04.10.2019.

I Уводни појмови о нумеричкој математици

$\boxed{2}$ ~ Појам и врсте грешака ~

* проблем одређивања неке величине y на основу дате величине x:

$$y = A(x)$$

- ако је A компликовано, задатак решавамо приближно

нпр. $y = \int_a^b x(t)\,dt$ (овај интеграл није могуће израчунати аналитички)

- Можемо извршити замену:

1) $x \sim \bar{x}$ → полином или нека др. ф-ја чији се интеграл може израчунати (блиска величини x)

2) $\int \sim \sum$ → мењамо интеграл сумом коју можемо израчунати (замена оператора A блиским оператором $\bar{A}$)

$$\bar{y} = \bar{A}(\bar{x})$$

- грешком се оцењује колико је приближно решење $\bar{y}$ блиско тачном решењу y $|\bar{y} - y|$

* Узроци грешке могу бити различити и она може бити:

1. неотклоњива - настаје због недостатака математичког модела или грешака улазних података (не зависи од примењеног математ. апарата)
2. грешка методе - настаје услед тога што се оператор или улазне величине замењују приближним вредностима или што се бесконачни итеративни процес замењује коначним алгоритмом.
3. рачунска грешка - настаје када рачунамо са приближним вредностима (рад са зарезима, децималама)

1 ~Приближни бројеви~

* Неки бројеви не могу да се запишу помоћу коначног броја цифара (π, e, $2/3$, $\sqrt{2}$, ...) па користимо њихове приближне вредности

* Рачунари за интерни запис броја користе фиксиран број места n. (дужина речи)

* Начин записи броја:

  1. запис у фиксном зарезу - дефинисан природним бројевима n_1 и n_2, $n_1+n_2=n$, т.д. се број записује са n_1 цифара испред и n_2 цифара иза децималне тачке

     пример $n=9$, $n_1=4$, $n_2=5$, број је 31.207:

     0031.20700

  2. запис у покретном зарезу - положај децималне тачке није фиксан већ се он у односу на прву цифру записа одређује задавањем експонента

     $a = \underbrace{p}_{\text{мантиса}} \cdot 10^{q}$, $|p|<1$, $\underbrace{q}_{\text{експонент}} \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$

     $m+e=n$, $\left.\begin{array}{l} m \text{ - број цифара мантисе} \\ e \text{ - број цифара експонента} \end{array}\right\}$ фиксни су

     пример $n=10$, $m=7$ и $e=3$, број 31.207:

     $\underbrace{3120700.002}_{\text{нормализован запис}}$ или 0312070.003

     • запис броја није једнозначно одређен па се дефинише нормализовани запис броја у покретном зарезу - запис у коме прва цифра мантисе мора бити $\neq 0$.

* Ако је a тачна вредност неке величине, а $\bar{a}$ њена приближна вредност, онда је величина $|a-\bar{a}|$ апсолутна грешка, а $\frac{|a-\bar{a}|}{|\bar{a}|}$ релативна грешка.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ |a-\bar{a}| \leq \Delta(\bar{a}) \quad \text{граница апс. грешке} \\[2ex] \bullet\ \frac{|a-\bar{a}|}{|\bar{a}|} \leq \delta(\bar{a}) \quad \text{граница рел. грешке} \end{array}\right\} (*)$$

- $\delta(\bar{a}) \cdot 100$ грешка у процентима
- $\delta(\bar{a}) \cdot 1000$ грешка у промилима
- $\delta(\bar{a}) = \frac{\Delta(\bar{a})}{|\bar{a}|}$

$\boxed{3}$

Деф Значајне цифре броја су све цифре његовог записа, почевши од прве ненула цифре са леве стране.

- ако је у запису броја $\bar{a} = \alpha_1 \cdot 10^n + \ldots + \alpha_k \cdot 10^{n-k+1} + \ldots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1}$, $\alpha_1 \neq 0$, онда су све цифре $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ значајне.

Пример $\bar{a} = 0.0\underbrace{3120700}_{\text{значајне цифре}}$

- нуле на почетку нису значајне јер број може да се напише без њих: $3.120700 \cdot 10^{-2}$
- последње две нуле су значајне јер указују на тачност

Деф За значајну цифру броја се каже да је сигурна цифра ако апсолутна грешка броја није већа од декадног чиниоца који одговара тој цифри тј. α_k је сигурна цифра ако је:

$$\Delta(\bar{a}) \leq \omega \cdot 10^{n-k+1}, \quad \omega \in (0,1].$$

- $\omega \in (0, \frac{1}{2}] \rightarrow$ цифра је сигурна у ужем смислу
- $\omega \in (\frac{1}{2}, 1] \rightarrow$ цифра је сигурна у ширем смислу
- ако је цифра α_k сигурна $\Rightarrow$ цифре $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ су сигурне
- ако је цифра сигурна у ужем смислу $\Rightarrow$ сигурна је у ширем смислу

$\Delta(\bar{a})$

Пример Ако се зна да је граница апсолутне грешке $0.5 \cdot 10^{-5}$ (*) за $\bar{a} = 0.03120700$, онда су сигурне цифре 3, 1, 2 и 0.

(*) говори да после децималне тачке имамо 5 позиција/цифара

$$\bar{a} = 0.0\underbrace{3120}_{k=4}700 = 3 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} \qquad \alpha_1 = 3$$

$$0.5 \cdot 10^{-5} \le 0.5 \cdot 10^{-2-k+1}$$

$$-5 = -2-k+1 \Rightarrow k = 4$$

- 7, 0, 0 нису сигурне јер у броју a чија је $\bar{a}$ приближна вр., уместо ових цифара могу стајати било које друге. На основу (*) важи: $0.03120700 - 0.5 \cdot 10^{-5} \le a \le 0.03120700 + 0.5 \cdot 10^{-5}$

$$0.0312\boxed{0}200 \le a \le 0.0312\boxed{1}200$$

- несигурне цифре можемо да „одбацимо", а последњу сигурну мењамо т.д. буде сигурна у ужем смислу.
- Заокруживање: последња сигурна цифра α_k се не мења ако је $\alpha_{k+1} < 5$ или ако је $\alpha_{k+1} = 5$, а α_k је паран број. У свим осталим случајевима повећавамо α_k за 1.

[3]

~ Веза између броја сигурних цифара (k) и релативне грешке броја ($\delta(\bar{a})$) ~

$$\boxed{\frac{\omega}{(\alpha_1+1) \cdot 10^{k}} \le \delta(\bar{a}) \le \frac{\omega}{\alpha_1 \cdot 10^{k-1}}}, \quad \omega \in (0,1]$$

- α_1 - прва сигурна цифра броја a

Доказ

Крећемо од дефиниције: $\Delta(\bar{a}) \le \omega \cdot 10^{n-k+1}$ (важи јер је α_k сигурна цифра, а α_{k+1} није, па важи: $\omega \cdot 10^{n-k} < \Delta(\bar{a})$.)

$$\omega \cdot 10^{n-k} < \Delta(\bar{a}) \le \omega \cdot 10^{n-k+1} \quad / : |\bar{a}|$$

$$\frac{\omega \cdot 10^{n-k}}{\alpha_1 \cdot 10^{n} + \ldots + \alpha_k \cdot 10^{n-k+1}} < \frac{\Delta(\bar{a})}{|\bar{a}|} \le \frac{\omega \cdot 10^{n-k+1}}{\alpha_1 \cdot 10^{n} + \ldots + \alpha_k \cdot 10^{n-k+1}} \Rightarrow$$

- $\alpha_1 \cdot 10^n \le \alpha_1 \cdot 10^n + \underbrace{\ldots + \alpha_k \cdot 10^{n-k+1}}_{<10^n \text{ (иначе би се цифра уз } \alpha_1 \text{ повећала)}} < \alpha_1 \cdot 10^n + 10^n = (\alpha_1+1) \cdot 10^n$

$$\Rightarrow \frac{\omega \cdot 10^{n-k}}{(\alpha_1+1)\cdot 10^{k}} < \delta(\bar{a}) \leq \frac{\omega \cdot 10^{n-k+1}}{\alpha_1 \cdot 10^{n}}$$

$$\frac{\omega}{(\alpha_1+1)\cdot 10^{k}} \leq \delta(\bar{a}) \leq \frac{\omega}{\alpha_1 \cdot 10^{k-1}}.$$

$$* \quad \delta(\bar{a}) = \frac{\omega}{\alpha_1} \cdot 10^{-k+1}$$

пример $a = 0.03120700$, $\Delta(\bar{a}) = 0.5 \cdot 10^{-5}$

$\bar{a} = 0.03121$, $\delta(\bar{a}) = ?$

$$\delta(\bar{a}) = \frac{\Delta(\bar{a})}{|\bar{a}|} \approx \frac{\omega}{\alpha_1} \cdot 10^{-k+1}$$

$$\delta(\bar{a}) = \frac{0.5}{3} \cdot 10^{-4+1} = \underset{(1)}{0.167} \cdot 10^{\overset{(2)}{-3}} = 1.67 \cdot 10^{-4}$$

- ако грантито обрнуто (колико је k), гледаш ако је (1) између 0 и 1 и (2) записујеш као $-k+1$.

4 ~ Стабилни и нестабилни алгоритми ~

* Ако се рачунска грешка не акумулира, кажемо да је нумерички алгоритам стабилан. Иначе, је нестабилан и због акумулирања рачунске грешке се добија велика грешка коначног резултата.

пример Израчунати $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+10}\,dx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

I начин рекурентна ф-ла

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n + 10x^{n-1} - 10x^{n-1}}{x+10}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+10)}{x+10}\,dx - 10\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+10}\,dx =$$

$$= \frac{x^n}{n}\Big|_0^1 - 10 I_{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{1}{n} - 10 I_{n-1}$$

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+11}\,dx = \ln|x+11|\Big|_0^1 = \ln 11 - \ln 10 = \ln\frac{11}{10} = \ln 1.1$$

- I_0 је израчунат са грешком, I_1 са још већом грешком...
- нестабилан алгоритам

II начин Тејлоров ред

$$\frac{x^n}{x+10} = \frac{x^n}{10\left(1+\frac{x}{10}\right)} = 0.1\cdot x^n\left(1+\frac{x}{10}\right)^{-1} = 0.1\cdot x^n\left(1-\frac{x}{10}+\frac{x^2}{100}-\ldots\right)$$

$$\int_0^1 0.1x^n\left(1-\frac{x}{10}+\frac{x^2}{100}-\ldots\right)dx = 0.1\int_0^1\left(x^n-\frac{x^{n+1}}{10}+\frac{x^{n+2}}{100}-\ldots\right)dx$$

- алгоритам је стабилан
- ред брзо конвергира па се добије задовољавајућа тачност

пример $\quad x^2-140x+1=0 \quad , \; x_2 = 70-\sqrt{4899}$

- $x_2 \approx 70-69.99 = \underset{\bar{x}_2}{0.01}$ → има 1 сигурну цифру (а имали смо 4 у (69.99))

релативна грешка је $\delta(\bar{x}_2)=1=100\%$

- алгоритам је нестабилан

- стабилан алгоритам - рационализација:

$$70-\sqrt{4899}\cdot\frac{70+\sqrt{4899}}{70+\sqrt{4899}} = \frac{70^2-4899}{70+69.99} = \frac{1}{140.0} = \underbrace{0.007143}_{4 \text{ сигурне цифре}} = \bar{x}_2$$

$$\delta(\bar{x}_2) = \frac{1}{7}\cdot 10^{-4+1} = 0.14\cdot 10^{-3} = 1.4\cdot 10^{-4}$$

$\boxed{5}$ ~ Грешке приближних вредности ф-ја ~

* Нека је y ф-ја параметара $(a_1,\ldots,a_n)\in G$, $y=y(a_1,\ldots,a_n)$, и нека је $\bar{y}$ приближна вр. за y.

деф Апсолутна грешка величине $\bar{y}$ је:

$$A(\bar{y}) = \sup\left|y(a_1,\ldots,a_n)-\bar{y}\right|,$$

а релативна грешка је:

$$\delta(\bar{y}) = \frac{A(\bar{y})}{|\bar{y}|}.$$

- ако је област G n-димензиони правоугаоник,

$G = \{(a_1,\ldots,a_n) \mid |a_k-\bar{a}_k| \le \Delta(\bar{a}_k),\ k=\{1,\ldots,n\}\}$, $\bar{y}=y(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n)$

и ако је y непрекидно дифер. ф-ја својих аргумената, према Лагранжовој теореми о средњој вредности је:

$$y(a_1,\dots,a_n)-\bar{y} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial a_k}\underbrace{(\bar{a}_1+\underbrace{\theta}_{\in[0,1]}(a_1-\bar{a}_1),\dots,\bar{a}_n+\theta(a_n-\bar{a}_n))}_{\xi_1}(a_k-\bar{a}_k)$$

$$\Rightarrow \Delta(\bar{y}) \le \sum_{k=1}^{n}\sup_{\xi}\left|\frac{\partial y}{\partial a_k}(a_1,\dots,a_n)\right|\Delta(\bar{a}_k)$$, апроксимацијом добијамо:

Деф Линеарна оцена апсолутне грешке ф-је, $\Delta(\bar{y})$, је:

$$\Delta(\bar{y}) = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n)\right|\Delta(\bar{a}_k)$$

$\boxed{6}$

Теорема Линеарна оцена апс. грешке збира или разлике бројева је једнака збиру апс. грешака тих појединачних бројева.

Доказ

$y = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_k a_k + \dots + \mu_n a_n$, $\mu_i \in \{-1,1\}$. Користимо претходну дефиницију. $\frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n) = \mu_k$.

$$\Delta(\bar{y}) = \sum_{k=1}^{n}|\mu_k|\,\Delta(\bar{a}_k) = \sum_{k=1}^{n}\Delta(\bar{a}_k).$$

∟

Теорема Релативна грешка производа или количника приближних бројева једнака је збиру релативних грешака тих појединачних аргумената.

Доказ

$y = a_1^{e_1}\cdot a_2^{e_2}\cdot\ldots\cdot a_k^{e_k}\cdot\ldots\cdot a_n^{e_n}$, $e_i\in\{-1,1\}$. Користимо прет. дефиницију. $\frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n) = \bar{a}_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot e_k\bar{a}_k^{e_k-1}\cdot\ldots\cdot\bar{a}_n^{e_n} =$

$$= e_k\,\frac{\bar{a}_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot\bar{a}_k^{e_k}\cdot\ldots\cdot\bar{a}_n^{e_n}}{\bar{a}_k} = \frac{e_k}{\bar{a}_k}\cdot\bar{y} \Rightarrow \Delta(\bar{y}) = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{e_k\cdot\bar{y}}{\bar{a}_k}\right|\cdot\Delta(\bar{a}_k)\ /:\bar{y}$$

$$\Rightarrow \delta(\bar{y}) = \frac{\Delta(\bar{y})}{\bar{y}} = \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\frac{\Delta(\bar{a}_k)}{|\bar{a}_k|}}_{=\delta(\bar{a}_k)}.$$

∟

7 ~ Обратан проблем грешке ~

* Подразумева налажење граница допустивих грешака аргумената при којима грешка ф-је не прелази дозвољену вредност.
* Задатак је једнозначно решив само за ф-ју једног аргумента $y = y(a)$. Ако y зависи од више аргумената, $y = y(a_1, \ldots, a_n)$, онда се задавањ[ем] грешке ф-је задаје само једна веза између n непознатих $\Delta(\bar{a}_1), \ldots, \Delta(\bar{a}_n)$

$$y = y(a) \quad , \quad y = \bar{y} + y'(\xi)(a - \bar{a}) \quad , \quad \xi = \bar{a} + \theta(a - \bar{a}) \quad , \quad \theta \in [0,1]$$

$$|a - \bar{a}| = \left| \frac{y - \bar{y}}{y'(\xi)} \right| \Rightarrow \Delta(\bar{a}) = \frac{\Delta(\bar{y})}{y'(\bar{a})} \text{, за } \theta = 0$$

* Ако је задата линеарна оцена апсолутне грешке ф-је $\Delta(\bar{y}) = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \right| \Delta(\bar{a}_k)$, додатни услови које апсолутне грешке аргумената треба да задовољавају се дефинишу на сл. начине:

1. Принцип једнаких утицаја:

$$\left| \frac{\partial y}{\partial a_1}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \right| \Delta(\bar{a}_1) = \ldots = \left| \frac{\partial y}{\partial a_n}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \right| \Delta(\bar{a}_n)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta(\bar{y}) = n \left| \frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \right| \Delta(\bar{a}_k)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta(\bar{a}_k) = \frac{\Delta(\bar{y})}{n \left| \frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \right|} \quad , \quad k = \overline{1,n}$$

2. Принцип једнаких апсолутних грешака:

$$\Delta(\bar{a}_1) = \ldots = \Delta(\bar{a}_n)$$

$$\Rightarrow \Delta(\bar{y}) = \Delta(\bar{a}_j) \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \right|$$

$$\Rightarrow \Delta(\bar{a}_j) = \frac{\Delta(\bar{y})}{\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \right|} \quad , \quad j = \overline{1,n}$$

3. Принцип једнаких релативних грешака:

$$\delta(\bar{a}_1) = \ldots = \delta(\bar{a}_n) \quad , \quad \delta(\bar{a}_k) = \frac{\Delta(\bar{a}_k)}{|\bar{a}_k|}$$

$$\Rightarrow \Delta(\bar{y}) = \sum_{k=1}^{n} \left| \bar{a}_k \cdot \frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \right| \cdot \frac{\Delta(\bar{a}_k)}{|\bar{a}_k|} = \frac{\Delta(\bar{a}_j)}{|\bar{a}_j|} \sum_{k=1}^{n} \left| \bar{a}_k \cdot \frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \right|$$

$$\Rightarrow \quad \Delta(\bar{a}_j) = \frac{\Delta(\bar{y}) \cdot |\bar{a}_j|}{\sum_{k=1}^{n} \left| \bar{a}_k \cdot \frac{\partial y}{\partial a_k}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \right|} \quad , \quad j = \overline{1,n}$$

11.10.2019.

II Интерполација

8

* Некада је неопходно заменити ф-ју $f(x)$ приближном ф-јом $g(x)$:

$f(x) \approx g(x) \rightarrow$ $g(x)$ апроксимира ф-ју $f(x)$

Оптимална блискост ф-ја $f(x)$ и $g(x)$ се постиже одговарајућим избором слободних параметара $(c_0, \ldots, c_n)$ ф-је $g(x)$. Ако је $g(x)$ линеарна ф-ја, апроксимација је линеарна:

$g(x) = c_0\phi_0(x) + \ldots + c_n\phi_n(x)$, $\phi_i(x)$ - линеарно независне ф-је које чине основни систем ф-ја

- $\{\phi_i\}_{i=1} := \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ - алгебарски полином степена n

$:= \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx\}$ - тригонометријски полином реда n

* Уколико се постави захтев да је $g(x_k) = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$, онда се такав облик апроксимације назива интерполација.

- $\{x_i\}_{i=1}^{n} \rightarrow$ чворови мреже тј. интерполације

9 ~ Интерполациони полином Лагранжа ~

* Ако је у $g(x) = c_0\phi_0(x) + \ldots + c_n\phi_n(x)$, $\phi_k(x) = x^k$, $k = \overline{0,n}$, онда се интерполациона ф-ја $g(x)$ назива интерполационим полиномом:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i.$$

Теорема Постоји јединствено одређен полином $L_n(x)$ степена n који у $(n+1)$-ој различитој тачки x_k, $k = \overline{0,n}$ задовољава услове:

$$\underbrace{L_n(x_k) = f(x_k)}_{\text{услов интерполације}}, \quad k = \overline{0,n}$$

доказ →

Доказ

- Јединственост: Ппс, нека постоје $L_n^1(x)$ и $L_n^2(x)$ и нека оба задовољавају услов интерполације: $L_n^1(x_k) = L_n^2(x_k) = f(x_k)$.

  $P_n(x) = L_n^1(x) - L_n^2(x)$. $P_n(x_k) = L_n^1(x_k) - L_n^2(x_k) = 0$ (јер важи), $k=\overline{0,n}$

  $\Rightarrow P_n(x) = 0$ ↯ (значи да имамо $n+1$ нулу полинома степена n) $k=\overline{0,n}$

- Постојање: $L_n(x) = ?$, $l_i(x)$, $i=\overline{0,n}$ је базни полином степена n

  $l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$, $l_i(x) = a_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x-x_j)$ водећи коеф. (ax^2+bx+c
  $a(x-x_1)(x-$

  $$l_i(x_i) = 1 = a_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x_i-x_j) \Rightarrow a_i = \frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{n}(x_i-x_j)}$$

  $$\Rightarrow \boxed{l_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}}.$$

  $$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\cdot f(x_i), \quad x=x_k \Rightarrow L_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{l_i(x_k)}_{i=k}^{1}\cdot f(x_i) = f(x_k)$$

  $$\Rightarrow \boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)\cdot f(x_i)}$$ интерполациони полином Лагран

* Уводимо ознаку: $\omega_{n+1} = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$

$$\Rightarrow \omega_{n+1}'(x) = \sum_{k=0}^{n}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j) \quad \Rightarrow \omega_{n+1}'(x_i) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)$$

$$\Rightarrow l_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{\prod\limits_{j=0}^{n}(x-x_j)}{\underbrace{(x-x_i)}\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)} = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\cdot\omega_{n+1}'(x)}$$

јер је за горњи производ $j\neq i$

$$\Rightarrow \boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\cdot\omega_{n+1}'(x)}\cdot f(x_i)}$$

10 ~ Грешка полиномијалне интерполације ~

* Грешка полиномијалне интерполације у тачки x је разлика вредности ф-је и интерполационог полинома у тој тачки: $f(x)-L_n(x)$

Теорема Ако је ф-ја $f(x)$ диференцијабилна и то n+1 пута, $f^{(n+1)}(x)$, тада за сваки аргумент $\bar{x}$ постоји тачка ξ која припада минималном интервалу који садржи све тачке $x_0,\dots,x_n,\bar{x}$ и тако да важи:

$$\boxed{f(\bar{x})-L_n(\bar{x})=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot\omega_{n+1}(\bar{x})},\quad \underbrace{\omega_{n+1}(x)}_{\text{нормиран полином}}=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

Доказ

$f(\bar{x})-L_n(\bar{x})=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(\bar{x})$. Пп да $\bar{x}$ није чвор, $\bar{x}\neq x_j$, $j=\overline{0,n}$.

$F(x)=f(x)-L_n(x)-k\cdot\omega_{n+1}(x)$, $\bar{x}$ је нула од $F(x)$;

$$0=F(\bar{x})=f(\bar{x})-L_n(\bar{x})-k\cdot\omega_{n+1}(\bar{x}) \Rightarrow k=\frac{f(\bar{x})-L_n(\bar{x})}{\omega_{n+1}(\bar{x})}\quad(*)$$

$$x_0,\dots,x_n:\quad F(x_k)=\cancel{f(x_k)}-\underbrace{\cancel{L_n(x_k)}}_{f(x_k)}-\underbrace{k\cdot\omega_{k+1}(x_k)}_{\text{јер је } x_k \text{ чвор}}^{\to 0} \Rightarrow F(x_k)=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_0,\dots,x_n,\bar{x}$ су нуле од $F(x)$ (има их n+2).

Ролова тм.: $f(a)=f(b)$, ф-ја је непр. и дифер. $\Rightarrow \exists c$ т.д. $f'(c)=0$.

тј. између сваке две нуле постоји нула извода:

F' има n+1 нула; F'' их има n; ...; $F^{(n+1)}$ има 1 нулу ξ.

$$F^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-\underbrace{L_n^{(n+1)}(x)}_{\substack{\text{јер је извод}\\ \text{већи од}\\ \text{степена}}}^{\to 0}-k\cdot\underbrace{\omega_{n+1}^{(n+1)}(x)}_{\substack{=(x^{n+1}+P_n(x))^{(n+1)}=\\ =(x^{n+1})^{(n+1)}=(n+1)!}}=f^{(n+1)}(x)-k\cdot(n+1)!$$

$$\Rightarrow F^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-k(n+1)! \Rightarrow k=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\quad(**)$$

$$\overset{(*)(**)}{\Longrightarrow} f(\bar{x})-L_n(\bar{x})=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot\omega_{n+1}(\bar{x}).$$

∟

* $|f(\bar{x})-L_n(\bar{x})|\leq\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(\bar{x})|$, $M_{n+1}=\max|f^{(n+1)}(x)|$, $x\in[x_0,x_n]$

Пример Интерполационим полиномом другог степена одређеним тачкама (100, 10), (121, 11) и (144, 12) израчунај приближну вредност ф-је $f(x)=\sqrt{x}$ за $x=115$ и оцени тачност добијеног решења.

x_i	100	121	144
f_i	10	11	12

$$L_2(x)=\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}\cdot 10+\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)}\cdot 11+\frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)}\cdot 12=$$

$$=-0.00009411x^2+0.06842x+4.099$$

$$L_2(115)=10.723$$

$$|f(115)-L_2(115)|\le\frac{M_3}{6}|(115-100)(115-121)(115-144)|=0.16\cdot 10^{-12}$$

- $(\sqrt{x})'''=\frac{3}{8\sqrt{x^5}}$
- $M_3=\left|\frac{3}{8\sqrt{x^5}}\right|=$ (добија се за $x=100$) $=0.375\cdot 10^{-5}$

~ Интерполациони полином Њутна са подељеним разликама ~

* Лагранжов интер. полином се може записати и у другом облику који указује да се овај полином може сматрати уопштењем парцијалне суме Тејлоровог реда.

$\boxed{M}$

* Подељена разлика:

$f[x_0]=f(x_0)$ — 0. реда

$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ — 1. реда

$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$ — 2. реда

...

$f[x_0,\dots,x_n]=\frac{f[x_1,\dots,x_n]-f[x_0,\dots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$ — n. реда

Лема Подељене разлике реда k се преко вредности ф-је у чворовима изражавају на сл. начин:

$$\boxed{f[x_0,\dots,x_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k} (x_i-x_j)}}\,.$$

Доказ

1° $k=1$: $f[x_0,x_1] = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \dfrac{f(x_0)}{x_0-x_1} + \dfrac{f(x_1)}{x_1-x_0} = \sum\limits_{i=0}^{1} \dfrac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{1} (x_i-x_j)}$ ✓

пп

2° ИХ: знамо да важи за $k=n-1$. Треба доказати за $k=n$:

$$f[x_0,\dots,x_n] = \frac{f[x_1,\dots,x_n]-f[x_0,\dots,x_{n-1}]}{x_n-x_0} \overset{ИХ}{=} \frac{1}{x_n-x_0}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1}(x_i-x_j)} \right) =$$

$$= \frac{1}{x_n-x_0}\cdot\frac{f(x_n)}{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(x_n-x_j)} + \frac{1}{x_n-x_0}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)} - \frac{1}{x_n-x_0}\cdot\frac{f(x_0)}{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(x_0-x_j)} - \frac{1}{x_n-x_0}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1}(x_i-x_j)} =$$

$$= \frac{f(x_0)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(x_0-x_j)} + \frac{1}{\cancel{x_n-x_0}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\overset{\cancel{(x_n-x_0)}}{\cancel{(x_i-x_0)-(x_i-x_n)}}}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)} f(x_i) + \frac{f(x_n)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1}(x_n-x_j)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}\,.$$

* Особине:

1. подељена разлика је симетрична ф-ја својих аргумената (редослед чворова није битан)
2. важи линеарност: $(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)[x_0,\dots,x_k] = \alpha_1 f_1[x_0,\dots,x_k] + \alpha_2 f_2[x_0,\dots,x_k]$
3.

	0.реда	1.реда	2.реда		
x_0	f_0				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	f_1		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$		$\dots$	$f[x_0,\dots,x_n]$
x_2	f_2		$f[x_1,x_2,x_3]$		
$\dots$	$\dots$		$\dots$		
		$f[x_{n-1},x_n]$			
x_n	f_n				

[12] ~ Њутнов интерполациони полином са подељеним разликама ~

[13]

* Како изразити грешку интерполације преко подељених разлика?

(1) $$f(x) - L_k(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{k} \frac{\omega_{k+1}(x)\, f(x_i)}{(x-x_i)\prod\limits_{j=0,\, j\neq i}^{k}(x_i-x_j)} = f(x) - \omega_{k+1}(x)\sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x-x_i)\prod\limits_{j=0,\, j\neq i}^{k}(x_i-x_j)} =$$

$$= \omega_{k+1}(x)\left(\frac{f(x)}{\underbrace{\prod\limits_{j=0}^{k}(x-x_j)}_{\omega_{k+1}(x)}} + \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x-x_i)\prod\limits_{j=0,\, j\neq i}^{k}(x_i-x_j)}\right) = (x := x_{k+1}) =$$

$$= \omega_{k+1}(x)\underbrace{\sum_{i=0}^{k+1} \frac{f(x_i)}{(x-x_i)\prod\limits_{j=0,\, j\neq i}^{k}(x_i-x_j)}}_{\text{подељена разлика}} = \omega_{k+1}(x)\, f[x_0,\dots,x_k,x].$$

* Полином $L_n(x)$ може да се нађе у облику:

$$L_n(x) = L_0(x) + \underbrace{(L_1(x)-L_0(x))}_{} + \dots + (\underbrace{L_n(x)-L_{n-1}(x)}_{})$$

m-тог степена

- $L_m(x_k) - L_{m-1}(x_k) = f(x_k) - f(x_k) = 0$, $k = \overline{0, m-1}$

↳ интерполациони полином одр. чворовима $x_0, \dots, x_m$

– $x_0, \dots, x_{m-1}$ су нуле полинома $L_m(x) - L_{m-1}(x)$

$$\Rightarrow \quad L_m(x) - L_{m-1}(x) = \underbrace{a_m}_{?}\cdot \omega_m(x), \quad \omega_m(x) = \prod_{j=0}^{m-1}(x-x_j) \qquad (3)$$

- $x = x_m$: $L_m(x_m) - L_{m-1}(x_m) = a_m\, \omega_m(x_m)$

(2) $$\underbrace{f(x_m) - L_{m-1}(x_m)}_{\text{греш. интерп.}} = a_m\, \omega_m(x_m)$$

- у (1) за $x = x_m$, $k = m-1$: $f(x_m) - L_{m-1}(x_m) = \omega_m(x_m)\cdot f[x_0,\dots,x_{m-1},x]$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \quad a_m = f[x_0,\dots,x_{m-1},x]$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \quad L_m(x) - L_{m-1}(x) = \underbrace{f[x_0,\dots,x_m]}_{m\text{-тог реда}}\ \underbrace{\omega_m(x)}_{m\text{-тог степена}}$$

- $P_n = L_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots + f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\cdots(x-$

↳ Њутнов интерполациони полином са подељеним разликама

* Веза између подељене разлике ф-је и извода ф-је:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \quad , \xi \text{ између } x_0, \dots, x_n, x$$

$$f(x) - L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \cdot \underbrace{f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]}_{(n+1)\text{-ог реда}}$$

$$\Bigg\} \quad \boxed{f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}$$

Пример Наћи подељену разлику n-тог реда за полином k-тог степена.

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i$$

$$P_k[x_0, \dots, x_n] = \begin{cases} b_n, & k = n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \rightarrow \frac{(b_n x^n + \cancel{P_{n-1}(x)})^{(n)}}{n!} = \frac{(b_n x^n)^{(n)}}{n!} = \frac{b_n \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = \underline{\underline{b_n}}$$

18.10.2019.

Њутнов интерполациони полином са коначним разликама

[14]

* захтева се да чворови буду подједнако удаљени међусобно

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = \overline{0,n}$$

$$\underbrace{x_0 \quad x_1}_{h} \underbrace{\quad x_2}_{h} \quad \dots \quad x_n$$

→ еквидистантна мрежа

Деф Разлика $f_{i+1} - f_i$, $f_i = f(x_i)$, се назива коначна разлика 1. реда.

$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ – коначна разлика унапред

$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ – коначна разлика уназад

$\delta f_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+1} - f_i$ – централна разлика

Деф Коначне разлике вишег реда:

$$\Delta^k f_i = \Delta(\Delta^{k-1} f_i) = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$$

$$\nabla^k f_i = \nabla(\nabla^{k-1} f_i) = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}$$

$$\delta^k f_i = \delta(\delta^{k-1} f_i) = \delta^{k-1} f_{i+\frac{1}{2}} - \delta^{k-1} f_{i-\frac{1}{2}}$$

*

x_0	f_0				
		Δf_0			
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$		
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$	
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\dots$
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$	
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		

Лема Коначне разлике реда k се изражавају помоћу вредности ф-је у чворовима сл. формулом:

$$\boxed{\Delta^k f_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j f_{i+k-j}} \qquad C_k^j = \binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

доказ (индукцијом)

1° $\underline{k=1}$: $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$

2° $\underline{k \le n \Rightarrow k=n+1}$:

$$\Delta^{n+1} f_i = \Delta(\Delta^n f_i) = \Delta^n f_{i+1} - \Delta^n f_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j f_{i+1+n-j} - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j f_{i+n-j} =$$

$$= C_n^0 f_{i+n+1} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j C_n^j f_{i+1+n-j} - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_n^j f_{i+n-j} - (-1)^n C_n^n f_i =$$

$$= C_n^0 f_{i+n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} C_n^{j+1} f_{i+n-j} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} C_n^j f_{i+n-j} - (-1)^n C_n^n f_i =$$

- $C_n^0 = C_{n+1}^0 = C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1$

$$= C_{n+1}^0 f_{i+n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} (C_n^{j+1} + C_n^j) f_{i+n-j} - (-1)^n C_{n+1}^{n+1} f_i =$$

- $C_n^{j+1} + C_n^j = \frac{n!}{(j+1)!(n-j-1)!} + \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{n!(n-j)! + n!(j+1)!}{(j+1)!(n-j)!} = \frac{(n+1)!}{(j+1)!(n-j)!}$

$$= C_{n+1}^0 f_{i+n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} C_{n+1}^{j+1} f_{i+n-j} - (-1)^n C_{n+1}^{n+1} f_i =$$

$$= C_{n+1}^0 f_{i+n+1} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j C_{n+1}^j f_{i+n-(j-1)} + (-1)^{n+1} C_{n+1}^{n+1} f_i =$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j C_{n+1}^j f_{i+n-(j-1)}.$$

∟

15 (веза између подељених и коначних разлика)

Лема Ако су чворови равномерно распоређени, $x_i = x_0 + ih$, онда важи:

$$\boxed{\underbrace{f[x_i, \dots, x_{i+k}]}_{k\text{-тог реда}} = \frac{\Delta^k f_i}{h^k \cdot k!}}$$

→ најмањи индекс чвора

→ ред

доказ (индукцијом)

1° $\underline{k=1}$: $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{\Delta f_i}{h \cdot 1!}$

2° $\underline{k \le n \Rightarrow k=n+1}$:

$$f[x_i, \dots, x_{i+n+1}] = \frac{\overbrace{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}]}^{n\text{-тог реда}} - \overbrace{f[x_i, \dots, x_{i+n}]}^{n\text{-тог реда}}}{x_{i+n+1} - x_i} \overset{ux}{=} \frac{\frac{\Delta^n f_{i+1}}{h^n \cdot n!} - \frac{\Delta^n f_i}{h^n \cdot n!}}{(n+1) h} =$$

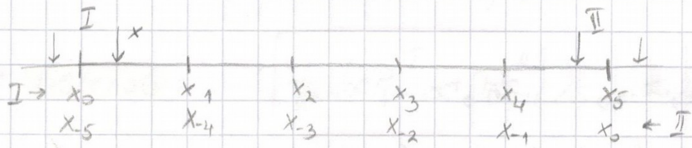
$$= \frac{\frac{\Delta^{n+1} f_i}{h^n \cdot n!}}{(n+1) h} = \frac{\Delta^{n+1} f_i}{h^{n+1} (n+1)!}$$

∟

* Веза између коначне разлике и извода ф-је:

$$\left.\begin{array}{l} f[x_0,\ldots,x_n] = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \\[2ex] f[x_0,\ldots,x_n] = \dfrac{\Delta^n f_0}{h^n n!} \end{array}\right\} \quad \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n} \Rightarrow \boxed{\Delta^n f_0 = h^n f^{(n)}(\xi)}$$

~ Први и Други Њутнов полином са коначним разликама ~ 16



$$q = \frac{x-x_0}{h} \Rightarrow x = x_0 + h\cdot q$$

↳ нова пром уместо x

* Први Њутнов полином: (интерполациони полином за интерполацију унапред)

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + \ldots + f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}) =$$

$$= f(x_0) + \frac{\Delta f_0}{h^1 1!}(\cancel{x_0}+q\cdot h-\cancel{x_0}) + \frac{\Delta^2 f_0}{h^2\cdot 2!}(qh)(\cancel{x_0}+q\cdot h-\cancel{x_0}-h) + \ldots =$$

$$= \boxed{f(x_0) + q\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-(n-1))}{n!}\Delta^n f_0}$$

- образац за грешку:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x)$$

$$-\ \omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j) = \prod_{j=0}^{n}(\cancel{x_0}+q h-\cancel{x_0}-jh) = \prod_{j=0}^{n} h(q-j) = h^{n+1}\prod_{j=0}^{n}(q-j) =$$

$$= h^{n+1}\cdot q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-n)$$

$$\Rightarrow f(x)-L_n(x) = \frac{h^{n+1} q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$\boxed{|f(x)-L_n(x)| \le \frac{q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1} f}$$

* Други Њутнов полином: (за интерполацију уназад)

$$x_{-i} = x_0 - ih, \quad q = \frac{x-x_0}{h} \Rightarrow x = x_0 + qh$$

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_{-1}](x-x_0) + \ldots + f[x_0,\ldots,x_{-n}](x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{-(n-1)}) =$$

$$= f(x_0) + \frac{\Delta f_{-1}}{h^1\, 1!}(\cancel{x_0}+q\cdot h-\cancel{x_0}) + \frac{\Delta^2 f_{-2}}{h^2\, 2!}(qh)(\cancel{x_0}+qh-\cancel{x_0}+h) + \ldots =$$

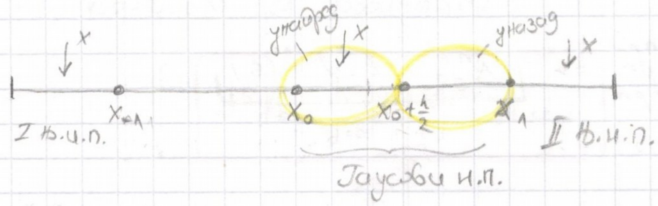
$$= \boxed{f(x_0) + q\Delta f_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 f_{-2} + \ldots + \frac{q(q+1)\cdot\ldots\cdot(q+(n-1))}{n!}\Delta^n f_{-n}}$$

- образац за грешку:

$$\boxed{|f(x)-L_n(x)| \le \frac{q(q+1)\cdot\ldots\cdot(q+n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1} f}$$

17 # Гаусови интерполациони полиноми

25.10.2019.



* Први Гаусов интерполациони полином: (унапред)

$x \in (x_0, x_0+\frac{h}{2}]$: $x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2}, \dots, x_n, x_{-n}, x_{n+1}$

$n+2+n \Rightarrow$ 2n+2 чворова

$$P^{I}_{2n+1}(x) = f[x_0] + f[\underset{(*)}{x_0}, \underset{(**)}{x_1}](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_{-1}](x-x_0)(x-x_1)+\dots+f[x_0,\dots,x_{n+1}](x-x_0)\cdot\dots\cdot(x-$$

• смена: $x = x_0 + qh$, $q\in(-1,1)$

$$= \boxed{f_0 + \frac{\Delta f_0}{h\cdot 1!} qh + \frac{\Delta^2 f_{-1}}{h^2\cdot 2!} qh^2(q-1)+\dots+\frac{\Delta^{2n+1} f_{-n}}{(2n+1)!}\cdot q(q-1)(q+1)\cdot\dots\cdot(q^2-n^2)}$$

најмањи индекс $\quad q-(*) \quad q-(**)$

* Други Гаусов интерполациони полином: (уназад)

$x\in[x_0+\frac{h}{2}, x_1)$: $x_1, x_0, x_2, x_{-1}, x_3, x_{-2}, x_4, x_{-3}, \dots, x_n, x_{-(n-1)}, x_{n+}$

2n+2 чворова

немају свој пар за разл. квадрата

$$P^{II}_{2n+1}(x) = f[x_1]+f[x_1,x_0](x-x_1)+f[x_1,x_0,x_2](x-x_1)(x-x_0)+\dots+$$

$$+f[x_1,\dots,x_n,x_{-(n-1)},x_{n+1},x_{-n}](x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_{n+1}) =$$

$$= \boxed{f_1 + (q-1)\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{q(q^2-1)\cdot\dots\cdot(q^2-(n-1)^2)(q-n)(q-(n+1))}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} f_{-n}}$$

• Други облик: $x\in[x_0-\frac{h}{2}, x_0)$: $x_0, x_{-1}, x_1, x_{-2}, x_2, \dots, x_{-n}, x_n, x_{-(n+1)}$

2n+2 чворова

$$\boxed{P^{II_2}_{2n+1}(x) = f_0 + q\cdot\Delta f_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 f_{-1}+\dots+\frac{q(q^2-1)\cdot\dots\cdot(q^2-n^2)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} f_{-(n+1)}}$$

25. 10. 2019.

17 Стирлингов и Беселов интерполациони полином

* **Стирлингов:** $\boxed{\frac{1}{2}\left(P^{I}_{2n+1} + P^{II_2}_{2n+1}\right), \quad |q| \le 0.25}$

$$L_{2n+1}(x_0+qh) = f_0 + q\,\frac{\Delta f_{-1}+\Delta f_0}{2} + \frac{q^2}{2!}\Delta^2 f_{-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 f_{-2}+\Delta^3 f_{-1}}{2} + \dots$$

$$+ \frac{q(q^2-1)\cdot\ldots\cdot(q^2-n^2)}{(2n+1)!}\cdot\frac{\Delta^{2n+1} f_{-(n+1)} + \Delta^{2n+1} f_{-n}}{2}$$

* **Беселов:** $\boxed{\frac{1}{2}\left(P^{I}_{2n+1} + P^{II}_{2n+1}\right), \quad 0.25 \le q \le 0.75}$

$$L_{2n+1}(x_0+qh) = \frac{f_0+f_1}{2} + \left(q-\frac{1}{2}\right)\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\cdot\frac{\Delta^2 f_{-1}+\Delta^2 f_0}{2} + \dots +$$

$$+ \frac{q(q^2-1)\cdot\ldots\cdot(q^2-(n-1)^2)(q-n)\left(q-\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)!}\cdot\Delta^{2n+1} f_{-n}$$

* Да ли су ово прави интерполациони полиноми?
  - тј. да ли је аритметичка средина 2 интерп. полинома такође и.п.?
    - → да ли био прави и.п.: $L_n(x_k) = f(x_k), \; k=\overline{0,n}$

$$B_2 \begin{cases} P_2^{I}: & x_0,\ x_1,\ x_{-1} \\ P_2^{II}: & x_0,\ x_1,\ x_2 \end{cases} \Bigg\}\ \text{нијe исти скуп чворова} \ \times$$

Беселов другог степена

$$B_3 \begin{cases} P_3^{I}: & x_0,\ x_1,\ x_{-1},\ x_2 \\ P_3^{II}: & x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_{-1} \end{cases} \Bigg\}\ \text{над истим скупом чворова} \ \checkmark$$

=> Беселови непарног степена су прави интерполациони полиноми, док парног степена нису (али дају добру апроксимацију).

=> За Стирлингове важи обрнуто

Други облици интерполације

1. Интерполација рационалним ф-јама

* добра за ф-је са више екстрема (пуно осцилација)

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + \ldots + p_m x^m}{q_0 + q_1 x + \ldots + q_n x^n} \rightarrow \text{укупно } \underline{n+m+2} \text{ непознатих коеф.}$$

$x_0, x_1, \ldots, x_{m+n+1}$

$$R(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, m+n+1}$$

мора бар 1 коеф да буде разл. од 0 $\leftarrow p_0 \neq 0$ и са њим делимо и бројилац и имениоц:

$$\Rightarrow \bar{R} = \frac{\bar{P}_m}{\bar{Q}_n} = \frac{1 + \bar{p}_1 x_i + \ldots + \bar{p}_m x_i^m}{\bar{q}_0 + \ldots + \bar{q}_n x_i^n} = f(x_i), \quad \bar{R}(x_i) = f(x_i), \ i = \ldots$$

$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{1 + \bar{p}_1 x_i + \ldots + \bar{p}_m x_i^m = f(x_i) \cdot (\bar{q}_0 + \ldots + \bar{q}_n x_i^n)}}_{\text{систем ј-на}}, \quad i = \overline{0, m+n}$$

2. Интерполација тригонометријским ф-јама

* ако је ф-ја периодична
* ф-ла Хермита: $f(x) \sim \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\sin(x - x_j)}{\sin(x_i - x_j)} \right) f(x_i)$
* ф-ла Гауса: $f(x) \sim \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\sin \frac{1}{2}(x - x_j)}{\sin \frac{1}{2}(x_i - x_j)} \right) f(x_i)$

тригоном. полином

* $Q_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $2n+1$ коеф./услова интерп.

* $f(x_i) = Q_n(x_i)$, $i = \overline{0, 2n}$ * $\quad 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} < 2\pi$

$$\left.\begin{aligned}
f(x_0) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) \\
f(x_1) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_1 + b_k \sin kx_1) \\
&\ \vdots \\
f(x_{2n}) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_{2n} + b_k \sin kx_{2n})
\end{aligned}\right\} \text{систем алгебарских једначина}$$

• непознате су a_0, a_k, b_k, $k = \overline{1, n}$

• детерминанта система:

$$\begin{vmatrix}
1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cdots & \cos nx_0 & \sin nx_0 \\
1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cdots & \cos nx_1 & \sin nx_1 \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \cdots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n}
\end{vmatrix} \neq 0 \,!$$

* Гаус: $(-1)\,Q_n(x) + a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = 0$

$$(-1)\,f(x_0) + a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) = 0$$

$$\dots$$

$$(-1)\cdot f(x_{2n}) + a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_{2n} + b_k \sin kx_{2n}) = 0$$

- $2n+2$ једначине
- хомоген систем
- непознате: a_0, a_k, b_k, $k=\overline{1,n}$, (-1) ↓ заправо познати; има их $2n+2$

- det система $\neq 0$ => решење је јединствено
  - => решење је тривијално, $0, 0, \dots, 0$
  - Имамо решење које није тривијално, (-1) => det система $= 0$.

$$\begin{vmatrix} Q_n(x) & 1 & \cos x & \sin x & \dots & \cos nx & \sin nx \\ f(x_0) & 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \dots & \cos nx_0 & \sin nx_0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ f(x_{2n}) & 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \dots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} \end{vmatrix} = 0.$$

→ када се детерминанта развије по првој колони и изрази се $Q_n(x)$, добијамо Гаусов тригоном. интерп. полином.

$\boxed{18}$

3. Инверзна интерполација

* имамо вр. ф-је али немамо вр аргумената

1° таблица није еквидистантна → Лагранжев интерп. полином (било каква је)

x_0	x_1	$\dots$ x?	x_n
f_0	f_1	$\dots$ y	f_n

инвертује се таблица:

f_0	f_1	$\dots$ y	f_n
x_0	x_1	$\dots$ x	x_n

$L_n(y) = x$

2° коначне разлике – таблица је еквидистантна → I/II Њутнов инт. полином

$$P^{I} = f_0 + q\,\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-(n-1))}{n!}\Delta^n f_0$$

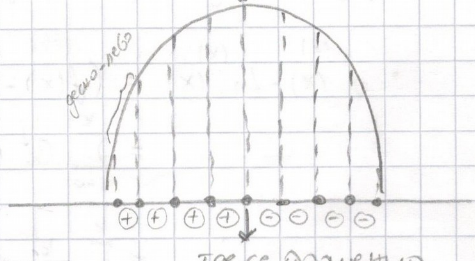
$$\Rightarrow q_{k+1} = \frac{1}{\Delta f_0}\Big(\underbrace{P^{I}}_{y} - f_0 - \frac{q_k(q_k-1)}{2!}\Delta^2 f_0 - \dots + \frac{q_k(q_k-1)\dots(q_k-(n-1))}{n!}\Delta^n f_0\Big)$$

$q = ?$, $x = x_0 + qh$

3° тражимо екстремне вр. ф-је

$(P^{I \text{ или } II})' = 0$ инверзна интерполација

- колоне коначних разлика
- коначна разлика реда 1 мења свој знак (апроксимира први извод: $\Delta f \sim f'$)



где се промени знак, ту је екстремум

19

Нумеричко диференцирање

21.11.2019.

=> користи се када је ф-ју тешко диференцирати аналитички или ако је она задата табеларно

- $f^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x)$, $L_n(x)$ – интерполациони полином одр. чворовима $x_0,\dots,x_n$

$\downarrow$

ове ф-ле имају једноставнији облик ако се користе за израчунавање приближне вр. извода ф-је у чвору

Пример

$$f'(x_0)\approx \overset{L_n'(x_0)}{\overset{\shortparallel}{\left(\frac{d}{dx}L_n(x)\right)_{x=x_0}}} = \left(\text{користимо I Њ.И.П.: } q=\frac{x-x_0}{h} \xrightarrow{x=x_0} q=0\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dq}\left(f_0+\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}\, q(q-1)\cdots(q-j+1)\Delta^j f_0\right)\underbrace{\frac{dq}{dx}}_{\frac{1}{h}}\right)_{q=0} =$$

- $$\frac{d}{dq}\big(q(q-1)\cdots(q-j+1)\big) = \Big(\underbrace{(q-1)\cdots(q-j+1)}_{\text{остаје}} + \overbrace{q(q-2)\cdots(q-j+1)}^{=0}+\dots+\overbrace{q(q-1)\cdots(q-j+2)}^{=0}\Big)_{q=0} =$$

$$= (-1)(-2)\cdots(-j+1) = (-1)^{j-1}(j-1)!$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta^j f_0}{j!}(-1)^{j-1}(j-1)! = \boxed{\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}\Delta^j f_0}{j}}$$

- ако користимо II Њ.И.П.:

$$f'(x_0)\approx L_n'(x_0) = \left(\frac{d}{dx}L_n(x)\right)_{x=x_0} = \left(q=\frac{x-x_0}{h} \xrightarrow{x=x_0} q=0\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dq}\left(f_0+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j!}\, q(q+1)\cdots(q+j-1)\Delta^j f_{-j}\right)\frac{dq}{dx}\right)_{q=0} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta^j f_{-j}}{j}}$$

(1) • за $n=1$: $f'(x_0)=\frac{\Delta f_0}{h}=\frac{f_1-f_0}{h} = \underbrace{\frac{\overbrace{f(x_1)}^{\pm\varepsilon_1}-\overbrace{f(x_0)}^{\pm\varepsilon_2}}{h}}_{\text{грешка рачуна } R_2}$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2<E$ (грешка овде је $\frac{2E}{h}$)

~ Грешка нумеричког диференцирања ~
(методе)

Деф Грешка методе, која се добија диференцирањем интерполационог полинома, једнака је одговарајућем изводу грешке интерполације.

- $$f^{(k)}(x)-L_n^{(k)}(x) = \big(f(x)-L_n(x)\big)^{(k)} = \big(f[x,x_0,\dots,x_n]\cdot\omega_{n+1}(x)\big)^{(k)} = (\text{Лајбницова ф-ла за извод производа}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} C_k^j \underbrace{\big(f[x,x_0,\dots,x_n]\big)^{(j)}}_{(*)}\cdot\underbrace{\omega_{n+1}^{(k-j)}(x)}_{\text{ово је најважнији део \ утиче на тачност}} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{\cancel{j!}(k-j)!}\,\cancel{j!}\, f[\underbrace{x,\dots,x}_{j+1},\underbrace{x_0,\dots,x_n}_{n+1}]\,\omega^{(k-j)}_{n+1}(x) = (\text{веза подељене разлике и извода}) =$$

$$= \boxed{\sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!} \cdot \frac{f^{(n+j+1)}(\xi)}{(n+j+1)!} \cdot \omega_{n+1}^{(k-j)}(x)} \quad (2), \quad \xi \in [x,\dots,x,x_0,\dots,x_n]$$

(*) Нова $\overset{\text{смена}}{\text{ф-ја}}$ (подељена разлика): $g[x] = g(x) = f[x, x_0, \dots, x_n]$

правимо низ тачака: $x, x+\varepsilon, x+2\varepsilon, \dots, x+j\varepsilon$

$\underbrace{g[x, x+\varepsilon, \dots, x+j\varepsilon]}_{j+1}$ = (веза између извода и подељене разлике) $= \frac{g^{(j)}(\xi_\varepsilon)}{j!}$, $\xi_\varepsilon \in [x,\dots,x+j\varepsilon]$

$\varepsilon \to 0$: (интервал постаје 1 тачка)

$$\underbrace{g[\overbrace{x, x, \dots, x}^{j+1}]}_{\text{оваква}} = \frac{g^{(j)}(x)}{j!}$$

$\frac{0}{0}$ подељена разлика није дефинисана

$$\Rightarrow g^{(j)}(x) = j! \cdot g[\underbrace{x,\dots,x}_{j+1}]$$

Враћамо смену: $(f[x, x_0, \dots, x_n])^{(j)} = j! \cdot f[\underbrace{x,\dots,x}_{j+1}, \underbrace{x_0,\dots,x_n}_{n+1}]$

* Оцена грешке:

- $|f^{(k)} - L_n^{(k)}| \le \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!(n+j+1)!} \cdot M_{n+j+1} |\omega_{n+1}^{(k-j)}(x)|$ → апроксимација извода

 – $M_{n+j+1} = \max_{[y_1,y_2]} |f^{(n+j+1)}(x)|$, $y_1 = \min\{x_0,\dots,x_n,x\}$, $y_2 = \max\{x_0,\dots,x_n,x\}$

 – $\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - \underset{x_0+jh}{x_j}) = (\text{смена: } x = x_0 + qh) = \prod_{j=0}^{n}(\cancel{x_0} + qh - \cancel{x_0} - jh) =$

$$= \prod_{j=0}^{n} h(q-j) = h^{n+1} \prod_{j=0}^{n}(q-j) \Rightarrow \omega_{n+1}(x) = O(h^{n+1})$$

- $f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x) = O(h^{n+1-k})$ → диференцирање смањује ред тачности за 1

[20] ~ Укупна грешка нумеричког диференцирања ~

$$R = \underset{\text{грешка методе}}{R_1} + \underset{\text{грешка рачуна}}{R_2}$$

* За $x = x_0$, $k=1$, $n=1$ (из (1)):

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} f'(x_0) - L_n'(x_0) = \sum_{j=0}^{1} \frac{f^{(n+j+1)}(\xi)}{(1-j)!\,(n+j+1)!}\, \overbrace{\omega_{n+1}^{(1-j)}(x_0)}^{\text{за } j=1 \text{ овај сабирак је једнак нули}} \overset{j=0}{=} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot \omega'_{n+1}(x_0) =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot \prod_{j=1}^{n}(x_0 - x_j)$$

$$|f'(x_0) - L_1'(x_0)| = \left|\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot \underbrace{(-h)}_{-(x_1-x_0)}\right| \le \frac{M_2 h}{2}$$ грешка методе

• За (1): $|R| = |R_1 + R_2| \le |R_1| + |R_2| \le \frac{M_2 h}{2} + \frac{2E}{h} = r(h)$

није универзално (важи за овај пример)

* Како наћи оптимално h тако да грешка R буде што мања?

→ Тражимо извод по h и изједначавамо га са нулом.

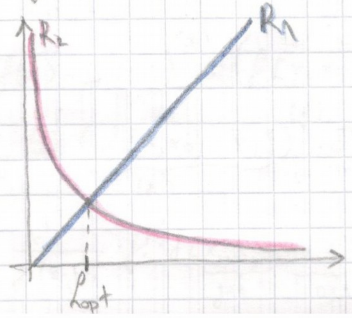
$$r'_h = \frac{M_2}{2} - \frac{2E}{h^2} = 0 \Rightarrow \frac{M_2}{2} = \frac{2E}{h^2} \Rightarrow M_2 h^2 = 4E$$

$$\Rightarrow h_{opt} = \sqrt{\frac{4E}{M_2}} = \underbrace{2\sqrt{\frac{E}{M_2}}}_{\text{оптимални корак}}$$

$$\Rightarrow r(h) = r\left(2\sqrt{\frac{E}{M_2}}\right) = \ldots = \underbrace{2\sqrt{E M_2}}_{\text{оптимална грешка}}$$

(овим губимо број сигурних цифара)

- смањивањем корака испод оптималне вредности, укупна грешка се повећава јер расте рачунска грешка
- повећавањем корака изнад оптималне вредности, укупна грешка се повећава јер расте грешка методе



III **Нумеричка интеграција** 01. 11. 2019.

⇒ користи се када није могуће изразити интеграл помоћу елементарних ф-ја

* Формуле за нумеричку интеграцију – **квадратурне ф-ле** – се обично добијају заменом подинтегралне ф-је некој њој блиском ф-јом чији се интеграл релативно лако може израчунати.

$$I(f) = \int_a^b p(x) f(x)\, dx, \quad p(x) = C[a,b] \to \text{тежинска ф-ја (најчешће је једнака 1)}, \quad p(x) > 0$$

непрекидна

21 ~ Њутн-Котесове квадратурне ф-ле ~

⇒ ф-ју f замењујемо Лагранжевим интерп. полиномом $L_n(x)$

$f \approx L_n(x)$, $f(x) = L_n(x) + R_n(x)$

$$I(f) = \underbrace{\int_a^b p(x) L_n(x)\, dx}_{} + \underbrace{\int_a^b p(x) R_n(x)\, dx}_{} = \underbrace{S_n(f)}_{\text{квадратурна ф-ла}} + \underbrace{R_n(f)}_{\text{грешка ф-ле}}$$

$$S_n(f) = \int_a^b p(x) \overbrace{\sum_{i=0}^{n} \Big(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \Big) f(x_i)}^{L_n(x)}\, dx, \quad \overset{x}{(a,b)} \to \overset{t}{(-1,1)}$$

смена: $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$ → добили смо смена: $x = pt + q$, $t \in \{-1, 1\}$; $a = -p + q$, $b = p + q$

$dx = \frac{b-a}{2} t$

$$L_n(x) = L_n\Big(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t\Big) = \sum_{i=0}^{n} \Big(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}} \frac{\cancel{\frac{b+a}{2}} + \frac{b-a}{2} t - \cancel{\frac{b+a}{2}} - \frac{b-a}{2} t_j}{\cancel{\frac{b+a}{2}} + \frac{b-a}{2} t_i - \cancel{\frac{b+a}{2}} - \frac{b-a}{2} t_j} \Big) \cdot f(x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \Big(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j} \Big) f(x_i)$$

→ Лагранжов полином је инваријантан у односу на линеарну смену

$$\Rightarrow S_n(f) = \int_{-1}^{1} \bar{p}(t) \sum_{i=0}^{n} \Big(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j} \Big) f(x_i) \cdot \frac{b-a}{2}\, dt =$$

$$= \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{n} \Big(\int_{-1}^{1} \bar{p}(t) \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}\, dt \Big) f(x_i) = \boxed{\frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i)}$$

коефицијенти квадратурне ф-ле Њутн-Котесовог типа

Њутн-Котесова ф-ла

• $\underline{R_n(f)} = \int_a^b p(x) R(x) dx = \int_a^b p(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x) dx$

- користимо исту смену
- $\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) = \prod_{j=0}^{n} \left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t - \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} t_j \right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \prod_{j=0}^{n} (t - t_j) =$

$$= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \cdot \overline{\omega}_{n+1}(t)$$

$\Rightarrow \underline{R_n(f)} = \int_{-1}^{1} \overline{p}(t) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \cdot \overline{\omega}_{n+1}(t) \cdot \frac{b-a}{2} dt =$

$$= \boxed{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+2} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_{-1}^{1} \overline{p}(t) \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot \overline{\omega}_{n+1}(t) dt}$$ грешка Њутн-Котесове ф-ле

$$|R_n| \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+2} \cdot \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_{-1}^{1} |\overline{p}(t) \cdot \overline{\omega}_{n+1}(t)| dt$$

21 ~ Особине Њутн-Котесове формуле ~

Лема 1 Ако је тежинска ф-ја $\overline{p}(t)$ ($\overline{p}(-t) = \overline{p}(t)$) парна у односу на средину интервала $[a,b]$, а чворови симетрично распоређени у односу на средину интервала, $t_k = -t_{n-k}$, онда су коефицијенти који одговарају симетричним чворовима једнаки тј. $C_k = C_{n-k}$.

доказ

$\underline{C_k} = \int_{-1}^{1} \overline{p}(t) \cdot \frac{\overline{\omega}_{n+1}(t)}{(t - t_k) \overline{\omega}'_{n+1}(t_k)} dt = \left(\underline{\text{смена}}: \begin{matrix} t = -\tau \\ dt = -d\tau \end{matrix} \right) = \int_{-1}^{-1} \overline{p}(-\tau) \frac{\overline{\omega}_{n+1}(-\tau)}{(-\tau + t_{n-k}) \cdot \overline{\omega}'_{n+1}(-t_{n-k})} (-d\tau) =$

симетрични

$$= \int_{-1}^{1} \overline{p}(-\tau) \frac{\overline{\omega}_{n+1}(-\tau)}{(-\tau + t_{n-k}) \cdot \overline{\omega}'_{n+1}(-t_{n-k})} d\tau =$$

$$\cdot\ \overline{\omega}_{n+1}(t) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} (t^2 - t_i^2), & n\text{-непарно (ф-ја је парна)} \\ t \cdot \prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} (t^2 - t_i^2), & n\text{-парно (ф-ја је непарна)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \overline{\omega}'_{n+1}(t)$ — извод парне ф-је је непарна ф-ја; извод непарне ф-је је парна ф-ја

- количник непарне и парне ф-је је непарна ф-ја

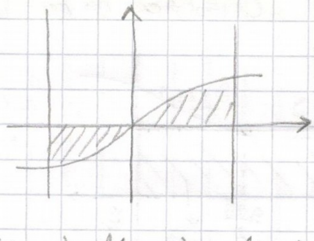
$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{\overline{p}(\tau)}_{\text{парна}} \frac{1}{t - t_{n-k}} \underbrace{\left(- \frac{\overline{\omega}_{n+1}(-\tau)}{\overline{\omega}'_{n+1}(-t_{n-k})} \right)}_{\substack{\text{непарна ф-ја} \\ \text{(па се минус „губи")}}} d\tau = \int_{-1}^{1} \overline{p}(\tau) \frac{\overline{\omega}_{n+1}(\tau)}{(\tau - t_{n-k}) \overline{\omega}'_{n+1}(t_{n-k})} d\tau = \underline{C_{n-k}}$$

$\llcorner$

Лема 2 $\overline{p}(t)$ је парна тежинска ф-ја, чворови су симетрично распоређени у одн. на средину интервала $[a,b]$. Нека је ф-ја f непарна, $f(-x) = -f(x)$. Тада квадратурна ф-ла даје потпуно тачан резултат тј.

$$\underbrace{I(f)}_{\text{извод}} = \underbrace{S_n(f)}_{\text{квад. ф-ла}}.$$

доказ



Интеграл непарне ф-је је једнак $\underline{\underline{0}}$.

$$S_n(f) = \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) = \left(m = \frac{n-1}{2} \text{ или } m = \frac{n}{2}-1\right)$$

$$= \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{m}\left(c_i \cdot f(x_i) + c_{n-i}\cdot f(x_{n-i})\right) = \left(f(x_{n-i}) = f(-x_i) = -f(x_i)\right) =$$

$$= \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{m} f(x_i)\left(c_i - c_{n-i}\right) = (\text{из претх. леме: } c_i = c_{n-i}) = \underline{\underline{0}}$$

* $S_n(f) \approx I(f)$

↳ квадратурна ф-ла даје тачну вредност за полиноме до степена n

• грешка: $r_n(f) = \ldots \underbrace{f^{(n+1)}}_{\text{за веће степене од } n\text{, извод је једнак } 0}$

(О повишеној тачности)

Лема 3 Тежинска ф-ја $\overline{p}(t)$ је парна, чворови су симетрично распоређени и број чворова је непаран (тј. n је парно). Квадратурна ф-ла $S_n(f)$ ће тачно да интеграли и полиноме степена $n+1$:

$$I(P_m) = S_n(P_m), \quad m = \overline{0, n+1}$$

доказ

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \overset{\text{константа}}{c}\underbrace{\Big(x - \overset{\text{средина интервала } [a,b]}{\frac{b+a}{2}}\Big)^{n+1}}_{\substack{\text{непарна ф-ја у} \\ \text{односу на средину} \\ \text{интервала} \\ \text{интеграције}}} \Big/\int \;\Rightarrow\; I(P_{n+1}(x)) = I(P_n(x))$$

$$S_n(P_{n+1}(x)) = \underbrace{S_n(P_n(x))}_{=I(P_n(x))} + \cancel{S_n\left(\left(x - \frac{b+a}{2}\right)^{n+1}\right)}^{\,0} \Big/\int$$

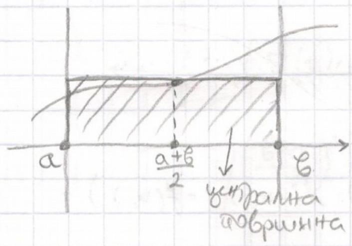
~ Најважније Њутн-Котсове квадратурне ф-ле ~

* Тежинска ф-ја p ће нам бити једнака 1 : $\boxed{p=1}$

↳ парна ф-ја • све грешке су грешке методе

22

* $\boxed{n=0}$ Основна ф-ла правоугаоника



$$P_{\square} = (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

• $x_0 = \frac{a+b}{2}$

• $S_0(f) = \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{0} c_i\cdot f(x_i) = \frac{b-a}{2}\cdot c_0\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

- $c_0 = \int_{-1}^{1} 1\cdot \cancel{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{0}(x_i - x_j)}\,dx = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$

1

• $|R_n(f)| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+2}\cdot\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_{-1}^{1}|p(t)\,\overline{\omega}_{n+1}(t)|\,dt$

- Када радимо са грешком треба бити опрезан!

Лема 3 : $n \to n+1$ (тако овде уместо $n=0$, имамо $n=1$)

$$|R_0(f)| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^3\frac{M_2}{2!}\int_{-1}^{1}|1\cdot(t-0)|\,dt = \left(\frac{b-a}{2}\right)^3\frac{M_2}{2!}\int_{-1}^{1}|t^2|\,dt = \ldots = \frac{(b-a)^3}{24}\max_{[a,b]}|f''(x)|$$

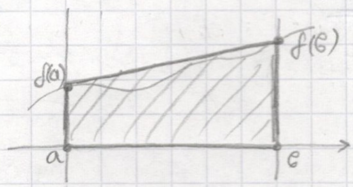
строп

→ мора да буде парном другог степена

→ средњи (овде и једини) чвор се рачуна двапут

23

* $\boxed{n=1}$ Основна формула трапеза



• имамо 2 чвора : a , b

-1 , 1

t_0 , t_1

• $S_1(f) = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(c_0 f(a) + c_1 f(b)\right) =$

- $c_0 = \int_{-1}^{1} 1\cdot\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\,dt = \int_{-1}^{1}\frac{t-1}{-1-1}\,dt = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-1)\,dt = \ldots = 1$

- $c_1 = \int_{-1}^{1} 1\cdot\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\,dt = \ldots = 1$

$= \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$ (овде важи Лема 2 : $c_0 = c_1$)

• број чворова је паран па не важи Лема 3 (n остаје 1)

• $|R_1(f)| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \frac{M_2}{2!} \int_{-1}^{1} |1\cdot(t-1)(t+1)|\,dt = \ldots = \frac{(b-a)^3}{12} \max_{[a,b]} |f''(x)|$

– претходна грешка је нешто тачнија јер тамо важи повишена тачност

$\boxed{24}$

* $\boxed{n=2}$ Основна формула Симпсона

• $S_2(f) = \frac{b-a}{2}\left(c_0 f(a) + c_1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + c_2 f(b)\right) = \begin{pmatrix} x\to & a, & \frac{a+b}{2}, & b \\ t\to & -1 & 0 & 1\end{pmatrix} =$

– $c_0 = c_2 = \frac{1}{3}$, $c_1 = \frac{4}{3}$

$$= \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

• $(n=2 \rightarrow n=3)$ – важи Лема 3

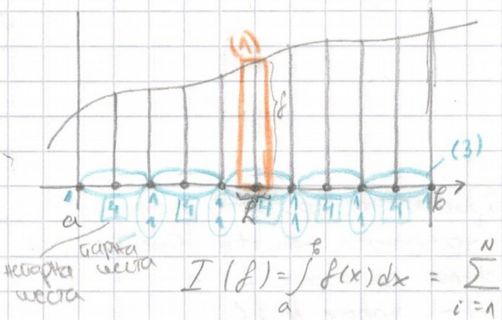
$$|R_2(f)| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{M_4}{4!}\int_{-1}^{1} |1\cdot \underbrace{(t-0)(t+1)(t-1)}_{\text{морамо степена 4}}|\,dt = \ldots = \frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \max_{[a,b]}|f^{IV}(x)|$$

↳ најтачнија од ова 3 примера

=> средњи чвор се рачуна двоструко

22-23-24

* Уопштења *



• повишена тачност се добија поделом интервала

N – интервала

$h = \frac{b-a}{N} \Rightarrow N = \frac{b-a}{h}$

$x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0,N}$

$x_0 = a$, $x_N = b$

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

1. Уопштена ф-ла правоугаоника

• $S_0^h(f) = \sum_{i=1}^{N} h\cdot f\Big(\underbrace{\frac{x_{i-1}+x_i}{2}}_{\text{средина}}\Big)$

• грешка целог интервала је једнака суми грешака свих делова тог интервала.

• $|R_0^h(f)| \le \sum_{i=1}^{N} |R_{0,i}^h| = \sum_{i=1}^{N} \frac{h^3}{24}\max_{[x_{i-1},x_i]}|f''(x)| \le \frac{h^3}{24}\max_{[a,b]}|f''|\cdot\sum_{i=1}^{N} 1 =$

$$= \frac{h^3}{24}M_2 \cdot N = \frac{h^{\cancel{3}\,2}}{24}\cdot\frac{b-a}{\cancel{h}}\cdot M_2 = \frac{(b-a)h^2}{24}M_2$$

2. Уопштена ф-ла трапеза

- $S_1^h(f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{h}{2}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(b)\right)$

- $|R_1^h(f)| \leq \sum_{i=1}^{N} |R_{1,i}| = \ldots = \frac{h^2}{12}(b-a)M_2$

– што је корак h ситнији, то је грешка мања ($h \to 0 \Rightarrow R \to 0$)

3. Уопштена Симпсонова ф-ла

- да би нам било лакше, узимамо по 2 интервала $\quad 2m = N$

$$I(f) = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \qquad \frac{2h}{6} = \frac{h}{3} \text{ јер}$$

- $S_2^h(f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{h}{3}\left(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right) =$

$$= \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b)\right)$$

- $|R_2^h| \leq \sum_{i=1}^{m} |R_{2,i}| = \sum_{i=1}^{m} \frac{h^5}{90} \max_{[x_{2i-2}, x_{2i}]} |f^{IV}(x)| \leq \frac{h^5}{90} M_4 \cdot m = \frac{b-a}{180} \cdot M_4 h^4$

$\frac{b-a}{2m} = h$

$\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 = \left(\frac{2h}{2}\right)^5 = h^5$

много брже $\to 0$ (најтачнија је)

~Рунгеова оцена грешке~

* $I(f) = S_n^h(f) + R^h(f) = S_n^{2h}(f) + R^{2h}(f)$

S_n^h – приближна вр. интеграла израчуната помоћу претх. ф-ла за корак h

S_n^{2h} – –||– корак је $2h$

$R^h = c \cdot h^p$, $p = 2$ (1)(2) или $p = 4$ (3)

(конст.)

$S^h + c \cdot h^p = S^{2h} + c \cdot (2h)^p \Rightarrow S^h - S^{2h} = c \cdot (2h)^p - c \cdot h^p = c \cdot h^p(2^p - 1)$

$$\Rightarrow c = \frac{S^h - S^{2h}}{h^p(2^p - 1)}$$

$$\boxed{R^h = \frac{S^h - S^{2h}}{2^p - 1}}$$

$2^p - 1$: 15 или 3

- ако дођемо до тога да је $R^h < \varepsilon$, завршили смо са рачунањем