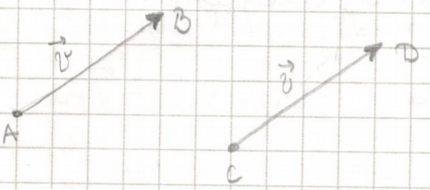
08.10.2018.

1) Вектори и трансформација координата



еквивалентне усмерене дужи (имају исти и, п, с)

• примери векторских величина: брзина, убрзање, сила, момент силе...

* Кажемо да је усмерена дуж AB представник вектора $\vec{AB}$
* Нула вектор има интензитет једнак нула и нема дефинисан правац и смер. $\vec{0}$
* Супротан вектор има исти интензитет и правац, али супротан смер.
* Колинеарни вектори – њихови представници имају исти правац (паралелни су истој правој) $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$
* Компланарни вектори – њихови представници су паралелни истој равни.

• нула вектор је колинеаран и компланаран са било којим вектором $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$

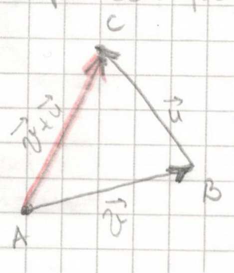
Деф Вектор је класа еквиваленције усмерених дужи које имају исти правац (паралелне), интензитет (дужина $|AB|$) и смер

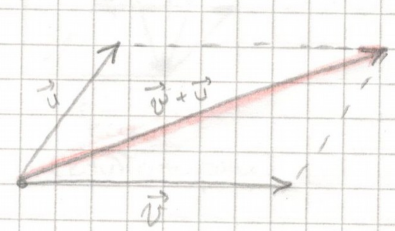
* Скуп свих вектора означавамо са V тј. V^n ако желимо да истакнемо димензију простора од кога је настао

* Линеарне операције са векторима:

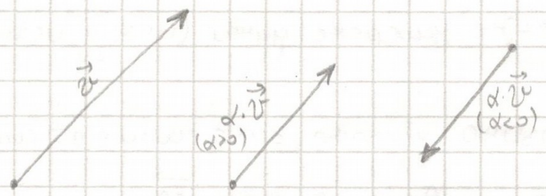
Деф Нека су $\vec{u},\vec{v}\in V$ вектори представљени са $\vec{v}=\vec{AB}$, $\vec{u}=\vec{BC}$. Збир вектора $\vec{v}+\vec{u}$ је вектор $\vec{w}=\vec{AC}$.

• Векторе сабирамо „надовезивањем" или правилом паралелограма



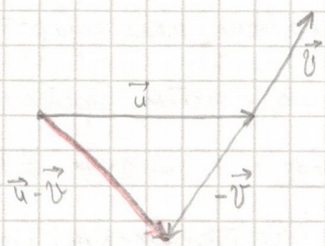


Деф Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\vec{v} \in V$ (вектор). **Производ броја и вектора** је вектор $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$ који има исти правац као $\vec{v}$, интензитет $|\vec{u}| = \underbrace{|\alpha|}_{\text{апс. вр}} \cdot \underbrace{|\vec{v}|}_{\text{инт.}}$, а смер је исти као смер $\vec{v}$ ако је $\alpha > 0$, или супротан ако је $\alpha < 0$.

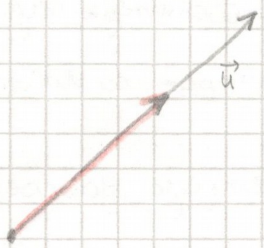


- **Разлика** два вектора је збир вектора $\vec{u}$ и вектора $-\vec{v}$:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} + (-1)\cdot\vec{v}$$



- **Јединични вектор**:



$$\boxed{\vec{v} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}}$$

вектор дужине један

Теорема Ако су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in V$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тада важи:

(C1)	$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$	(M1)	$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
(C2)	$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$	(M2)	$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$
(C3)	$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$	(M3)	$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
(C4)	$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$	(M4)	$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

* Ако су $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ и $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\in V$, тада се израз $\alpha_1\vec{v}_1+\dots+\alpha_n\vec{v}_n$ назива линеарна комбинација вектора.

Деф Вектори $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$ су линеарно независни ако из релације $\alpha_1\vec{v}_1+\dots+\alpha_n\vec{v}_n=0 \Rightarrow \alpha_1=\dots=\alpha_n=0$.
У супротном, када је бар један од бројева $\alpha_i\neq 0$, вектори су линеарно зависни.

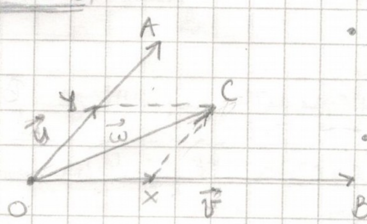
- вектори одређени страницама троугла су лин. зависни
- вектори су лин. зависни акко се неки вектор може изразити као линеарна комбинација преосталих
- ако је неки од вектора нула вектор, вектори су лин. зависни

Теорема Ненула вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су лин. зависни акко су колинеарни.

Теорема (*) У равни постоје 2 лин. независна вектора, а свака 3 вектора равни су лин зависна.

Теорема У простору постоје 3 лин. независна вектора, а свака 4 вектора су лин. зависна

(*) Доказ

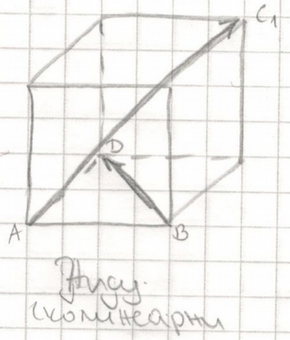


- $\vec{v},\vec{u},\vec{w}$ су 3 произвољна вектора у простору доведена на исту почетну тачку O.
- OXCY је паралелограм

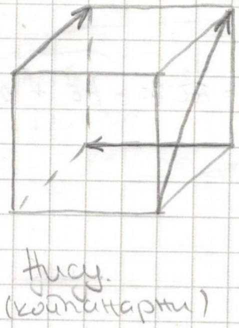
$\vec{w}=\vec{OX}+\vec{XC}=\vec{OX}+\vec{OY}=\alpha\cdot\vec{v}+\beta\vec{u}$

$\alpha\vec{v}+\beta\vec{u}\underbrace{-1}_{\neq 0}\vec{w}=\vec{0} \Rightarrow \vec{v},\vec{u},\vec{w}$ су лин. зависни

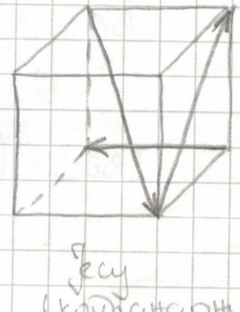
Пример Да ли су следећи вектори колинеарни? компланарни



Јесу (колинеарни)



Нису (компланарни)



Јесу (компланарни)

~ Координате ~

* Векторски простор $(V, +, \cdot)$ - скуп вектора
* База векторског простора - максималан скуп линеарно независних вектора (минималан генераторни скуп)
  * није јединствена (тј. скуп вектора који чине базу нису јединствени)
* Димензија вект. простора - број елемената базе

Последица: Димензија векторског простора вектора равни V^2 је два.
Сваки вектор $\vec{v} \in V^2$ може да се напише у облику:

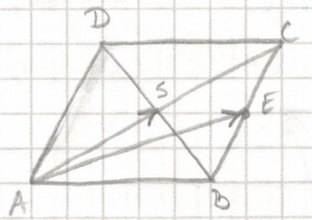
$$\boxed{\vec{v} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}}$$

где је $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ база вект. простора V^2, а $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ јединствени бројеви. ($\underbrace{\vec{e}_1, \vec{e}_2}$ су лин. нез.)

* Ако фиксирамо базу $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ равни, на основу претходне формуле, сваком вектору $\vec{v}$ равни можемо да придружимо пар бројева (x_1, x_2). Тај пар зовемо координате вектора $\vec{v}$ у бази e:

$$\boxed{[\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \qquad (= (x_1, x_2)^T)$$

Пример: Дат је паралелограм ABCD. Нека је E средиште странице BC и S пресек дијагонала AC и BD. Одреди координате вектора $\vec{BE}$ у бази $e = (\vec{AE}, \vec{AS})$.



$E = S(BC)$
$S = AC \cap BD$

$\vec{BE} = -1 \cdot \vec{AE} + 2 \cdot \vec{AS}$

$\hookrightarrow \vec{BE} = \vec{EC} = \vec{EA} + \vec{AC} = -\vec{AE} + 2\vec{AS}$

$[\vec{BE}]_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

* $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ - база векторског простора V
* $O \in \mathbb{E}$ је фиксирана тачка коју зовемо координатни почетак

=> O_e је координатни систем тј. репер простора $\mathbb{E}$

↳ чине га база + коорд. почетак

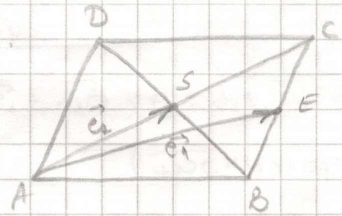
Деф Координате тачке $X \in \mathbb{E}$ у реперу O_e дефинишемо као координате вектора $\vec{OX}$ у бази e:

$$\boxed{[X]_{O_e} := [\vec{OX}]_e}$$

* Веза координата вектора и тачака – у пракси се често користи чињеница да се координате вектора $\vec{MN}$ добијају одузимањем координата тачке M од координата тачке N:

$$[\vec{MN}]_e = [\vec{MO} + \vec{ON}]_e = [\vec{ON}]_e - [\vec{OM}]_e = [N]_{O_e} - [M]_{O_e}$$

пример Одредити координате темена паралелограма из прет. примера у реперу A_e (=> A је коорд. почетак).



$$[A]_{A_e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[C]_{A_e} = [\vec{AC}]_e = [2\vec{AS}]_e = [0\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[B]_{A_e} = [\vec{AB}]_e = [\vec{AC} + \vec{CB}]_e = [2\vec{AE} - 2\vec{AS}] = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$[D]_{A_e} = [A]_{A_e} - [B]_{A_e} + [C]_{A_e} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

• $[D]_{O_e} = [A]_{O_e} + [C]_{O_e} - [B]_{O_e}$ - важи у свим задацима са паралелограмом

• $\vec{OC} = \frac{q}{p+q}\vec{OA} + \frac{p}{p+q}\vec{OB}$

(+) = 1 (*)

ако су ова >0 => C је између A, B

(*) тачке су колинеарне

~ Производи ~

Деф Скаларни производ вектора је (линеарна) операција која узима 2 вектора и додељује им број:

$$\vec{u}, \vec{v} \in V: \quad \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} := |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})}$$

- једнак је нули акко $\vec{u} \perp \vec{v}$ (ортогонални вектори)
- Примене скаларног производа:
  - дужине: $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$
  - углови: $\measuredangle(\vec{v}, \vec{u}) = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}||\vec{u}|}$

    (усмерење угла није битно јер је косинус парна ф-ја)

Теорема (Особине скаларног производа)

Нека су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in V$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада важи:

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (комутативност)
2) $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{w})$ (линеарност)
3) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \geq 0$ (позитивност)
4) $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ акко је $\vec{u} = \vec{0}$ (недегенерисаност)

* Ортонормирана база је таква база $e = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ за коју важи:

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

тј. базни вектори су међусобно ортогонални (нормални) и сваки вектор је дужине један.

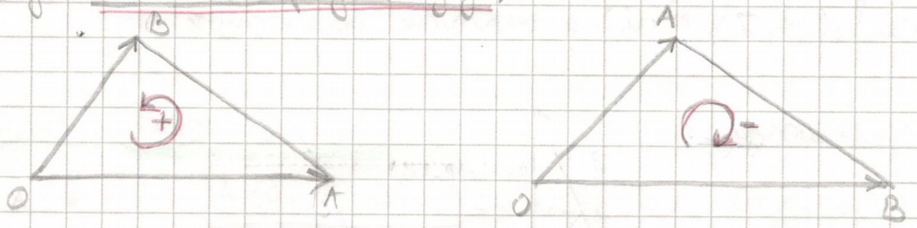
$\vec{v} = v_1\vec{e_1} + \ldots + v_n\vec{e_n}$, $\vec{u} = u_1\vec{e_1} + \ldots + u_n\vec{e_n}$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + \ldots + v_n u_n = (v_1, \ldots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = [\vec{v}]_e^T \cdot [\vec{u}]_e$$

* Појам **оријентације** уводимо интуитивно.

(оријентација равни)

- Кажемо да је ΔOAB **позитивне оријентације** ако је смер обиласка темена супротан смеру кретања казаљке на сату. Иначе, Δ је **негативне оријентације**.

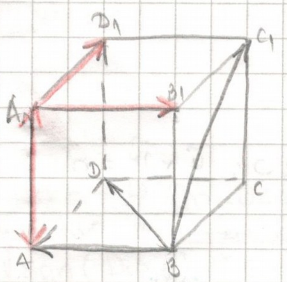


- База $e=(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ је позитивне оријентације ако је ΔOAB позитивне оријентације.

(оријент. простора)

- База $e=(e_1, e_2, e_3)$ је **позитивне оријентације** ако важи **правило руке**: „ако испружени кажипрст руке представља вектор $\vec{e_1}$, средњи прст вектор $\vec{e_2}$, а палац вектор $\vec{e_3}$, онда је база $e=(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ позитивне оријентације."

Пример Дата је коцка. Одреди оријентацију оријентисане базе $e=(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, $\vec{e_1} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{A_1D_1}$, $e_3 = \overrightarrow{A_1A}$ ако је база $f=(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC_1})$ позитивне оријент.

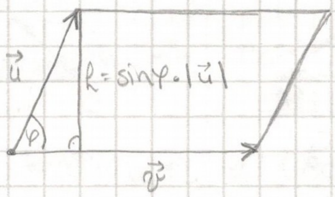


$e=(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ је негативне оријентације

Деф Векторски производ је операција која двама векторима простора $\vec{v}$ и $\vec{u}$ додељује вектор $\vec{v}\times\vec{u}$ који је одређен сл. особинама:

1. интензитет: $|\vec{v}\times\vec{u}| = |\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\sin\measuredangle(\vec{v},\vec{u})$
2. правац: вектор $\vec{v}\times\vec{u}$ је $\perp$ на сваки од вектора $\vec{v}$ и $\vec{u}$
3. смер: база $(\vec{v},\vec{u},\vec{v}\times\vec{u})$ је позитивне оријентације

• Геометријска интерпретација:



$P_{\square} = P(\vec{u},\vec{v}) = a\cdot h =$

$= |\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\,\underbrace{\sin\measuredangle(\vec{v},\vec{u})}$

не може да буде <0
јер су сви углови $<180^\circ$

Теорема (Особине векторског производа)

1) $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$ (антикомутативан)
2) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}+\vec{w})$ (дистрибутиван) } (линеарн
3) $(\alpha\cdot\vec{u})\times\vec{v} = \alpha(\vec{u}\times\vec{v})$
4) $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})+\vec{v}\times(\vec{w}\times\vec{u})+\vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{v})=0$ (Јакобијев идентитет)
   - није асоцијативан
   - није комутативан
5) ако је $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{u}\times\vec{w}$ и $\vec{u}\neq\vec{0}$, тада је:
   - $(\vec{u}\times\vec{v})-(\vec{u}\times\vec{w})=0$
   - $\vec{u}\times(\vec{v}-\vec{w})=0$
6) два вектора разл. од нуле су паралелни акко: $\vec{u}\times\vec{v}=0$
7) једнак је нули акко $\vec{u}=\alpha\cdot\vec{v}$ (вектори су лин. зависни)
8) постоји само у димензији 3

* $e=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ - ортонормирана база позитивне оријентације

$\times$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1$	$\vec{0}$	$\vec{e}_3$	$-\vec{e}_2$
$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_3$	$\vec{0}$	$\vec{e}_1$
$\vec{e}_3$	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_1$	$\vec{0}$

$\vec{v} = v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2+v_3\vec{e}_3$, $\vec{u} = u_1\vec{e}_1+u_2\vec{e}_2+u_3\vec{e}_3$

$$\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

* Матрична репрезентација матричног множења:

• множење вектором $\vec{p}$, $[\vec{p}]_e = (p_1, p_2, p_3)$

$$\vec{p} \times \vec{v} := p_\times \cdot [\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

* Примене векторског производа:

$A, B, C \in \mathbb{E}^2$; $A(a_1, a_2, 0)$, $B(b_1, b_2, 0)$, $C(c_1, c_2, 0)$:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC} \vec{e_3}$$

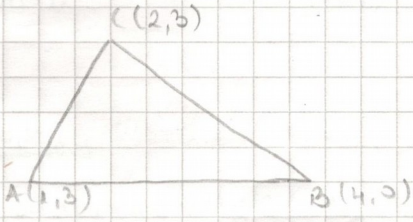
оријентисана површина

• Важи:

- $\boxed{P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |D_{ABC}|}$
- $\boxed{A, B, C \text{ - колинеарне} \iff D_{ABC} = 0}$
- $\boxed{\Delta ABC \text{ - позитивно оријентисан ако } D_{ABC} > 0}$

- 3 тачке су колинеарне акко не чине $\Delta \Rightarrow D_{ABC} = 0$.
$\vec{AB} \times \vec{AC} = \vec{0}$

Пример Одреди $P_{\Delta ABC}$, $A(1,3)$, $B(4,0)$, $C(2,3)$. Да ли је Δ поз. оријентације?

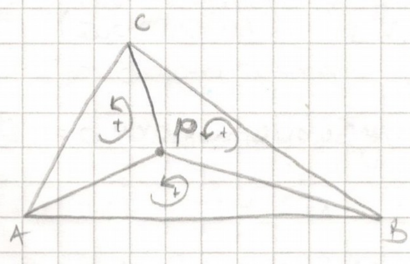


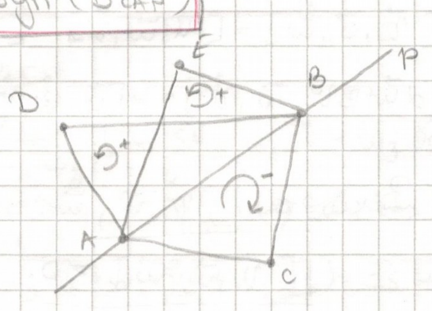
$$D_{ABC} = \begin{array}{r} [\vec{AB}] \rightarrow \\ [\vec{AC}] \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 > 0 \Rightarrow \text{позитивна оријентација}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |D_{ABC}| = \underline{\underline{3/2}}$$

Теорема Тачка P припада ΔABC акко:

$$\boxed{\operatorname{sgn}(D_{ABP}) = \operatorname{sgn}(D_{BCP}) = \operatorname{sgn}(D_{CAP})}$$





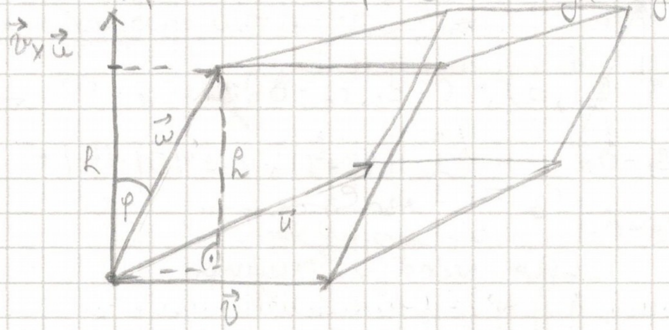
$\operatorname{sgn} D_{ABC} \neq \operatorname{sgn} D_{ABE} \Rightarrow C, E \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{-}} p$

$\operatorname{sgn} D_{ABD} = \operatorname{sgn} D_{ABE} \Rightarrow D, E \overset{\cdot\cdot}{-} p$

Деф Мешовити производ је операција која тројци вектора додељује број:

$$\boxed{[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] := (\vec{v}\times\vec{u})\cdot\vec{w}}$$

Теорема Апсолутна вредност мешовитог производа $[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]$ једнака је запремини паралелопипеда одређеног векторима $\vec{v},\vec{u},\vec{w}$.



$$V=V(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = B\cdot h = \underbrace{|\vec{v}\times\vec{u}|}_{B}\cdot\underbrace{\big||\vec{w}|\cdot\cos\measuredangle(\vec{w},\vec{v}\times\vec{u})\big|}_{h}$$

* Мешовити производ у ортонормираној бази:

$$[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Теорема (Особине мешовитог производа)

За векторе $\vec{v},\vec{u},\vec{w}\in V^3$ и $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ важи:

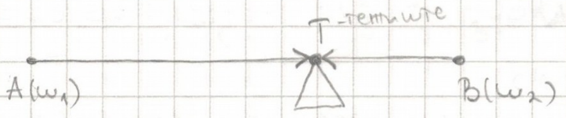
1) $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$ (антисим.)
2) $(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\times\vec{w} = \alpha(\vec{u}\times\vec{w})+\beta(\vec{v}\times\vec{w})$ (линеарност)
3) $[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = -[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ (антисим.)
4) $[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{w},\vec{v}] = [\vec{w},\vec{v},\vec{u}]$ (цикличност)
5) $[\alpha\vec{u}+\beta\vec{v},\vec{w},\vec{v}] = \alpha[\vec{u},\vec{w},\vec{v}]+\beta[\vec{v},\vec{w},\vec{v}]$ (линеарност)

Последица Вектори $\vec{v},\vec{u},\vec{w}$ су линеарно независни акко:

$$[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]\neq 0.$$

Последица Вектори $(\vec{v},\vec{u},\vec{w})$ простора, чине базу позитивне оријентације ако је $[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]>0$, а негативне оријентације ако је $[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]<0$.

~ Центар маса ~



$w_1, w_2 > 0$

$$|AT| : |TB| = w_2 : w_1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\boxed{w_1\vec{TA} + w_2\vec{TB} = \vec{0}}$$ ј-на равнотеже

($\vec{AT}$ и $\vec{BT}$ треба да се анулирају да били у равнотежи)

* O - произвољна тачка. Центар маса тачака $A(w_1)$ и $B(w_2)$:

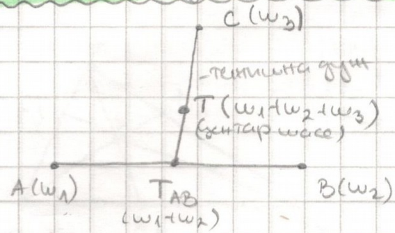
$$\boxed{\vec{OT} := \frac{1}{w_1 + w_2}\left(w_1\vec{OA} + w_2\vec{OB}\right)}$$ деф тежишта

• извођење:

$$\vec{0} = w_1\vec{AT} + w_2\vec{BT} = w_1(\vec{OT} - \vec{OA}) + w_2(\vec{OT} - \vec{OB}) = (w_1 + w_2)\vec{OT} - w_1\vec{OA} - w_2\vec{OB}$$

$$\Rightarrow (w_1 + w_2)\vec{OT} = w_1\vec{OA} + w_2\vec{OB}$$

* Тежиште и центар масе троугла



$$\boxed{\vec{OT} := \frac{1}{w_1 + w_2 + w_3}\left(w_1\vec{OA} + w_2\vec{OB} + w_3\vec{OC}\right)}$$

$$\vec{OT_{AB}} = \frac{1}{w_1 + w_2}\left(w_1\vec{OA} + w_2\vec{OB}\right)$$

$$\vec{OT} = \frac{1}{w_1 + w_2 + w_3}\left((w_1 + w_2)\vec{OT_{AB}} + w_3\vec{OC}\right)$$

Теорема Тежишне дужи се секу у центру маса.

• за $w_1 = w_2 = w_3 = w$: центар маса = тежиште троугла!

* Центар маса n тачака:

$$\boxed{\vec{OT} := \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} w_k}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k\vec{OA_k}\right)}$$

Доказ (да не зависи од избора тачке)

$\exists$ S - произвољна тачка, $\vec{ST_1} := \frac{1}{w_1 + w_2 + w_3}\left(w_1\vec{SA} + w_2\vec{SB} + w_3\vec{SC}\right)$.

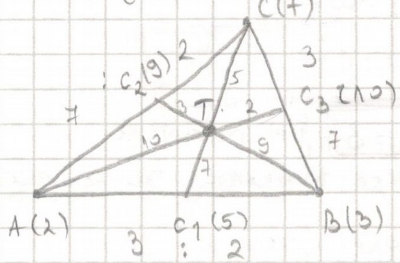
Хоћемо да докажемо да се T и T_1 поклапају ($T \equiv T_1 \Leftrightarrow \vec{TT_1} = \vec{0}$)

$$\vec{TT_1} = -\vec{OT} + \vec{OS} + \vec{ST_1} = -\frac{1}{w_1 + w_2 + w_3}\left(w_1\vec{OA} + w_2\vec{OB} + w_3\vec{OC}\right) + \vec{OS} + \vec{ST_1} =$$

$$= \frac{-1}{w_1 + w_2 + w_3}\left(w_1\vec{OA} + w_2\vec{OB} + w_3\vec{OC}\right) + \vec{OS} + \frac{1}{w_1 + w_2 + w_3}\left(w_1\vec{SA} + w_2\vec{SB} + w_3\vec{SC}\right) =$$

$$= \left(\frac{w_1}{w_1 + w_2 + w_3}\vec{SO} + \frac{w_2}{w_1 + w_2 + w_3}\vec{SO} + \frac{w_3}{w_1 + w_2 + w_3}\vec{SO}\right) + \vec{OS} = \vec{SO} + \vec{OS} = \vec{0}$$

Пример Дате су тачке са масама $A(2)$, $B(3)$, $C(7)$. Одреди у ком односу центар масе дели тежишне дужи ΔABC



$C_3T : TA = 2 : 10$

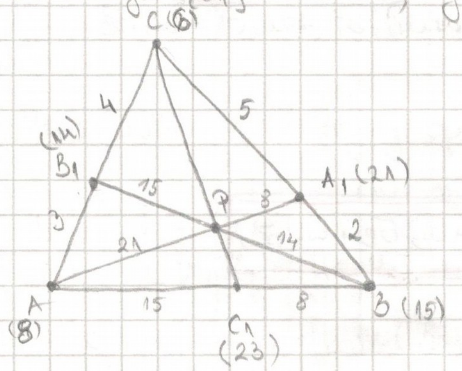
$C_2T : TB = 3 : 9$

$C_1T : TC = 7 : 5$

Пример Дат је ΔABC и на његовим ивицама тачке A_1 и B_1 такве да $|AB_1| : |B_1C| = 3 : 4$, $|BA_1| : |A_1C| = 2 : 5$.

А) ако је $\{P\} = AA_1 \cap BB_1$, у ком односу P дели AA_1 и BB_1?

б) ако је $\{C_1\} = CP \cap AB$, у ком односу C_1 дели AB?



А) $AP : PA_1 = 21 : 8$

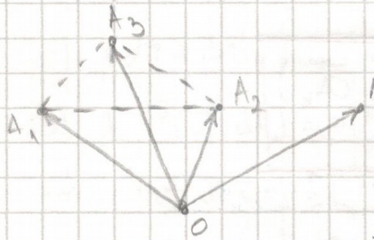
$BP : PB_1 = 14 : 15$

Б) $AC_1 : C_1B = 15 : 8$

* Барицентричке координате

• фиксирамо 3 тачке (троугао) и тачку ван тог Δ

• Хомогене:

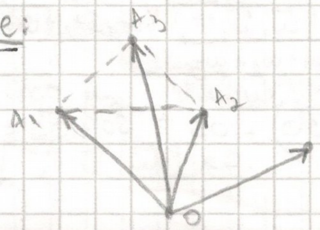


$M(\underbrace{w_1 : w_2 : w_3}_{\text{међусобно нескративи}}) \sim (\lambda w_1 : \lambda w_2 : \lambda w_3)$, $\lambda \neq 0$

$$\vec{OM} = \frac{1}{w_1 + w_2 + w_3}\left(w_1 \vec{OA_1} + w_2 \vec{OA_2} + w_3 \vec{OA_3}\right)$$

- Поставимо масе у 3 фиксиране тачке тако да тражена тачка постане центар масе тог Δ

• Нехомогене:



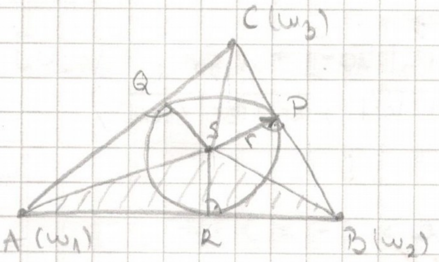
$\overbrace{M(w_1, w_2, w_3)}^{\text{све су јединствене}}$, $w_1 + w_2 + w_3 = 1$

$$\vec{OM} = w_1 \vec{OA_1} + w_2 \vec{OA_2} + w_3 \vec{OA_3}$$

<u>Пример</u> За ΔABC барицентричке координате тежишта су $T(1:1:1)$ (хомогене), тј. $T(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (нехомогене)

- Ако су све 3 координате истог знака $\Rightarrow$ тачка је у Δ
- Ако је нека $= 0 \Rightarrow$ тачка је на некој страници

<u>Пример</u> Одр. координате центра уписаног круга у ΔABC.



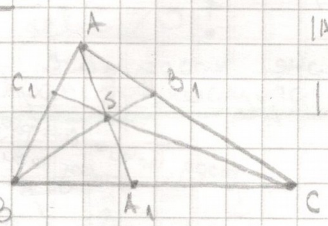
S-центар уписаног круга (пресек симетр. $\measuredangle$)

$P_{\Delta SAB} = \frac{r}{2}|AB|$, $P_{\Delta SBC} = \frac{r}{2}|BC|$, $P_{\Delta SCA} = \frac{r}{2}|CA|$

$S(w_1+w_2+w_3) \to$ маса S

$$w_1 P_{\Delta SBC} + w_2 P_{\Delta SCA} + w_3 P_{\Delta SAB} = \frac{w_1 r}{2}|CB| + \frac{w_2 r}{2}|CA| + \frac{w_3 r}{2}|AB|$$

- одређујемо w_1, w_2, w_3 тако да S-центар масе



$|AB| = \frac{1}{c}$

$|AC| = \frac{1}{b}$

$\vec{AA_1} = \lambda\left(\frac{\vec{AB}}{c} + \frac{\vec{AC}}{b}\right)$ $\quad \vec{BA_1} = w \cdot \vec{BC} = w(\vec{AC} - \vec{AB})$

$\vec{AA_1} = \vec{AB} + \vec{BA_1}$

$$\vec{AA_1} = \vec{AB} + w\vec{BC} = \vec{AB} + w(\vec{AC} - \vec{AB}) = (1-w)\vec{AB} + w\vec{AC}$$

$\vec{AB}: \frac{\lambda}{c} = 1 - w \qquad \vec{AC}: \frac{\lambda}{b} = w$

$\frac{\lambda}{c} = 1 - \frac{\lambda}{b} \qquad \lambda\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1 \qquad \boxed{\lambda = \frac{bc}{b+c}} \qquad \boxed{w = \frac{c}{b+c}}$

$\Rightarrow \vec{AA_1} = \frac{b}{b+c}\vec{AB} + \frac{c}{b+c}\vec{AC}$, $\quad \vec{BB_1} = \frac{a}{a+c}\vec{BC} + \frac{a}{a+c}\vec{BA}$, $\quad \vec{CC_1} = \frac{a}{a+b}\vec{CA} + \frac{b}{a+b}\vec{CB}$

$AA_1 \cap BB_1 = \{S\}$

$\vec{AB} + \vec{BS} + \vec{SA} = \vec{0}$

$\vec{AS} = \alpha\vec{AA_1} = \frac{\alpha b}{b+c}\vec{AB} + \frac{\alpha c}{b+c}\vec{AC}$

$\vec{BS} = \beta\vec{BB_1} = \frac{\beta c}{a+c}\vec{BC} + \frac{\beta a}{a+c}\vec{BA} = \beta\vec{BA} + \frac{\beta c}{a+c}\vec{AC} = -\beta\vec{AB} + \frac{\beta c}{a+c}\vec{AC}$

$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$ $\quad B$

$\Rightarrow \vec{AB} - \beta\vec{AB} + \frac{\beta c}{a+c}\vec{AC} - \frac{\alpha b}{b+c}\vec{AB} - \frac{\alpha c}{b+c}\vec{AC} = \vec{0}$

$\left(1 - \beta - \frac{\alpha b}{b+c}\right)\vec{AB} + \left(\frac{\beta c}{a+c} - \frac{\alpha c}{b+c}\right)\vec{AC} = \vec{0}$

$1 - \beta - \frac{\alpha b}{b+c} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{b+c}{a+c}\beta \qquad \frac{\beta c}{a+c} - \frac{\alpha c}{b+c} = 0$

$1 - \beta - \frac{b}{a+c}\beta = 0 \qquad 1 = \frac{a-b+c}{a+c}\beta \qquad \boxed{\beta = \frac{a+c}{a-b+c}} \qquad \boxed{\alpha = \frac{b+c}{a-b+c}}$

$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1}$

$$P_{\Delta SAB} = \frac{r}{2}|AB| = w_3 P_{\Delta ABC} \Rightarrow w_3 = \frac{r}{2P_{\Delta ABC}}|AB|$$

$$P_{\Delta SBC} = \frac{r}{2}|BC| = w_1 P_{\Delta ABC} \Rightarrow w_1 = \frac{r}{2P_{\Delta ABC}}|BC|$$

$$P_{\Delta SCA} = \frac{r}{2}|CA| = w_2 P_{\Delta ABC} \Rightarrow w_2 = \frac{r}{2P_{\Delta ABC}}|CA|$$

$$1 = w_1 + w_2 + w_3 = \frac{r}{2P_{\Delta ABC}}\left(|AB| + |BC| + |CA|\right)$$

$$\Rightarrow r = \frac{2P_{\Delta ABC}}{|AB|+|BC|+|CA|} \Rightarrow S\left(\frac{|BC|}{|AB|+|BC|+|CA|}, \frac{|CA|}{|AB|+|BC|+|CA|}, \frac{|AB|}{|AB|+|BC|+|CA|}\right)$$

*** Опште ф-ле за транс. коорд. тачака**

- O_e, O_f – стари и нови репер простора $\mathbb{E}$
- $X \in \mathbb{E}$ – произв. тачка

$$\underbrace{[X]_{O_e}}_{x} = [\overrightarrow{OX}]_e = [\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QX}]_e = [\overrightarrow{OQ}]_e + [\overrightarrow{QX}]_e =$$
$$= [Q]_{O_e} + C[\overrightarrow{QX}]_f = C\underbrace{[X]_{Q_f}}_{x'} + \underbrace{[Q]_{O_e}}_{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = Cx' + g}$$

лин. део (матр. прел.) — нове коорд. — транслација коорд. почетка

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & \cdots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

~Трансформације координата вектора~

* Нека су $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, $f = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ две базе простора V^n, које зовемо стара и нова база. (не морају бити ортонормиране)

* Матрица прелаза $C = C_{e \to f}$ је матрица чије су колоне координате вектора нове базе f у старој бази e, редом.

$$\boxed{\underbrace{[\vec{v}]_e}_{\text{старе коорд}} = \underbrace{C}_{\text{матр. прелаза са } e \text{ на } f}\underbrace{[\vec{v}]_f}_{\text{нове коорд}}}$$

$$C_{e \to f} = \left(\underset{[\vec{f}_1]_e}{\boxed{}} \ \cdots \ \underset{[\vec{f}_n]_e}{\boxed{}} \right)$$

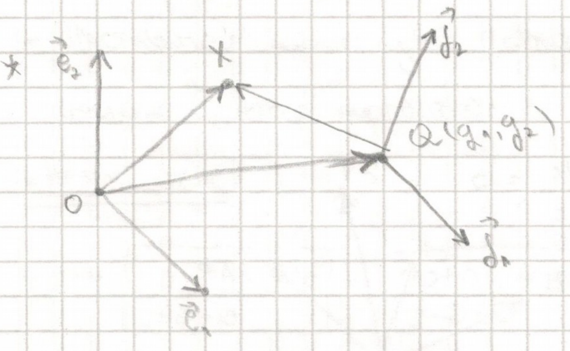
корд. нових вектора у старој бази

* Особине матр. прелаза:

1° инвертибилна је: $(C_{e \to f})^{-1} = C_{f \to e}$

2° базе e и f су исте оријентације ако је детерминанта њихове матрице прелаза позитивна

*



$$\boxed{x = Cx' + g}, \quad x = [X]_{O_e} = (x_1, x_2)^T$$

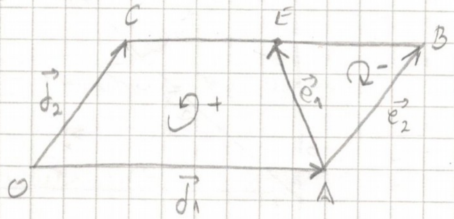
лин. део матр. прелаза — нове коорд — транслација коорд. почетка

$C = C_{e \to f}$

$$x' = [X]_{Q_f} = (x_1', x_2')^T$$

$$g = [Q]_{O_e} = (g_1, g_2)^T$$

Пример. Одреди координате темена паралелограма у старом реперу A_e и новом реперу O_f. Одреди везу између координата



$E = S(BC)$

$e = (\vec{AE}, \vec{AB})$ стара база

$f = (\vec{OA}, \vec{OC})$ - нова база

$\vec{OA} = \underline{-2} \cdot \vec{AE} + \underline{2}\, \vec{AB}$

$\vec{OC} = \underline{0} \cdot \vec{AE} + \underline{1}\, \vec{AB}$

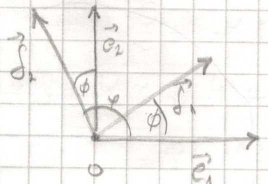
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$[O]_{A_e} = [\vec{AO}]_e = [-\vec{OA}]_e$

$\det C = -2 < 0$

- $\det C > 0$ - базе су исте оријентације
- $\det C < 0$ - базе су супротне оријентације
- $\det C \neq 0$!

* Трансформација ортонормираних репера равни



e - ортонормирана база
f - ортонормирана база

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} [\vec{f_1}]_e & [\vec{f_2}]_e \end{array} \\ \boxed{C_{e \to f} =} & \boxed{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} \end{array}$$

<u>матрица ротације</u> (за угао θ)

$\det C = 1 > 0$ чувамо дужину

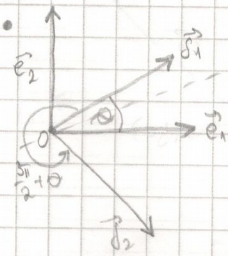
$\vec{f_1} = \alpha \vec{e_1} + \beta \vec{e_2} \quad / \circ \vec{e_1} \Rightarrow \vec{f_1} \circ \vec{e_1} = \alpha = \cos\theta$

$\qquad / \circ \vec{e_2} \Rightarrow \vec{f_1} \circ \vec{e_2} = \beta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$

$\vec{f_1} \circ \vec{e_1} := \|\vec{f_1}\|\|\vec{e_1}\| \cos\theta$

$f_2 \circ e_2 := \|\vec{f_1}\|\|\vec{e_2}\| \cos\sphericalangle(\vec{f_1}, \vec{e_2})$

$$[\vec{f_2}]_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2 + \theta) \\ \sin(\pi/2 + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



$$\boxed{C_{e \to f} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}}$$

<u>матрица рефлексије</u> (у односу на праву која са x-осом заклапа угао $\theta/2$)

$\det C = -1$ променили смо оријентацију

$$[\vec{f_2}]_e = \begin{pmatrix} \cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) \\ \sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

② Аналитичка геометрија равни и простора

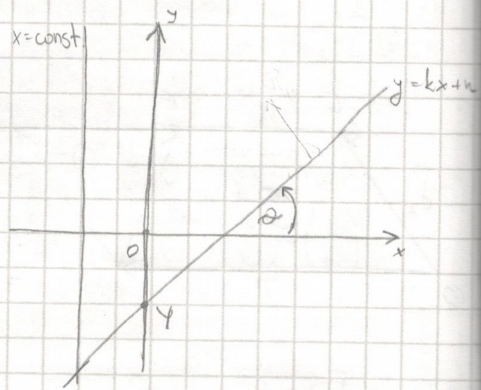
22.10.2018.

* Експлицитна ј-на:

$$p:\ y = \boxed{k}x + \boxed{n}$$

k → коеф. правца, n → одсечак

$\cos\theta = \dfrac{\vec{p}\circ\vec{e}_1}{|\vec{p}|}$, $\vec{e}_1(1,0)$ $k = \operatorname{tg}\theta$ $n = |OY|$



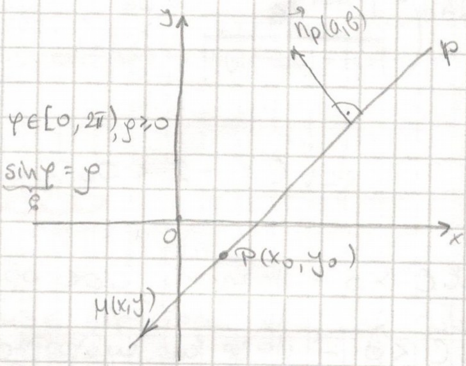
- овом ј-ном нису представљене све праве
- вертикалне праве ($x=const$) нису тог облика

* Имплицитна ј-на:

$$p:\ \boxed{a}x + \boxed{b}y + \boxed{c} = 0$$

$\vec{n}_p(a,b)$ (нормални вектор) $c = -\vec{OP}\circ\vec{n}_p$

$|\vec{n}_p| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$ → нормализована ј-на: $x\cdot\underbrace{\cos\varphi}_{a} + y\cdot\underbrace{\sin\varphi}_{b} = \rho$ $\varphi\in[0,2\pi), \rho\geq 0$



- Права p је одређена тачком $P(x_0,y_0)$ која јој припада и нормалним вектором праве $\vec{n}_p$.
- $P(x_0,y_0)$, $P\in p$: $ax_0+by_0+c=0$

$$\Rightarrow c = -(ax_0+by_0) = -\vec{n}_p\circ\vec{OP}$$

Пример Одредити нормализовану ј-ну праве која садржи тачку $P(1,1)$ чији је нормални вектор $\vec{n}_p = (4,-3)$.

$|\vec{n}_p| = \sqrt{16+9} = 5$, $\dfrac{1}{|\vec{n}_p|}\cdot\vec{n}_p = \left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right) \Rightarrow \dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y - \dfrac{1}{5} = 0$

$$\underbrace{\frac{4}{5}}_{\cos\varphi}x - \underbrace{\frac{3}{5}}_{\sin\varphi}y = \underbrace{\frac{1}{5}}_{\rho}$$

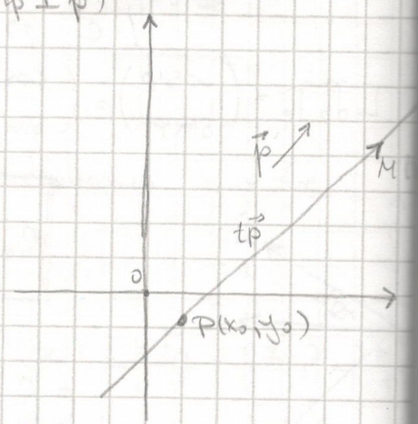
* $\vec{n}_p(a,b) \Rightarrow \vec{p}(-b,a)$ ако су ортогонални ($\vec{n}_p \perp \vec{p}$)

* Параметарска ј-на:

$$p:\ \underbrace{M(t)}_{\text{свака тачка } M \text{ праве } p} = P + t\cdot\underbrace{\boxed{\vec{p}}}_{\text{брзина кретања}}, \quad t\in\mathbb{R}$$

$P(x_0,y_0)$, $\vec{p}(p_x,p_y)$

- $x = x_0 + tp_x$, $t\in\mathbb{R}$
- $y = y_0 + tp_y$,
- равномерно праволинијско кретање брзином $\vec{p}$



* Параметарски → имплицитни облик:

- параметарски облик: $x = x_0 + t p_x, \; y = y_0 + t p_y, \; t \in \mathbb{R}$
- канонски облик: $t = \dfrac{x - x_0}{p_x} = \dfrac{y - y_0}{p_y}$
- имплицитни облик: $\underbrace{p_y}_{a} x \underbrace{- p_x}_{b} y + \underbrace{(p_x y_0 - p_y x_0)}_{c} = 0$

* Имплицитни → параметарски облик:

- имплицитни облик: $ax + by + c = 0$
- параметарски облик: $\vec{p} = (-b, a), \; P\left(\dfrac{-ac}{a^2+b^2}, \dfrac{-bc}{a^2+b^2}\right)$

$\Rightarrow P + t\vec{p}, \; t \in \mathbb{R}$

Пример Дата је права $p: 3x - 4y + 6 = 0$. Одредити параметарски облик праве p и угао који права p заклапа са x-осом.

$\vec{n_p}(3, -4), \quad P(-2, 0)$

$\vec{p}(4, 3)$

$x = -2 + 4t$
$y = 3t, \; t \in \mathbb{R}$

$\vec{e_1}(1, 0) \qquad \cos\theta = \dfrac{\vec{p} \circ \vec{e_1}}{|\vec{p}|\underbrace{|\vec{e_1}|}_{1}} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \measuredangle(\vec{e_1}, \vec{p}) = \arccos\dfrac{4}{5}$

Пример Одредити имплицитну ј-ну праве које садржи тачку $M(1,2)$ и паралелна је са y-осом. $(p \parallel Oy)$

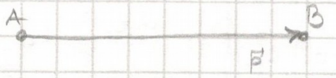
$p: \; x = 1$

Пример Одредити параметарску ј-ну праве која садржи тачку $P(-2, 3)$ и нормална је на праву $q: 2x + 3y - 1 = 0$.

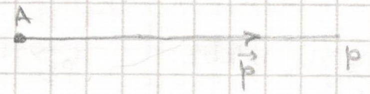
$p \perp q \Rightarrow \vec{p} = \vec{n_q} \Rightarrow \vec{p}(2, 3) \Rightarrow p: \; x = -2 + 2t$
$y = 3 + 3t, \; t \in \mathbb{R}$

* Параметризација дужи и полуправе:

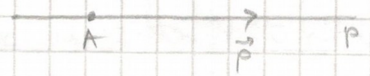
• **Дуж $[AB]$:** $M(t) = A + t\vec{AB}$, $t \in [0,1]$



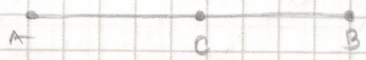
• **Полуправа $[AB)$:** $M(t) = A + t\vec{AB}$, $t \in [0,+\infty)$



• **Права:** $M(t) = A + t\vec{AB}$, $t \in \mathbb{R}$



• $M(t) = C + t\vec{AB}$, $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$



Пример а) Одр. параметарску ј-ну дужи $[AB]$ ако је $A(2,-3)$, $B(10,9)$.

$\vec{AB} = (8,12) \sim (2,3)$

$[AB]$: $x = 2 + 2t$, $y = \underbrace{-3}_{A} + \underbrace{3}_{\vec{AB}}t$, $t \in [\underbrace{0}_{\text{добијамо } A}, \underbrace{4}_{\text{добијамо } B}]$ или $(A + t\vec{AB})$ $x = 2 + 8t$, $y = -3 + 12t$, $t \in [0,1]$

б) Одр. тачке A_1, A_2, A_3 које дуж $[AB]$ деле на 4 једнака дела.

$A_1 = A + \frac{1}{4}\vec{AB} = (4,0)$ $A_2 = A + \frac{1}{2}\vec{AB} = (6,3)$ $A_3 = A + \frac{3}{4}\vec{AB} = (8,6)$

в) Да ли тачка $C(\frac{2}{3}, -5)$ припада полуправој $[AB)$?

$[AB)$: $A + t\vec{AB}$, $t \geq 0$

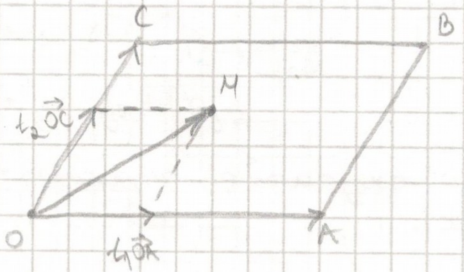
$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + 8t \\ y = -3 + 12t, \quad t \in [0,1] \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2/3 = 2 + 8t \\ -5 = -3 + 12t \\ \hline -1/2 = -3/2 - 12t \\ -5 = -3 + 12t \\ \hline -11/2 = -11/2 \\ \text{има решења} \end{array}$$

$-5 = -3 + 12t \Rightarrow t = -1/6 <$ услов; тачка C не припада [...

• нема решења ⇒ A, B, C су неколинеарне

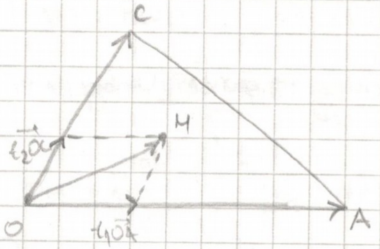
• има решења ⇒ да ли је $t \geq 0$?

* Параметризација паралелограма:



• $M(t_1, t_2) = O + t_1\vec{OA} + t_2\vec{OC}$, $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$.

* Параметризација троугла



- $M(t_1,t_2) = O + t_1 OA + t_2 OC$, $0 \le t_1, t_2 \le 1$, $t_1 + t_2 \le 1$.

* Полураван:

- C, D су са исте стране праве p ако: $[CD] \cap p = \{\emptyset\}$
- Полураван → скуп свих тачака са исте стране праве p.
- $p: f(x,y) = ax + by + c = 0$:

$$C, D \ \ddot{-}\ p \Leftrightarrow \operatorname{sgn} f(C) = \operatorname{sgn} f(D)$$

- $p: A, B \in p$:

$$C, D \ \ddot{-}\ p \Leftrightarrow \operatorname{sgn} D_{ABC} = \operatorname{sgn} D_{ABD}$$

- $p: P, \vec{p}, A \equiv P$, $B = A + \vec{p}$

Пример Испитати да ли се тачке $A(1,3)$ и $B(-2,1)$ налазе са исте стране праве:

а) $p: 2x + y = 0$

$f(x,y) = 2x + y$

$$\left.\begin{aligned} f(A) &= 5 > 0 \\ f(B) &= -3 < 0 \end{aligned}\right\} A, B \div p$$

б) $q: Q(0,1)$, $\vec{q} = (2,-3)$

$R \in q$, $R(t) = Q + t \cdot \vec{q}$, $t \in \mathbb{R}$

$R = Q + \vec{q}$.

$t = 1$: $R(2,-2)$

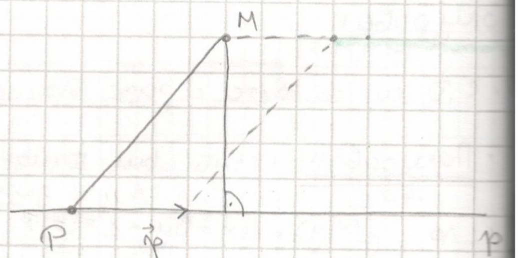
$$\left.\begin{aligned} D_{QRA} &= \begin{array}{c} \vec{QR} \\ \vec{QA} \end{array}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 > 0 \\ D_{QRB} &= \begin{array}{c} \vec{QR} \\ \vec{QB} \end{array}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6 < 0 \end{aligned}\right\} A, B \div p$$

~ Растојање тачке од праве ~

* Растојање тачке M од праве p једнако је растојању тачке M од њене пројекције N на праву p.

Теорема Растојање тачке M од праве p која је задата својом тачком P и вектором правца $\vec{p}$ је дато једнакошћу:

$$\boxed{d(M,p) = \frac{|\vec{p} \times \vec{PM}|}{|\vec{p}|}}$$



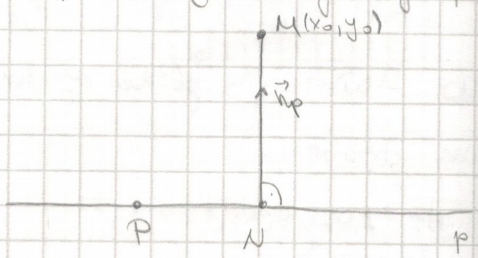
• важи и у простору

Доказ

$$d(M,p) = h = \frac{P_{▱}}{a} = \frac{|\vec{p} \times \vec{PM}|}{|\vec{p}|}$$

Теорема Растојање тачке $M(x_0,y_0)$ од праве $p: ax+by+c=0$ дато је формулом

$$\boxed{d(M,p) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$



Доказ

$$d(M,p) = \overset{\text{апс. вр.}}{|t|} \cdot \overset{\text{интензитет}}{|\vec{n_p}|}, \quad |\vec{n_p}| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad N(t) = M + t\cdot\vec{n_p} \Rightarrow \begin{array}{l} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{array},$$

$$N \in p \Rightarrow a(x_0+at) + b(y_0+bt) + c = 0$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2)t + ax_0 + by_0 + c = 0$$

$$\Rightarrow t = -\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$$

$$d(M,p) = \overbrace{\frac{|ax_0+by_0+c|}{|a^2+b^2|}} \cdot \overbrace{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Пример Дата је тачка $M(-1,-2)$. Којој од сл. прави х је М ближа?

а) $p: P(0,1), \vec{p}(1,-1)$

$d(M,p) = \dfrac{|\vec{PM} \times \vec{p}|}{|\vec{p}|} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$\vec{PM} \times \vec{p} = \begin{array}{c} \vec{PM} \\ \vec{p} \end{array}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ +1 & -1 \end{vmatrix} \vec{e_3} = 4\vec{e_3}$

б) $q: 3x-4y+1=0$

$d(M,q) = \dfrac{|3(-1)-4(-2)+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \dfrac{6}{5}$

$\Rightarrow d(M,p) > d(M,q) \Rightarrow$ М је ближа q

~ Пресек правих ~

* Решити систем: $p \cap q = ?$

$p: a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$q: a_2x + b_2y + c_2 = 0$

(имплицитно задате праве)

• Крамерово правило: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

1° $\Delta \neq 0$ – праве се секу у $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$

$\Updownarrow$

$\vec{n_p} \times \vec{n_q} \neq \vec{0}$ (лин. независни су)

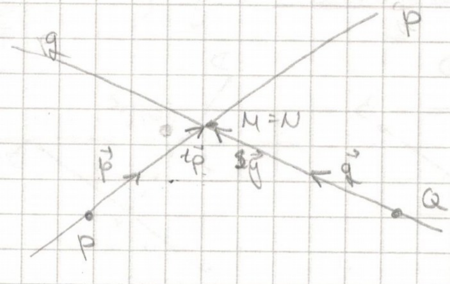
2° $\Delta = 0$, $\Delta_x = \Delta_y = 0$ – праве се поклапају ($p \equiv q$)

$\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0 \lor \Delta_y \neq 0$ – праве су паралелне ($p \parallel q$)

* Параметарски задате праве:

$p: P + t\vec{p}, \ t \in \mathbb{R} \ (= M(t))$

$q: Q + s\vec{q}, \ s \in \mathbb{R} \ (= N(s))$



$P(t) + t\vec{p} = M = N = Q + s\vec{q}$

$\Rightarrow \underbrace{Q - P}_{} - t\vec{p} + s\vec{q} = \vec{0} \Rightarrow \vec{PQ} - t\vec{p} + s\vec{q} = 0 \quad / \times \vec{p} \quad / \times \vec{q}$

(лин. зависни)

$\vec{PQ} \times \vec{p} + s\vec{q} \times \vec{p} = \vec{0}$

$\vec{PQ} \times \vec{q} - t\vec{p} \times \vec{q} = \vec{0}$

$\vec{PQ} \times \vec{p} - s\vec{p} \times \vec{q} = \vec{0}$

$\vec{PQ} \times \vec{q} - t\vec{p} \times \vec{q} = \vec{0}$

$s = \dfrac{D(\vec{PQ}, \vec{p})}{D(\vec{p}, \vec{q})}$, $t = \dfrac{D(\vec{PQ}, \vec{q})}{D(\vec{p}, \vec{q})}$

$\vec{p} \times \vec{q}$, $\vec{PQ} \times \vec{p}$ – лин. зав.

$\vec{p} \times \vec{q}$, $\vec{PQ} \times \vec{q}$ – лин. зав.

1° $D(\vec{p},\vec{q}) \neq 0$ – праве се секу

2° $D(\vec{p},\vec{q}) = 0$, $D(\vec{PQ},\vec{q}) = 0$ – праве се поклапају $(p \equiv q)$

$D(p,q)=0$, $D(\vec{PQ},\vec{q}) \neq 0$ – праве су паралелне $(p \parallel q)$

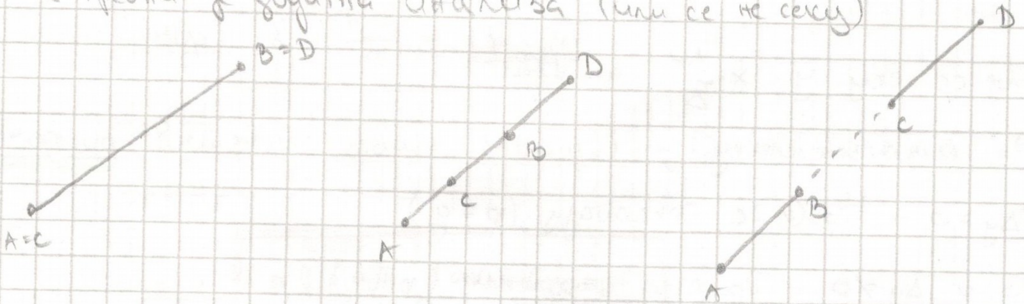
~ Пресек дужи ~

$[AB]: A + t\vec{AB}$, $[CD]: C + s\vec{CD}$, $t,s \in [0,1]$

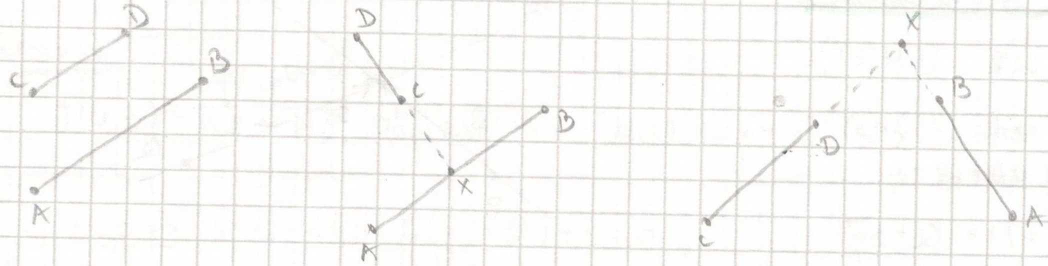
1° * Дужи се секу ако је $D(\vec{AB},\vec{CD}) \neq 0$ и:

$$t = \frac{D(\vec{AC},\vec{CD})}{D(\vec{AB},\vec{CD})}, \quad s = \frac{D(\vec{AC},\vec{AB})}{D(\vec{AB},\vec{CD})}$$ и додатно $t,s \in [0,1]$

2° * Ако је $D(\vec{AB},\vec{CD}) = 0$ и $D(\vec{AC},\vec{CD}) = 0$: дужи се (делимично) поклапају и потребна је додатна анализа (или се не секу)

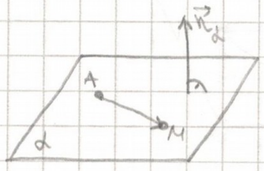


3° У свим осталим случајевима дужи се не секу



~ Једначина равни у простору ~

* Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и нормалним вектором равни $\vec{n}_\alpha$.



$$M(x,y,z) \in \alpha \Rightarrow \vec{AM} \perp \vec{n}_\alpha \Rightarrow \vec{AM} \circ \vec{n}_\alpha = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (a,b,c) \circ (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) =$$

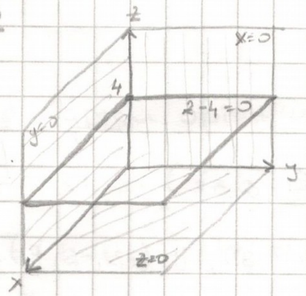
$$= ax + by + cz \underbrace{- ax_0 - by_0 - cz_0}_{d = -\vec{n}_\alpha \circ \vec{OA}} = 0$$

$\vec{n}_\alpha = (a,b,c)$

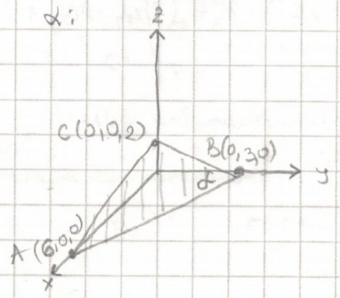
$\boxed{\alpha: \ ax + by + cz + d = 0}$ имплицитна ј-на равни

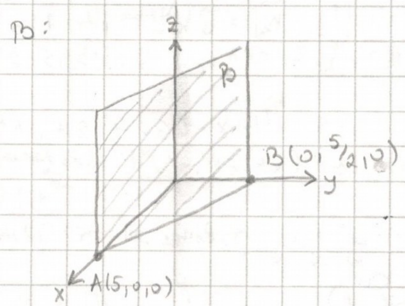
* Нормализована ј-на равни: $ax + by + cz + d = 0$, $|\vec{n}_\alpha|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Пример



Пример Скицирати раван: $\alpha: x + 2y + 3z - 6 = 0$, $\beta: x + 2y - 5 = 0$





* Полупростор - скуп свих тачака са исте стране неке равни $\alpha: ax + by + cz + d = 0$. Одређен је неједнакошћу: $ax + by + cz + d > 0$ тј. $ax + by + cz + d < 0$.

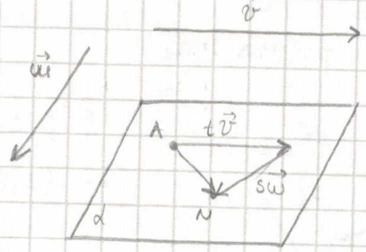
Пример Да ли се тачке $A(1,1,1)$ и $C(-1,-1,3)$ налазе са исте стране равни $\beta: x - 3y + 4z - 12 = 0$?

$$f(x,y,z) = x - 3y + 4z - 12$$

$$\left.\begin{array}{l} f(A) = -10 < 0 \\ f(C) = 2 > 0 \end{array}\right\} A, C \div \beta$$

* Параметарска ј-на равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и два вектора $\vec{u}$ паралелна са α.



$$\boxed{M(t,s) = M = A + t\vec{v} + s\vec{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}}$$

- $x = x_0 + t v_x + s w_x$

  $y = y_0 + t v_y + s w_y$

  $z = z_0 + t v_z + s w_z \quad , t, s \in \mathbb{R}$

* Параметарски → имплицитни облик:

$A, \vec{w}, \vec{v}$ $\qquad$ $A, \vec{n_\alpha} = \vec{w} \times \vec{v}$

$\vec{n_\alpha} = \vec{v} \times \vec{w} = (a, b, c)$

$d = -ax_0 - by_0 - cz_0 = -n_\alpha \circ \vec{OA}$

* Имплицитни → параметарски облик:

$\vec{v} \perp \vec{n_\alpha}$ - произвољан $\quad , \vec{w} = \vec{n_\alpha} \times \vec{v}$

A - било које решење ј-не $ax + by + cz + d = 0$ $\quad$ ($\overset{\text{нпр.}}{a \neq 0}$: $A(-\frac{d}{a}, 0, 0)$)

Пример Одреди имплицитну ј-ну равни: $A(1, 2, -3)$, $\vec{u}(4, 7, 6)$, $\vec{v}(-3, -5, 2)$.

$M(s,t) = A + s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}$

$x = 1 + 4s - 3t$
$y = 2 + 7s - 5t$
$z = -3 + 6s + 2t \quad , t, s \in \mathbb{R}$

$$\vec{n_\alpha} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 4 & 7 & 6 \\ -3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 44\vec{e_1} - 26\vec{e_2} + \vec{e_3} = (44, -26, 1)$$

$\Rightarrow \quad 44x - 26y + z + \underbrace{11}_{-\vec{n_\alpha} \circ \vec{OA}} = 0$ имплицитни облик

Пример Одреди параметарску ј-ну равни: $\alpha: 4x - 7y + z + 1 = 0$.

$A(0, 0, -1)$, $\vec{n_\alpha} = (4, -7, 1)$

$\vec{u} \perp \vec{n_\alpha} \Leftrightarrow \vec{u} \circ \vec{n_\alpha} = 0$

$\vec{u} = (m, n, k)$

$\vec{u} \circ \vec{n_\alpha} = 4m - 7n + k = 0$

ако: $\left.\begin{matrix} m = 2 \\ n = 1 \\ k = -1 \end{matrix}\right\} \vec{u}(2, 1, -1)$

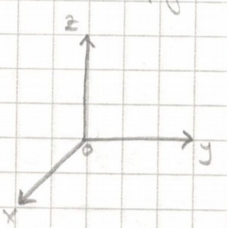
$$\vec{v} = \vec{u} \times \vec{n_\alpha} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = (-6, -5, -18) \sim (6, 5$$

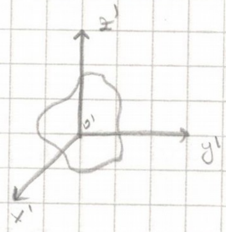
α: $x = \ \ +2s + 6t$
$y = \ \ +s + 5t$
$z = -1 - s + 18t \quad , t, s \in \mathbb{R}$

* Избор координатног система везаног за раван

$\alpha: \underline{ax+by+cz+d=0} \longrightarrow \alpha': \underline{z'=0}$

$\boxed{WCS}$ (фиксирани, светски коорд систем) $\qquad$ $\boxed{UCS}$ (сопствени коорд. систем)





- Некад је корисно прећи на нови ортонормирани коорд. систем у ком задата раван α има ј-ну $z'=0$. (коорд. систем придружен равни α)

- $f=(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ - UCS
  $e=(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ - WCS

$\vec{f}_3 := \frac{1}{|\vec{n}_\alpha|}\vec{n}_\alpha$ (јер су ортонормиране базе)

$\vec{f}_2 := \vec{f}_2 \perp \vec{f}_3, \ |\vec{f}_2| = 1$

$\vec{f}_1 := \vec{f}_2 \perp \vec{f}_3$ => зато су оба јединична и f_1 ће бити јединични

Пример Одреди ортонормирани координатни систем (x', y', z') у односу на раван $\alpha: x-y-2=0$ и написати везу њих координата са координатама (x,y,z).

$\vec{n}_\alpha = (1,-1,0) \quad |\vec{n}_\alpha| = \sqrt{2}$

$\vec{f}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$\vec{f}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$\vec{f}_1 = \vec{f}_2 \times \vec{f}_3 = (0,0,-1)$

$$C_{e\to f} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

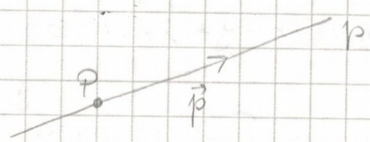
- С мора дет = 1

$O'(2,0,0)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

* Права у простору

се задаје тачком $P(x_0, y_0, z_0)$ и ненула вектором правца $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$: $\quad M(t) = M = P + t\vec{p}, \ t \in \mathbb{R}$



- Параметарска ј-на праве:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + tp_x \\ y &= y_0 + tp_y \\ z &= z_0 + tp_z, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

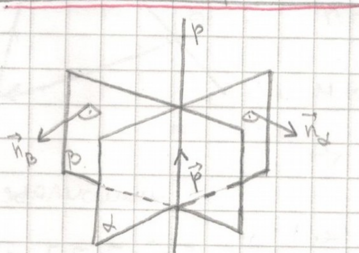
- канонска ј-на праве:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{p_x} = \frac{y-y_0}{p_y} = \frac{z-z_0}{p_z}}$$

- Права као пресек 2 равни:

$$\left.\begin{aligned} \alpha&: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \beta&: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{p} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$$

(ако је = 0 равни су паралелне)



Пример Праву $p:\ x-z=0,\ 2x-y+1=0$ записати параметарски.

I начин: $\vec{n}_\alpha(1,0,-1)$ $\quad \vec{n}_\beta(2,-1,0)$

$$\vec{p}=\vec{n}_\alpha\times\vec{n}_\beta=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=-\vec{e}_1-2\vec{e}_2-\vec{e}_3=(-1,-2,-1) \qquad P(0,1,0)$$

$$p:\ \begin{aligned} x&=-t\\ y&=1-2t\\ z&=-t,\ t\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

II начин: $\left.\begin{aligned} z&=x\\ y&=2x+1\end{aligned}\right\}$ $\quad \begin{aligned} x&=t\\ y&=1+2t\\ z&=t,\ t\in\mathbb{R}\end{aligned}$

* Прамен равни:

ТМА Скуп свих равни које садрже праву $p=\alpha\cap\beta$ је дат једначином:

$$\pi:\ \lambda_1\underbrace{(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)}_{\text{генераторне}}+\lambda_2\underbrace{(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)}_{\text{равни}}=0,\ \text{за } \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow\ \pi:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1+\lambda\underbrace{(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)}_{\text{мора посебно да се испита}}=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Пример Одредити ј-ну равни која садржи тачку $M(1,4,-2)$ и праву $p:\ x-y-1=0,\ z-2x=0$.

$\alpha:\ x-y-1=0$

$\beta:\ z-2x=0$, $M\notin\beta$

$\pi_\lambda:\ x-y-1+\lambda(z-2x)=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$

$(1-2\lambda)x-y+\lambda z-1=0$

$M\in\pi_\lambda \Rightarrow (1-2\lambda)-4-2\lambda-1=0$

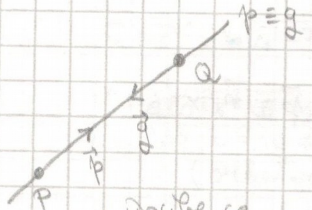
$-4-4\lambda=0$

$\lambda=-1$

$M\in\pi_{-1}:\ 3x-y-z-1=0$

~ Положаји ~

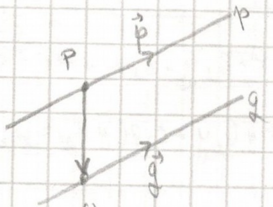
* Међусобни положај две праве:



праве се поклапају

$\vec{p}\times\vec{q}=\vec{0}$

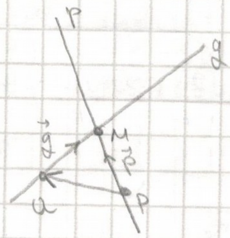
$\vec{PQ}\times\vec{p}=\vec{0}$ (колинеарни)



паралелне су

$\vec{p}\times\vec{q}=\vec{0}$ (кол)

$\vec{PQ}\times\vec{p}\neq\vec{0}$ (некол)

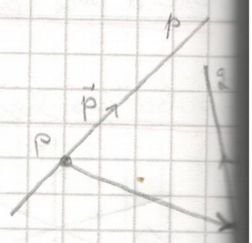


секу се

$\vec{p}\times\vec{q}\neq 0$ (нек.)

$[\vec{PQ},\vec{p},\vec{q}]=0$

(компланарни)



мимоилазе

$[\vec{PQ},\vec{p},\vec{q}]\neq$

Пример Одреди међусобан положај правих $p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}$ и $q: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+7}{2}$

$P(2,2,2)$ $\vec{p}(1,0,-1)$

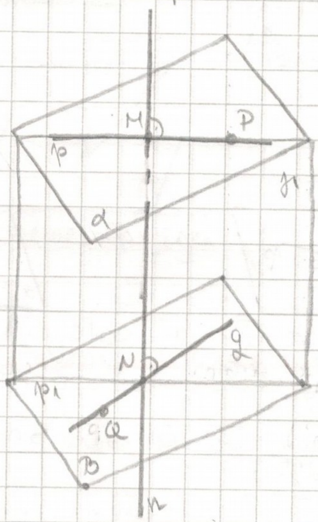
$Q(-1,2,-7)$ $\vec{q}(-2,0,2)$

$\Big\}$ $\vec{q} = -2\vec{p}$ (колинеарни) $\Longrightarrow$ паралелне или се поклапају

$\vec{PQ}(-3,0,-9)$ - није колинеаран са $\vec{p}$ $\Rightarrow$ $p \parallel q$

Теорема (мимоилазне праве)

Мимоилазне праве p и q имају(1) јединствену(2) заједничку нормалу тј. праву која сече обе праве и нормална је на њих.



Доказ

(1) Егзистенција: $\exists!$ (једин.) α, β: $p \subset \alpha$, $q \subset \beta$, $\alpha \parallel \beta$.

Пројектујућа раван праве p: $\pi \Rightarrow p \subset \pi$, $\pi \perp \alpha, \beta$.

$\pi \cap \beta = p'$ (пројекција праве p на раван β).

$p \parallel p'$: 1) $p' \equiv q \Rightarrow q \parallel p$ ↯

2) $p' \parallel q \Rightarrow p \parallel q$ ↯

3) $p' \cap q = \{N\}$ ✓

Нека је n: $N \in n$ и $n \perp q \Rightarrow n \perp p' \Rightarrow n \perp p \Rightarrow \exists$ зај. нормала

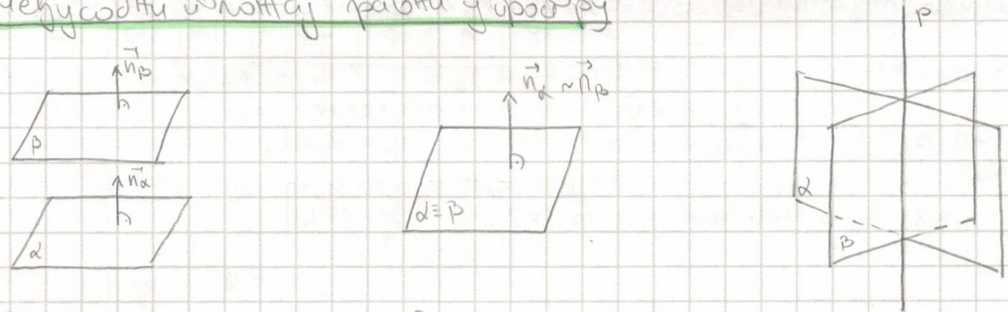
(2) Јединственост: Нека су n, m заједничке нормале из p и q.

$n \cap q = \{N\}$, $n \cap p = \{M\}$, $m \cap q = \{Q\}$, $m \cap p = \{P\}$

$MPQN$ - правоугаоник $\Rightarrow MP \parallel QN \Rightarrow p \parallel q$ ↯

$\Rightarrow$ не постоје 2 заједничке нормале

* Међусобни положај равни у простору

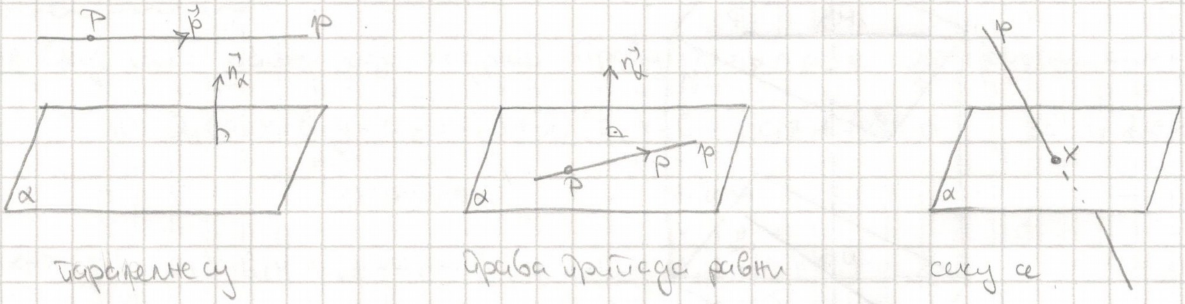


паралелне су — $A \notin \beta$ — $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \vec{0}$

поклапају се — $A \in \beta$

секу се — $\alpha \cap \beta = \{p\}$ — $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta \neq \vec{0}$

* Међусобни положај праве и равни



паралелне су

$\vec{n}_\alpha \perp \vec{p} \Rightarrow \vec{p} \circ \vec{n}_\alpha = 0$

$P \notin \alpha$

права припада равни

$p \subset \alpha \quad (\vec{p} \perp \vec{n}_\alpha)$

$P \in \alpha \quad \vec{p} \circ \vec{n}_\alpha = 0$

секу се

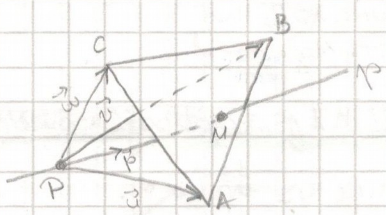
$p \cap \alpha = \{X\}$

Пример Одр међусобни положај праве $p: \frac{x-4}{1} = \frac{y+5}{0} = \frac{z}{-1}$ и равни $\alpha: 4x+5y=0$

$\vec{p} = (1,0,-1) \quad \vec{n}_\alpha = (4,5,0) \quad \vec{p} \circ \vec{n}_\alpha = 4 \neq 0 \Rightarrow p \cap \alpha = \{X\}$

$$p: \left.\begin{array}{l} x = 4+t \\ y = -5 \\ z = -t, \; t \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \xRightarrow{y\,\alpha} \begin{array}{c} 4(4+t)+5(-5)=0 \\ 16+4t-25=0 \\ t = 9/4 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} x = 25/4 \\ y = -5 \\ z = -9/4 \end{array}\right\} X\left(\frac{25}{4}, -5, -\frac{9}{4}\right)$$

* Продор праве кроз троугао:



$$\operatorname{sgn}[\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{p}] = \operatorname{sgn}[\vec{PB}, \vec{PC}, \vec{p}] = \operatorname{sgn}[\vec{PC}, \vec{PA}, \vec{p}]$$

$$M = P + t\vec{p}$$

$$V_{тетр\,PABC} = \frac{1}{6}[\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}] = V_{тетр\,PABX} + V_{тетр\,PBCX} + V_{тетр\,PCAX}$$

$$[\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}] = [\vec{PA}, \vec{PB}, \overset{t\vec{p}}{\vec{PX}}] + [\vec{PB}, \vec{PC}, \vec{PX}] + [\vec{PC}, \vec{PA}, \vec{PX}] =$$

$$= t\left([\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{p}] + [\vec{PB}, \vec{PC}, \vec{p}] + [\vec{PC}, \vec{PA}, \vec{p}]\right)$$

$$t = \frac{[\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}]}{[\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{p}] + [\vec{PB}, \vec{PC}, \vec{p}] + [\vec{PC}, \vec{PA}, \vec{p}]}$$

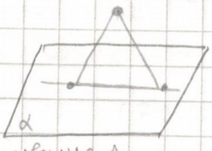
пример Да ли права $p: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$ сече $\triangle ABC$, $A(2,4,6)$, $B(-4,2,0)$, $C(6,4,-2)$?

$P(1,0,-1)$ $\quad \vec{p}(-1,3,2)$ $\quad \vec{PA}=(1,4,7)$, $\quad \vec{PB}=(-5,2,1)$, $\quad \vec{PC}=(5,4,-1)$

$$[\vec{AB},\vec{AC},\vec{p}] = \begin{vmatrix} -6 & -2 & -6 \\ 4 & 0 & -8 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -216 \neq 0$$ права сече раван троугла

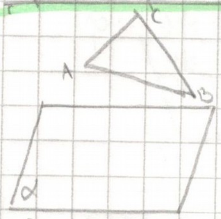
$$\left.\begin{array}{l} [\vec{PA},\vec{PB},\vec{p}] = -54 < 0 \\ [\vec{PB},\vec{PC},\vec{p}] = -54 < 0 \\ [\vec{PC},\vec{PA},\vec{p}] = -108 < 0 \\ [\vec{PA},\vec{PB},\vec{PC}] = -216 \end{array}\right\} X \in \triangle ABC \qquad t = \frac{-216}{-54-54-108} = 1 \qquad X = P + \vec{p} = (0,3,1)$$

* **Пресек равни и троугла.**

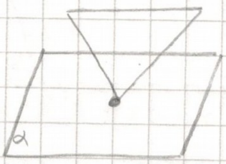


ивица Δ

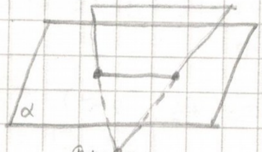
- одређује се тако што се свака ивица Δ пресече са равни.



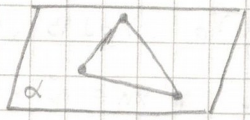
празан скуп



теме троугла



дуж



сам троугао

~Растојања и углови~

Теорема Растојање тачке M од праве p задате тачком P и вектором правца $\vec{p}$ дат је формулом:

$$\boxed{d = \frac{|\vec{PM} \times \vec{p}|}{|\vec{p}|}}$$

пример Одр. растојање тачке $M(1,0,-1)$ од праве $p: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$

$P(0,-1,0)$ $\quad \vec{p}(1,1,2)$ $\qquad d(M,p) = \frac{|\vec{PM}\times\vec{p}|}{|\vec{p}|}$

$|\vec{p}| = \sqrt{6}$

$$|\vec{PM} \times \vec{p}| = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3,-3,0) \qquad d = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Теорема Растојање тачке $M(x_0,y_0,z_0)$ од равни $\alpha: ax+by+cz+d=0$ је дато формулом:

$$\boxed{d = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}} \qquad d = |t||\vec{n_\alpha}|$$

пример Одр. растојање тачке $M(1,0,-1)$ од равни $\alpha: x+y-4z=0$

$$d(M,\alpha) = \frac{|1+0-4(-1)|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{5}{3\sqrt{2}}$$

Теорема Растојање између мимоилазних правих p и q дато је формулом

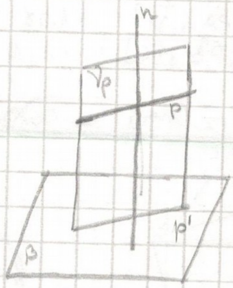
$$\boxed{d = \frac{[\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}]}{|\vec{p} \times \vec{q}|}}$$

$n \cap p = \{M\}$, $n \cap q = \{N\}$

$d(p,q) = d(M,N) = h = \frac{V_{паралелоп}}{V_{базе}}$

пример Одр. заједничку нормалу и растојање између мимоилазних

$p: \frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{0}$ и $q: \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-15}{-5}$.



$$\vec{n} = \vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = (-20, 15, -25)$$

$p \subset \nu_p$, $\nu_p \perp \beta$, $p', n \in \nu_p$

$\vec{n}_{\nu_p} = \vec{p'} \times \vec{n} = \vec{p} \times \vec{n} = (20, 15, -25)$

$$P(6,5,0) \rightarrow \left.\begin{aligned} \nu_p &: 4x + 3y - 5z - 39 = 0 \\ \beta &: 4x - 3y + 5z - 59 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p'$$

$$q: \left.\begin{aligned} x &= 4t - 1 \\ y &= -3t + 4 \\ z &= -5t + 15, \ t \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \ 4(4t-1) + 3(-3t+4) - 5(-5t+15) - 39 = 0 \Rightarrow t = 53/16$$

$|\vec{p} \times \vec{q}| = 25\sqrt{2}$ $\quad \vec{PQ} = (-7, -1, 15)$

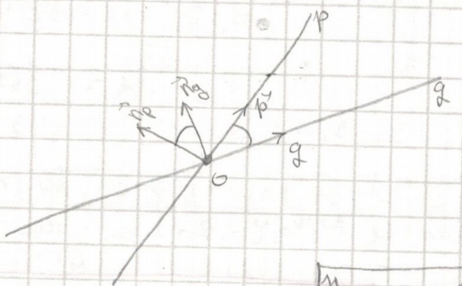
$[\vec{PQ}, \vec{p}, \vec{q}] = (\vec{p} \times \vec{q}) \circ \vec{PQ} = 5(-4, 3, -5) \circ (-7, -1, 15) = -250$

$$d(p,q) = \frac{|-250|}{25\sqrt{2}} = \underline{\underline{5\sqrt{2}}}$$

*** Угао између 2 праве**

=> оштар угао између њихових нормалних вектора

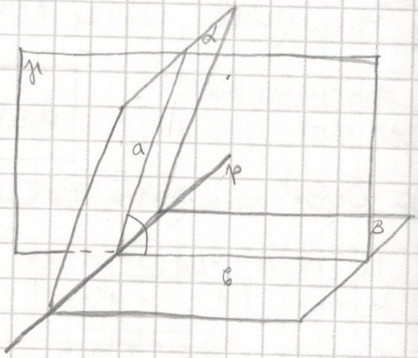
$$\boxed{\measuredangle(p,q) = \arccos \frac{|\vec{p} \circ \vec{q}|}{|\vec{p}||\vec{q}|}}$$



*** Угао између 2 равни**

=> оштар угао између правих a и b

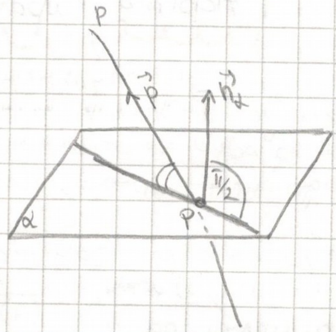
$$\boxed{\measuredangle(\alpha,\beta) = \arccos \frac{|\vec{n_\alpha} \circ \vec{n_\beta}|}{|\vec{n_\alpha}||\vec{n_\beta}|}}$$



* Угао између праве и равни:

=> угао између праве p и њене нормалне пројекције p' на раван α.

$$\boxed{\measuredangle(p,\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{|\vec{p}\circ\vec{n}_\alpha|}{|\vec{p}||\vec{n}_\alpha|}}$$



Пример Одр. тачку продора праве $p: \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-4}$ кроз раван $\alpha: 3x+y+5z-7=0$. Колики угао права p заклапа са равни α?

$$p: \begin{aligned} x &= 3t-1 \\ y &= 2t-3 \\ z &= -4t+5, \ t\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

$$3(3t-1)+2t-3+5(-4t+5)-7=0 \Rightarrow t = 4/3$$

$X(3, -1/3, 1/3)$ тачка продора

$$\measuredangle(p,\alpha) = \frac{\pi}{2} - \measuredangle(\vec{p},\vec{n}_\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{|\vec{p}\circ\vec{n}_\alpha|}{|\vec{p}||\vec{n}_\alpha|}$$

- $\vec{p} = (3,2,-4) \quad |\vec{p}| = \sqrt{29}$
- $\vec{n}_\alpha = (3,1,5) \quad |\vec{n}_\alpha| = \sqrt{35}$

$\vec{p}\circ\vec{n}_\alpha = -9$

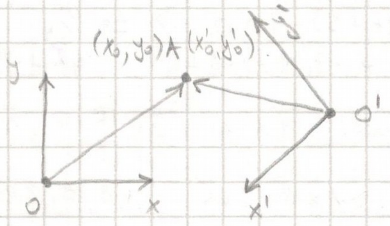
$$\measuredangle(p,\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{9}{\sqrt{29}\sqrt{35}}.$$

③ Афине трансформације

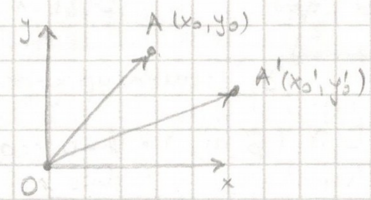
Деф Нека је $\bar{f}: V \to V$ линеарно пресликавање векторског простора који је придружен простору тачака $\mathbb{E}$. Афино пресликавање $f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ је пресликавање тачака које је индуковано пресликавањем $\bar{f}$ вектора у смислу да је:

$$\boxed{f(M) = M',\ f(N) = N' \iff \bar{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}}$$

* Пасивно гледиште:



* Активно гледиште:



Деф Афино пресликавање равни E^2:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{\text{нове коорд.}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{слике базних вектора} \\ \text{у старој бази} \\ \text{(линеарни део)}}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{старе коорд.}} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{слика коорд. почетка} \\ \text{(транслаторни део)}}}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0 \text{ (регуларна матрица)}$$

Пример Одреди формуле афиног пресликавања f равни које тачке $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ пресликава редом у тачке $O'(2,2)$, $A'(4,5)$, $B'(3,1)$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

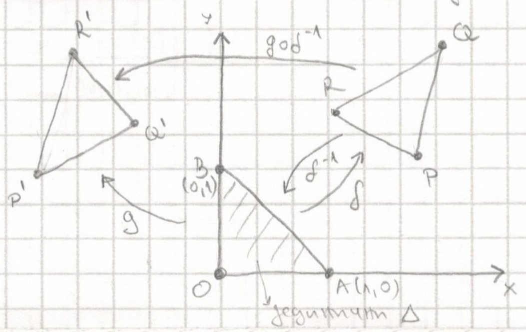
$\uparrow [\overrightarrow{O'A'}]_e \quad \uparrow [\overrightarrow{O'B'}]_e \quad \uparrow [O']_{O_e}$

$O_e \ ; \ e = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

$O_f \ ; \ f = (\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$

Теорема Постоји јединствено афино пресликавање равни које пресликава 3 неколинеарне тачке P, Q, R у три неколин. тачке P', Q', R', редом.

* доказ *

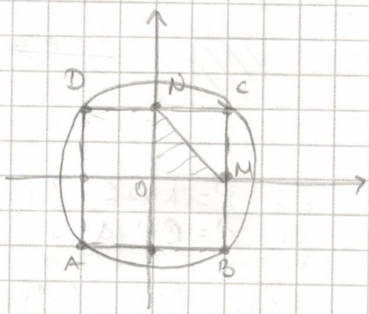


* Особине афиних пресликавања:

1. пресликавају праве у праве (чува се колинеарност)
2. чувају размеру колинеарних дужи => чува се тежиште => чува се центар маса
3. чувају паралелност правих
4. однос површина слике и оригинала је: $\frac{P(F')}{P(F)} = |\det(a_{ij})|$
(чува се)
5. пресликавања за која је $\det(a_{ij}) > 0$ чувају оријентацију, а за која је $\det(a_{ij}) < 0$ мењају оријентацију равни.
6. не чувају се углови

пример Дате су тачке $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$; $A'(4,5)$, $B'(8,7)$, $C'(6,9)$, $D'(2,7)$.

А) Одреди ј-не афиног пресликавања које пресликава квадрат ABCD у паралелограм A'B'C'D'.



$f: \Delta OMN \rightarrow \Delta ABD \qquad g: \Delta OMN \rightarrow \Delta A'B'D'$

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \overrightarrow{AB} \ \ \overrightarrow{AD} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{array}{c} A \\ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$f^{-1}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{A'B'} \ \ \overrightarrow{A'D'} \end{array} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ A' \end{array}$$

$$(g \circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = g\left(\overbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}^{x} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

б) Колика је површина слике круга?

$P_0 = r^2 \pi = 2\pi$ описан круг се слика у елипсу

$P_{елипсе} = P_0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2\pi \cdot 3 = \underline{6\pi}$

* Представљање афиних пресликавања матрицама:

- $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A\text{ - линеарни део}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{\text{транслаторни део - } b}$$

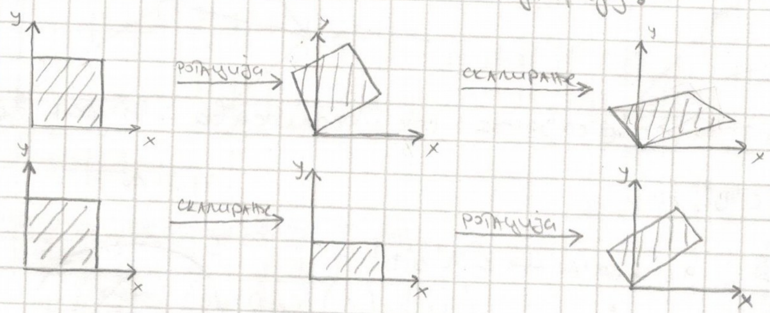
Троугао → троугао
Паралелограм → паралелограм

- $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{A_b} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

каже нам да се ради о афином пресл.

Теорема Производ матрица A_b одговара композицији афиних пресликава

- афина пресликавања не комутирају!



$$\left.\begin{array}{l} f: \; x' = Ax + b \\ g: \; x'' = Cx' + d \end{array}\right\} (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x') = g(Ax+b) = C(Ax+b)+d = \underbrace{\overset{ACx}{\cancel{CA}}x}_{\text{лин. део}} + \underbrace{Cb + d}_{\text{трансл. део}}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = A_b \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'' \\ 1 \end{pmatrix} = C_d \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_d \cdot A_b = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{C} & d \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A} & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{CA} & Cb+d \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ТРАНСЛАЦИЈА

* Транслација $\tau_{\vec{b}}$ за вектор $\vec{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

$$x' = x + b_1$$
$$y' = y + b_2$$

или у матричном облику: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

* Чува оријентацију, углове, дужину (скаларни производ)

* $\tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{u}+\vec{v}} = \tau_{\vec{v}+\vec{u}} = \tau_{\vec{v}} \circ \tau_{\vec{u}}$ → комутативна (јер је збир вектора комутатив

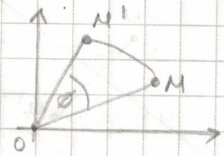
* $\tau_{\vec{0}}$ - идентитет

* $\tau_{\vec{v}}^{-1} = \tau_{-\vec{v}}$

* Чине групу

РОТАЦИЈА

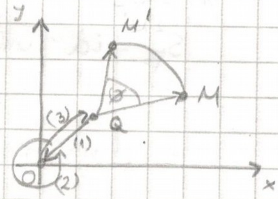
* Ротација око координатног почетка, за угао $\phi \in [0, 2\pi)$:



• $R_\phi: \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

* Ротација око произвољне тачке $Q(q_1, q_2)$ за угао ϕ:

• $R_{Q,\phi} := \underbrace{\tau_{\vec{OQ}}}_{(3)} \circ \underbrace{R_\phi}_{(2)} \circ \underbrace{\tau_{\vec{QO}}}_{(1)}$



* $R_\phi \in SO(2)$ специјална ортогонална група (матр. је ортогонална и det = 1)

* Особине:

1. $R_\phi^{-1} = R_{-\phi} = R_\phi^T$ - инверз
2. $\det R_\phi = 1$
3. $R_\phi \circ R_\theta = R_{\phi+\theta} = R_\theta \circ R_\phi$ - комутативне су
4. $id = R_0$, $id = R_{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$ - идентитет

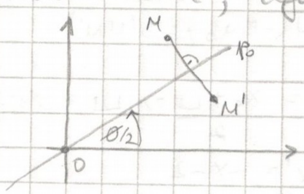
* Чувају дужину, углове, оријентацију

* $R_{B,\phi} \circ R_{A,\theta} = (\tau_{\vec{OB}} \circ R_\phi \circ \tau_{\vec{BO}}) \circ (\tau_{\vec{OA}} \circ R_\theta \circ \tau_{\vec{AO}}) =$

$= \tau_{\vec{OB}} \circ R_\phi \circ \tau_{\vec{BA}} \circ R_\theta \circ \tau_{\vec{AO}}$

РЕФЛЕКСИЈА У ОДНОСУ НА ПРАВУ

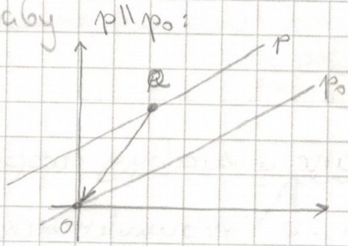
* Рефлексија у односу на праву p_0 кроз координатни почетак, која гради угао $\frac{\phi}{2}$ са x-осом:



• $S_{p_0}: \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ \sin\phi & -\cos\phi\end{pmatrix}}_{S_\phi \text{ матр. рефлексије}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

* Рефлексија у односу на произвољну праву $p \parallel p_0$:

• $S_p = \tau_{\vec{OQ}} \circ S_{p_0} \circ \tau_{\vec{QO}}$

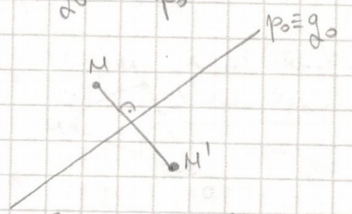


* Особине матрице рефлексије:

1. $S_\phi^{-1} = S_\phi^T$ - инверз
2. $S_\phi^2 = id$ - идентитет (јединична матр. $S_\phi^2 = E$)
3. $\det S_\phi = -1$
4. $S_\phi S_\theta = R_{\phi-\theta}$

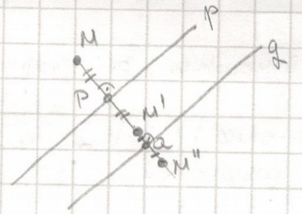
* Припада групи: $S_\phi \in O(2)$ ортогонална група (мења ротацију)
(орт. матр. и det = -1)

* $S_{g_0} \circ S_{p_0}$



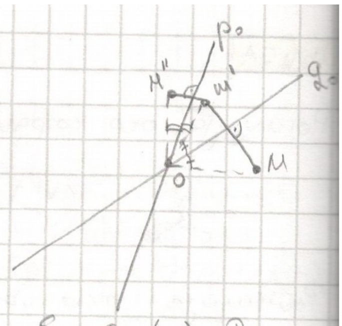
$S_{g_0} \circ \underbrace{S_{p_0}(M)}_{M'} = S_{g_0}(M') = M$

$S_{p_0}^2 = id$ инволуција



$S_g \circ S_p(M) = S_g(M') = M'' =$
$= \tau_{2\vec{PQ}}(M)$

(не чине групу јер смо кренули од рефлексије и добили транслацију)



$S_{g_0} \circ S_{p_0}(M) = R_{\underbrace{2\angle(p_0,g_0)}_{2\phi}}$

<u>Пример</u> Одредити 3×3 матрицу ротације око тачке $S(1,-2)$ за угао од $2\pi/3$ и формуле тог пресликавања. У коју тачку се пресликава коорд. по

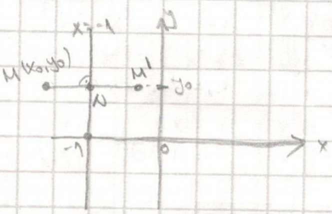
$R_{S,\phi} = \tau_{\vec{OS}} \circ R_\phi \circ \tau_{\vec{SO}}$

$$[R_{S,\phi}] = T_{\vec{OS}} \cdot R_\phi \cdot T_{\vec{SO}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \cdot \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & -s \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} = \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -1 - \sqrt{3} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

коорд. почетак се слика у тачку: $\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}, -3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

<u>Пример</u> Одредити формуле рефлексије у односу на праву:

А) $x = -1$

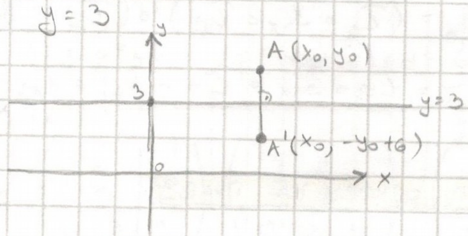


$N(-1, y_0) = S(MM')$

$-1 = \frac{x_0 + \sqcup}{2} \Rightarrow \sqcup = -x_0 - 2$

$x' = -x - 2$
$y' = y$

Б) $y = 3$



$x' = x$
$y' = -y + 6$

СКАЛИРАЊЕ

* <u>Скалирање</u> у правцу координатних оса, са центром у координатном почетку и коефицијентима $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$:

• $H_{\lambda_1\lambda_2}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ •

• специјално: $\lambda_1 = \lambda_2$: H_λ
(хомотетија)
-чува углове

* Скалирање са центром у произвољној тачки:

• $H_{Q,\lambda_1\lambda_2} = \tau_{\vec{OQ}} \circ H_{\lambda_1\lambda_2} \circ \tau_{\vec{QO}}$ •

* Примери:

1) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$: рефлексија у односу на x-осу

2) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$: рефлексија у односу на y-осу

3) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$: идентитет

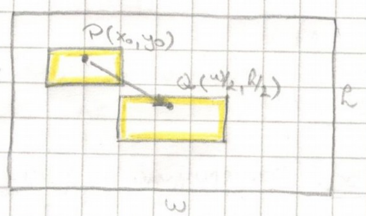
4) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$: рефлексија у односу на коорд. почетак

5) $\lambda_1 = \lambda_2$: хомотетија

* Не чува углове, однос дужине и ширине (осим хомотетије)

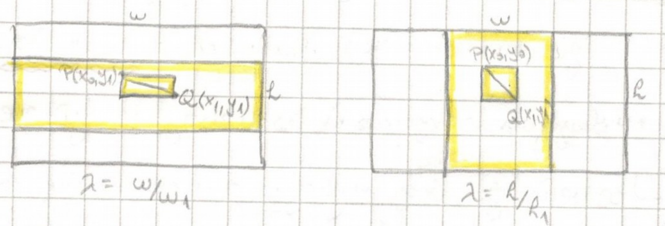
Пример Представити као афине трансформације сл. догађаје:

1.



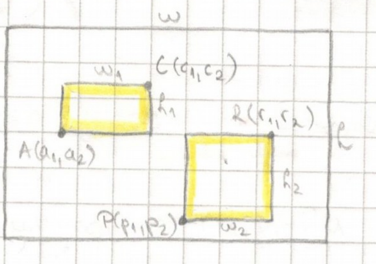
„Zoom in": $\tau_{\vec{OQ}} \circ \mathcal{H}_\lambda \circ \tau_{\vec{PO}}$

2.



„Zoom to window": $\tau_{\vec{OQ}} \circ \mathcal{H}_{\lambda} \circ \tau_{\vec{PO}}$

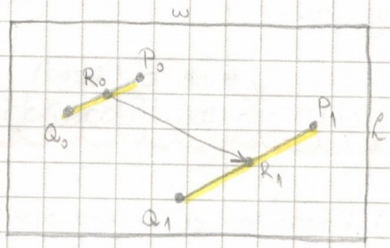
3.



Прозор: $\tau_{\vec{OP}} \circ \mathcal{H}_{\lambda_1, \lambda_2} \circ \tau_{\vec{AO}}$

$\lambda_1 = w_2 / w_1 \quad \lambda_2 = h_2 / h_1$

4.



$R_0 = \frac{1}{2}(P_0 + Q_0)$

$R_1 = \frac{1}{2}(P_1 + Q_1)$

$\lambda = P_0Q_0 : P_1Q_1$

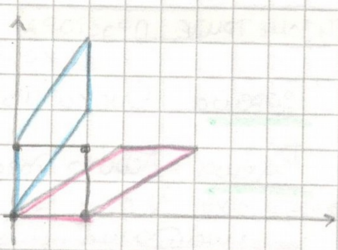
„Pinch to zoom": $\tau_{\vec{OR_1}} \circ \mathcal{H}_\lambda \circ \tau_{\vec{R_0 O}}$

СМИЦАЊЕ

Пиксел има целобројне координате па једноставни програми имају само могућност ротације за 90°, 180°, 270°. Решење за могућност свих ротација је скалирање.

* Смицање са коефицијентом λ у правцу x-осе:

$$S_x(\lambda): \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} x' &= x + \lambda y \\ y' &= y \end{aligned}$$

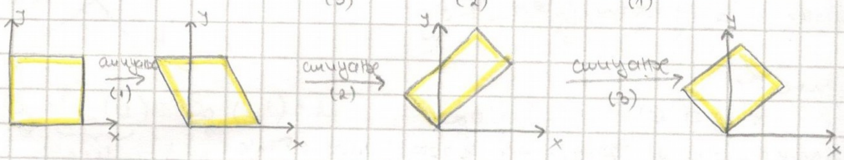


* Смицање са коеф. λ у правцу y-осе

$$S_y(\lambda): \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y + \lambda x \end{aligned}$$

* Реализација ротације помоћу смицања:

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \underset{(3)}{\begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{(2)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\phi & 1 \end{pmatrix}} \underset{(1)}{\begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$



* Не чува углове, дужине, површине

* Чува оријентацију и паралелност

ИЗОМЕТРИЈЕ

Деф Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору E произвољне димензије називају се изометрије.

• чувају и скаларни производ и углове

* Изометрије које чувају оријентацију зову се кретања. (транслација и ротација)

Теорема Транслација, ротација око произвољне тачке и рефлексија у односу на произвољну праву су изометрије равни.

~ Афина пресликавања простора ~

* Тачка $M(x,y,z)$ простора се пресликава у тачку $N'(x',y',z')$ по правилу:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0$$

* Пресликавање се представља 4x4 матрицом:

$$\boxed{A_f := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

ИЗОМЕТРИЈЕ ПРОСТОРА

Теорема Свака изометрија простора E^n је афино пресликавање

Теорема Афино пресликавање f је изометрија акко $AA^T = A^T A = E$.

• матрица је ортогонална: $A \in O(n)$

лин. део афиног пресликавања

група ортог. матрица

дим. простора

• $A^{-1} = A^T$

Теорема (Особине изометрија простора)

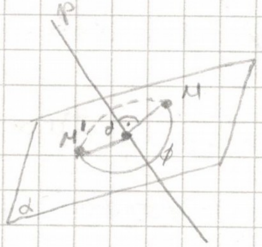
Следећа тврђења су еквивалентна за $f: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$:

- f је изометрија (чува дужине),
- f чува скаларни производ,
- f пресликава ортонормирану базу у ортонормирану базу.

РОТАЦИЈЕ

* Око праве у простору:

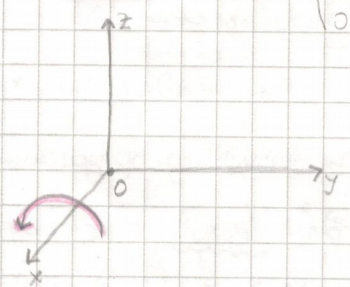
- за угао ϕ



$p \perp \alpha$

* Око x-осе:

- $[\mathcal{R}_{Ox}(\phi)]_e = \mathcal{R}_x(\phi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$



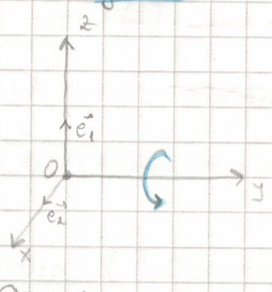
* водимо рачуна о ротацији

$\Downarrow$

* $\det C = 1$

* Око y-осе:

- $[\mathcal{R}_{Oy}(\theta)]_e = \mathcal{R}_y(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$



- $x' = \underline{\cos\theta}\, x + \underline{\sin\theta}\, z$

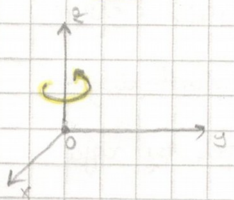
$y' = y$

$z' = \underline{-\sin\theta}\, x + \underline{\cos\theta}\, z$

$$C_{e \to f} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

* Око z-осе:

- $[\mathcal{R}_{Oz}(\psi)]_e = \mathcal{R}_z(\psi) := \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



* Око праве у простору (која пролази кроз коорд. почетак)

Теорема (формула Родригеза)

Матрица ротације $[\mathcal{R}_p(\phi)]_e$, у стандардној бази e, за угао ϕ око праве p која садржи коорд. почетак је: $\boxed{[\mathcal{R}_p(\phi)]_e = pp^T + \cos\phi\,(E - pp^T) + \sin\phi\; p_\times}$,

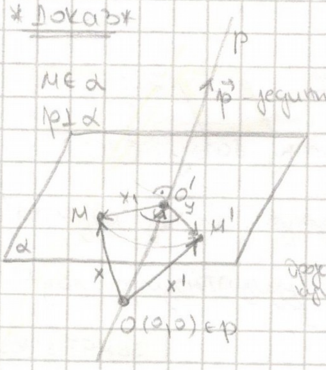
где је $p_\times$ матрица векторског множења јединичним вектором p.

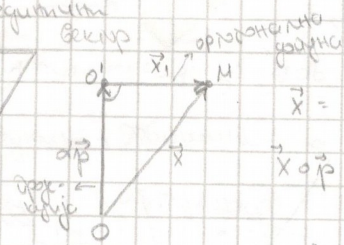
$$\cdot\ p_x := \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}$$

__Доказ__

M ∈ α

p ⊥ α





$x = [\vec{OM}]$, $x' = [\vec{OM'}]$, $\vec{OO'} = \alpha\cdot\vec{p}$, $\vec{y} = \vec{O'M'}$

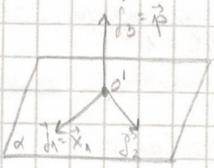
$\vec{x} = \vec{OO'} + \vec{O'M} = \alpha\vec{p} + \vec{x}_1 \quad / \circ \vec{p}$

$\vec{x}\circ\vec{p} = \alpha\cdot\underbrace{\cancel{\vec{p}\circ\vec{p}}}_{1} + \underbrace{\cancel{\vec{x}_1\circ\vec{p}}}_{(x_1\perp p)}{}^{0} \Rightarrow \alpha = \vec{x}\circ\vec{p}$

$\vec{OO'} = \underbrace{(\vec{x}\circ\vec{p})}_{\text{скаларни производ}}\cdot\vec{p}$ → множење скаларом

$\cdot\ \vec{a}\circ\vec{b} = [\vec{a}]^T\cdot[\vec{b}] \Rightarrow [\vec{OO'}] = [\vec{p}]\cdot([\vec{p}]^T\cdot[\vec{x}]) = (pp^T)\cdot x$

$x_1 = [\vec{O'M}] = [\vec{x}] - [\vec{OO'}] = x - (pp^T)x = \underbrace{(E - pp^T)}_{\text{пресликавање (пројекција)}}x$ → множ. са десне стране



$\vec{j}_2 = ?$, $\vec{j}_2 \perp \vec{j}_1, \vec{j}_3 \Rightarrow \vec{j}_2 = \vec{j}_3\times\vec{j}_1$ (мора бити позитивна оријентација)

$\vec{j}_2 = \vec{p}\times\vec{x}_1 = \vec{p}\times(\vec{x} - \alpha\vec{p}) = \vec{p}\times\vec{x} - \alpha\cdot\cancel{\vec{p}\times\vec{p}}^{0} = \vec{p}\times\vec{x}$

$\vec{y} = \vec{O'M'} = \cos\phi\,\vec{j}_1 + \sin\phi\,\vec{j}_2 = \cos\phi\,\vec{x}_1 + \sin\phi\cdot p_x\vec{x}_1 =$

$= \cos\phi\,(E - pp^T)x + \sin\phi\,P_x\cdot x$

$x' = \vec{OO'} + \vec{y} = (pp^T)x + \cos\phi(E - pp^T)x + \sin\phi\,P_x\cdot x =$

$= \underbrace{[pp^T + (E - pp^T)\cos\phi + P_x\sin\phi]}_{\text{матрица ротације}}\,x$

*Ротација око произвољне праве $p \parallel p_0$, $P \in p$:

$$\mathcal{R}_p(\phi) = \tau_{\vec{OP}} \circ \mathcal{R}_{p_0}(\phi) \circ \tau_{\vec{PO}}$$

__Пример__ Одр. формуле ротације за угао $\phi = \frac{3\pi}{2}$ око праве p у простору која садржи тачку $Q(1,0,0)$ и има вектор правца $\vec{p} = (1,2,2)$.

p_0: $O(0,0,0)$, $\vec{p}_0 = (1/3, 2/3, 2/3)$ $\quad\quad \mathcal{R}_{p,\phi} = \tau_{\vec{OQ}} \circ \mathcal{R}_{p_0,\phi} \circ \tau_{\vec{QO}}$

$[\mathcal{R}_{p_0,\phi}] = p_0p_0^T + \cancel{\cos\phi}^{0}(E - pp^T) + \cancel{\sin\phi}^{-1}P_x = p_0p_0^T - P_x$

$\cdot\ p_0p_0^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}(1\ \ 2\ \ 2) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 4\\ 2 & 4 & 4\end{pmatrix}$ $\quad\quad \cdot\ P_x = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$$[R_{p_0,\phi}] = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ 6 & 0 & -3 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$[R_{p,\phi}] = \begin{array}{c} \vec{QO} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1/9 & 8/9 & -4/9 & 0 \\ -4/9 & 4/9 & 7/9 & 0 \\ 8/9 & 1/9 & 4/9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \vec{OQ} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1/9 & 8/9 & -4/9 & 8/9 \\ -4/9 & 4/9 & 7/9 & 13/9 \\ 8/9 & 1/9 & 4/9 & 1/9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

вероватно није добро израчунато

$$x' = \frac{1}{9}(x + 8y - 4z + 8)$$
$$y' = 1/9(-4x + 4y + 7z + 13)$$
$$z' = 1/9(8x + 7y + 4z + 1)$$

РЕФЛЕКСИЈА (у односу на раван)

Теорема Матрица рефлексије $[S_\alpha]_e$, у стандардној бази e, у односу на раван α која садржи коорд. почетак O и чији јединични нормални вектор има колону координата p, је дата са:

$$\boxed{[S_\alpha]_e = E - 2pp^T}$$

* Ако раван $\beta \parallel \alpha$, не садржи коорд. почетак, већ неку тачку B, тада се рефлексија S_β представља са: $S_\beta = \tau_{\vec{OB}} \circ S_\alpha \circ \tau_{\vec{BO}}$

Пример Одр. формуле рефлексије у односу на раван $\alpha: 2x - y + 2z = 0$. $\vec{n_\alpha} = (2,-1,2)$

$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{n_\alpha}|}\vec{n_\alpha} = (2/3, -1/3, 2/3)$

$$S_\alpha = E - 2nn^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4/9 & -2/9 & 4/9 \\ -2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 4/9 & -2/9 & 4/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & 4/9 & -8/9 \\ 4/9 & 7/9 & 4/9 \\ -8/9 & 4/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

$x' = \frac{1}{9}(x + 4y - 8z)$
$y' = 1/9(4x + 7y + 4z)$
$z' = 1/9(-8x + 4y + z)$

Теорема (I Ојлерова)

Свако кретање f простора $\mathbb{E}^3$ које има фиксну неку тачку O' је ротација око неке оријентисане праве p која садржи O', за угао $[0, 2\pi) \ni \phi$.

Теорема (II Ојлерова)

Свако кретање f простора $\mathbb{E}^3$ које чува коорд. почетак може се представити као композиција три сопствене ротације око коорд. оса:

• $f = R_{Ox_2}(\phi) \circ R_{Oy_1}(\theta) \circ R_{Oz}(\psi)$,

где су $\psi, \phi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, тзв. Ојлерови или Тејт-Брајанови углови.

• ψ - угао скретања, θ - угао пропињања, ϕ - угао ваљања

! Ротације се изводе у сопственом коорд. систему !

Теорема (веза сопствених и светских ротација)

- $\left[\mathcal{R}_{O_{x_2'}}(\phi) \circ \mathcal{R}_{O_{y_1}}(\theta) \circ \mathcal{R}_{O_z}(\psi)\right]_e = [f]_e = R_z(\psi) R_y(\theta) \cdot R_x(\phi).$

~ Пројектовање ~

* Није бијекција и није изометрија

* $f : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$

1. паралелно пројектовање (спец.: ортогонална пројекција)
2. централно пројектовање

- чува колинеарност; чува средишта дужи; не чува углове
- паралелно чува паралелност, док централно не чува

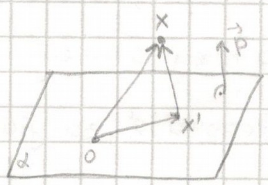
Пример Одр. ортогоналну пројекцију □ABCD, $A(1,2,-1)$, $B(-1,0,2)$, $D(3,1,1)$ на xy-раван.

$z=0$: $A'(1,2,0)$ $A'B'C'D'$ је паралелограм

$B'(-1,0,0)$

$D'(3,1,0)$ $C = \vec{AB} + \vec{AD} = B + D - 2A = (0,-3,5) \Rightarrow C'(0,-3,0)$

* Ортогонална пројекција на произвољну раван: $\boxed{X' = (E - pp^T)x, \quad p = [\vec{p}]}$ јединични



Пример Одр. ортогоналну пројекцију квадрата из претх. примера на $\alpha: 3y - z = 0$.

$\vec{n}_\alpha = (0, 3, -1)$

$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{n}_\alpha|} \cdot \vec{n}_\alpha = \left(0, \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$

$$E - nn^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/10 & -1/10 \\ 0 & 1/10 & 3/10 \\ 0 & 3/10 & 9/10 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - \tfrac{1}{10}y - \tfrac{1}{10}z \\ y' &= \tfrac{1}{10}y + \tfrac{3}{10}z \\ z' &= \tfrac{3}{10}y + \tfrac{9}{10}z \end{aligned}\right\} \quad A' \in \alpha \to A'\left(\tfrac{9}{10}, -\tfrac{1}{10}, -\tfrac{3}{10}\right)$$

$B \in \alpha \to B'\left(-\tfrac{12}{10}, \tfrac{6}{10}, \tfrac{18}{10}\right)$

$D \in \alpha \to D'\left(\tfrac{28}{10}, \tfrac{4}{10}, \tfrac{12}{10}\right)$

$C \in \alpha \to C'\left(-\tfrac{2}{10}, \tfrac{12}{10}, \tfrac{36}{10}\right)$

* Пројекција сфере на раван:

- ортогонална пројекција: круг
- централна пројекција: елипса, круг, парабола, хипербола

* Сферу не можемо да "истегнемо" на раван због криве

* Картографске пројекције:

1) конформне – чувају углове; слика у међусобно ортогоналне објекте
2) еквивалентне – чувају однос површина
3) еквидистантне – чувају растојања (најмање верна)

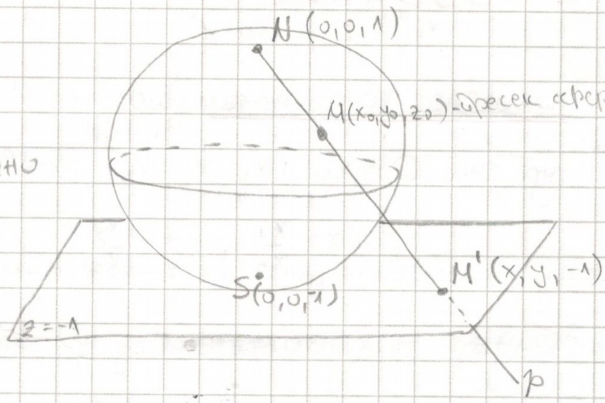
(1) Меркаторова пројекција, стереографска, Ламбертова (конусна) пројекција

(2) Бонеова, Молвеиде, Ламбертова (азимутална) пројекција

(3) Географска (чува растојања дуж меридијана), Синусоидална (чува растојања дуж паралела)

* СТЕРЕОГРАФСКА пројекција

- са северног пола на раван $z=-1$: (бијекција)



– пројекција северног пола је бесконачно далеко

– што смо ближе N, пројекције су даље

$p: N \in p, \quad \vec{p} = \overrightarrow{NM} = (x_0, y_0, z_0 - 1)$

$p: \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z-1}{z_0-1} \qquad \alpha: z = -1$

$p: x = x_0 t, \quad y = y_0 t, \quad z = 1 + (z_0 - 1)t, \; t \in \mathbb{R} \qquad p \cap \alpha: 1 + (z_0-1)t = -1$

$t = \frac{2}{1-z_0} \qquad M'\left(\frac{2x_0}{1-z_0}, \frac{2y_0}{1-z_0}, -1\right)$

- Особине

  – Слика круга који припада сфери и садржи N је права (не чува се колинеарност)

  – Специјално, паралеле се сликају у концентричне кружнице са центром у S.

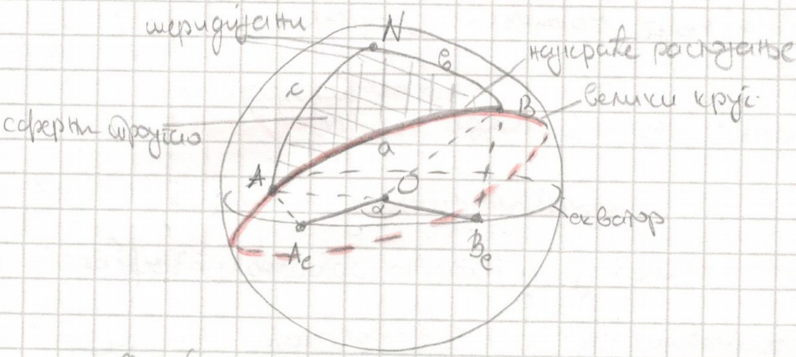
  – Слика меридијана су праве које се секу у јужном полу - S.

  – Углови се чувају

  – Не чувају се растојања дуж меридијана

* Интересантни проблеми на сфери:

• најкраћи пут између 2 тачке на сфери



- Основна формула сферне геометрије:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha$$

• геодезијске линије - најкраће растојање

- кружни лук на сфери
- дуж у равни

~ Пројективне трансформације (у равни) ~

деф Хомогене координате тачке $M(x,y)$ афине равни $\mathbb{R}^2$ су било која уређена тројка $(x_1 : x_2 : x_3)$ таква да важи:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0$$

афине	хомогене	веза
(x,y)	$\lambda(x_1 : x_2 : x_3),\ \lambda \neq 0$	$x = \frac{x_1}{x_3},\ y = \frac{x_2}{x_3},\ x_3 \neq 0$

пример Одр. хомогене коорд. тачке чије су афине коорд. $(2,1)$

$A(2,1)$: $\quad 2 = \frac{x_1}{x_3}, \quad 1 = \frac{x_2}{x_3}$

$x_1 = 2x_3 \quad x_3 = x_2, \quad x_3 \neq 0$

$x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \quad x_1 = 2 \qquad A(2:1:1)$

* $x_3 = 0$ → бесконачно далеке тачке (колинеарне); припадају правој $u_\infty : x_3 = 0$ (бесконачно далека права)

$P_\infty(x_1 : x_2 : 0),\ x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ (не могу све 3 да буду једнаке нули)

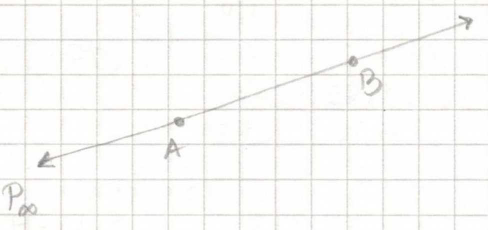
• допуњена реална права: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

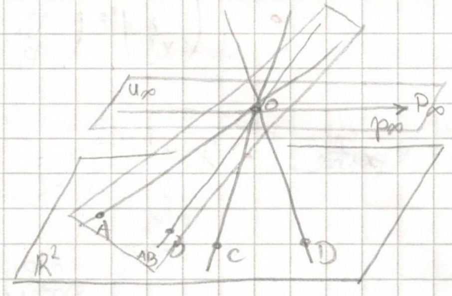
афина раван: $\overline{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup u_\infty$

Пример Одр. афине координате тачака $A(1:2:2)$ и $B(3:2:0)$.

$A(1:2:2) \rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$B(3:2:0) \rightarrow$ не постоји у афиној равни (бесконачно далека тачка)





Пример Одр. пресек правих $g: 2x-5y+6=0$, $r: 2x-5y+7=0$ у:

а) афиној равни - систем нема решења у $\mathbb{R}^2$

б) допуњеној афиној равни

$$g: \quad 2\frac{x_1}{x_3} - 5\frac{x_2}{x_3} + 6 = 0 \ /\cdot x_3 \rightarrow 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0 \ /\cdot(-1)$$

$$r: \quad 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0 \ +$$

$$\underbrace{x_3 = 0}_{\text{бесконачно далека тачка}} \qquad x_2 = \frac{2}{5}x_1$$

$$r \cap g = \{M_\infty\}$$

$$M_\infty(\underbrace{5:2}_{\substack{\text{произвољно}\\ \neq 0}}:0) \rightarrow \vec{p}$$

Теорема Паралелне праве допуњене афине равни се секу у бесконачно далекој тачки. Дакле, сваке 2 праве у допуњеној афиној равни се секу!

Деф Реална пројективна раван је скуп хомогених координата:

$\mathbb{R}P^2 := \{(x_1 : x_2 : x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, при чему не могу све три координате истовремено бити једнаке нули.

Пример Одр. ј-ну праве $\bar{g}$ кроз тачке $A(1:2:3)$, $B(-2:1:0)$

$$\bar{g} = A \times B = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = [-6 : -3 : 4]$$

$$\bar{g}: \quad -6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$$

$$g: \quad 6x + 3y - 4 = 0.$$

Деф. Пројективно пресликавање пројективне равни је пресликавање које тачку $M(x_1:x_2:x_3)$ слика у тачку $M'(x_1':x_2':x_3')$ и дато је формулама:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \det(p_{ij}) \neq 0, \ \lambda \neq 0$$

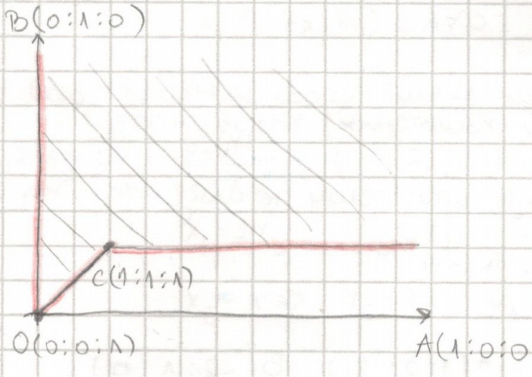
или краће: $\lambda \underbrace{x'}_{\text{нове коорд}} = \underbrace{P}_{\text{матр. пројективног пресликавања (регуларна матр.)}} \underbrace{x}_{\text{старе коорд}}, \quad P = (p_{ij})$

- специјално: $p_{31}\ p_{32}\ p_{33} = 0\ 0\ 1 \rightarrow$ афино пресликавање
- Матрице P и λP представљају исто пресликавање
- Композицији пресликавања одговара множење матрица, а инверзном пресликавању одговара инверзна матрица
- Чува колинеарност тачака тј. слика праве у праве

Теорема (Основна теорема пројективне геометрије)

Постоји јединствено пројективно пресликавање пројективне равни $\mathbb{RP}^2$ које четири тачке A, B, C, D у општем положају слика редом у тачке A', B', C', D' у општем положају

- слика у произвољни четвороугао



проширена афина раван

$\underset{x\text{ оса}}{A}, \underset{y\text{ оса}}{B}, O$ – базне тачке

$C(1:1:1)$ – јединица

A, B, C – тачке у општем положају

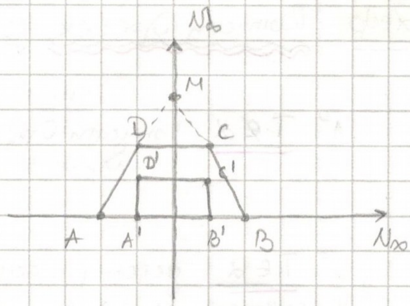
Пример Одр. пројективно пресл. равни које тачке $A_0(1:0:0)$, $B_0(0:1:0)$, $C_0(0:0:1)$, $D_0(1:1:1)$ слика у $A(1:2:3)$, $B(3:2:1)$, $C(0:1:1)$, $D(7:11:10)$

$$\lambda X' = PX \qquad P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 3\lambda_2 & 0 \\ 2\lambda_1 & 2\lambda_2 & \lambda_3 \\ 3\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$$

$$\lambda_4 D = PD_0: \quad \left.\begin{aligned} 7\lambda_4 &= \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 11\lambda_4 &= 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 10\lambda_4 &= 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned}\right\} \quad \lambda_2 = 2\lambda_4 \quad \lambda_1 = \lambda_4 \quad \lambda_3 = 5\lambda_4$$

$$\lambda_4 = 1: \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Пример Одр. пројективно пресликавање које трапез $ABCD$, $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(1,2)$, $D(-1,2)$ пресликава у правоугаоник $A'B'C'D'$, $A'(-1,0)$, $B'(1,0)$, $C'(1,1)$, $D'(-1,1)$.



- не чува паралелност па $\nexists$ афино пресликавање

$A(-2:0:1)$ $B(2:0:1)$ $C(1:2:1)$ $D(-1:2:1)$

$A_0(1:0:0)$ $B_0(0:1:0)$ $C_0(0:0:1)$ $D_0(1:1:1)$

$$[f] = P = \begin{pmatrix} -2\lambda_1 & 2\lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 2\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 D = PD_0: \quad \left.\begin{aligned} -\lambda_4 &= -2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_4 &= 2\lambda_3 \\ \lambda_4 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned}\right\} \quad \lambda_4 = \lambda_3 \quad \lambda_2 = -\tfrac{1}{2}\lambda_4 \quad \lambda_1 = \tfrac{1}{2}\lambda_4$$

$$\lambda_4 = 2: \quad \lambda_3 = 2 \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$$

$$[f^{-1}] = P^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/8 & 1/2 \\ -1/4 & 3/8 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

$A'(-1:0:1)$ $B'(1:0:1)$ $C'(1:1:1)$ $D'(-1:1:1)$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_4 D' = QD_0: \quad \left.\begin{aligned} -\lambda_4 &= -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_4 &= \lambda_3 \\ \lambda_4 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \lambda_3 &= \lambda_4 \\ \lambda_2 &= -\lambda_4 \\ \lambda_1 &= \lambda_4 \end{aligned}$$

$$\lambda_4 = 1$$

$$[g \circ f^{-1}] = QP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda x_1' &= 4x_1 \\ \lambda x_2' &= 2x_2 \\ \lambda x_3' &= -2x_2 + 8x_3 \end{aligned}$$

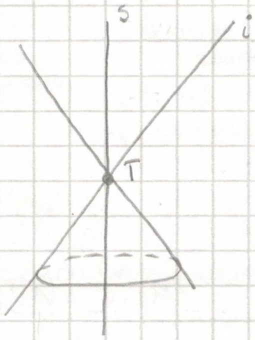
④ # Криве у равни

10. 12. 2018.

* Конус

Нека су i и s две праве у простору које се секу у тачки T.

Кружни конус са теменом T је површ која се добија ротацијом праве i око осе s. Ротирана права i назива се изводница, а права s је оса конуса.



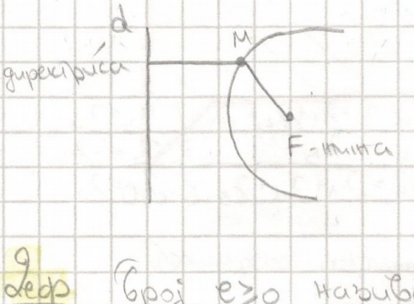
Деф Конусни пресек је пресек конуса са произвољном равни α.

1° $T \notin \alpha$ конусни пресек - $\boxed{\text{коника}}$:
- круг / елипса $0 \le e < 1$
- хипербола $e > 1$
- парабола $e = 1$

2° $T \in \alpha$ дегенерисани пресек :
- тачка
- 2 праве које се секу у T
- 1 двострука права $= i$

Деф Коника је пресек конуса са равни α која НЕ садржи теме конуса.

Теорема У равни α конике постоје права d и тачка F такве да је однос растојања: $\boxed{\frac{MF}{d(M,d)} = e = const}$, произвољне тачке M конике од тачке F и праве d константан.



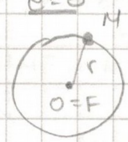
e - ексцентрицитет

Деф Број $e \ge 0$ назива се ексцентрицитет конике, тачка F жижа, а права d директриса конике.

* Ексцентрицитет одређује тип конике:

- $e = 0$ круг
- $0 < e < 1$ елипса
- $e = 1$ парабола
- $e > 1$ хипербола

$e = 0$



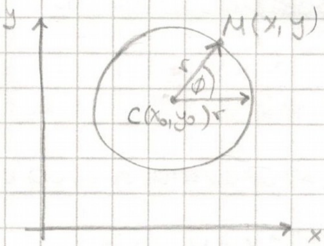
$d = M_\infty$ бесконачно далека права

$d(M,F) = r$

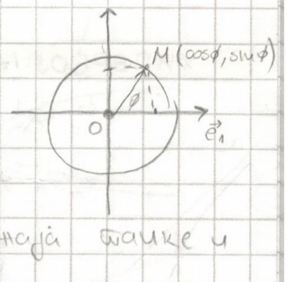
Примери коника у природи

1) Кеплеров закон: Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике
   - Сунце не мирује. На орбиту планете утиче гравитација.
   - Ретроградни Меркур - привид да нам се са Земље чини да Меркур иде у назад.
   - Скоро параболичне путање има Халејева комета ($e \approx 0.995$)
2) Путања косог хица је парабола
3) сенка кружног предмета на раван зид је коника
4) сунчева сенка врха штапа у току дана је коника

КРУГ

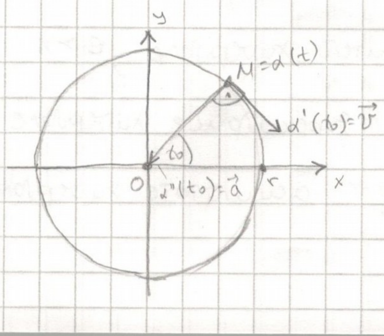


- $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ ј-на круга у равни $\mathbb{R}^2$
- у $\mathbb{R}^3$ → цилиндар (z = const) → круг
- имплицитна ј-на круга:
  - $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$
- параметарска ј-на круга:
  - $x = x_0 + r\cos\phi$
    $y = y_0 + r\sin\phi$, $\phi \in [0, 2\pi)$



- ϕ је угао између вектора положаја тачке и позитивног дела x-осе

* Брзина и убрзање: $\vec{v}$ $\vec{a}$



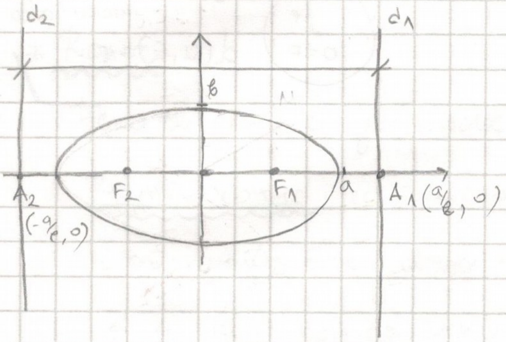
$\alpha(t)$ - парам. ј-на криве, t - параметар (време)

$\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$

$\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t) = \vec{v}$ брзина

$\alpha''(t) = (-r\cos t, -r\sin t) = \vec{a}$ убрзање $= -\alpha(t)$

ЕЛИПСА



a, b - полуосе елипсе , $d(d_1, d_2) = \frac{2a}{e}$

• канонска ј-на елипсе:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , a > b > 0$$

• $F_1(c,0), F_2(-c,0)$ - жиже елипсе

• $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

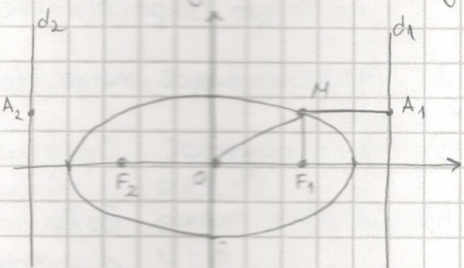
• $d_1: x = \frac{a}{e}$, $d_2: x = -\frac{a}{e}$ - директрисе елипсе

• $e = c/a$ - ексцентрицитет елипсе

$\hookrightarrow \quad 0 < e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \underbrace{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}}_{<1} < 1$

• $a = b \Rightarrow$ круг

Теорема: Збир растојања произвољне тачке елипсе од њених жижа је константан: $\boxed{MF_1 + MF_2 = 2a}$



Доказ

$\frac{d(M,F_1)}{d(M,d_1)} = const = e \Rightarrow d(M,F_1) = e\, d(M,d_1)$

$\Rightarrow d(M,F_2) = e\, d(M,d_2)$

$\Rightarrow MF_1 + MF_2 = e\, d(M,d_1) + e\, d(M,d_2) = e(A_1A_2) = \cancel{e}\frac{2a}{\cancel{e}} = 2a.$

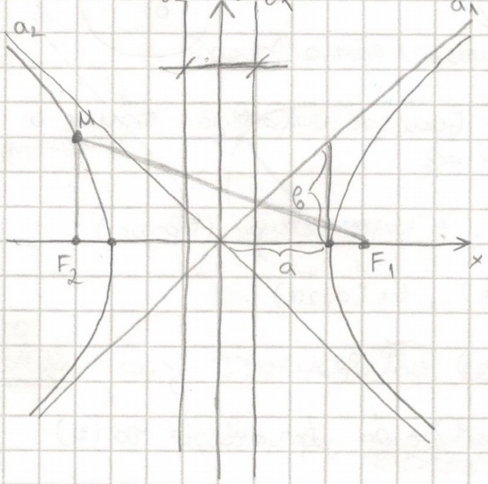
• параметарска ј-на елипсе:

$$x = a\cos\theta$$
$$y = b\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

↓ полуосе

- θ није угао између вектора положаја тачке и позитивног дела xосе

ХИПЕРБОЛА



• канонска ј-на хиперболе:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

• $a, b > 0$ полуосе хиперболе

• $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ - жиже хиперболе

• $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

• $e = c/a$ - ексцентрицитет хиперболе , $e > 1$

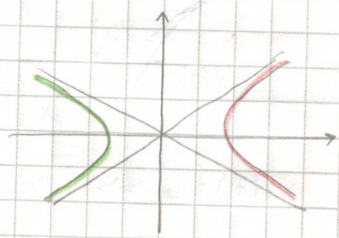
• $d_1: x = a/e$, $d_2: x = -a/e$ директрисе хиперболе

• $a_1: y = \frac{b}{a}x$, $a_2: y = -\frac{b}{a}x$ асимптоте хиперболе

Теорема Апсолутна вредност разлике растојања произвољне тачке хиперболе од њених жижа је константан: $\boxed{|MF_1 - MF_2| = 2a}$

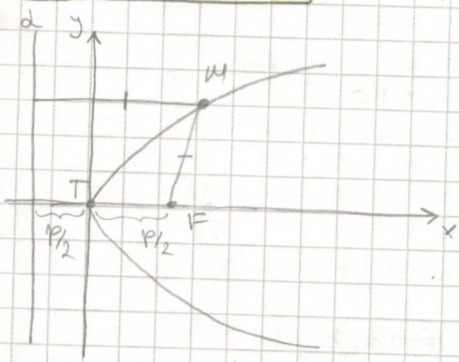
→ доказ сличан доказу за елипсу.

• Параметризација хиперболе:



• $x = +a\cosh\phi$, $y = b\sinh\phi$, $\phi\in\mathbb{R}$
• $x = -a\cosh\phi$, $y = b\sinh\phi$, $\phi\in\mathbb{R}$

ПАРАБОЛА



• $y^2 = 2px$, $p>0$ - канонична ј-на

• Свака тачка M параболе је једнако удаљена од жиже и од директрисе параболе

$\boxed{MF = d(M,d)}$ ⟺ $\underline{e=1}$

• p - параметар параболе

• $F(p/2, 0)$ - жижа параболе

• $d: x = -p/2$ директриса параболе

• T - теме параболе

• Параметризација параболе:

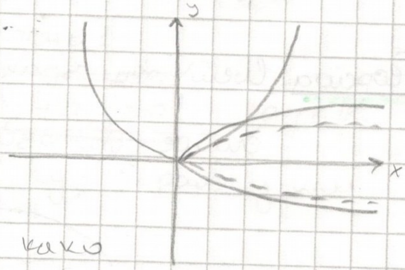
• $x = \frac{t^2}{2p}$, $y = t$, $t\in\mathbb{R}$

Пример Показати да су сваке 2 параболе међусобно сличне

нпр. $y = x^2$ и $x = 4y^2$

$y = x^2 \xrightarrow{\text{ротација}} x = y^2$

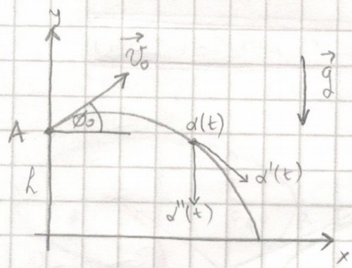
$\alpha(t) = (t, t^2)$ $\beta(s) = (s, (2s)^2)$



• Можемо да применимо изометрију на криве како бисмо их довели у канонски облик

• Можемо да применимо и хомотетију за сличност.

КОСИ ХИТАЦ



h - висина, $\vec{v_0}$ - почетна брзина

ϕ_0 - угао, $\vec{g}$ - гравитационо убрзање

$$\vec{v_0} = \alpha'(0) = (v_0 \cos\phi_0 , v_0 \sin\phi_0)$$

$$\alpha''(t) = (0, g)$$

- $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \geq 0$ параметарска ј-на криве

$$x''(t) = 0 \Rightarrow x'(t) = c_1 = v_0 \cos\phi_0$$

$$y''(t) = g \Rightarrow y'(t) = gt + c_2 = -gt + v_0 \sin\phi$$

$$\Rightarrow x(t) = v_0 \cos\phi_0\, t + c_3 = (v_0 \cos\phi_0) t$$

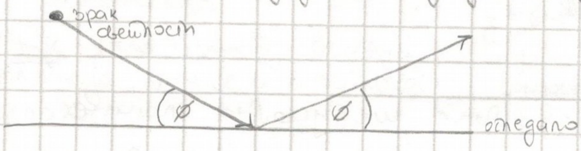
$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin\phi_0\, t + c_4 = -\frac{gt^2}{2} + (v_0 \sin\phi_0) t + h, \quad t \geq 0$$

- Највећа даљина се постиже за угао $\pi/4$
- Највећа висина се постиже за угао $\pi/2$ - слободни пад:

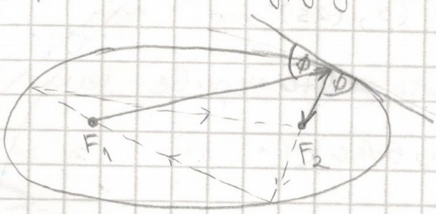
$$x(t) = 0, \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h, \quad t \geq 0 \quad \text{(права)}$$

ЗАКОН ОДБИЈАЊА СВЕТЛОСТИ

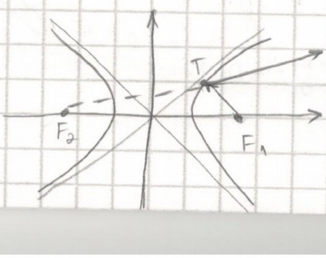
- Светлост се одбија од глатке површине тако да је упадни угао зрака светлости једнак одбојном углу.



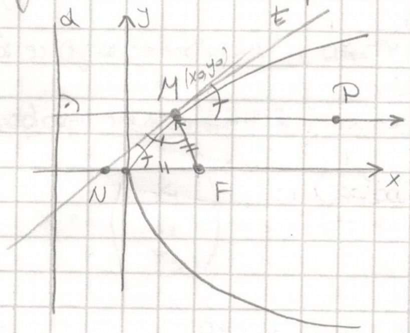
Теорема Светлосни зрак који извире из жиже елипсе и одбија се од елипсе, пролази кроз другу жижу елипсе.



Теорема Светлосни зрак који извире из жиже хиперболе и одбија се од хиперболе, колинеаран је са другом жижом хиперболе



Теорема Светлосни зрак који извире из жиже параболе одбија се од параболе паралелно њеној оси.



Доказ

$y^2 = 2px$, $\alpha(t) = \left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$, $t\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\alpha'(t) = (t/p, 1)$

Тангента: $x = x_0 + \frac{x_0}{p}s$, $y = y_0 + s$, $s\in\mathbb{R}$

N: $y_0 + s = 0 \Rightarrow s = -y_0 \Rightarrow N\left(x_0 - \frac{x_0 y_0}{p}, 0\right) = \ldots = N(-x_0, 0)$.

$\measuredangle FMN \cong \measuredangle(MP, t)$. Хоћемо да покажемо да $MP \parallel \underset{NF}{x\text{-оса}}$.

$\Leftrightarrow \measuredangle(FM, t) \cong \measuredangle MNF \Leftrightarrow \triangle MNF$ једнокраки.

$\underset{x_0 + p/2}{FM} = d(M, d)$, $d: x = -p/2$ $M(x_0, y_0)$ $N(-x_0, 0)$, $|NF| = x_0 + p/2$

$\Rightarrow$ једнакокраки $\triangle$ $\Rightarrow$ углови су подударни $\Rightarrow$ $MP \parallel NF$.

КРИВЕ ДРУГОГ РЕДА

Деф Крива другог реда је скуп тачака равни чије координате (x, y) задовољавају једначину другог степена:

$$\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0} \quad , a_{ij}\in\mathbb{R}$$

• ова ј-на геометријски описује елипсу, хиперболу, параболу или неку дегенерисану криву

Теорема За сваку криву другог реда, дату у ортонормираном реперу O_e, постоји нови ортонормирани репер O_f, исте оријентације, у ком она има тачно 1 од следећих ј-на:

конике
- (Е) $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, $a \geq b > 0$
- (Х) $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$
- (П) $y'^2 = 2px'$, $p > 0$

дегенерисани облици:

(D1) $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1$ (празан скуп или имагинарна елипса)

(D2) $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$ (тачка)

(D3) $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0 \longrightarrow \frac{x'}{a} = \frac{y'}{b}$ или $\frac{x'}{a} = -\frac{y'}{b}$ (2 праве које се секу)

(D4)* $x'^2 = a^2 \longrightarrow x' = a$ или $x' = -a$ (2 паралелне праве)

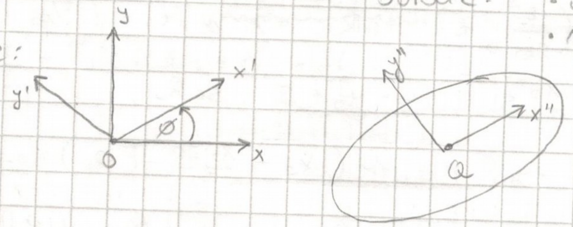
(D5) $x'^2 = 0$ ("двострука" права)

(D6)* $x'^2 = -a^2$ (празан скуп)

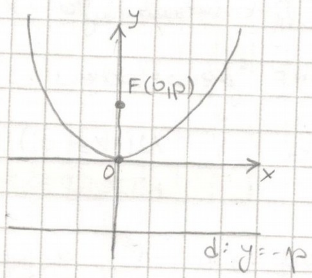
(*) - нису конусни пресеци

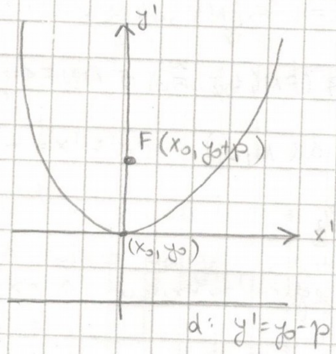
* Свођење криве на канонски облик: • транслација • ротација

• нпр елипсе:



• нпр парабола: (транслација)





$x' = x + x_0$

$y' = y + y_0$

• Дозвољена су само кретања (изометрије):

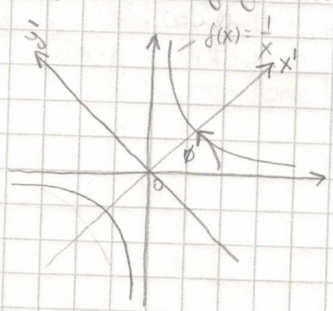
- кад $a_{12} = 0$: дозвољена је транслација
- кад $a_{12} \neq 0$: потребно је и ротирати коорд. систем

• Ротирамо: $x = \cos\varphi\, x' - \sin\varphi\, y'$, $y = \sin\varphi\, x' + \cos\varphi\, y'$

$$\mathrm{ctg}\, 2\varphi = \frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}, \quad \varphi \in [0, \pi/2)$$

$$\cos 2\varphi = \frac{\mathrm{ctg}\, 2\varphi}{\sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2 2\varphi}} \Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}}, \quad \sin\varphi = \sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}}$$

Пример Ротација хиперболе. Показати да је $x \cdot y = 1 \rightsquigarrow \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$



$a_{11} = a_{22} = 0$, $2a_{12} = 1$

$\mathrm{ctg}\, 2\varphi = 0 \Rightarrow \cos 2\varphi = 0$

$\Rightarrow 2\varphi = \pi/2 \Rightarrow \varphi = \pi/4$

II начин:

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - \ldots$

$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + \ldots$

$\Rightarrow xy = \frac{1}{2}(x'^2 - \ldots$

* Криве другог реда у пројективној равни

• Ј-на у хомогеним координатама:

$$\Gamma: \ a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}a_2a_3 = 0$$

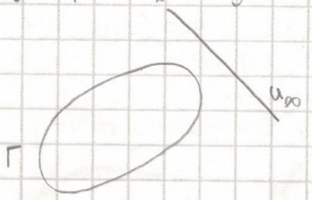
• Векторски запис: $X^T G X = 0$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = G^T$$

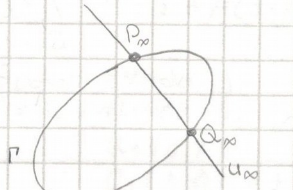
АФИНО	ПРОЈЕКТИВНО
елипса/круг, хипербола, парабола	овална крива

* Класификација кривих (уместо 9, имамо 5 случајева)

(O) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ (овалне криве) из ј-не круга: $x^2 + y^2 = 1 \ / \cdot x_3^2$

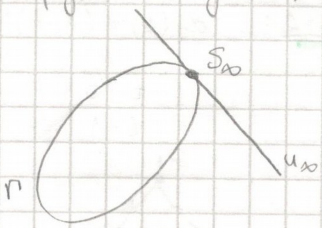


$\Gamma \cap u_\infty = \{\emptyset\}$



$\Gamma \cap u_\infty = \{P_\infty, Q_\infty\}$

правци асимптота хиперболе



$\Gamma \cap u_\infty = \{S_\infty\}$

правац осе параболе

• хипербола $x^2 - y^2 = 1 \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \Gamma&: \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ u_\infty&: \ x_3 = 0 \end{aligned}$$

$x_3 = 0, \ x_1^2 = x_2^2 \rightarrow x_1 = x_2$ или $x_1 = -x_2$

$P_\infty(1:1:0) \quad Q_\infty(1:-1:0)$

(∅) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (празан скуп или нула крива)

(T) $x_1^2 + x_2^2 = 0$ (тачка) $O(0:0:1) \rightsquigarrow O(0,0)$

(П1) $x_1^2 - x_2^2 = 0 \longrightarrow x_1 + x_2 = 0 \ (y = -x)$ или $x_1 - x_2 = 0 \ (y = x)$
(две праве)

(П2) $x_1^2 = 0$ („двострука" права) $x_1 = 0$

~ Безијерове криве ~

Деф Нека су $P_0, P_1, \dots, P_n$, $n \geq 2$ тачке равни. Безијерова крива степена n је:

$$\boxed{\alpha_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i, \quad t \in [0,1]}$$

Тачке P_i називају се контролне тачке, а полиноми $B_i(t)$ Бернштајнови полиноми или базне фје.

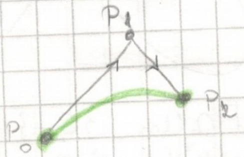
Полигонска линија $P_0 P_1 \dots P_n$ се зове контролна полигонска линија.

- $n=1$: $\alpha_1(t) = (1-t)P_0 + tP_1, \quad t \in [0,1]$

$$= P_0 + t(P_1 - P_0) = P_0 + t\overrightarrow{P_0P_1} \qquad \text{дуж}$$

- $n=2$: $\alpha_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0,1]$ део параболе

$t=0 \Rightarrow \alpha_n(0) = P_0$ } свака крива садржи
$t=1 \Rightarrow \alpha_n(1) = P_n$ } почетну и крајњу контролну тачку



$\vec{v}_t = \alpha'(t)$

$\alpha_2'(t) = -2(1-t)P_0 + 2(1-2t)P_1 + 2tP_2$

$\alpha_2'(0) = -2P_0 + 2P_1 = 2\overrightarrow{P_0P_1}$

$\alpha_2'(1) = -2P_1 + 2P_2 = 2\overrightarrow{P_1P_2}$

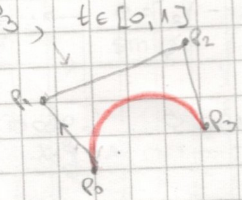
- $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ су тангентни вектори

- матрични запис за $n=2$:

$$\alpha_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 = (P_0 - 2P_1 + P_2)t^2 + (-2P_0 + 2P_1)t + P_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 & -2P_1 & P_2 \\ -2P_0 & 2P_1 & 0 \\ 0 & P_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}}_{\text{ово је непознато}}$$

- $n=3$: $\alpha_3(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3, \quad t \in [0,1]$



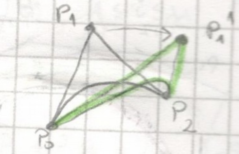
* $u \in [a,b]$: $\alpha_n(u) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{u-a}{b-a}\right)^i \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{n-i} P_i$.

* Особине:

1) $\deg \alpha_n = n$

је: 2) $\alpha_n(0) = P_0$, $\alpha_n(1) = P_n$

3) $P_k \to P_k + \vec{v}$: $\overline{\alpha_n}(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$

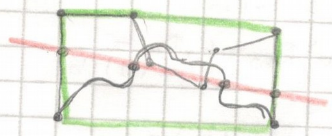


• мала промена тачака ⇒ глобална промена криве

4) тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$

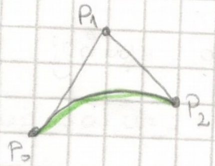
5) особина ненегативности

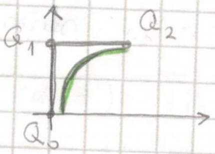
6) особина конвексног омотача



7) особина мање варијације

8) афина инваријантност





$Q_0(0,0)$
$Q_1(0,1)$
$Q_2(1,1)$

$$\alpha_2(t) = (1-t)^2 \overset{0}{\cancel{Q_0}} + 2t(1-t)Q_1 + t^2 Q_2 = 2t(1-t)Q_1 + t^2 Q_2 =$$

$$= (t^2, 2t - \cancel{t^2} + \cancel{t^2}) = (t^2, 2t)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = t^2 \\ y = 2t \end{array}\right\} \text{парабола } t \in \mathbb{R} \xrightarrow{t\in[0,1]} \text{део параболе}$$

Теорема Безијерова крива степена 2 је део параболе.

ДЕ-КАСТЕЉАУ АЛГОРИТАМ

* Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1° $P_{00} = P_0$, $P_{01} = P_1$, ..., $P_{0n-1} = P_{n-1}$, $P_{0n} = P_n$.

2° $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$

...

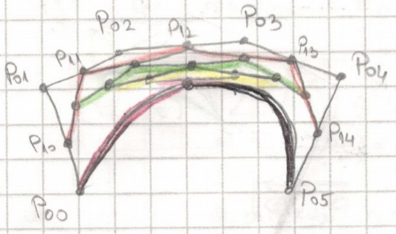
3° $P_{ki} = (1-t)P_{k-1i} + tP_{k-1i+1}$, $i = 0, \dots, n-k$

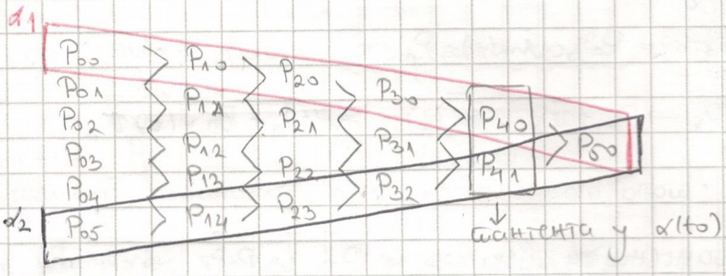
4° $P_{n0} = (1-t)P_{n-10} + tP_{n-11}$

• $P_{n-10}P_{n-11}$ - тангента на криву у тачки t

Пример Показати да је де-Кастељау алгоритам коректан.

• крива 5. степена





Доказ (за n=2)

$$\alpha_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0,1]$$

$$\left.\begin{matrix} P_{00} \\ P_{01} \\ P_{02} \end{matrix}\right\rangle \begin{matrix} P_{10} = (1-t_0)P_{00} + t_0 P_{01} \\ P_{11} = (1-t_0)P_{01} + t_0 P_{02} \end{matrix} \Big\rangle P_{20} = (1-t_0)P_{10} + t_0 P_{11} =$$

$$= (1-t_0)\big((1-t_0)P_{00} + t_0 P_{01}\big) + t_0\big((1-t_0)P_{01} + t_0 P_{02}\big) =$$

$$= (1-t_0)^2 P_{00} + 2t_0(1-t_0)P_{01} + t_0^2 P_{02} =$$

= вредност криве у $t_0 = \alpha_2(t_0) \Rightarrow P_{20}$ припада кривој

$$\overrightarrow{P_{10}P_{11}} = \vec{v_t} = \alpha_2'(t_0)$$

$$\alpha_2'(t_0) = -2(1-t_0)P_0 + 2(1-2t_0)P_1 + 2t_0P_2$$

$$\overrightarrow{P_{10}P_{11}} = P_{11} - P_{10} = t_0P_{02} + (1-2t_0)P_{01} - (1-t_0)P_{00} = \frac{1}{2}\alpha_2'(t_0) \Rightarrow$$ јесте тангента.

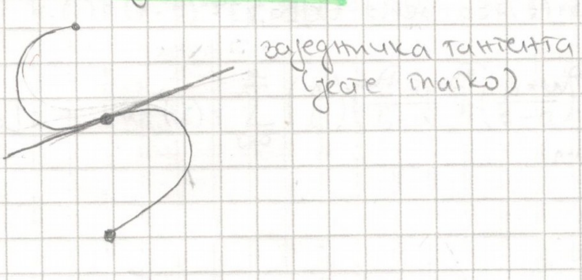
* Подела криве на 2 дела: криву α делимо на 2 криве α_1 и α_2:

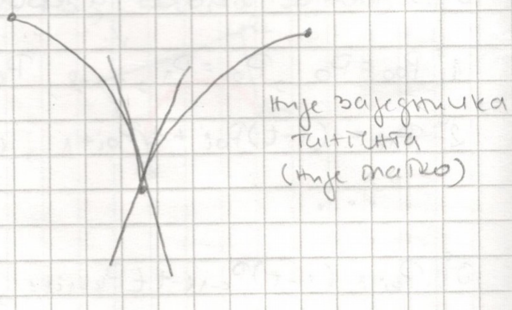
α_1: $P_0 = P_{00}, P_{10}, \ldots, P_{n0} = \alpha(t)$

α_2: $\alpha(t) = P_{n0}, P_{n-1\,1}, \ldots, P_{0n} = P_n$

- не мења се степен криве

* Глатко спајање кривих



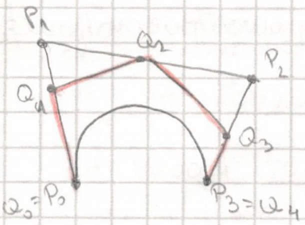


* Повећање степена криве

$\alpha_n(t): P_0, \dots, P_n$, $\overline{\alpha}_{n+1}(t)$: $Q_0 = P_0$

$$Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \quad 1 \le i \le n$$

$$Q_{n+1} = P_n$$



$\Rightarrow$ $Q_0 = P_0$, $Q_1 = \frac{1}{4}P_0 + \frac{3}{4}P_1$, $Q_2 = \frac{2}{4}P_1 + \frac{2}{4}P_2$,

$Q_3 = \frac{3}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_3$, $Q_4 = P_3$

__Пример__ а) Одр. Безијерову криву $\alpha_2(t)$ чије су контролне тачке $P_0(1,1)$, $P_1(-1,0)$, $P_2(1,-1)$.

$$\alpha_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0,1]$$

$$= \left((1-t)^2 - 2t(1-t) + t^2, \ (1-t)^2 - t^2\right) =$$

$$= \left(1 - 4t + 4t^2, \ 1 - 2t\right) = \left((1-2t)^2, 1-2t\right), \quad t \in [0,1]$$

$$= (s^2, s), \quad s = 1-2t, \quad s \in [-1,1]$$

б) само за $n=2$: $\alpha'(\frac{1}{2}) = \overrightarrow{P_0P_2}$, $\alpha_2'(t) = (-4+8t, -2)$

$\alpha_2'(\frac{1}{2}) = (0,-2) \Rightarrow \overrightarrow{P_0P_2} = (0,-2)$

↑

б) Одр. ј-ну тангенте на криву $\alpha_2(t)$ у тачки $t_0 = 0.5$ и доказати да је тангента паралелна са правом P_0P_2.

в) Повећати степен криве за 1.

$Q_0 = P_0 = (1,1)$, $Q_3 = P_2 = (1,-1)$

$Q_1 = \frac{1}{3}P_0 + \frac{2}{3}P_1 = (-1/3, 1/3)$

$Q_2 = \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 = (-1/3, -1/3)$

г) Одр. ј-ну тангенте на криву $\overline{\alpha_3}(t)$ у тачки $t_0 = 0.6$. Да ли је тангента $\parallel$ са правом $\overline{P_0}\overline{P_3}$?

$$\overline{\alpha_3}(t) = (1-t)^3 Q_0 + (1-t)^2 Q_1 + 3t^2(1-t)Q_2 + t^3 Q_3 =$$

$$= \dots = \left((1-2t)^2, 1-2t\right)$$

$$\overline{\alpha_3}'(t) = \alpha_2'(t)$$

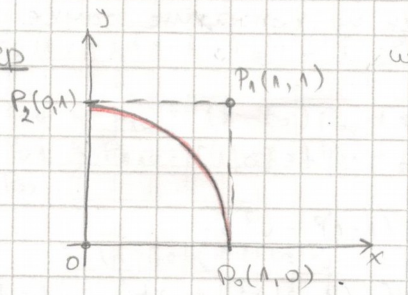
РАЦИОНАЛНЕ БЕЗИЈЕРОВЕ КРИВЕ

* Рационална Безијерова крива степена n са контролним тачкама $P_0,\dots,P_n$ и тежинама $w_0,\dots,w_n>0$ је дата параметризацијом:

$$\boxed{r_n(t)=\frac{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t)P_i}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t)},\quad t\in[0,1]}$$

где су $B_{i,n}(t)$ Бернштајнови полиноми

<u>Пример</u>



$w_0=w_1=1,\ w_2=2$

• четвртина круга:

$x=\cos\theta$

$y=\sin\theta,\quad \theta\in[0,\pi/2]$

• РБ крива: $x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2},\quad t\in[0,1]$

⟶ P_0, P_1, P_2 контролни полигон. $\operatorname{tg}\frac{t}{2}=u$

$$\left.\begin{aligned}\cos t&=\frac{1-u^2}{1+u^2}\\ \sin t&=\frac{2u}{1+u^2}\end{aligned}\right\}\text{рац. парамeтр. круга}$$

$u\in[0,1]$

• $\frac{w_0(1-t)^2P_0+2w_1t(1-t)P_1+w_2t^2P_2}{w_0(1-t)^2+2w_1t(1-t)+w_2t^2}=\frac{w_0(1-t)^2+2w_1t(1-t)}{w_0(-2w_0+2w_1)t+(w_0-2w_1+w_2)t^2}$

$=\frac{1-t^2}{1+t^2}\to\cos$

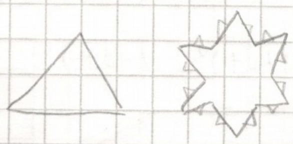
• $\frac{2w_1t(1-t)+w_2t^2}{w_0(-2w_0+2w_1)t+(w_0-2w_1+w_2)t^2}=\frac{2t}{1+t^2}\to\sin$

* Фрактал - геометријски лик који се може раставити на мање делове тако да је сваки од њих, макар приближно, умањена копија целине.

• геометријски, алгебарски и стохастички

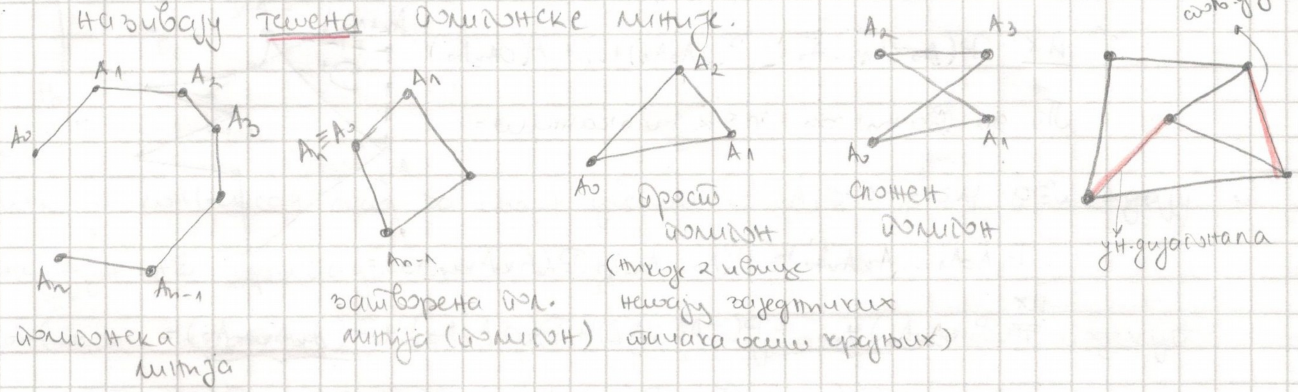
↓

самослична фигура чији се општи облик задаје генератором

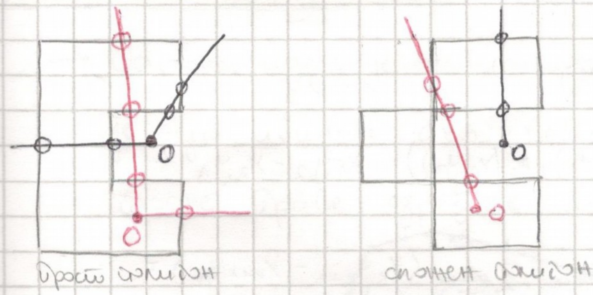


⑤ Полигони и полиедри 24.12.2018.

Деф Полигонска линија $A_0 \dots A_{n-1}A_n$ је унија дужи $A_0A_1, \dots, A_{n-1}A_n$ које називамо ивице полигонске линије. Тачке $A_0, \dots, A_n$ се називају темена полигонске линије.

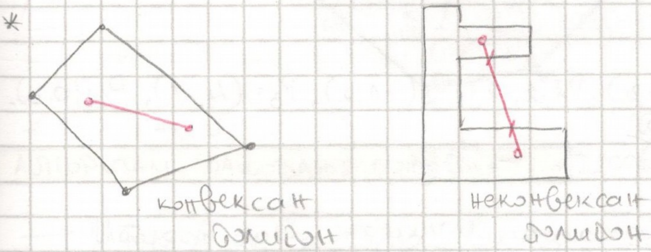


* Унутрашњост полигона:



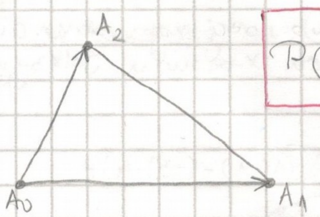
• За тачку O у равни полигона p, $O \notin p$, кажемо да припада унутрашњости полигона p ако је $k(a)$ непаран број, где је $k(a)$ број пресечних тачака полигона и произвољне полуправе a.

*

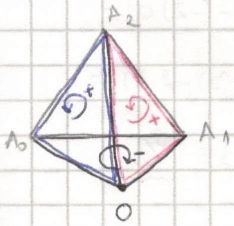


* Оријентисана површина простог полигона $P(A_0A_1 \dots A_{n-1})$

$$\boxed{P(A_0, A_1, A_2) = \frac{1}{2} D_{A_0A_1A_2}}$$



$$P(OA_0A_1) + P(OA_1A_2) + P(OA_2A_0) = P(A_0A_1A_2)$$



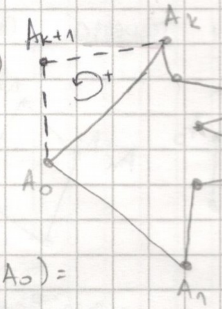
Теорема За прост полигон $A_0A_1\dots A_{n-1}$ и произвољну тачку равни O важи: $\boxed{P(A_0,A_1,\dots,A_{n-1}) = P(OA_0A_1)+\dots+P(OA_{n-1}A_0)}$.

доказ (индукцијом)

1° $n=3$ (урађен са прет. стране)

2° ИХ: $P(A_0,A_1,\dots A_k) = P(OA_0A_1)+\dots+P(OA_kA_0)$

Пп да важи за $n\le k$. Покажимо за $n=k+1$:



$$P(A_0A_1\dots A_kA_{k+1}) = P(A_0\dots A_k) + P(A_kA_{k+1}A_0) =$$

$$\overset{ИХ}{=} \underbrace{P(OA_0A_1)+\dots+P(OA_{k-1}A_k)+P(OA_kA_0)} + \underbrace{P(A_kA_{k+1}A_0)} =$$

$$= \dots + \cancel{P(OA_kA_0)} + P(OA_kA_{k+1}) + P(OA_{k+1}A_0) + \cancel{P(OA_0A_k)} =$$

$$= P(OA_0A_1)+\dots+P(OA_kA_{k+1})+P(OA_{k+1}A_0) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[D_{OA_0A_1}+\dots+D_{OA_{k+1}A_0}\right].$$

$$\bullet\ D = \begin{vmatrix} (A_1-A_0)_x & (A_2-A_0)_x \\ (A_1-A_0)_y & (A_2-A_0)_y \end{vmatrix} = \left(A_0(0,0), A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2)\right) = x_1y_2 - x_2y_1$$

$$P(A_0,\dots A_n) = \sum_{k=0}^{n} P(OA_kA_{k+1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} D_{OA_kA_{k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(x_ky_{k+1}-x_{k+1}y_k) =$$

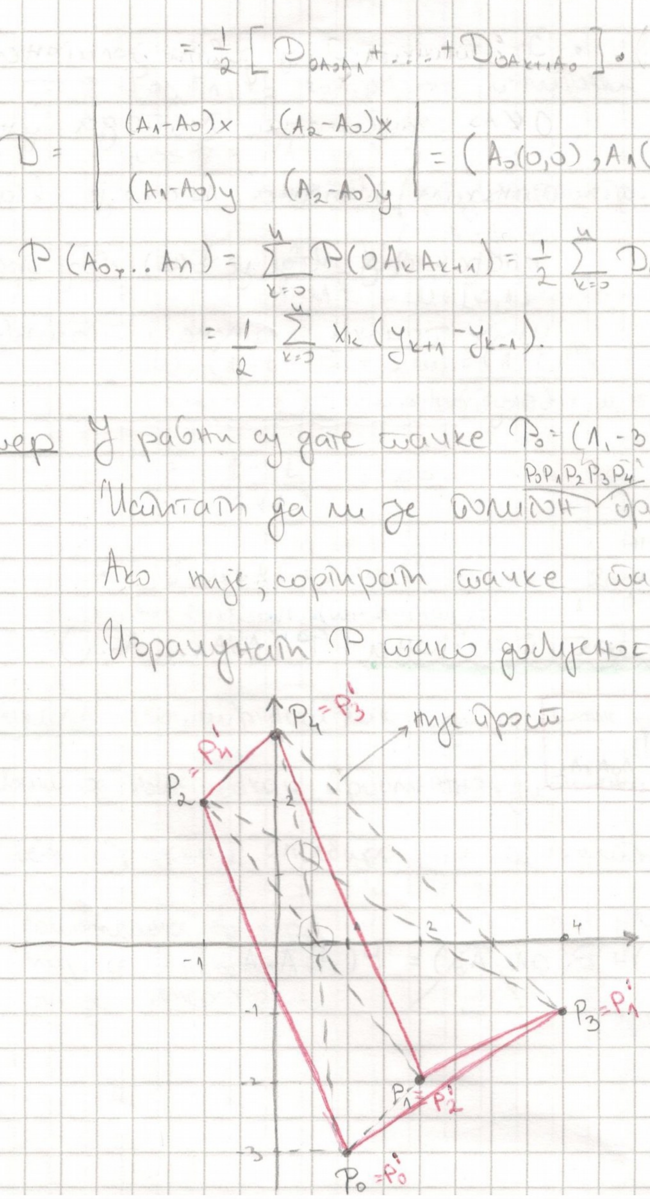
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} x_k(y_{k+1}-y_{k-1}).$$

пример У равни су дате тачке $P_0=(1,-3)$, $P_1=(2,-2)$, $P_2=(-1,2)$, $P_3=(4,-1)$, $P_4=(0,3)$.

Испитати да ли је $\overbrace{\text{полигон}}^{P_0P_1P_2P_3P_4}$ прост. – Није

Ако није, сортирати тачке тако да полигон буде прост.

Израчунати P тако добијеног простог полигона.

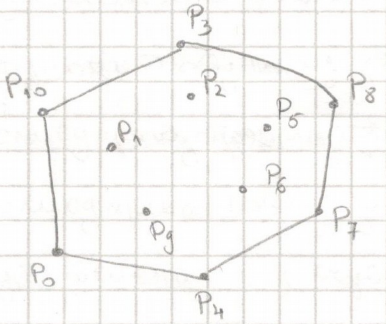


• Посматрамо онај који заклапа min угао са x-осом и повезујемо их редом

$$P(P_0'P_1'P_2'P_3'P_4') = \frac{1}{2}\Big[(1(-1)-(-3)\cdot 4) + (4(-2)-(-1)2) + (2\cdot 3)-(-2)\cdot 0) + (0\cdot 2-3(-1)) + (-1(-3)-2\cdot 1)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[11-\cancel{6}+\cancel{6}+3+1\right] = \frac{15}{2}$$

~ Конвексни омотач ~



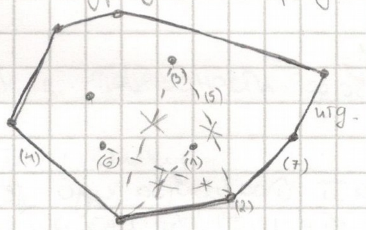
конвексни омотач скупа од 11 тачака

* Лик је **конвексан** ако за сваке две тачке A, B које му припадају и цела дуж AB припада том лику.

* **Конвексни омотач** неког скупа $S \subset E^n$ је најмањи конвексан подскуп од E^n који садржи S.

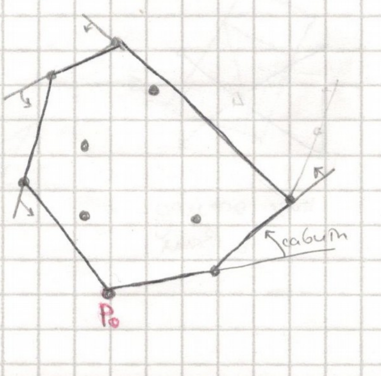
АЛГОРИТАМ "ИВИЧНЕ ДУЖИ" $O(n^3)$

→ Основна идеја је да се одреде све ивичне дужи скупа. Кажемо да је дуж **ивична** ако све тачке скупа леже или на или са исте стране праве одређене крајњим тачкама те дужи.



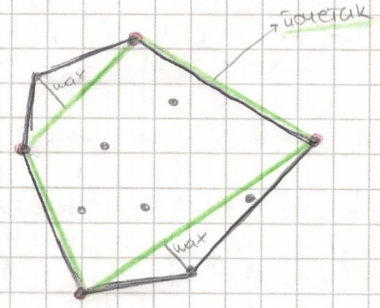
АЛГОРИТАМ "ПАКОВАЊЕ ПОКЛОНА" $O(n^2)$

→ Идеја је да се једна ивична дуж искористи за налажење следеће дужи. Алгоритам започиње од тачке са најмањом y координатом. (ако их има више, бирамо ону са већом x-коорд.).

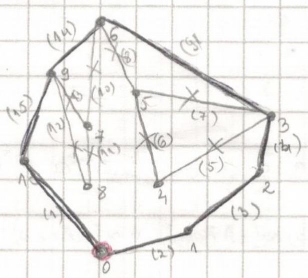


"БРЗИ" АЛГОРИТАМ $O(n \log n)$

→ Основна идеја: полазећи од низа тачака сортираних према поларном углу, за сваку тачку проверавамо да ли припада конвексном омотачу. Свака тачка се обрађује једном.
(Грахамовање)



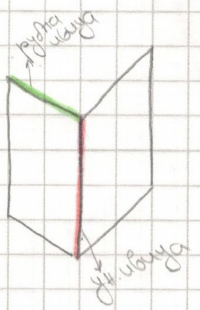
ГРАХАМОВ АЛГОРИТАМ $O(n \log n)$

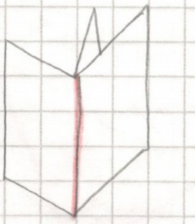


~ Полиедарске површи ~

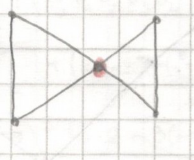
Деф Полиедарска површ M је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

1. Пљосни су конвексни полигони
2. Свака ивица припада највише двема пљоснима (унутрашње и рубне ивице)
3. Пресек две пљосни може бити само ивица.





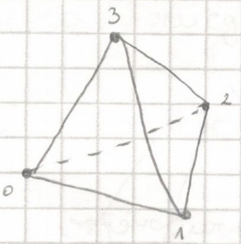
није полиед. површ



није полиед. површ

* Површ коју не знамо координате темена називамо <u>апстрактна</u> полиедарска површ.
* Унија свих рубних ивица се назива <u>руб</u> полиедарске површи. (кружка)
* Полиедарску површ <u>без</u> руба називамо <u>полиедар</u>.
* Полиедарска површ је <u>повезана</u> ако су сваке две њене пљосни повези
* Скуп темена: T ; скуп ивица: I ; скуп пљосни P.
* Основне информације које представљају полиедарску површ:
  • <u>табела темена</u> - листа темена са координатама
  • <u>табела повезаности</u> - листа пљосни задатих индексима темена

<u>Пример</u> Одреди табелу повезаности тетраедра.



$T = \{0, 1, 2, 3\}$

$P = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$

$p_0 = \langle 1, 2, 3 \rangle \quad p_1 = \langle 2, 3, 0 \rangle \quad p_2 = \langle 3, 0, 1 \rangle \quad p_3 = \langle 0, 1, 2 \rangle$

$I = \{\underline{12}, \underline{23}, \underline{31}, \underline{30}, \underline{02}, \underline{01}\}$ - све ун. ивице

<u>Пример</u> А) Из табеле повезаности одреди скуп ивица.

Б) Нацртати слику.

В) Да ли табела повезаности задаје апстрактну полиедарску површ

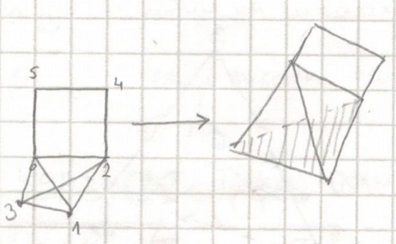
Г) (В) ∥ А ⇒ Да ли је полиедарска површ повезана

Д) Одреди руб те површи и број компоненти руба

1. $T = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$, $P = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$, $p_0 = \langle 0,1,2 \rangle$, $p_1 = \langle 0,2,4,5 \rangle$, $p_2 = \langle 3,2,0 \rangle$, $p_3 = \langle 1,0,3 \rangle$

А) $I = \{\underline{01}, 12, \underline{\underline{20}}, 24, 45, 50, 32, \underline{03}, 31\}$

Б)



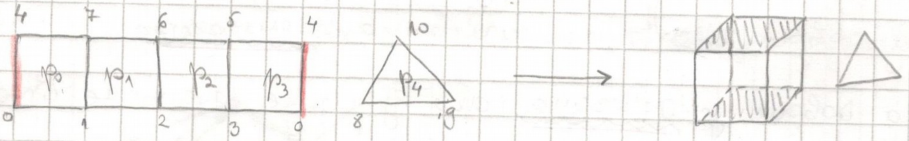
В) Није (због $\underline{\underline{20}}$)

2. $T = \{T_0, T_1, \dots, T_{10}\}$, $P = \{p_0, \dots, p_4\}$, $p_0 = \langle 0,1,7,4 \rangle$, $p_1 = \langle 1,2,6,7 \rangle$, $p_2 = \langle 2,3,5,6 \rangle$

$p_3 = \langle 3,0,4,5 \rangle$, $p_4 = \langle 8,9,10 \rangle$

А) $I = \{01, \underline{17}, \boxed{74}, \underline{40}, 12, \underline{26}, \boxed{67}, 23, \underline{35}, \boxed{56}, 30, \boxed{45}, 89, 9\,10, 10\,8\}$

Б)



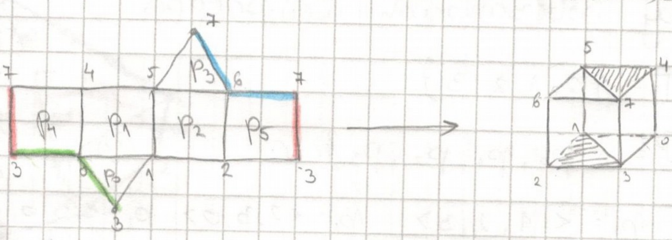
В) Да. Г) Није. Д) $R = \{0123, 7456, 8\,9\,10\}$ – 3 компоненте

3. $T = \{T_0, \dots, T_7\}$, $P = \{p_0, \dots, p_5\}$, $p_0 = \langle 0,1,3 \rangle$, $p_1 = \langle 0,1,5,4 \rangle$, $p_2 = \langle 1,2,6,5 \rangle$, $p_3 = \langle 5,6,7 \rangle$,

$p_4 = \langle 7,4,0,3 \rangle$, $p_5 = \langle 2,6,7,3 \rangle$.

А) $I = \{\underline{01}, 13, \underline{30}, \underline{15}, \boxed{54}, \underline{40}, 12, \underline{26}, \underline{65}, \underline{67}, \boxed{75}, \boxed{74}, \underline{37}, 32\}$

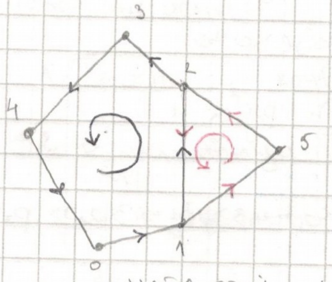
Б)



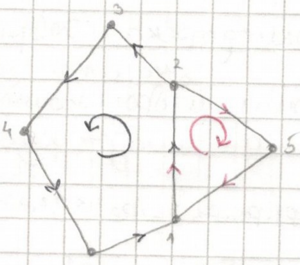
В) Да Г) Јесте Д) $R = \{132, 547\}$ – 2 компоненте

* Оријентисана полиедарска површ

• M – оријентабилна ако су сваке две суседне пљосни исте оријент.

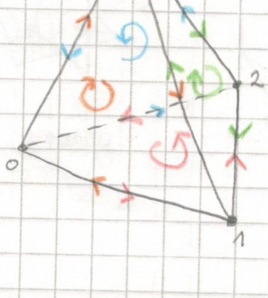


исте ориј.

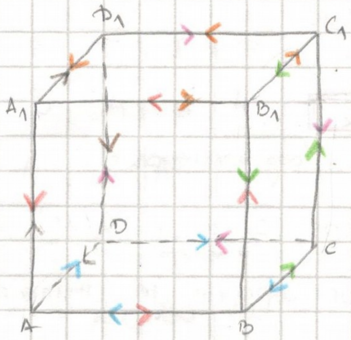


супротне ориј.

Пример Тетраедар је оријентисан:



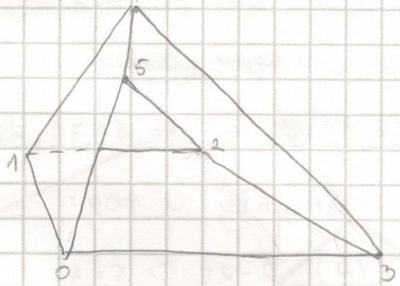
Пример Коцка је оријентабилна:



Теорема Полиедарски модели неке глатке површи су или сви оријентабилни или сви неоријентабилни.

Теорема Сваки прост полиедар је оријентабилна површ.

Пример Полиедарски модел Мебиусове траке је неоријентабилан.



$p_0 = \langle 0,1,2,3 \rangle$ $p_1 = \langle 3,2,3,4 \rangle$ $p_2 = \langle 1,4,5,0 \rangle$

$\langle 3,2,5,4 \rangle$

мења орј.

* Особине Мебиусове траке (google drive, рециклажа, Клајнова боца)

- Једнострана је - могуће ју је сасвим обојити без скидања четкице са папира.
- Руб траке је једна крива (има 1 компоненту)
- Када је пресечемо уздужно добијамо 1 траку, али 2 пута уврнуту. Када и ту траку пресечемо, добијамо 2 траке (уланчане)
- Не постоје сатови са казаљкама на овој траци (промениле би смер)
- Не можемо дефинисати непрекидну нормалу на Мебиусовој траци

* Ојлерова карактеристика полиедарске површи M је број:

$$\boxed{\chi(M) = T - I + P}$$

темена ивице пљосни

Теорема Сви полиедарски модели неке глатке површи имају исту Ојлерову карактеристику.

- за полиедре важи: $\boxed{\chi(M) = 2 - 2r}$ → род полиедра
- ако је M полиедарски модел сфере, тада је $\chi(M) = 2$.
- Ојлерова карактеристика Мебијусове траке је нула:

  → $\chi(M) = T - I + P = 6 - 9 + 3 = 0$.
- род торуса је 1:

Пример Дата је полиедарска површ: $p_0 = \langle 0,1,4,3 \rangle$, $p_1 = \langle 1,2,5,4 \rangle$, $p_2 = \langle 2,0,3,5 \rangle$, $p_3 = \langle 6,8,5,3 \rangle$, $p_4 = \langle 6,3,4,7 \rangle$, $p_5 = \langle 4,5,8,7 \rangle$, $p_6 = \langle 8,7,1,2 \rangle$, $p_7 = \langle 0,1,7,6 \rangle$, $p_8 = \langle 0,6,8,2 \rangle$.

А) Доказати да је она полиедар тј. да нема руб:

$I = \{01, 14, 43, 30, 12, 25, 54, 20, 35, 68, 85, 36, 47, 76, 87, 71, 28, 60\}$.

Б) Израчунати њену Ојлерову карактеристику и род:

$\chi(M) = T - I + P = 9 - 18 + 9 = 0$, $\chi(M) = 2 - 2r \Rightarrow r = 1$.

* **Платонова тела**: „О метафизици": $r = 0$, $\chi = 2$

→ тетраедар (ватра), октаедар (ваздух), икосаедар (вода), хексаедар (земља), додекаедар (универзум).

- Платоново тело (правилни полиедар) је полиедар рода 0 чије су све пљосни правилни полигони са q ивица, а у сваком темену се сустиче p ивица.

Теорема Постоји тачно 5 Платонових тела.

Доказ

Знамо да је $T - I + P = 2$ (јер $r = 0$). Свака пљосан је полигон са q ивица па када помножимо број пљосни са q пребројавамо све ивице: $P \cdot q = 2I$. У сваком темену се сустиче p ивица, па број темена помножен са p даје двоструки број ивица: $T \cdot p = 2I$. $\Rightarrow 2 = T - I + P = \frac{2I}{p} - I + \frac{2I}{q}$

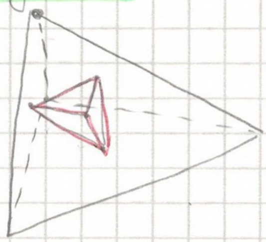
$$\Rightarrow 2 + I = \frac{2I}{p} + \frac{2I}{q} \;/ : 2I \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{I}}_{>0} + \frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \Rightarrow (p,q) = (3,3)$$

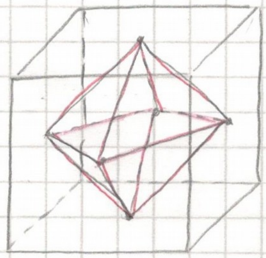
$(3,4)$, $(4,3)$ } дуални

$(3,5)$, $(5,3)$ } дуални

ПОЛИЕДАР	p	q	T	I	P
ТЕТРАЕДАР	3	3	4	6	4
коцка (хексаедар)	3	4	8	12	6
ОКТАЕДАР	4	3	6	12	8
ДОДЕКАЕДАР	3	5	20	30	12
ИКОСАЕДАР	5	3	12	30	20

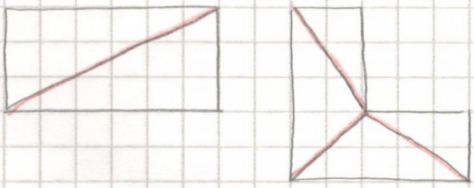
* Дуалност:





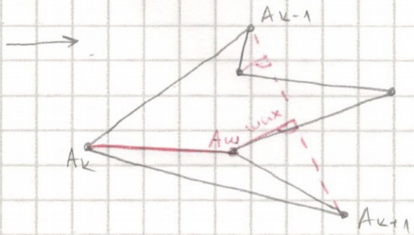
~Триангулација полигона~

* Триангулација је разлагање неког лика на троуглове.
* Триангулација простог полигона је разлагање његове унутрашњости унутрашњим дијагоналама које се међусобно не секу.



* Триангулација није јединствена

Лема Сваки прост полигон са више од 3 темена има унутр. дијагоналу.



Теорема Сваки прост полигон допушта триангулацију и свака триангулација полигона са n-темена се састоји од тачно n-2 троугла.

Доказ

1° $n=3$: троугао ✓

2° $k<n \Rightarrow k=n$?: $p+m=n+2 \xrightarrow{\text{их}} (p-2)+(m-2) = p+m-4 = n+2-4 = n-2$.