\text{-тог реда}} - \underbrace{f[x_i, \dots, x_{i+n}]}_{n\text{-тог реда}}}{x_{i+n+1} - x_i} \overset{\text{их}}{=} \frac{\frac{\Delta^n f_{i+1}}{h^n n!} - \frac{\Delta^n f_i}{h^n n!}}{(n+1)h} =$$

$$= \frac{\frac{\Delta^{n+1} f_i}{h^n n!}}{(n+1)h} = \frac{\Delta^{n+1} f_i}{h^{n+1}(n+1)!}$$

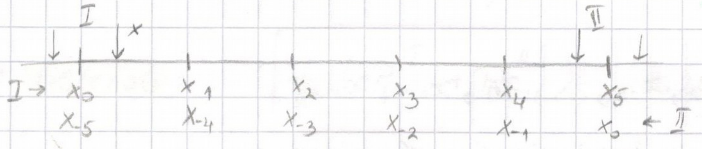
∟

* Веза између коначне разлике и извода ф-је:

$$\left.\begin{aligned} f[x_0,\dots,x_n] &= \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \\ f[x_0,\dots,x_n] &= \frac{\Delta^n f_0}{h^n n!} \end{aligned}\right\} \quad \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n} \Rightarrow \boxed{\Delta^n f_0 = h^n f^{(n)}(\xi)}$$

~ Први и Други Њутнов полином са коначним разликама ~

16



$$q = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow x = x_0 + h \cdot q$$

↳ нова пром уместо x

* Први Њутнов полином: (интерполациони полином за интерполацију унапред)

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}) =$$

$$= f(x_0) + \frac{\Delta f_0}{h^1 1!}(\cancel{x_0} + q\cdot h - \cancel{x_0}) + \frac{\Delta^2 f_0}{h^2 \cdot 2!}(qh)(\cancel{x_0} + q\cdot h - \cancel{x_0} - h) + \dots =$$

$$= \boxed{f(x_0) + q\cdot\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-(n-1))}{n!}\Delta^n f_0}$$

• образац за грешку:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x)$$

$$-\ \omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j) = \prod_{j=0}^{n}(\cancel{x_0} + q\cdot h - \cancel{x_0} - jh) = \prod_{j=0}^{n} h(q-j) = h^{n+1}\prod_{j=0}^{n}(q-j) =$$

$$= h^{n+1}\cdot q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-n)$$

$$\Rightarrow f(x) - L_n(x) = \frac{h^{n+1} q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$\boxed{|f(x) - L_n(x)| \le \frac{q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1} f}$$

* Други Њутнов полином: (за интерполацију уназад)

$$x_{-i} = x_0 - ih, \quad q = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow x = x_0 + qh$$

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_{-1}](x-x_0) + \dots + f[x_0,\dots,x_{-n}](x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{-(n-1)}) =$$

$$= f(x_0) + \frac{\Delta f_{-1}}{h^1 \cdot 1!}(\cancel{x_0} + q\cdot h - \cancel{x_0}) + \frac{\Delta^2 f_{-2}}{h^2 \cdot 2!}(qh)(\cancel{x_0} + qh - \cancel{x_0} + h) + \dots =$$

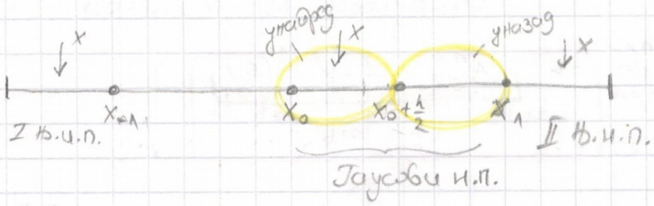
$$= \boxed{f(x_0) + q\Delta f_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 f_{-2} + \dots + \frac{q(q+1)\cdot\ldots\cdot(q+(n-1))}{n!}\Delta^n f_{-n}}$$

• образац за грешку:

$$\boxed{|f(x) - L_n(x)| \le \frac{q(q+1)\cdot\ldots\cdot(q+n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1} f}$$

25.10.2019.

17 Гаусови интерполациони полиноми



* Први Гаусов интерполациони полином: (унапред)

$x \in (x_0, x_0+\frac{h}{2}] : x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2}, \dots, x_n, x_{-n}, x_{n+1}$

$n+2+n \Rightarrow$ 2n+2 чворова ✓

$P^{I}_{2n+1}(x) = f[x_0] + f[\underset{(*)}{x_0}, \underset{(**)}{x_1}](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_{-1}](x-x_0)(x-x_1)+\dots+f[x_0,\dots,x_{n+1}](x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-$

• смена: $x = x_0+qh$, $q\in(-1,1)$

$$= \boxed{f_0 + \frac{\Delta f_0}{h\cdot 1!}\, qh + \frac{\Delta^2 f_{-1}}{h^2\cdot 2!}\, qh^2(q-1) + \dots + \frac{\Delta^{2n+1} f_{-n}}{(2n+1)!}\cdot q(q-1)(q+1)\cdot\ldots\cdot(q^2-n^2)}$$

најмањи индекс

$q-(*)$ $q-(**)$

* Други Гаусов интерполациони полином: (уназад)

$x\in[x_0+\frac{h}{2}, x_1) : x_1, x_0, x_2, x_{-1}, x_3, x_{-2}, x_4, x_{-3}, \dots, x_n, x_{-(n-1)}, x_{n+1}$

2n+2 чворова ✓

немају свој пар за разл. квадрата

$P^{II}_{2n+1}(x) = f[x_1] + f[x_1,x_0](x-x_1) + f[x_1,x_0,x_2](x-x_1)(x-x_0)+\dots+$

$+ f[x_1,\dots,x_n,x_{-(n-1)},x_{n+1},x_{-n}](x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n+1}) =$

$$= \boxed{f_1 + (q-1)\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{q(q^2-1)\cdot\ldots\cdot(q^2-(n-1)^2)(q-n)(q-(n+1))}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} f_{-n}}$$

• Други облик: $x\in[x_0-\frac{h}{2}, x_0) : x_0, x_{-1}, x_1, x_{-2}, x_2, \dots, x_{-n}, x_n, x_{-(n+1)}$

2n+2 чворова ✓

$$\boxed{P^{II_2}_{2n+1}(x) = f_0 + q\cdot\Delta f_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 f_{-1} + \dots + \frac{q(q^2-1)\cdot\ldots\cdot(q^2-n^2)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} f_{-(n+1)}}$$

25. 10. 2019.

17 Стирлингов и Беселов интерполациони полином

* **Стирлингов:** $\boxed{\frac{1}{2}\left(P^{I}_{2n+1} + P^{II_2}_{2n+1}\right), \quad |q| \le 0.25}$

$$L_{2n+1}(x_0+qh) = f_0 + q\,\frac{\Delta f_{-1} + \Delta f_0}{2} + \frac{q^2}{2!}\Delta^2 f_{-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 f_{-2} + \Delta^3 f_{-1}}{2} + \dots$$

$$+ \frac{q(q^2-1)\cdot\ldots\cdot(q^2-n^2)}{(2n+1)!}\cdot\frac{\Delta^{2n+1} f_{-(n+1)} + \Delta^{2n+1} f_{-n}}{2}$$

* **Беселов:** $\boxed{\frac{1}{2}\left(P^{I}_{2n+1} + P^{II}_{2n+1}\right), \quad 0.25 \le q \le 0.75}$

$$L_{2n+1}(x_0+qh) = \frac{f_0+f_1}{2} + \left(q-\frac{1}{2}\right)\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\cdot\frac{\Delta^2 f_{-1} + \Delta^2 f_0}{2} + \dots +$$

$$+ \frac{q(q^2-1)\cdot\ldots\cdot(q^2-(n-1)^2)(q-n)\left(q-\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)!}\cdot\Delta^{2n+1} f_{-n}$$

* Да ли су ово прави интерполациони полиноми?

- тј. да ли је аритметичка средина 2 интерп. полинома такође н.п.?
  - → да ли био прави н.п.: $L_n(x_k) = f(x_k), \ k=\overline{0,n}$

B_2 (Беселов другог степена):

$P_2^{I}: \ x_0, x_1, x_{-1}$

$P_2^{II}: \ x_0, x_1, x_2$

} нијe исти скуп чворова ✗

B_3:

$P_3^{I}: \ x_0, x_1, x_{-1}, x_2$

$P_3^{II}: \ x_0, x_1, x_2, x_{-1}$

} над истим скупом чворова ✓

⇒ Беселови непарног степена су прави интерполациони полиноми, док парног степена нису (али дају добру апроксимацију).

⇒ За Стирлингове важи обрнуто

25.1.

Други облици интерполације

1. Интерполација рационалним ф-јама

* добра за ф-је са више екстрема (пуно осцилација)

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + \dots + p_m x^m}{q_0 + q_1 x + \dots + q_n x^n} \rightarrow \text{укупно } \underline{n+m+2} \text{ непознатих коеф.}$$

$x_0, x_1, \dots, x_{m+n+1}$

$$R(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, m+n+1}$$

мора бар 1 коеф да буде разл. од 0 $\leftarrow p_0 \neq 0$ и са њим делимо и бројилац и именилац:

$$\Rightarrow \bar{R} = \frac{\bar{P}_m}{\bar{Q}_n} = \frac{1 + \bar{p}_1 x_i + \dots + \bar{p}_m x_i^m}{\bar{q}_0 + \dots + \bar{q}_n x_i^n} = f(x_i), \quad \bar{R}(x_i) = f(x_i), \ i = \dots$$

$$\Rightarrow \underbrace{1 + \bar{p}_1 x_i + \dots + \bar{p}_m x_i^m = f(x_i) \cdot (\bar{q}_0 + \dots + \bar{q}_n x_i^n)}_{\text{систем ј-на}}, \quad i = \overline{0, m+n}$$

2. Интерполација тригонометријским ф-јама

* ако је ф-ја периодична
* Ф-ла Хермита: $f(x) \sim \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\sin(x - x_j)}{\sin(x_i - x_j)} \right) f(x_i)$
* Ф-ла Гауса: $f(x) \sim \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\sin \frac{1}{2}(x - x_j)}{\sin \frac{1}{2}(x_i - x_j)} \right) f(x_i)$

тригоном. полином

* $Q_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $2n+1$ коеф./услова интерп.

* $f(x_i) = Q_n(x_i)$, $i = \overline{0, 2n}$ * $\quad 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < 2\pi$

$$\left.\begin{aligned} f(x_0) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) \\ f(x_1) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_1 + b_k \sin kx_1) \\ &\ \vdots \\ f(x_{2n}) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_{2n} + b_k \sin kx_{2n}) \end{aligned}\right\} \text{систем алгебарских једначина}$$

- непознате су a_0, a_k, b_k, $k = \overline{1, n}$
- детерминанта система:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cdots & \cos nx_0 & \sin nx_0 \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cdots & \cos nx_1 & \sin nx_1 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \cdots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} \end{vmatrix} \neq 0 \ !$$

* Гаус: $(-1)\,Q_n(x)+a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=0$

$$(-1)\,f(x_0)+a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0)=0$$

$$\vdots$$

$$(-1)\cdot f(x_{2n})+a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx_{2n}+b_k\sin kx_{2n})=0$$

- $2n+2$ једначине
- хомоген систем
- непознате: a_0, a_k, b_k, $k=\overline{1,n}$, (-1) — заправо познати

има их $2n+2$

- det система $\neq 0$ => решење је јединствено
  => решење је тривијално, $0,0,\dots,0$
  - Имамо решење које није тривијално, (-1) => det система $=0$.

$$\begin{vmatrix} Q_n(x) & 1 & \cos x & \sin x & \cdots & \cos nx & \sin nx \\ f(x_0) & 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cdots & \cos nx_0 & \sin nx_0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ f(x_{2n}) & 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \cdots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} \end{vmatrix}=0.$$

→ када се детерминанта развије по првој колони и изрази се $Q_n(x)$, добијамо Гаусов тригоном. интерп. полином.

18

3. Инверзна интерполација

* имамо вр. ф-је али немамо вр. аргумената

1° таблица није еквидистантна → Лагранжев интерп. полином
(било каква је)

x_0	x_1	$\dots$ $x?$	x_n
f_0	f_1	$\dots$ y	f_n

инвертује се таблица:

f_0	f_1	$\dots$ y	f_n
x_0	x_1	$\dots$ x	x_n

$L_n(y)=x$

2° коначне разлике - таблица је еквидистантна → I/II Њутнов инт. полином

$$P^{I}=f_0+q\Delta f_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\dots+\frac{q(q-1)\cdots(q-(n-1))}{n!}\Delta^n f_0$$

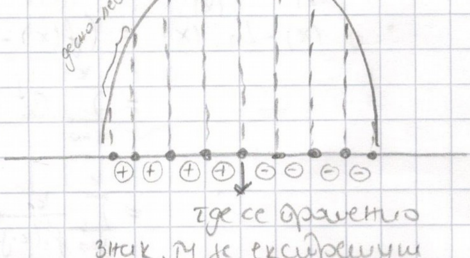
$$\Rightarrow q_{k+1}=\frac{1}{\Delta f_0}\Big(\underbrace{P^{I}}_{y}-f_0-\frac{q_k(q_k-1)}{2!}\Delta^2 f_0-\dots+\frac{q_k(q_k-1)\cdots(q_k-(n-1))}{n!}\Delta^n f_0\Big)$$

$q=?$, $x=x_0+qh$

3° тражимо екстремне вр. ф-је

$(P^{I \text{ или } II})'=0$ инверзна интерполација

- колоне коначних разлика
- коначна разлика реда 1 мења свој знак (апроксимира први извод: $\Delta f\sim f'$)



где се промени знак, ту је екстремум

19 — 21.11.2019.

Нумеричко диференцирање

=> користи се када је ф-ју тешко диференцирати аналитички или ако је она задата таблеарно

• $f^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x)$, $L_n(x)$ – интерполациони полином одр. чворовима $x_0,\dots,x_n$

↓

ове ф-ле имају једноставнији облик ако се користе за израчунавање приближне вр. извода ф-је у чвору

Пример

$$f'(x_0) \approx \overset{L_n'(x_0)}{\left(\frac{d}{dx}L_n(x)\right)_{x=x_0}} = \left(\text{користимо I Њ.и.п.: } q=\frac{x-x_0}{h} \xrightarrow{x=x_0} q=0\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dq}\left(f_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}\, q(q-1)\cdots(q-j+1)\Delta^j f_0\right)\underbrace{\frac{dq}{dx}}_{\frac{1}{h}}\right)_{q=0} =$$

• $$\frac{d}{dq}\left(q(q-1)\cdots(q-j+1)\right) = \left(\underbrace{(q-1)\cdots(q-j+1)}_{\text{остаје}} + \overbrace{q(q-2)\cdots(q-j+1)}^{=0} + \dots + \overbrace{q(q-1)\cdots(q-j+2)}^{=0}\right)_{q=0}$$

$$= (-1)(-2)\cdots(-j+1) = \underbrace{(-1)^{j-1}(j-1)!}$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta^j f_0}{j!}(-1)^{j-1}(j-1)! = \boxed{\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}\Delta^j f_0}{j}}$$

• ако користимо II Њ.и.п.:

$$f'(x_0) \approx L_n'(x_0) = \left(\frac{d}{dx}L_n(x)\right)_{x=x_0} = \left(q=\frac{x-x_0}{h} \xRightarrow{x=x_0} q=0\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dq}\left(f_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}\, q(q+1)\cdots(q+j-1)\Delta^j f_{-j}\right)\frac{dq}{dx}\right)_{q=0} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta^j f_{-j}}{j}}$$

(1) • за $\underline{n=1}$: $$f'(x_0) = \frac{\Delta f_0}{h} = \frac{f_1-f_0}{h} = \underbrace{\frac{\overbrace{f(x_1)}^{\pm\varepsilon_1} - \overbrace{f(x_0)}^{\pm\varepsilon_2}}{h}}_{\text{грешка рачуна } R_2}$$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 < E$ (грешка овде је $\frac{2E}{h}$)

~ Грешка нумеричког диференцирања ~
(методе)

Деф Грешка методе, која се добија диференцирањем интерполационог полинома, једнака је одговарајућем изводу грешке интерполације.

• $$f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x) = \left(f(x)-L_n(x)\right)^{(k)} = \left(f[x,x_0,\dots,x_n]\cdot\omega_{n+1}(x)\right)^{(k)} = \left(\text{Лајбницова ф-ла за извод производа}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} C_k^j \underbrace{\left(f[x,x_0,\dots,x_n]\right)^{(j)}}_{(*)}\cdot\underbrace{\omega_{n+1}^{(k-j)}(x)}_{\text{ово је најважнији део \ утиче на тачност}} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{\cancel{j!}(k-j)!}\cdot\cancel{j!}\cdot f[\underbrace{x,\dots,x}_{j+1},\underbrace{x_0,\dots,x_n}_{n+1}]\cdot\omega_{n+1}^{(k-j)}(x) = \left(\text{веза подељене разлике и извода}\right) =$$

$$= \boxed{\sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!} \cdot \frac{f^{(n+j+1)}(\xi)}{(n+j+1)!} \cdot \omega_{n+1}^{(k-j)}(x)} \quad (2) \quad , \xi \in [x,\dots,x, x_0,\dots,x_n]$$

(*) Нова ф-ја $\overset{\text{смена}}{}$ (подељена разлика): $g[x] = g(x) = f[x, x_0, \dots, x_n]$

Правимо низ тачака: $x,\ x+\varepsilon,\ x+2\varepsilon, \dots, x+j\varepsilon$

$$\underbrace{g[x, x+\varepsilon, \dots, x+j\varepsilon]}_{j+1} = (\text{веза између извода и подељене разлике}) = \frac{g^{(j)}(\xi_\varepsilon)}{j!}, \quad \xi_\varepsilon \in [x, \dots, x+j\varepsilon]$$

$\varepsilon \to 0$: (интервал постаје 1 тачка)

$$\underbrace{g[\overbrace{x, x, \dots, x}^{j+1}]}_{\text{оваква подељена разлика није дефинисана}} = \frac{g^{(j)}(x)}{j!}$$

$\frac{0}{0}$

$$\Rightarrow \quad g^{(j)}(x) = j! \cdot g[\underbrace{x, \dots, x}_{j+1}]$$

Враћамо смену: $\left(f[x, x_0, \dots, x_n]\right)^{(j)} = j! \cdot f[\underbrace{x, \dots, x}_{j+1}, \underbrace{x_0, \dots, x_n}_{n+1}]$

* Оцена грешке:

апроксимација извода

- $\left|f^{(k)} - L_n^{(k)}\right| \le \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!(n+j+1)!} \cdot M_{n+j+1} \left|\omega_{n+1}^{(k-j)}(x)\right|$

  - $M_{n+j+1} = \max_{[y_1, y_2]} \left|f^{(n+j+1)}(x)\right|$, $\quad y_1 = \min\{x_0, \dots, x_n, x\}$, $\quad y_2 = \max\{x_0, \dots, x_n, x\}$

  - $\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - \underset{x_0+jh}{x_j}) = (\text{смена: } x = x_0 + gh) = \prod_{j=0}^{n} (x_0 + gh - x_0 - jh) =$

    $= \prod_{j=0}^{n} h(g-j) = h^{n+1} \prod_{j=0}^{n} (g-j) \Rightarrow \omega_{n+1}(x) = O(h^{n+1})$

- $f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x) = O(h^{n+1-k})$ → диференцирање смањује ред тачности за 1

[20] ~ Укупна грешка нумеричког диференцирања ~

$$R = \underset{\text{грешка методе}}{R_1} + \underset{\text{грешка рачуна}}{R_2}$$

* За $x = x_0$, $k=1$, $n=1$ (из (1)):

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} f'(x_0) - L_n'(x_0) = \sum_{j=0}^{1} \frac{f^{(n+j+1)}(\xi)}{(1-j)!\,(n+j+1)!}\, \overbrace{\omega_{n+1}^{(1-j)}(x_0)}^{\text{за } j=1 \text{ овај сабирак је једнак нули}} \overset{j=0}{=} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot \omega_{n+1}'(x_0) =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \prod_{j=1}^{n} (x_0 - x_j)$$

$$|f'(x_0) - L_1'(x_0)| = \left| \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot \underbrace{(-h)}_{-(x_1-x_0)} \right| \le \frac{M_2 h}{2}$$ грешка методе

• За (1): $|R| = |R_1 + R_2| \le |R_1| + |R_2| \le \frac{M_2 h}{2} + \frac{2E}{h} = r(h)$

није универзално (важи за овај пример)

* Како наћи оптимално h тако да грешка R буде што мања?

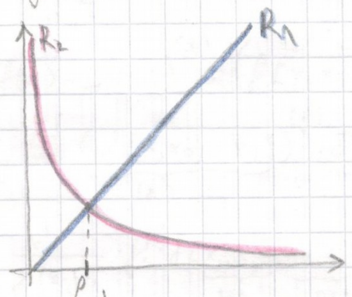
→ Тражимо извод по h и изједначавамо га са нулом.

$$r_h' = \frac{M_2}{2} - \frac{2E}{h^2} = 0 \Rightarrow \frac{M_2}{2} = \frac{2E}{h^2} \Rightarrow M_2 h^2 = 4E$$

$$\Rightarrow h_{opt} = \sqrt{\frac{4E}{M_2}} = 2\sqrt{\frac{E}{M_2}}$$ оптимални корак

$$\Rightarrow r(h) = r\left(2\sqrt{\frac{E}{M_2}}\right) = \dots = 2\sqrt{E M_2}$$ оптимална грешка (овим добијамо број сигурних цифара)

- смањивањем корака испод оптималне вредности, укупна грешка се повећава јер расте рачунска грешка
- повећавањем корака изнад оптималне вредности, укупна грешка се повећава јер расте грешка методе



III **Нумеричка интеграција** 01.11.2019.

→ користи се када није могуће изразити интеграл помоћу елементарних ф-ја

* Формуле за нумеричку интеграцију – **квадратурне ф-ле** – се обично добијају заменом подинтегралне ф-је неком њој блиском ф-јом чији се интеграл релативно лако може израчунати.

$$I(f)=\int_a^b p(x)f(x)\,dx\,,\quad p(x)\in \overset{\text{непрекидна}}{C[a,b]}\ \rightarrow \text{тежинска ф-ја (најчешће је једнака 1)},\quad p(x)\geq 0$$

21 ~Њутн-Котесове квадратурне ф-ле~

⇒ ф-ју f замењујемо Лагранжевим интерп. полиномом $L_n(x)$

$$f\approx L_n(x)\,,\quad f(x)=L_n(x)+R_n(x)$$

$$I(f)=\underbrace{\int_a^b p(x)L_n(x)\,dx}+\underbrace{\int_a^b p(x)R_n(x)\,dx}=\underbrace{S_n(f)}_{\text{квадратурна ф-ла}}+\underbrace{R_n(f)}_{\text{грешка ф-ле}}$$

$$\underline{\underline{S_n(f)}}=\int_a^b p(x)\overbrace{\sum_{i=0}^{n}\Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\Big)f(x_i)}^{L_n(x)}dx\,,\quad \overset{x}{(a,b)}\rightarrow\overset{t}{(-1,1)}$$

смена: $x_i=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t_i$ → добили смо смену: $x=pt+q$, $t\in\{-1,1\}$; $a=-p+q$, $b=p+q$

$dx=\frac{b-a}{2}t$

$$L_n(x)=L_n\Big(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t\Big)=\sum_{i=0}^{n}\Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}\frac{\cancel{\frac{b+a}{2}}+\frac{b-a}{2}t-\cancel{\frac{b+a}{2}}-\frac{b-a}{2}t_j}{\cancel{\frac{b+a}{2}}+\frac{b-a}{2}t_i-\cancel{\frac{b+a}{2}}-\frac{b-a}{2}t_j}\Big)\cdot f(x_i)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{t-t_j}{t_i-t_j}\Big)f(x_i)$$

↳ Лагранжов полином је инваријантан у односу на линеарну смену

$$\Rightarrow\ \underline{S_n(f)}=\int_{-1}^{1}\bar p(t)\sum_{i=0}^{n}\Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{t-t_j}{t_i-t_j}\Big)f(x_i)\cdot\frac{b-a}{2}dt=$$

$$=\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\Big(\int_{-1}^{1}\bar p(t)\cdot\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{t-t_j}{t_i-t_j}\,dt\Big)f(x_i)=\boxed{\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}C_i f(x_i)}$$

коефицијенти квадратурне ф-ле Њутн-Котесовог типа

Њутн-Котесова ф-ла

• $R_n(f) = \int_a^b p(x)\, R(x)\, dx = \int_a^b p(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x)\, dx$

- користимо исту смену
- $\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) = \prod_{j=0}^{n} \left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t - \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} t_j \right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \prod_{j=0}^{n} (t - t_j) =$

$= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \cdot \bar{\omega}_{n+1}(t)$

$\Rightarrow R_n(f) = \int_{-1}^{1} \bar{p}(t) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \cdot \bar{\omega}_{n+1}(t) \cdot \frac{b-a}{2}\, dt =$

$= \boxed{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+2} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_{-1}^{1} \bar{p}(t) \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot \bar{\omega}_{n+1}(t)\, dt}$ грешка Њутн-Котесове ф-ле

$|R_n| \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+2} \cdot \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_{-1}^{1} |\bar{p}(t) \cdot \bar{\omega}_{n+1}(t)|\, dt$

21 ~ Особине Њутн-Котесове формуле ~

$\bar{p}(-t) = \bar{p}(t)$

Лема 1 Ако је тежинска ф-ја $\bar{p}(t)$ парна у односу на средину интервала $[a,b]$, а чворови симетрично распоређени у односу на средину интервала, $t_k = -t_{n-k}$, онда су коефицијенти који одговарају симетричним чворовима једнаки тј. $C_k = C_{n-k}$.

доказ

$C_k = \int_{-1}^{1} \bar{p}(t) \cdot \frac{\bar{\omega}_{n+1}(t)}{(t - \underbrace{t_k}_{симетрични}) \bar{\omega}'_{n+1}(t_k)}\, dt = \left(\text{смена: } \begin{matrix} t = -\tau \\ dt = -d\tau \end{matrix} \right) = \int_{1}^{-1} \bar{p}(-\tau) \frac{\bar{\omega}_{n+1}(-\tau)}{(-\tau + t_{n-k}) \cdot \bar{\omega}'_{n+1}(-t_{n-k})} (-d\tau) =$

$= \int_{-1}^{1} \bar{p}(-\tau) \frac{\bar{\omega}_{n+1}(-\tau)}{(-\tau + t_{n-k}) \cdot \bar{\omega}'_{n+1}(-t_{n-k})}\, d\tau =$

• $\bar{\omega}_{n+1}(t) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} (t^2 - t_i^2), & n\text{-непарно (ф-ја је парна)} \\ t \cdot \prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} (t^2 - t_i^2), & n\text{-парно (ф-ја је непарна)} \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{\omega}'_{n+1}(t)$ — извод парне ф-је је непарна ф-ја
— извод непарне ф-је је парна ф-ја

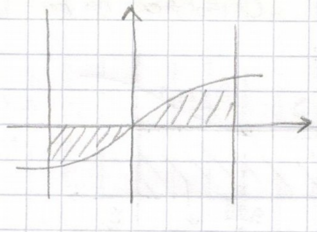
- количник непарне и парне ф-је је непарна ф-ја

$= \int_{-1}^{1} \underbrace{\bar{p}(\tau)}_{парна} \frac{1}{t - t_{n-k}} \left(- \underbrace{\frac{\bar{\omega}_{n+1}(-\tau)}{\bar{\omega}'_{n+1}(-t_{n-k})}}_{\text{непарна ф-ја (па се минус „губи")}} \right) d\tau = \int_{-1}^{1} \bar{p}(\tau) \frac{\bar{\omega}_{n+1}(\tau)}{(\tau - t_{n-k})\, \bar{\omega}'_{n+1}(t_{n-k})}\, d\tau = C_{n-k}$

Лема 2 $\overline{p}(t)$ је парна тежинска ф-ја, чворови су симетрично распоређени у одн. на средину интервала $[a,b]$. Нека је ф-ја f непарна, $f(-x) = -f(x)$. Тада квадратурна ф-ла даје потпуно тачан резултат

тј. $\underbrace{I(f)}_{\text{извод}} = \underbrace{S_n(f)}_{\text{квад. ф-ла}}$.

доказ



Интеграл непарне ф-је је једнак $\underline{\underline{0}}$.

$$S_n(f) = \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) = \quad \left(m = \frac{n-1}{2} \text{ или } m = \frac{n}{2}-1\right)$$

$$= \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{m}\left(c_i \cdot f(x_i) + c_{n-i}\cdot f(x_{n-i})\right) = \left(f(x_{n-i}) = f(-x_i) = -f(x_i)\right) =$$

$$= \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{m} f(x_i)\left(c_i - c_{n-i}\right) = (\text{из претх. леме: } c_i = c_{n-i}) = \underline{\underline{0}}$$

$\llcorner$

* $S_n(f) \approx I(f)$

↳ квадратурна ф-ла даје тачну вредност за полиноме до степена n

• грешка: $r_n(f) = \ldots \underbrace{f^{(n+1)}}_{\text{за веће степене од } n\text{, извод је једнак } 0}$

(о повишеној тачности)

Лема 3 Тежинска ф-ја $\overline{p}(t)$ је парна, чворови су симетрично распоређени и број чворова је непаран (тј. n је парно). Квадратурна ф-ла $S_n(f)$ ће тачно да интеграли и полиноме степена $n+1$:

$$I(P_m) = S_n(P_m), \quad m = \overline{0, n+1}$$

доказ

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \overset{\text{константа}}{c}\underbrace{\Big(x - \overset{\text{средина интервала } [a,b]}{\frac{b+a}{2}}\Big)^{n+1}}_{\text{непарна ф-ја у односу на средину интервала интеграције}} \;/\!\int \;\Rightarrow\; I(P_{n+1}(x)) = \underline{I(P_n(x))}$$

$$S_n(P_{n+1}(x)) = \underbrace{S_n(P_n(x))}_{= I(P_n(x))} + \overset{0}{\cancel{S_n\Big(\Big(x - \frac{b+a}{2}\Big)^{n+1}\Big)}} \;/\!\int$$

$\llcorner$

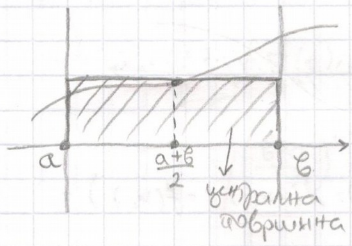
~ Најважније Њутн-Котесове квадратурне ф-ле ~

* Тежинска ф-ја p ће нам бити једнака 1 : $\boxed{p=1}$

↳ парна ф-ја • све грешке су грешке методе

$\boxed{22}$

* $\boxed{n=0}$ Основна ф-ла правоугаоника



$$P_{\square} = (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

• $x_0 = \frac{a+b}{2}$

• $S_0(f) = \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{0} c_i\cdot f(x_i) = \frac{b-a}{2}\cdot c_0\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

– $c_0 = \int_{-1}^{1} 1\cdot \cancel{\prod_{j=0}^{0}(x_i - x_j)}\,dx = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$

• $|R_n(f)| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+2}\cdot\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_{-1}^{1}|p(t)\cdot\bar{\omega}_{n+1}(t)|\,dt$

– Када радимо са грешком треба бити опрезан!

Лема 3 : $n \to n+1$ (тако овде уместо $n=0$, имамо $n=1$)

$|R_0(f)| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^3\frac{M_2}{2!}\int_{-1}^{1}|1\cdot(t-0)|\,dt = \left(\frac{b-a}{2}\right)^3\frac{M_2}{2!}\int_{-1}^{1}|t^2|\,dt = \ldots = \frac{(b-a)^3}{24}\max_{[a,b]}|f''(x)|$

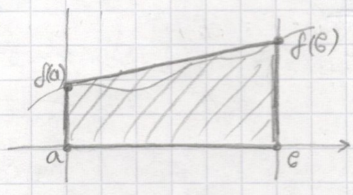
↳ опрез

→ мора да буде парног другог степена

→ средњи (овде и једини) чвор се рачуна двоструко

$\boxed{23}$

* $\boxed{n=1}$ Основна формула трапеза



• имамо 2 чвора : a , b
$-1 \quad 1$
$t_0 \quad t_1$

• $S_1(f) = \left(\frac{b-a}{2}\right)\cdot\left(c_0 f(a) + c_1 f(b)\right) =$

– $c_0 = \int_{-1}^{1} 1\cdot\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\,dt = \int_{-1}^{1}\frac{t-1}{-1-1}\,dt = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-1)\,dt = \ldots = 1$

– $c_1 = \int_{-1}^{1} 1\cdot\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\,dt = \ldots = 1$

$= \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$ (овде важи Лема 2 : $c_0 = c_1$)

• број чворова је паран па не важи Лема 3 (n остаје 1)

• $|R_1(f)| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \frac{M_2}{2!} \int_{-1}^{1} |1\cdot(t-1)(t+1)|\,dt = \ldots = \frac{(b-a)^3}{12}\max_{[a,b]}|f''(x)|$

– претходна грешка је нешто тачнија јер тамо важи повишена тачност

$\boxed{24}$

* $\boxed{n=2}$ Основна формула Симпсона

• $S_2(f) = \frac{b-a}{2}\left(c_0 f(a) + c_1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + c_2 f(b)\right) = \begin{pmatrix} x\to & a, & \frac{a+b}{2}, & b\\ t\to & -1 & 0 & 1\end{pmatrix} =$

– $c_0 = c_2 = \frac{1}{3}$, $c_1 = \frac{4}{3}$

$$= \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

• $(n=2 \to n=3)$ – важи Лема 3

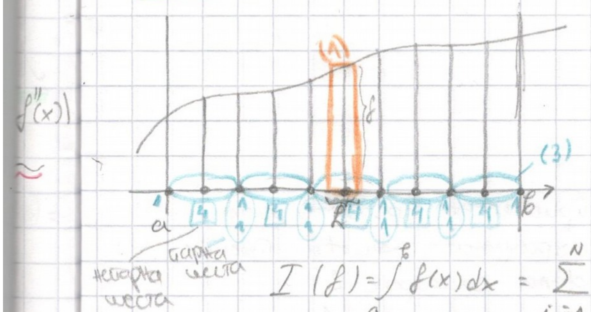
$$|R_2(f)| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{M_4}{4!}\int_{-1}^{1} |1\cdot \underbrace{(t-0)(t+1)(t-1)}_{\text{мора бити степена 4}}|\,dt = \ldots = \frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \max_{[a,b]}|f^{IV}(x)|$$

↳ најтачнија од ова 3 примера

=> средњи чвор се рачуна двоструко

22-23-24

* Уопштења *



• повишена тачност се добија поделом интервала

N – интервала

$h = \frac{b-a}{N} \Rightarrow N = \frac{b-a}{h}$

$x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0,N}$

$x_0 = a$, $x_N = b$

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

1. Уопштена ф-ла правоугаоника

• $S_0^h(f) = \sum_{i=1}^{N} h\cdot f\left(\underbrace{\frac{x_{i-1}+x_i}{2}}_{\text{средина}}\right)$

• грешка целог интервала је једнака суми грешака свих делова тог интервала.

• $|R_0^h(f)| \le \sum_{i=1}^{N} |R_{0,i}^h| = \sum_{i=1}^{N} \frac{h^3}{24}\max_{[x_{i-1},x_i]}|f''(x)| \le \frac{h^3}{24}\max_{[a,b]}|f''|\cdot\sum_{i=1}^{N} 1 =$

$$= \frac{h^3}{24} M_2 \cdot N = \frac{h^{\cancel{3}\,2}}{24}\cdot\frac{b-a}{\cancel{h}}\cdot M_2 = \frac{(b-a)h^2}{24} M_2$$

2. Уопштена ф-ла трапеза

- $S_1^h(f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{h}{2}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(b)\right)$

- $|R_1^h(f)| \le \sum_{i=1}^{N} |R_{1,i}| = \dots = \frac{h^2}{12}(b-a)M_2$

– што је корак h мањи, то је грешка мања ($h \to 0 \Rightarrow R \to 0$)

3. Уопштена Симпсонова ф-ла

- да би нам било лакше, узимамо по 2 интервала $2m = N$

$I(f) = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx$ $\frac{2h}{6} = \frac{h}{3}$ јер

- $S_2^h(f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{h}{3}\left(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right) =$

$= \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b)\right)$

$\frac{b-a}{2m} = h$

- $|R_2^h| \le \sum_{i=1}^{m} |R_{2,i}| = \sum_{i=1}^{m} \frac{h^5}{90} \max_{[x_{2i-2}, x_{2i}]} |f^{IV}(x)| \le \frac{h^5}{90} M_4 \cdot m = \frac{b-a}{180} \cdot M_4 h^4$

много брже $\to 0$ (најтачнија је)

$\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 = \left(\frac{2h}{2}\right)^5 = h^5$

~Рунгеова оцена грешке~

* $I(f) = S_n^h(f) + R^h(f) = S_n^{2h}(f) + R^{2h}(f)$

S_n^h – приближна вр. интеграла израчуната помоћу претх. ф-ла за корак h

S_n^{2h} – –||– корак је $2h$

$R^h = c \cdot h^p$, $p = 2$ или $p = 4$
конст. (1)(2) (3)

$S^h + c\cdot h^p = S^{2h} + c\cdot(2h)^p \Rightarrow S^h - S^{2h} = c\cdot(2h)^p - c\cdot h^p = c\cdot h^p(2^p - 1)$

$\Rightarrow c = \frac{S^h - S^{2h}}{h^p(2^p-1)}$

$$\boxed{R^h = \frac{S^h - S^{2h}}{2^p - 1}}$$

15 или 3

- ако дођемо до тога да је $R^h < \varepsilon$, завршили смо са рачунањем

25 Квадратурне ф-ле Гаусовог типа

15.11.2019.

* $I(f)=\int_a^b p(x)\, f(x)\, dx$

* $S_n(f)=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$ – прво одређујемо чворове x_i, а затим c_i (непознате)

- код Њутн-Котеса су чворови били познати
- имамо $2n$ непознатих
- и чворове x_i и коефицијенте c_i одређујемо тако да та квадратурна ф-ла буде тачна за полиноме што већег степена => до $2n-1$ степена

$$(**)\quad \boxed{I(P_m)=S_n(P_m),\quad m=\overline{0,2n-1}}$$

пример: $S_2(f)$ је тачна највише за полиноме трећег степена

Гаус је много тачнији јер важи за полиноме 5. степена (компликованији за конструкцију)

* Особине:

1. $S_n(P_m)=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i\cdot P_m(x_i)=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i\sum_{k=0}^{m} a_k x_i^k=\sum_{k=0}^{m} a_k \underbrace{\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^k}_{\text{квадратурна ф-ла за базни полином}}=$

$$=\underbrace{\sum_{k=0}^{m} a_k S_n(x^k)}_{\text{сума базних полинома}}$$ адитивност

2. $I(P_m)=\int_a^b p(x)P_m(x)\,dx=\int_a^b p(x)\sum_{k=0}^{m} a_k x^k\,dx=\sum_{k=0}^{m} a_k\int_a^b p(x)\,x^k dx=$

$$=\sum_{k=0}^{m} a_k I(x^k)$$

Лема: Да би квадратурна ф-ла $S_n(f)=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$ била тачна за произвољни полином степена m, P_m, потребно је и довољно да она буде тачна за све базне полиноме x^k који формирају тај полином P_m.

$$I(P_m)=S_n(P_m) \iff I(x^k)=S_n(x^k),\quad k=\overline{0,m}$$

доказ →

доказ

$\boxed{\Leftarrow}$ $I(P_m) \overset{(2)}{=} \sum_{k=0}^{m} a_k I(x^k) = \sum_{k=0}^{m} a_k S_n(x^k) \overset{(1)}{=} S_n(P_m)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ $I(P_m) \overset{(2)}{=} \sum_{k=0}^{m} a_k I(x^k) = S_n(P_m) \overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{m} a_k S_n(x^k)$

поредимо их

Специјално: $a_k = 1$, а остали $a_i = 0,\ i \neq k$

$\Rightarrow I(x^k) = S_n(x^k)$.

* $(**) \Leftrightarrow I(x^k) = S_n(x^k), \quad k=\overline{0,n-1}$

$$\underbrace{\int_a^b p(x)\, x^k\, dx}_{\text{лако израчунљиво}} = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{m} c_i \underbrace{x_i^k}_{\text{непознате}}, \quad k=\overline{0,2n-1}$$

– добијамо систем једначина али није линеаран па га је тешко решити

* Да бисмо нашли чворове x_i, користимо сл. лему:

Лема Ако су x_i, $i=\overline{1,n}$, чворови квадратурне ф-ле која је тачна за све полиноме степена $2n-1$, онда важи да је:

$$\int_a^b p(x)\,\omega_n(x) P_{n-1}(x)\, dx = 0 \qquad (*)$$

где је $\omega_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x-x_j)$, P_{n-1} – произвољни полином степена до $n-1$

доказ

$P_{2n-1} = \omega_n(x) P_{n-1}(x) = f(x)$

$$\int_a^b p(x) P_{2n-1}(x)\, dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \overbrace{\underbrace{\omega_n(x_i)}_{\text{у чворовима се анулира}} \cdot P_{n-1}(x_i)}^{f(x_i)} = 0.$$

* $\omega_n = ?$ Нуле полинома ω_n су чворови Гаусове квадр. ф-ле

$(*) \overset{\text{лема}}{\Longleftrightarrow} \int_a^b p(x)\,\omega_n(x)\, x^k\, dx = 0, \quad k=\overline{0,n-1} \qquad \omega_n = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0$

$\Rightarrow \int_a^b p(x)\,(x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0)\, x^k\, dx = 0, \quad k=\overline{0,n-1}$

$\Rightarrow b_{n-1}\underbrace{\int_a^b p(x)\, x^{n-1+k}\, dx}_{\text{(израчунљиво)}} + \dots + b_0 \int_a^b p(x)\, x^k\, dx = -\int_a^b p(x)\, x^{n+k}\, dx, \quad k=\overline{0,n-1}$

=> добијамо систем линеарних ј-на по коеф. $b_0, \dots, b_{n-1}$ који је лак за решавање

=> кад нађемо b, нашли смо и ω_n, а њене 0 су чворови.

$\boxed{26}$

* Бољи начин за тражење ω_n:

- ω_n припада класи ортогоналних полинома у односу на скаларни производ који је дефинисан интегралом
- вектори f и g: (f,g) - скаларни производ

$$(f,g) = \underbrace{\int_a^b p(x) f(x) g(x) dx}_{\text{задовољава све аксиоме скаларног производа}} = (g,f)$$

- $(Q_n, Q_m) = \int_a^b p(x) Q_n Q_m \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \neq 0, & n = m \end{cases}$ Q_n, Q_m - монични нормирани полиноми

=> $\omega_n = Q_n$ (доказ мало касније)

Теорема Постоје нормализовани полиноми Q_k, $k=0,1,\dots$, такви да важи: $(Q_i, Q_j) = 0$, $i \neq j$. Ови полиноми су јединствено одређени следећом рекурентном ф-лом:

- $Q_0 = 1$
- $Q_{k+1} = \left(x - \overset{a_k}{\frac{(xQ_k, Q_k)}{(Q_k, Q_k)}}\right) Q_k(x) - \overset{a_{k-1}}{\frac{(Q_k, Q_k)}{(Q_{k-1}, Q_{k-1})}} Q_{k-1}(x)$, $k=0,1,\dots$

доказ (користимо Грам-Шмитов поступак ортогонализације)

Пп да су $Q_0, \dots, Q_k$ већ ортогонални и задовољавају рекурентну ф-лу. Правимо:

$$Q_{k+1}(x) = (x - a_k) Q_k(x) + a_{k-1} Q_{k-1}(x) + \dots + a_0 Q_0(x) \;/ \cdot Q_j \quad ((Q_{k+1}, Q_j) = 0), \; j = \overline{0,k}$$

скаларно множење

=> $(xQ_k, Q_j) - a_k (Q_k, Q_j) + a_{k-1} \underbrace{(Q_{k-1}, Q_j)}_{k-1 \neq k} + \dots + a_0 (Q_0, Q_j) = 0$, $j = \overline{0,k}$

- $j = k$: $(xQ_k, Q_j) - a_k (Q_k, Q_k) + 0 + \dots + 0 = 0$

=> $a_k = \dfrac{(xQ_k, Q_j)}{(Q_k, Q_k)}$

наставак →

• $j<k$: $(xQ_k, Q_j) + a_j(Q_j, Q_j) = 0$

$$\Rightarrow \quad a_j = -\frac{(xQ_k, Q_j)}{(Q_j, Q_j)}, \quad j<k \quad (*)$$

– сви треба да буду $=0$, осим $j=k-1$

(из ПП): $Q_{j+1} = \left(x - \frac{(xQ_j, Q_j)}{(Q_j, Q_j)}\right) Q_j(x) - \frac{(Q_j, Q_j)}{(Q_{j-1}, Q_{j-1})} Q_{j-1}(x)$, $j = \overline{0, k-1}$

$$\Rightarrow \quad xQ_j = Q_{j+1} + \frac{(xQ_j, Q_j)}{(Q_j, Q_j)} \cdot Q_j + \frac{(Q_j, Q_j)}{(Q_{j-1}, Q_{j-1})} \cdot Q_{j-1} \quad / \cdot Q_k$$

$$\Rightarrow \quad (xQ_j, Q_k) = (xQ_k, Q_j) = (Q_{j+1}, Q_k) + \frac{(xQ_j, Q_j)}{(Q_j, Q_j)} \cancel{(Q_j, Q_k)}^{0} + \frac{(Q_j, Q_j)}{(Q_{j-1}, Q_{j-1})} \cancel{(Q_{j-1}, Q_k)}^{0}, \quad j<k$$

$$\Rightarrow \quad (xQ_k, Q_j) = (Q_{j+1}, Q_k) \underset{j<k}{=} \begin{cases} j=k-1: & (Q_k, Q_k) \\ j<k-1: & 0 \end{cases}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad a_{k-1} = -\frac{(Q_k, Q_k)}{(Q_{k-1}, Q_{k-1})}$$

∟

* $P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} p_k Q_k$

$$(P_m, Q_m) = \left(\sum_{k=0}^{m} p_k Q_k, Q_m\right) = \sum_{k=0}^{m} p_k \underbrace{(Q_k, Q_m)}_{\neq 0,\ k=n} = 0, \quad \underline{k<n}$$

• $\underline{m<n}$: $(P_m, Q_n) = 0$

$\underline{\text{Лема}}$: $\int_a^b p(x) \underbrace{\omega_n(x) P_{n-1}(x)}_{(\omega_n, P_{n-1}) \underset{m<n}{=} 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega_n = Q_n}$

• $x_1, \dots, x_n$ – чворови Гаусове квадр. ф-ле

Лема Корени (нуле) x_i полинома Q_n су реални и једнострукu и сви припадају интервалу (a, b).

доказ

$$\underset{n>0}{(Q_0, Q_n)} = \int_a^b p(x) \cdot \overset{Q_0}{\overset{\shortparallel}{1}} \cdot Q_n dx = 0 = \int_a^b \underbrace{p(x)}_{>0} Q'(x)\, dx$$

$\Rightarrow$ полином Q мора да пресече x-осу

$\rightarrow$ Q има бар 1 нулу у интервалу (a, b). Те нуле су непарне вишеструкости

наставак →

Пос, нуле су вишеструке. $Q_n = \prod_k (x-x_k)^{\alpha_k}$ - а има n нула.

$P = (x-x_{k_1})\cdot\ldots\cdot(x-x_{k_m})$ - полином у који смо скупили нуле од Q_n које су непарне вишеструкости по једном.

$(Q_n, P) = \int_a^b \underbrace{p}_{\geq 0}\cdot \underbrace{Q_n \cdot P}_{\text{производи заброда на парне степене } \geq 0}\, dx \neq 0$ не сече x-осу $\Rightarrow$ P је степена n

$\Rightarrow Q_n = P.$

Пример 1 $\int_{-1}^{1} 1\cdot f(x)\,dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$

$[-1,1]$, $p=1$ $\Rightarrow$ зна се да су ортогонални Лежандрови полиноми

$(L_n, L_m) = \int_{-1}^{1} 1\cdot L_n L_m = \begin{cases} 0, & n\neq m \\ \neq 0, & n=m \end{cases}$ $\qquad L_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$

Треба нам 3 чвора $\Rightarrow$ $L_3 = ?$

$L_0 = 1$, $L_1 = x$, $L_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$, $L_3 = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$L_3 = 0$: $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$

c_1, c_2, c_3 тражимо даље на исти начин као код Њутн-Котесове квадр. ф-ле

Пример 2 $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$

2 чвора $\Rightarrow$ треба нам полином степена 2

$[-1,1]$, $p = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\Rightarrow$ ортогонални су Чебишевљеви полиноми

$(T_n, T_m) = \int_a^b \frac{T_n T_m}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0, & n\neq m \\ \neq 0, & n=m \end{cases}$ $\qquad T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $\quad T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$

$T_0 = 1$, $T_1 = x$, треба нам T_2 и његове нуле ...

$\frac{1}{\sqrt{0}}$

* Шта радимо у случају када имамо сингуларитет?

→ Њутн-Котесовим ф-лама не можемо да решимо интеграл, али Гаусом можемо (прет. пример)

* Грешка *

$$R_n = \int_a^b p(x) \underbrace{R_n(x)}_{\text{грешка интерполације}} dx = \int_a^b p(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)\, dx$$ – грешка код Њутн-Котес

Гаус: $n \longrightarrow 2n-1$:

$$|R_{2n-1}| \leq \int_a^b \left| p(x) \frac{M_{2n}}{(2n)!} \omega_{2n}(x) \right| dx = \frac{M_{2n}}{(2n)!} \int_a^b \left| p(x)\, \omega_{2n}(x) \right| dx$$

- $\omega_{2n} = (\omega_n)^2 = \left(\prod_{j=1}^{n} (x - x_j) \right)^2$ – сваки чвор се рачуна два пута

IV Решавање нелинеарне једначине

29.11.2019.

* $f(x)=0$ → треба решити ову ф-ју која не мора бити једноставна

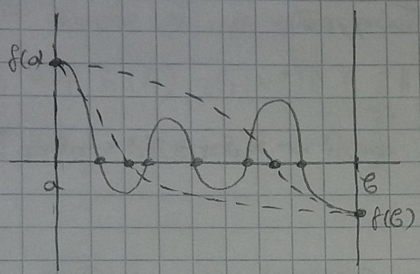
• тражимо нулу ф-је

1. Локализација решења:

• $[a,b]: f(a)f(b)<0$ → треба наћи интервал са овим особинама

• $f \in C[a,b]$

• $sgn(f') = const$ – ф-ја је монотона => сече x-осу



2. $x^*: f(x^*)=0$ → тражимо x^* тако да важи $f(x^*)=0$

33

Деф За тачку x^* кажемо да је непокретна тачка оператора G ако се слика сама у себе: $x^* = G(x^*)$.

Деф Банахов простор је нормиран векторски комплетан простор.

Деф Простор је комплетан ако сваки Кошијев низ у њему конвергира.

Деф Оператор G је оператор контракције у некој затвореној лопти, $S(x_0, r) = \{x \mid \|x - x_0\| \le r\}$, која припада неком Банаховом простору B ако: $(\forall (x,y) \in S(x_0,r))$ важи $\underbrace{\|G(x)-G(y)\| \le q\|x-y\|}_{\text{растојање слика је мање од растојања оригинала}}$.

• $q \in [0,1)$ – коеф. контракције

$\boxed{33}$

Теорема (Банахов став о непокретној тачки)

Нека је G оператор контракције у затвореној лопти $S(x_0, r)$ и нека је q коефицијент контракције такав да важи:

$$\frac{1}{1-q}\|G(x_0)-x_0\| = r_0 < r.$$

Тада низ $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$, који је дефинисан следећом рекурентном ф-лом:

$$x_{m+1} = G(x_m), \quad m = 0, 1, \dots,$$

конвергира ка некој тачки из лопте, $x_m \xrightarrow{m\to\infty} x^* \in S(x_0, r_0)$, и важе следеће особине:

1. $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x^* \in S(x_0, r_0)$
2. $G(x^*) = x^*$
3. $\exists!\, x^*$ (постоји само 1 непокретна тачка!)

доказ

(1) Треба доказати да се све тачке рекурзивног низа налазе у затвореној лопти. Доказ иде индукцијом.

- $m=1$: $\frac{1}{1-q}\|x_1-x_0\| = r_0 \Rightarrow \|x_1-x_0\| = \underbrace{(1-q)}_{<1} r_0 \le r_0$

  $\Rightarrow \|x_1-x_0\| \le r \Rightarrow x_1 \in S(x_0, r_0)$

- ИХ: Пп да су $x_0, \dots, x_m \in S(x_0, r_0)$. Треба доказати да је $x_{m+1} \in S(x_0, r_0)$.

  - $\|x_{m+1}-x_m\| = \|G(x_m)-G(x_{m-1})\| \overset{\text{деф}}{\le} q\|x_m-x_{m-1}\| \le$ (опет примењујемо исто)

    $\le \dots \le q^m\|x_1-x_0\| = q^m(1-q)r_0$ растојање 2 узастопне тачке

  - $\|x_{m+1}-x_0\| = \|x_{m+1}-x_m+x_m-\dots-x_1+x_1-x_0\| \overset{\text{нej.}\Delta}{\le} \|x_{m+1}-x_m\|+\dots+\|x_1-x_0\| \le$

    $\le$ (растојање између 2 суседне) $\le q^m(1-q)r_0+\dots+(1-q)r_0 =$

    $= (1-q)r_0(q^m+q^{m-1}+\dots+q^0) = \cancel{(1-q)}\, r_0 \frac{1-q^{m+1}}{\cancel{1-q}} \le r_0$

    јер је $q \in [0,1)$

    $\Rightarrow x_{m+1} \in S(x_0, r_0)$.

- Да ли је $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ Кошијев? (слична ствар као изнад)

  $\|x_{m+k}-x_m\| \le \|x_{m+k}-x_{m+k-1}\|+\dots+\|x_{m+1}-x_m\| \le q^{m+k-1}(1-q)r_0+\dots+q^m(1-q)r_0 =$

  $= (1-q)r_0\, q^m(q^{k-1}+\dots+q^0) \le (1-q)r_0\, q^m\sum_{j=0}^{\infty} q^j = (1-q)r_0\, q^m\frac{1}{1-q} =$

  $= q^m r_0$

  $\Rightarrow \|x_{m+k}-x_m\| = q^m r_0 \xrightarrow[q\in[0,1)]{m\to\infty} 0 \Rightarrow$ низ је Кошијев $\xRightarrow{\text{у B простору}}$ низ је конвергентан (има граничне вр). тј. $\exists \lim\limits_{m\to\infty} x_m = x^* \in S(x_0, r_0)$.

- $\|x_{m+k} - x_m\| \le g^m r_0 \quad / \lim_{k\to\infty}$ (лимес улази у норму јер је она непрекидно пресликавање)

$\Rightarrow \underbrace{\|x^* - x_m\|}_{\text{тачна вр.}} \le \underbrace{g^m r_0}_{\text{приближна вр после } m \text{ итерација}} \to$ грешка

(2) Посматрамо: $\|x^* - G(x^*)\| = \|x^* - x_{m+1} + G(x_m) - G(x^*)\| \overset{\text{нej } \Delta}{\le}$

$\le \|x^* - x_{m+1}\| + \underbrace{g\|x_m - x^*\|}_{\text{јер је } G \text{ контракција}} \overset{\text{грешка}}{\le} g^{m+1} r_0 + g \cdot g^m r_0 = 2g^{m+1} r_0 \xrightarrow{m\to\infty} 0$

$\Rightarrow \|x^* - G(x^*)\| \longrightarrow 0 \Rightarrow x^* = G(x^*) \Rightarrow x^*$ непокретна тачка оператора G.

(3) Пос, $\exists \bar{x}$ такво да је непокретна, $G(\bar{x}) = \bar{x}$.

$\|\bar{x} - x^*\| = \|G(\bar{x}) - G(x^*)\| \le \underbrace{g}_{<1}\|\bar{x} - x^*\| < \|\bar{x} - x^*\|$

$\Rightarrow \|\bar{x} - x^*\| < \|\bar{x} - x^*\| \ \lightning$

L

* Априорна оцена грешке

(прво рачунамо ограничење па задатак)

$\underbrace{\|x^* - x_m\|}_{\text{грешка}} \le g^m r_0 = g^m \frac{1}{1-g}\|G(x_0) - x_0\| \le \varepsilon$

$\Rightarrow g^m \le \frac{(1-g)\varepsilon}{\|G(x_0) - x_0\|} \quad / \ln$ (неједнакост се не мења јер је ln растућа ф-ја)

$\Rightarrow m \ln g \le \ln \frac{(1-g)\varepsilon}{\|G(x_0) - x_0\|} \quad / : \ln g$, $g \in [0,1)$ па се знак мења

$\Rightarrow m \ge \underbrace{\frac{\ln \frac{(1-g)\varepsilon}{\|G(x_0) - x_0\|}}{\ln g}}_{\text{израчунљиво}} \to$ доње ограничење итерација

* Апостериорна оцена грешке:

$\|x^* - x_m\| = \|G(x^*) - G(x_{m-1})\| \le g\|x^* - x_{m-1}\| = g\|x^* - x_m + x_m - x_{m-1}\| \overset{\text{нej } \Delta}{\le}$

$\le g(\|x^* - x_m\| + \|x_m - x_{m-1}\|)$

$\Rightarrow (1-g)\|x^* - x_m\| \le g\|x_m - x_{m-1}\| \quad / \frac{1}{1-g}$

$\Rightarrow \|x^* - x_m\| \le \frac{g\|x_m - x_{m-1}\|}{1-g} \le \varepsilon$

$\Rightarrow \|x_m - x_{m-1}\| \le \frac{\varepsilon(1-g)}{g}$

36

1. Итеративна метода за решавање нелинеарних ј-на у $\mathbb{R}$

$f(x)=0 \iff x=g(x)$

$x_{n+1}=g(x_n)$, $n=0,1,\dots$ $\qquad x_0$ = произвољно

Теорема: Ако је g диференцијабилна и важи $|g'(x)| \le q < 1$, тада итеративни низ конвергира, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$, и важи:

1) $|x_n - x^*| \le \dfrac{q^n}{1-q}\|x_1-x_0\|$

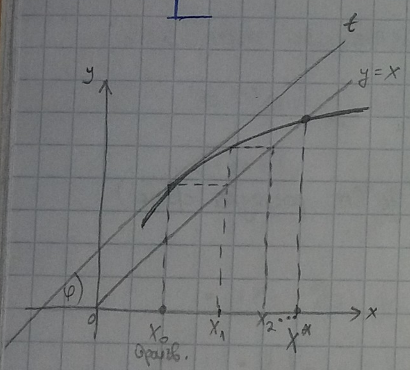
2) $|x_n - x^*| \le \dfrac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$

} оцене грешке

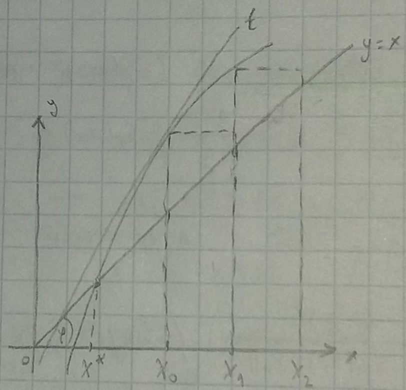
доказ

$$|g(x_1)-g(x_2)| \overset{\text{тпл. о ср. вр}}{=} |g'(\xi)(x_1-x_2)| \overset{\xi\in(x_1,x_2)}{=} |g'(\xi)|\cdot|x_1-x_2| \le q|x_1-x_2|$$

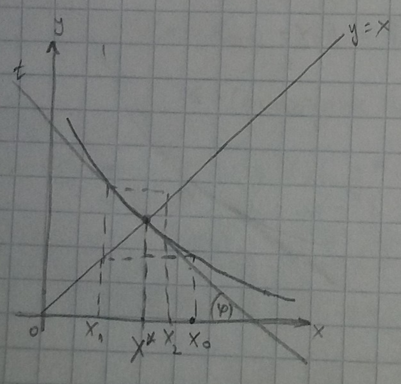
=> g је контракција => итеративни низ конвергира и важе ове оцене грешке.



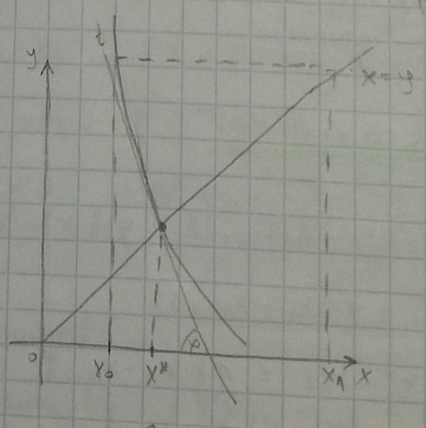
• $\varphi<45^\circ$ све конвергира ка x^*



• $\varphi>45^\circ$ удаљавамо се од решења



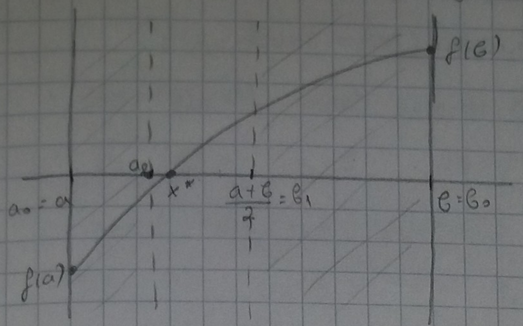
• $\varphi<45^\circ$ конвергира



• $\varphi>45^\circ$ дивергира

2. Метода половљења интервала

• $f(x) = 0$, $[a,b]$: $f(a)f(b) < 0$, $f \in C[a,b]$



• све док је $f(a)f(b) < 0$ сечемо

$[a,b] = [a_0,b_0] \supset [a_1,b_1] \supset \ldots \supset [a_n,b_n]$

Теорема Нека је $f \in C[a,b]$ и нека важи $f(a)f(b)<0$. Низови левих и десних крајева интервала $[a_n,b_n]$, $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, који су одређени методом половљења интервала конвергирају ка тачки x^* која ће бити решење ј-не $f(x)=0$.

доказ

$a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_n < \ldots < b$ → монотон неопадајући низ ограничен са горње стране

$b_0 \ge b_1 \ge \ldots \ge b_n > \ldots > a$ → монотон нерастући низ ограничен са доње стране

=> монотон ограничен низ је конвергентан тј.

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = A \quad и \quad \exists \lim_{n\to\infty} b_n = B$$

• $B - A = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n \underset{\text{може гр. свој. особ.}}{=} \lim_{n\to\infty}(\underbrace{b_n - a_n}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{2^n}\right) = 0 \Rightarrow B = A = x^*$

- оба низа конвергирају ка истој граничној вредности

• $\lim_{n\to\infty}(\underbrace{f(a_n)f(b_n)}_{\le 0 \ (1)}) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} f(b_n) = (f \in C[a,b]) =$

$= f(\lim_{n\to\infty} a_n) f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(x^*)f(x^*) = \underbrace{(f(x^*))^2}_{\ge 0 \ (2)}$

$\overset{(1)(2)}{\Rightarrow} f(x^*) = 0.$

Оцена грешке:

$[a_n,b_n]$: $b_n - a_n \le \varepsilon$ стајемо , $x_n = \frac{b_n + a_n}{2}$

$|x^* - x_n| \le \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}} \le \varepsilon \Rightarrow b - a \le \varepsilon(2^{n+1}) \Rightarrow \frac{b-a}{\varepsilon} \le 2^{n+1} \ / \log_2$

$\Rightarrow \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \le n+1 \Rightarrow \underbrace{\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} - 1} \le n.$

• други запис: $n \ge \left[\frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2} \right]$

* Предности:

1) једноставност (само тражимо $f(a)f(b)<0$)

2) згодно кад имамо други алгоритам, као почетак

3) немамо никаква ограничења за ф-ју, само $f(a)f(b)<0$

4) широка примена

* Мане:

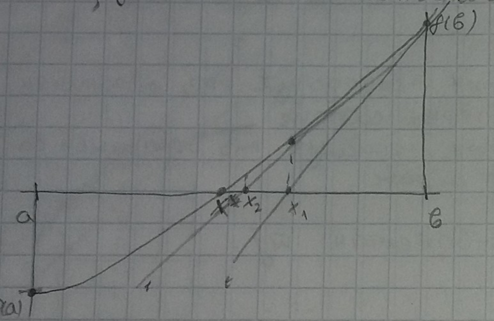
1) спора конвергенција

2) немогућност примене на веће димензије (само у $\mathbb{R}$)

3. Њутнова метода тангенте $\boxed{37}$

· имамо $[a,b]$ на коме локализујемо решење

· $(x_n, f(x_n))$ - тачке тангенте



· ј-на тангенте: $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$

· пресек тангенте и x-осе:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \quad (*)$$ итеративни низ

Теорема (О конвергенцији Њутнове методе)

Нека је ф-ја $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ и нека за њу важе следеће особине:

а) $f \in C^1[a,b]$ - f је непрекидно диференцијабилна (и f и f' су непр.)

б) $f(a)f(b)<0$

в) $(\forall x \in [a,b])\ \exists f''$ (не мора бити непр.)

г) $sgn(f') = const.$ (монотона)
$sgn(f'') = const.$ (конвексна/конкавна)
$f' \neq 0$ на $[a,b]$ (због разломка у итеративном низу)

д) $(\exists x_0 \in [a,b])\ f(x_0)f''(x_0) > 0$

Тада итеративни низ $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, дефинисан као $(*)$, и коме је први члан x_0 из (д), конвергира ка јединственом решењу тј тачки x^*: $f(x^*)=0$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$

доказ

- Без умањења општости, урадићемо само 1 случај (са претходне слике):

  $\underline{f(a)<0}$, $\underline{f(b)>0}$, $\underline{f'>0}$, $\underline{f''>0}$

- Због услова (а), (г) и (б) $\Rightarrow$ $(\exists!\, x^*)\ f(x^*)=0$.
- из (д) $\Rightarrow$ $x_0=b:\ \underbrace{f(b)}_{>0}\underbrace{f''(b)}_{>0}>0$ ✓
- $x_0=b,\ f(b)>0,\ f(x^*)=0 \Rightarrow x_0>x^*$ јер је ф-ја опадајућа
- ПП $x_0,\dots,x_n>x^* \Rightarrow x_{n+1}>x^*$?

  $(**)\ \underbrace{f(x^*)}_{=0}=f(x_n+(x^*-x_n))=$ (Тејлоров развој око x_n, $\xi\in(x^*,x_n)$) $=$

  неједнакост реда (2)

  $$=f(x_n)+f'(x_n)(x^*-x_n)+\underbrace{\tfrac{1}{2}\underbrace{f''(\xi)}_{>0}\underbrace{(x^*-x_n)^2}_{\geq 0}}_{>0}$$

  $$\Rightarrow f(x_n)+f'(x_n)(x^*-x_n)<0$$

  $$\Rightarrow x^*<\underbrace{x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{\text{итеративни низ за } x_{n+1}} \Rightarrow x^*<x_{n+1}$$

  $\Rightarrow$ Тачке су десно од x^* $\Rightarrow f(x_n)>0,\ (\forall n=0,1,\dots)$

- Зашто је x_n опадајући низ?

  $$x_{n+1}=x_n-\frac{\overbrace{f(x_n)}^{>0}}{\underbrace{f'(x_n)}_{>0}} \Rightarrow x_{n+1}<x_n \Rightarrow \{x_n\}\downarrow$$ и ограничен је са доње стране са x^*

- <u>Анализа 1:</u> Монотон и ограничен низ је конвергентан:

  $-\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\bar{x}$; треба доказати: $\bar{x}=x^*$

  $$\Rightarrow x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ \Big/\lim_{n\to\infty} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n-\frac{\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}f'(x_n)}$$

  јер је f непр.; $f\in C^1[a,b]$

  $$\Rightarrow \bar{x}=\bar{x}-\frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \Rightarrow \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}=0 \Rightarrow f(\bar{x})=0$$

  јединство.

  $$\Rightarrow f(x^*)=0 \Rightarrow \underline{x^*=\bar{x}}.$$

∟

* $(**) \Rightarrow f'(x_n)(x^*-x_n)=-f(x_n)-\frac{1}{2}f''(\xi)(x^*-x_n)^2\ \big/ : f'(x_n)$

$$\Rightarrow x^*=\underbrace{x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{x_{n+1}}-\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}(x^*-x_n)^2$$

$$\Rightarrow |x^*-x_{n+1}|=\left|-\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}(x^*-x_n)^2\right| \Rightarrow |x^*-x_{n+1}|\leq\frac{M_2}{2}\frac{1}{f'(x_n)}|x^*-x_n|^2$$

$\Rightarrow$ **Деф** $\|x^*-x_{n+1}\|\leq c\cdot\|x^*-x_n\|^p$, c - const

неједнакост реда p (што је p веће, брже конвергира)

• метода просте итерације је реда (1):

$$\|x^* - x_{n+1}\| = \|G(x^*) - G(x_n)\| \leq \underbrace{q}_{q<1} \|x^* - x_n\|^1$$

38

Грешка Њутнове методе:

$$|x^* - x_n| < \varepsilon$$

x^* – тачна вр.; x_n – вр. после n итерација

1) $$\underbrace{f(x^*)}_{=0} - f(x_n) \overset{\text{тм. о ср. вр}}{=} f'(\xi)(x^* - x_n) \Rightarrow x^* - x_n = \frac{-f(x_n)}{f'(\xi)}$$

$$\Rightarrow |x^* - x_n| = \left| -\frac{f(x_n)}{f'(\xi)} \right| \Rightarrow |x^* - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \quad m_1 = \min_{[a,b]} |f'|$$

2) Користимо Тејлоров развој у околини тачке x_{n-1}:

$$f(x_n) = f(x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})) = \underbrace{f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})}_{=0\ (\cdot)} + \frac{f''(\xi)}{2}(x_n - x_{n-1})^2$$

• $$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \Rightarrow (x_n - x_{n-1}) f'(x_{n-1}) = -f(x_{n-1})$$

$$\Rightarrow (x_n - x_{n-1}) f'(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) = 0$$

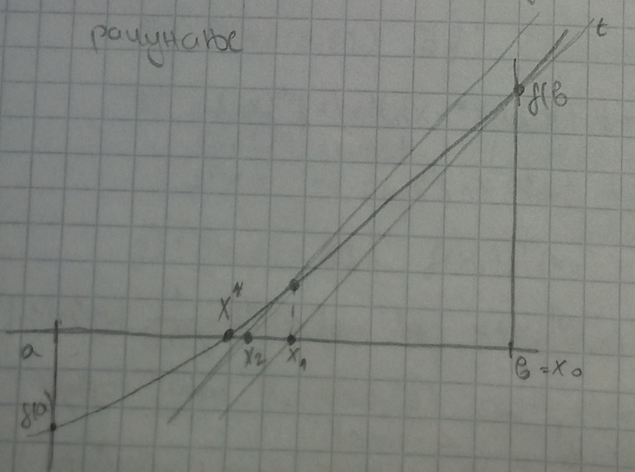
$$\Rightarrow |f(x_n)| \leq \frac{M_2}{2} |x_n - x_{n-1}|^2, \quad M_2 = \max_{[a,b]} |f''|$$

$$\overset{1)\,2)}{\Longrightarrow} |x^* - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2 \leq \varepsilon \Rightarrow \boxed{|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon m_1}{M_2}}}$$ образац за грешку

4. Модификација Њутнове методе

• вучемо праве које су паралелне оригиналној тангенти (све имају исти коефицијент правца)

• ова метода је спорија од претходне, али је једноставнија за рачунање



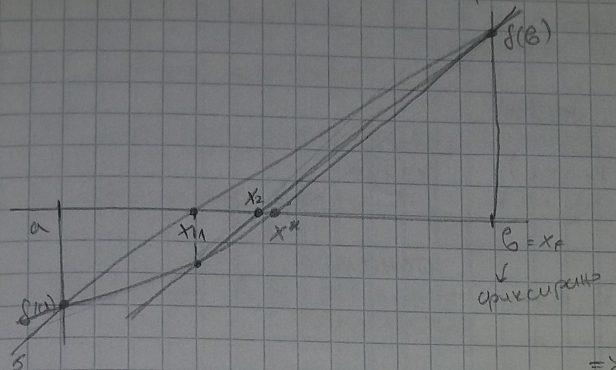
$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}}$$

39

5. Метода лажног положаја (regula-falsi)

- уместо тангенти имамо сечице

$$\left.\begin{matrix}(x_F, f(x_F)) \\ (x_n, f(x_n))\end{matrix}\right\}$$ повлачимо сечице кроз ове тачке



- ј-на сечице кроз 2 тачке:

$$\frac{y - f(x_n)}{x - x_n} = \frac{f(x_F) - f(x_n)}{x_F - x_n}$$

- пресек сечице са x-осом:

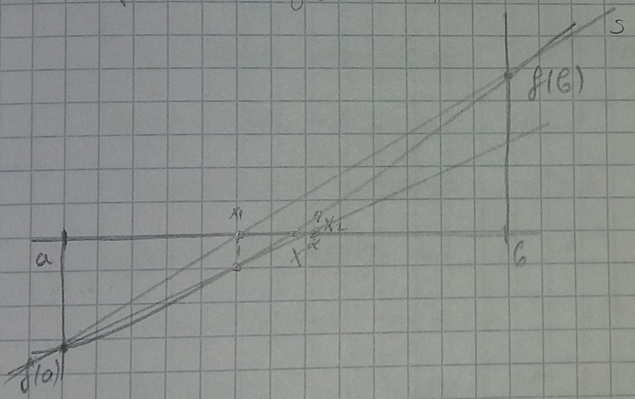
$$(x_{n+1} - x_n)\frac{f(x_F) - f(x_n)}{x_F - x_n} = -f(x_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_F) - f(x_n)}(x_F - x_n)}$$

40

6. Метода сечице

- кроз последње 2 тачке повлачимо сечицу



- x_0 и x_1 су обични крајеви интервала

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}(x_{n-1} - x_n)}$$

* Грешка за претходне две методе:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_F) - f(x_n)}(x_F - x_n) \quad / - x^* \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{f(x_n) - \overbrace{f(x^*)}^{=0}}{f(x_F) - f(x_n)}(x_F - x_n)$$

ТМА о ср. вр.

$$\Rightarrow x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{f'(\xi_1)(x_n - x^*)}{f'(\xi_2)\cancel{(x_F - x_n)}}\cancel{(x_F - x_n)}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{f'(\xi_1)}{f'(\xi_2)}(x_n - x^*) = (x_n - x^*)\left(1 - \frac{f'(\xi_1)}{f'(\xi_2)}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{f'(\xi_1)}{f'(\xi_2)}\right)(x_{n+1} - x^* + x_n - x_{n+1})$$

$$\Rightarrow (x_{n+1} - x^*)\left(1 - 1 + \frac{f'(\xi_1)}{f'(\xi_2)}\right) = \left(1 - \frac{f'(\xi_1)}{f'(\xi_2)}\right)(x_n - x_{n+1})$$

$$\Rightarrow \frac{f'(\xi_1)}{f'(\xi_2)}(x_{n+1} - x^*) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{f'(\xi_2)}(x_n - x_{n+1}) \quad / \cdot \frac{f'(\xi_2)}{f'(\xi_1)}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad |x_{n+1} - x^*| = \left| \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{f'(\xi_1)} (x_n - x_{n+1}) \right| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n+1}| \le \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{|x_n - x_{n+1}| \le \frac{m_1 \varepsilon}{M_1 - m_1}}$$

7. Комбинована метода сечице и тангенте

- користимо 2 итеративна низа:

1) $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} (\bar{x}_n - x_n)$$ сечица

2) $$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}$$ тангента

$$|x_n - \bar{x}_n| \le \varepsilon$$

- у сваком тренутку рачунамо 2 низа
- брже конвергира

V Системи линеарних једначина

06. 12. 2018.

27

* Основни задаци линеарне алгебре:

1) решити систем $Ax = b$, A - матрица
2) инверз матрице, A^{-1}
3) израчунавање детерминанте, $\det A$
4) сопствене вредности, $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$ - сопствени вектор

Деф Матрица A је регуларна ако је $\det A \neq 0$. У супротном је сингуларна.

Деф Матрице A и B су сличне, $A \sim B$, ако важи:

$$B = T^{-1} A T \quad , \quad T \text{ - регуларна матрица}$$

Деф Транспонована матрица: A^T: $a_{ij}^T = a_{ji}$

Конјугована матрица: $A^* = (a_{ij}^*)$, $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$ → конјугат

Хермитска матрица: $A = A^*$

Симетрична матрица: $A^T = A$

Унитарна матрица: $A^* = A^{-1}$

Ортогонална матрица: $A^T = A^{-1}$

Нормална матрица: $A^* A = A A^*$

Деф За матрицу A кажемо да је позитивна дефинитна ако је Хермитова и ако за ненула вектор важи: $x^* A x > 0$.

Деф Норма, у векторском простору $\mathbb{C}^n$: $(x_1, \dots, x_n)$:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

- апсолутна норма: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- еуклидска норма: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
- униформна норма: $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, $p \to \infty$

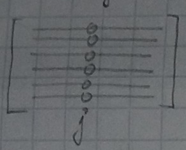
Деф Скаларни производ 2 вектора:

$$(x,y) = y^* \cdot x = (\bar{y}_1 \dots \bar{y}_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \bar{y}_i$$

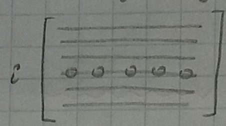
Деф Норма матрице A је индукована вектором X ако важи:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

• $\|A\|_1 = \max\limits_{j} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$



• $\|A\|_\infty = \max\limits_{i} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$



• $\|A\|_2 = \sqrt{\max\limits_{i} \lambda_i (A^* \cdot A)}$

• $\|A\|_S = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ еуклидска норма

↳ није индукована еуклидској норми код вектора; сагласне су

Деф Норма вектора и норма матрице су сагласне ако важи:

$$\|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

Решавање система линеарних ј-на

13.12.2019.

* Нумеричке методе за решавање система лин. ј-на се могу поделити на 2 групе:

1. директне - карактерише их то што после коначно много рачунских операција долазимо до тачних решења
2. итеративне - дају решење као граничну вредност неког итеративног низа који сами формирамо

~ Директне методе ~

[29] Троугаона декомпозиција матрице
[30] Израчунавање инверзне матрице

[28]

1. Гаусова метода елиминације

$$Ax = b \longrightarrow Ux = d$$

A — квадратна матрица; U — горње троугаона матрица

- $u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n = d_1$
  $u_{22}x_2 + \dots + u_{2n}x_n = d_2$
  $\dots$
  $u_{nn}x_n = d_n$

- $x_n = \dfrac{d_n}{u_{nn}}$
- $x_i = \dfrac{1}{u_{ii}}\left(d_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}x_k\right)$

* операције:

1)
$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \quad \Big/ \cdot \frac{-a_{i1}}{a_{11}} \\
a_{21}x_n + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_n + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

$a_{11} \neq 0$ главни елемент

2) избор главног елемента (пивота) – пивотирање

↳ највећи по модулу елемент из колоне (делимично пивотирање)

- ако a_{11} није пивот, већ неки елемент a_{p1}, мењамо те две врсте: $a_{p1} \rightarrow \overline{a_{11}}$

- тотално пивотирање – мењамо и врсте и колоне, ако пивот није a_{11}

* $(A\,;\,b) \xrightarrow[L_1]{P_1} (A_1\,;\,b_1)$

- P_1 и L_1 су регуларне матрице (имају своје инверзе)
- матрица пермутације (врста):

$$P_1 = \begin{pmatrix}
0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
& & \vdots & & \\
1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
& & \vdots & & \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}$$

- $P_1 A$
- инверз: $P_1^{-1} = P_1$

- L_1 - састоји се од множитеља

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ -l_{21} & 1 & & & \\ -l_{31} & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -l_{n1} & \cdots & & & 1 \end{pmatrix}$$

-инверз:

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ +l_{21} & 1 & & & \\ +l_{31} & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ +l_{n1} & \cdots & & & 1 \end{pmatrix}$$

- $l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$

- $L_1 P_1 A = A_1$

=> новонастала матрица:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & x & \cdots & x \\ 0 & x & \cdots & x \\ 0 & x & \cdots & x \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & x & \cdots & x \end{pmatrix}$$

- x - неки бројеви (различити)

- после j корака:

$$(A_j \,;\, b_j) = \left(\begin{array}{c} \\ j \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & \\ 0 & \cdots & x \end{matrix}} & \begin{matrix} x & \cdots & x \\ \\ x & \cdots & x \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} x & \cdots & x \\ \vdots & & \vdots \\ x & \cdots & x \end{matrix} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}\right)$$

$$L_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -l_{j+1,j} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & -l_{nj} & & 1 \end{pmatrix}$$

$l_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}$, $i > j$

- после n-1 корака:

$(A_{n-1} \,;\, b_{n-1}) = (U, d)$

$\underline{L_{n-1} P_{n-1} \cdots (L_2 P_2 (L_1 P_1 A)) = U}$

- $P_j = I$, не вршимо пивотирање, само бирамо први у горњем левом ћошку

$(L_{n-1} \cdot \ldots \cdot L_1) A = U$

$$A = (L_{n-1} \cdot \ldots \cdot L_1) U = \underbrace{L_1^{-1} \cdot \ldots \cdot L_{n-1}^{-1}}_{L \text{ нова матрица}} \cdot U = \underline{\underline{LU}}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

* $\det A = ?$

$$\det A = (-1)^k \cdot \underbrace{u_{11} \cdot \ldots \cdot u_{nn}}_{\text{производ елемената по дијагонали (главној)}} , \quad k - \text{број пермутација}$$

(колико смо пута мењали врсте)

* $A^{-1} = ?$

$A \cdot A^{-1} = I$

$$A \cdot [\underbrace{x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_n}_{\text{вектори колона}}] = [e_1, \ldots, e_n] \qquad e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$$

$\underbrace{A \cdot x_k = e_k}_{\text{матрица } A \text{ је увек иста, само је десна страна различита}}$, $k = \overline{1,n}$ $\quad (\Longleftrightarrow Ax = b)$

налажење n-система линеарних ј-на

2. Гаус-Жорданова метода

- постоји само 1 разлика у односу на претх. методу
- $Ax = b \longrightarrow Ux = d$
- бирамо за пивота максимум по модулу: $a_{pq} = \max\limits_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|$
- чистимо колону пивота и бирамо следећи пивот од преосталих, али без врсте у којој се налазе претходни пивоти
- добијамо дијагоналан систем

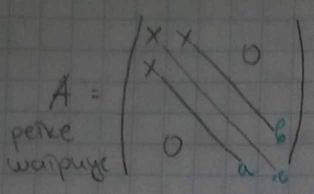
чистимо, остају једнаки нули

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & \boxed{a_{2n}}^{2} \\ 0 & & \cdot & 0 & & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & {}^{1}\boxed{a_{pq}} & \cdot & 0 \\ 0 & & \cdot & 0 & & 0 \\ {}^{3}\boxed{a_{n1}} & a_{n2} & \cdot & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \times \\ \\ \times \\ \\ \times \ \text{итд} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

3. Решавање система линеарних ј-на са тродијагоналном матрицом

$Ax = d$ специјални систем



– матрица A има само 3 дијагонале

• Томасов алгоритам:

- c - главна дијагонала a - доња b - горња дијагонала
- $\underline{c_1 \neq 0}$

(1) $c_1 x_1 + b_1 x_2 = d_2$

(2) $a_i x_{i-1} + c_i x_i + b_i x_{i+1} = d_i, \quad i = \overline{2, n-1}$

(3) $a_n x_{n-1} + c_n x_n = d_n$

} тродијагоналан систем

$$\Rightarrow \quad x_1 = \underbrace{-\frac{b_1}{c_1}}_{\alpha_2} x_2 + \underbrace{\frac{d_1}{c_1}}_{\beta_2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \alpha_2 x_2 + \beta_2$$

- убацимо x_1 у (2), x_2 у (3) ...

• општи случај:

$x_{i-1} = \alpha_i x_i + \beta_i$ → убацујемо у ј-ну (2)

$$\Rightarrow \quad a_i(\alpha_i x_i + \beta_i) + c_i x_i + b_i x_{i+1} = d_i$$

$$\Rightarrow \quad (c_i + a_i \alpha_i) x_i + b_i x_{i+1} + a_i \beta_i = d_i$$

$$\Rightarrow \quad x_i = \underbrace{\frac{-b}{c_i + a_i \alpha_i}}_{\alpha_{i+1}} x_{i+1} + \underbrace{\frac{d_i - a_i \beta_i}{c_i + a_i \alpha_i}}_{\beta_{i+1}}$$

__I корак:__ $\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}, \quad i = 2, \dots, n-1$

- прво проналазимо алфе и бете (написати општу a, b, c па их можемо наћи)

__II корак:__

- тражимо x. Кренемо од (3) и $x_{n-1} = \alpha_n x_n + \beta_n$:

$$a_n(\alpha_n x_n + \beta_n) + c_n x_n = d_n \quad \Rightarrow \quad x_n = \underbrace{\frac{d_n - a_n \beta_n}{c_n + a_n \alpha_n}}_{\beta_{n+1}}$$

- кад нађемо x_n, налазимо уназад $x_{n-1}, \dots, x_1$ по рекурентној ф-ли

4. LU - декомпозиција

- код Гаусове методе смо добили:

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & & u_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- $Ax = b \Rightarrow L\underbrace{Ux}_{} = b$

  (1) $Ux = y \Rightarrow$ (2) $Ly = b$

  - нађемо y па се вратимо у (1) и нађемо x

- $LU = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \boxed{a_{ij}} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \to$ i-та врста из L x j-та колона из U

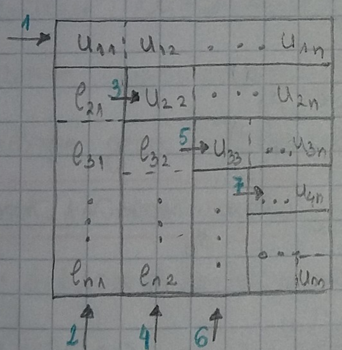
  $$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} \underbrace{l_{ik}}_{?} \cdot \underbrace{u_{kj}}_{?}$$ алгебарско множење матрица

- прва врста матр. A = прва врста матр U: $u_{1i} = a_{1i}$
- прва колона матр. $L = \dfrac{\text{прва колона матр. } A}{u_{11}}$: $l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{u_{11}}, \; i \geq 2$

* Крутов алгоритам:

- наизменично попуњавамо врсте и колоне

  врсте $\downarrow$ u-овима, колоне $\downarrow$ l-овима



- $\min\{i,j\} = i$:

  издвајамо последњи

  $$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj} + \underbrace{l_{ii}}_{1} u_{ij}$$

  $$\Rightarrow u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}, \quad j = i, \dots, n$$

- $\min\{i,j\} = j$:

  $$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} + l_{ij} \cdot u_{jj}$$

  $$\Rightarrow l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right), \quad i = j+1, \dots, n$$

* $\det A = \det(LU) = \underbrace{\det L}_{1} \cdot \det U = u_{11} \cdot \ldots \cdot u_{nn}$

  на дијаг. су само јединице

* $A^{-1} = ?$

$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow A x_k = e_k \Rightarrow LU x_k = e_k \;,\; k = \overline{1,n}$

$\Rightarrow U x_k = y_k$

$L y_k = e_k$

* Да ли свака квадратна матрица може да се напише у облику: $A = LU$?

→ Не, али ако A не можемо да напишемо као: $A = LU$, могуће је неку пермутацију матр. A написати у том облику.

$$PA = LU$$

• сложенији систем: $\underbrace{PA}x = \underbrace{Pb} \Rightarrow \underbrace{LU}x = \underbrace{b_1}$

* Када засигурно важи да је $A = LU$ (без да пермутујемо)?

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}$$

A_{11} : $j \times j$ - блок матрице A (минор)

$\Rightarrow A_{11} = L_{11} U_{11}$

$\det A_{11} = \cancel{\det L_{11}}^{1} \cdot \det U_{11} = u_{11} \cdot \ldots \cdot u_{jj} \Rightarrow u_{jj} = \dfrac{\det A_1^{(j)}}{\det A_1^{(j-1)}}$

• дијагонални елементи матр. U = количници детерминанти главних минора ($\neq 0$) ($\det A_i \neq 0$)

$\Rightarrow$ тада немамо пермутацију за матр. A, већ може да се напише у облику: $A = LU$.

5. Чолески декомпозиција (специјалан случај претходног)

• имамо додатни услов: A је Хермитова позитивно дефинитна матрица

– сви минори су > 0

– $A = A^*$

• $a_{ij} \in \mathbb{R}$: $A = A^* = A^T$

$$A = LL^* = LL^T = \begin{pmatrix} \ell_{11} & & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \\ \vdots & & \ddots \\ \ell_{n1} & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{11} & \cdots & \ell_{n1} \\ & \ell_{22} & \vdots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ell_{nn} \end{pmatrix} \qquad a_{11} = \ell_{11}^2 \Rightarrow \ell_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

• $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}$ – прва колона матрице L

• $a_{ii} = l_{i1}^2 + \ldots + l_{ii}^2 \rightarrow l_{ii}^2 = \sqrt{a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}^2}$

• l_{ij}, $i > j$

$$a_{ij} = l_{i1} \cdot l_{j1} + l_{i2} l_{j2} + \ldots + l_{ii} \cdot l_{ij}$$

$$\Rightarrow l_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot \underset{l_{jk}}{\underset{\parallel}{l_{kj}}} \right)$$

* $Ax = b$: $LL^T x = b \Rightarrow (2)\ L^T x = y \quad (1)\ Ly = b$

* $\det A = \det L \cdot \det L^T = (l_{11} \cdot \ldots \cdot l_{nn})^2$

– код коњугованих компл. бројева имамо квадрат модула

17.12.2019.

Итеративне методе за решавање система лин. ј-на

~ Нумеричка стабилност ~

* Систем линеарних ј-на је стабилан ако малим променама улазних параметара (то су елементи матрице система A и елементи вектора десне стране b) одговарају мале промене решења x.

* $\boxed{\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|}$ – условљеност матрице система

• $\det A \neq 0$ – регуларна матр. ⇒ јединствено решење X

• $\det A = 0$ – сингуларна матр. ⇒ или немамо решење или имамо бесконачно много решења

• Условљеност је број којим се мери стабилност система

– мања условљеност ⇒ већа стабилност

• $\text{cond}(I) = 1$

• $\text{cond}(A) = \infty$ ако је A сингуларна матр.

• $1 \leq \text{cond}(A) < \infty$:

$$\infty > \text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \|A \cdot A^{-1}\| = \|I\| = 1$$

* Како релативна грешка утиче на стабилност?

(1) $Ax = b$ → тачно решење

(2) $Ax' = b'$ → приближно решење

• (1) − (2): $A(x-x') = b-b' \Rightarrow x-x' = A^{-1}(b-b') \Rightarrow \|x-x'\| = \|A^{-1}(b-b')\|$

$\Rightarrow \|x-x'\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|b-b'\|$ (а)

• $Ax = b \Rightarrow \|Ax\| = \|b\| \Rightarrow \|A\| \cdot \|x\| \ge \|b\|$ (б)

$$\Rightarrow \frac{\|x-x'\|}{\|A\| \cdot \|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|b-b'\|}{\|b\|} \quad / \cdot \|A\|$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\|x-x'\|}{\|x\|}}_{\text{релативна грешка}} \le \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{} \cdot \underbrace{\frac{\|b-b'\|}{\|b\|}}_{\text{релативна грешка}} \quad \Rightarrow \quad \delta(x') \le cond(A) \cdot \delta(b')$$

=> релативна грешка система и условљеност су сразмерни

Нпр. $\delta(b') = 10^{-k}$ - радимо са k децимала

$cond(A) = 10^{p}$

$10^{-k} \cdot 10^{p} = 10^{-(k-p)}$ - сада радимо са $k-p$ децимала и губимо на тачности

ИТЕРАТИВНЕ МЕТОДЕ

* Задатак: решити систем $Ax = b$

• Преводимо у облик: $x = Bx + c$

• $x_{m+1} = Bx_m + c$, $m = 0, 1, \dots$ итеративни процес

- B, c - матрице
- x_m - вектори

• $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^{m+1}$ → итерација

* $x = Bx + c$ тј. $x = G(x)$, G - линеарна операција

• $x_{m+1} = G(x_m)$ → двослојна итеративна стационарна метода

• $x_{m+1} = G(x_m, x_{m-1}, \dots, x_0)$ → вишеслојна метода

• $x_{m+1} = G_m(x_m, \dots, x_0)$ → вишеслојна метода и у свакој итерацији имамо други алгоритам (нестационарна)

Теорема Нека систем $Ax=b$ има јединствено решење. Тада итеративни процес $x_{m+1} = Bx_m + c$ конвергира ка том решењу за сваки почетни вектор x_0 акко су све сопствене вредности матрице B по модулу мање од 1 тј. $|\lambda_i|<1$.

• даје неопходне и довољне услове

доказ

$\boxed{\Rightarrow}$ Треба доказати: $|\lambda_i|<1$. Пнс: $(\exists\lambda_0)\ |\lambda_0|\geq 1$. v_0 - одговарајући сопствени вектор. $Bv_0=\lambda_0 v_0$

$x_m - x = Bx_{m-1} + \cancel{c} - (Bx+\cancel{c}) = B(x_{m-1}-x) =$ (понављамо m пута) $=$

$= B^m(x_0-x) = B^m v_0 \Rightarrow \lambda_0^m v_0 \not\xrightarrow{m\to\infty} 0 \Rightarrow x_m$ не конвергира ка x ↯

x_0 - произв.
$x_0 = x+v_0$

$B \backslash Bx=\lambda x$
$B^2x = B\lambda x = \lambda Bx = \lambda\lambda x = \lambda^2 x$

$\boxed{\Leftarrow}$ Треба доказати да итеративни процес конвергира, а знамо да $|\lambda_i|<1$. $x_m - x = B^m(x_0-x) \xrightarrow{m\to\infty} 0 \Rightarrow x_0 - x \not\to 0 \Rightarrow B^m \to 0$.

довољно је то доказати

Важи: $B = C^{-1}JC$, за неку регуларну матрицу C, J - Жорданова матрица. B и J су сличне.

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_n \end{pmatrix}$$ J_i - основни Жорданови блокови $$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$B^m = C^{-1}J^mC \Rightarrow J^m = \begin{pmatrix} J_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_n^m \end{pmatrix} \Rightarrow J_i^m = \begin{pmatrix} \lambda_i & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}^m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_i^m = \begin{pmatrix} \lambda_i^m & & \lambda^p \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i^m \end{pmatrix}$$

$m\to\infty$ и $|\lambda_i|<1 \Rightarrow J_i^m \to 0 \Rightarrow J^m$ нула матрица $\Rightarrow B^m = 0$.

Теорема Ако је нека норма матрице B (сагласна са неком нормом вектора) мања од 1, тада итеративни процес конвергира.

доказ

$Ax=b$. $x=Bx+c$. $\|Bx\| \leq \|B\|\cdot\|x\|$ ← норме су сагласне.

$$\underbrace{|\lambda|\cdot\|x\| = \|\lambda x\| = \|Bx\| \leq \overset{<1}{\|B\|}\cdot\|x\|}_{\text{одавде следе}} < \|x\| \Rightarrow |\lambda|<1$$ и из претходне ТНА важи тврђење

1. Метода просте итерације (Јакобијева метода)

- $Ax = b$

$$a_{11}\boxed{x_1} + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}\boxed{x_2} + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}\boxed{x_n} = b_n$$

k-та итерација

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^k - \dots - a_{1n}x_n^k\right)$$
$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^k - \dots - a_{2n}x_n^k\right)$$
$$\vdots$$
$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^k - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^k\right)$$

- матрични облик:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & & 0 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^{k} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{b_{1}}{a_{11}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}}_{C} \qquad X^{k+1} = B \cdot X^k + C$$

- Да би конвергирало мора да важи: $\|B\| < 1$.
  - $\|B\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$ - сабирамо елементе по врстама и узимамо max
  - $\|B\|_\infty = \max\limits_{i} \sum_{j=1, j\ne i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| = \max\limits_{i} \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=1, j\ne i}^{n} |a_{ij}| < 1$ важи ако:

$$(\forall i)\ \frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j=1, j\ne i}^{n} |a_{ij}| < 1 \ \ /\cdot|a_{ii}| \Rightarrow \boxed{\sum_{j=1, j\ne i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|}$$

дијагонална доминантност

- овај закључак је везан за полазну матрицу, а не матрицу B

* Ако је матрица дијагонално доминантна, имамо конвергенцију. Иначе, вршимо трансформацију над матрицом/системом како би била.

* $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{1-q}{q}\varepsilon$ → апостериорна оцена грешке (критеријум заустављања)

- $q = \|B\|_\infty < 1$

- $x = Bx + c = G(x)$

Посматрамо: $G(x) - G(y) = Bx + \cancel{c} - By - \cancel{c} = B(x-y)$

$$\|G(x) - G(y)\| = \|B(x-y)\| \leq \underbrace{\|B\|}_{<1} \cdot \|x-y\|$$

$\Rightarrow$ G је контракција

тм. о непокретној тачки

$\Rightarrow$ имамо конвергенцију (додатно објашњење зашто је $\|B\| < 1$)

* $\underset{\sim}{A}x = b$ (нема везе са LU декомп.)

$\Rightarrow (L + D + U) \cdot x = b$, L - матрица која има само доње елем. из A; D - матрица која има само елем. на дијагонали; U - матр. која има само горње елем. из A (остали су једнаки 0)

$\Rightarrow Dx + (L+U)x = b$

$\Rightarrow Dx = b - (L+U)x$

$\Rightarrow x = \underbrace{D^{-1}b}_{c} - \underbrace{D^{-1}(L+U)x}_{Bx}$

$\Rightarrow x = c + Bx$

2. Гаус-Зајделова метода итерације

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{k} - \dots - a_{1n}x_n^{k}\right)$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - \dots - a_{2n}x_n^{k}\right)$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - \dots - a_{3n}x_n^{k}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{k+1} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1}\right)$$

- сваки пут се дати елемент рачуна на основу последње израчунатог из претходног или тренутног итеративног процеса
- брже конвергира

- матрично: $Ax = b \Rightarrow (L + D + U)x = b \Rightarrow (L+D)x = -Ux + b$

$$\Rightarrow x = \underbrace{(L+D)^{-1}(-Ux)}_{Bx} + \underbrace{(L+D)^{-1}b}_{c}$$

- критеријум заустављања је исти као код претх. методе
- важи све исто за дијагоналну доминантност