Неодређени интеграли

04.10.2018.

Деф Нека је ф-ја f дефинисана на (a,b). Ф-ја F је примитивна ф-ја ф-је f на (a,b) ако је F диференцијабилна на (a,b) и ако је њен извод у свакој тачки једнак ф-ји f у тој тачки тј. $\boxed{F'(x) = f(x)}$, $\forall x \in (a,b)$

пример $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$

- једна примитивна ф-ја ф-је x^4 је: $F(x) = \frac{1}{5}x^5$, $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + 8 \ldots$

• примитивна ф-ја једне ф-је није јединствена

Став Нека је F примитивна ф-ја ф-је f на (a,b). Ф-ја G је такође примитивна ф-ја ф-је f на (a,b) акко је ф-ја $G-F$ константна на (a,b).

Доказ

$\boxed{\Leftarrow}$ Па да важи да је разлика $G-F$ константна на (a,b) тј. $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in (a,b))$ важи $G(x) - F(x) = c \Rightarrow G(x) = F(x) + c$, за F знамо да је диференцијабилна јер знамо из става да је примитивна $\Rightarrow G$ је диф. јер је она збир две диф. ф-је $\Rightarrow G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Па да је $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$. Треба доказати да је $G-F$ константна ф-ја.

$(G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow G-F$ је константна на (a,b).

Деф Неодређени интеграл ф-је f на неком интервалу је скуп свих њених примитивних ф-ја на том интервалу.

$$\boxed{\int f(x)\,dx}$$

• $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, $F'(x) = f(x)$
$c \in \mathbb{R}$

Став (Таблица интеграла)

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad , \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

3. $\int e^x dx = e^x + c$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a>0, a\neq 1$

5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

6. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

7. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$

8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$

* доказ овог става су изводи десних страна једнакости

Став Нека ф-је f и g имају примитивне и нека је $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тада и ф-је $f+g$ и $\lambda \cdot f$ имају примитивне и важи:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \\ 2)\ \int \lambda f(x) dx = \lambda \cdot \int f(x)dx \end{array}\right\} \text{линеарност интеграла}$$

• нула интеграл ($\lambda = 0$) је скуп свих константних ф-ја тако да (2) не важи за $\lambda = 0$

Доказ

Нека је $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$.

(1) $(F(x)+G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$

(2) $(\lambda \cdot F(x))' = \lambda F'(x) = \lambda f(x)$.

Пример

1) $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}-3e^x+x-14\cos x\right)dx=2\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-3\int e^x dx+\int x dx-14\int\cos x dx=$

$=2\operatorname{tg}x-3e^x+\frac{x^2}{2}-14\sin x+c$

2) $\int\frac{x^2-5}{x^2+1}dx=\int\frac{x^2+1-6}{x^2+1}dx=\int dx-6\int\frac{1}{x^2+1}dx=x-6\operatorname{arctg}x+c$

Теорема (О смени променљиве)

Нека је F примитивна ф-ја ф-је f на (a,b) тј. $\int f(t)dt=F(t)+c$

Ако је $g:(c,d)\to(a,b)$ дифер. ф-ја, онда важи:

$$\boxed{\int f(g(x))\cdot g'(x)dx=F(g(x))+c}$$

- $\int f(g(x))\cdot g'(x)dx=\begin{pmatrix}t=g(x)\ /d\\ dt=g'(x)dx\end{pmatrix}=\int f(t)\cdot dt=F(t)+c=F(g(x))+c$

Доказ

$(F(g(x)))'=F'(g(x))\cdot g'(x)\overset{\text{из теореме}}{=}f(g(x))\cdot g'(x).$

Пример

1) $\int\sin 3x\,dx=\begin{pmatrix}t=3x\\ dt=3dx\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\int\sin t\,dt=-\frac{1}{3}\cos t+c=-\frac{1}{3}\cos 3x+c$

$\int f(x)dx=F(x)+c$. Ако имамо:

$$\int\underset{a\neq 0}{f(ax+b)}dx=\begin{pmatrix}t=ax+b\\ dt=adx\end{pmatrix}=\frac{1}{a}\int f(t)dt=\frac{1}{a}F(t)+c=\frac{1}{a}F(ax+b)+c$$

2) $\int\frac{dx}{6x+5}=\frac{1}{6}\ln|6x+5|+c$

3) $a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$

$$\int\frac{dx}{(x-a)^n}=\begin{pmatrix}t=x-a\\ dt=dx\end{pmatrix}=\int\frac{dt}{t^n}=\begin{cases}\ln|t|+c, & n=1\\ \frac{1}{(1-n)t^{n-1}}+c, & n\geq 2\end{cases}=\begin{cases}\ln|x-a|+c, & n=1\\ \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+c, & n\geq 2\end{cases}$$

- $n\geq 2$: $\int t^{-n}dt=\frac{t^{1-n}}{-n+1}+c=\frac{1}{(1-n)t^{n-1}}+c$

Пример

1) $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x} - 3e^x + x - 14\cos x\right)dx = 2\int\frac{1}{\cos^2 x}dx - 3\int e^x dx + \int x\,dx - 14\int\cos x\,dx =$

$= 2\operatorname{tg}x - 3e^x + \frac{x^2}{2} - 14\sin x + c$

2) $\int\frac{x^2-5}{x^2+1}dx = \int\frac{x^2+1-6}{x^2+1}dx = \int dx - 6\int\frac{1}{x^2+1}dx = x - 6\operatorname{arctg}x + c$

Теорема (О смени променљиве)

Нека је F примитивна ф-ја ф-је f на (a,b) тј. $\int f(t)dt = F(t)+c$

Ако је $g:(c,d)\to(a,b)$ дифер. ф-ја, онда важи:

$$\boxed{\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = F(g(x))+c}$$

• $\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = \begin{pmatrix} t=g(x)\ /d \\ dt=g'(x)dx\end{pmatrix} = \int f(t)\cdot dt = F(t)+c = F(g(x))+c$

Доказ

$(F(g(x)))' = F'(g(x))\cdot g'(x) \overset{\text{из теореме}}{=} f(g(x))\cdot g'(x).$

Пример

1) $\int\sin 3x\,dx = \begin{pmatrix} t=3x \\ dt=3dx\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\int\sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + c = -\frac{1}{3}\cos 3x + c$

$\int f(x)dx = F(x)+c$. Ако имамо:

$$\int\limits_{a\neq 0} f(ax+b)dx = \begin{pmatrix} t=ax+b \\ dt=adx\end{pmatrix} = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t)+c = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$$

2) $\int\frac{dx}{6x+5} = \frac{1}{6}\ln|6x+5|+c$

3) $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$

$$\int\frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{pmatrix} t=x-a \\ dt=dx\end{pmatrix} = \int\frac{dt}{t^n} = \begin{cases}\ln|t|+c, & n=1\\ \frac{1}{(1-n)t^{n-1}}+c, & n\geq 2\end{cases} = \begin{cases}\ln|x-a|+c, & n=1\\ \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+c, & n\geq 2\end{cases}$$

• $n\geq 2$: $\quad\int t^{-n}dt = \frac{t^{1-n}}{-n+1}+c = \frac{1}{(1-n)t^{n-1}}+c$

(*) треба нам само једна примитивна ф-ја па не пишемо $+c$.

пример

1) $$\int (2x+9)\cos 5x\,dx = (2x+9)\frac{1}{5}\sin 5x - \frac{2}{5}\int \sin 5x\,dx = \frac{2x+9}{5}\sin 5x + \frac{2}{25}\cos 5x + c$$

$u = 2x+9 \;/'$ $\quad du = 2dx$

$dv = \cos 5x\,dx \;/\int$ $\quad v = \frac{1}{5}\sin 5x^{(*)}$

2) $$\int (x^2+1)e^{3x}dx = (x^2+1)\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int x\cdot e^{3x}dx = \frac{x^2+1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right) =$$

$u = x^2+1 \quad du = 2x\,dx \quad , \quad u = x \quad du = dx$

$dv = e^{3x} \quad v = \frac{1}{3}e^{3x} \quad , \quad dv = e^{3x}dx \quad v = \frac{1}{3}e^{3x}$

$$= \left(\frac{x^2+1}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}\right)e^{3x} + c$$

• $\int P(x)\,e^{\lambda x}dx = \dots \int P'(x)\,e^{\lambda x}dx$ (смањује се степен полинома)

$u = P(x) \quad du = P'(x)dx$

$dv = e^{\lambda x}dx \quad v = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$

• $\int P(x)\cdot \sin \lambda x\,dx$

• $\int P(x)\cdot \cos \lambda x\,dx$ $\Big\}$ $u = P(x) \quad du = P'(x)dx$

$\Rightarrow$ парцијално се ради онолико пута колико је степен полинома

3) $a>0,\ n\in\mathbb{N}$: $\quad I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + c$$

$$I_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \frac{1}{a^2}\left(I_n - \int \overset{u}{x}\,\overset{dv}{\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(I_n - \left(\frac{-x}{2n(x^2+a^2)^n} + \frac{1}{2n}\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}}_{I_n}\right)\right)$$

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2}I_n + \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n}$$ (рекурентна веза)

4) $$\int \frac{dx}{(x^2+5)^2} \underset{\substack{n=1\\ a=\sqrt{5}}}{=} \frac{1}{10}I_1 + \frac{x}{10(x^2+5)} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{x}{10(x^2+5)} + c$$

11. 10. 2018.

Интеграција рационалних функција

количник два полинома

* $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ - рационална ф-ја (P, Q су полиноми)

Лема Нека је $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ рационална ф-ја. Тада постоје полиноми $A(x)$ и $S(x)$, при чему је $\deg S < \deg Q$ (степен полинома), тако да је:

$$\boxed{R(x) = A(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}}$$

Доказ

1. случај: $\deg P < \deg Q$ онда: $A(x) := 0$, $S(x) := P(x)$.

2. случај: $\deg P \geq \deg Q$

$P(x) : Q(x) = \underbrace{A(x)}_{\text{резултат}} \implies P(x) = A(x) \cdot Q(x) + S(x) \quad /: Q(x)$

$\underbrace{S(x)}_{\text{остатак}}$ $\qquad R(x) = A(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$.

$\deg S < \deg Q$ (до тада се врши дељење)

Став Нека је Q моничан (први коеф = 1 (уз)) полином степена n $(Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots)$. Тада се Q може представити у следећем облику:

$$(*) \quad Q(x) = \underbrace{(x-a_1)^{k_1} \cdot (x-a_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_r)^{k_r}}_{\text{нерастављиви фактори степена 1}} \cdot \underbrace{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1} \cdot (x^2+b_2x+c_2)^{l_2} \cdot \ldots \cdot (x^2+b_sx+c_s)^{l_s}}_{\text{нерастављиви фактори степена 2}}$$

где су $k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s \in \mathbb{N}$ такви да $k_1 + \dots + k_r + 2(l_1 + \dots + l_s) = n$,

а $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_s \in \mathbb{R}$ такви да $b_i^2 - 4c_i < 0, \forall i = \overline{1,s}$

- немају реалне нуле
- чиниоци су нерастављиви

Теорема Нека је $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ рационална ф-ја при чему је $\deg P < \deg Q$, Q је моничан и нека за полином Q имамо растављање на просте чиниоце из претходног става (*). Тада се ф-ја R може представити у сл. облику:

$$R(x) = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_{21}}{x-a_2} + \frac{A_{22}}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x-a_2)^{k_2}} + \dots$$

$$+ \frac{A_{r1}}{x-a_r} + \frac{A_{r2}}{(x-a_r)^2} + \dots + \frac{A_{rk_r}}{(x-a_r)^{k_r}} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + \dots +$$

$$+\frac{B_{1e_1}x+C_{1e_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{e_1}}+\dots+\frac{B_{s1}x+C_{s1}}{x^2+b_sx+c_s}+\frac{B_{s2}x+C_{s2}}{(x^2+b_sx+c_s)^2}+\dots+\frac{B_{se_s}x+C_{se_s}}{(x^2+b_sx+c_s)^{e_s}}.$$

M

Примери

1) $$\underset{(x+1)(x+3)}{\frac{2x+1}{x^2+4x+3}}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}=\frac{Ax+3A+Bx+B}{(x+1)(x+3)}$$

$$\begin{aligned} A+B&=2 \quad / \cdot(-1)\\ 3A+B&=1\\ \hline 2A&=-1 \end{aligned} \qquad A=-\tfrac{1}{2},\quad B=\tfrac{5}{2}$$

$$\frac{2x+1}{x^2+4x+3}=\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{5}{2}}{x+3}$$

$$\int\frac{2x+1}{x^2+4x+3}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x+3}=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{5}{2}\ln|x+3|+C$$

2) $$\underset{(x+2)^2}{\frac{x}{x^2+4x+4}}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}=\frac{Ax+2A+B}{(x+2)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} A&=1\\ 2A+B&=0\\ B&=-2 \end{aligned}\right\}\quad \frac{x}{x^2+4x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{-2}{(x+2)^2}$$

3) $$\frac{x^{2}-3x+5}{\underset{(x-1)(x^2+x+1)}{x^{3}-1}}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=\dots$$

4) $$\frac{x^3-x+5}{\underset{(x^2+3)^2}{x^4+6x+9}}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{(x^2+3)^2}=\dots$$

Број непознатих const мора бити једнак степену полинома у имениоцу.

5) $$\frac{1}{(x+2)^4(x^2-x+1)^3}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{(x+2)^3}+\frac{D}{(x+2)^4}+\frac{Ex+F}{x^2-x+1}+$$
$$+\frac{Gx+H}{(x^2-x+1)^2}+\frac{Ix+J}{(x^2-x+1)^3}=\dots$$

$$*\quad \int\frac{dx}{(x-a)^m},\ a\in\mathbb{R},\ m\in\mathbb{N};\quad \int\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}\,dx,\quad B,C,b,c\in\mathbb{R},\ b^2-4c<0,\ n\in\mathbb{N}$$

Став Сваки интеграл облика $\int\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}$, $B,C,b,c\in\mathbb{R}$, $b^2-4c<0$, $n\in\mathbb{N}$ одговарајућом сменом своди се на интеграл облика:

$$\underbrace{\int\frac{\alpha t+\beta}{(t^2+a^2)^n}\,dt}_{\alpha\int\frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n}+\beta\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}},\quad \alpha,\beta,a\in\mathbb{R},\ a>0$$

Доказ

$$x^2+bx+c = x^2+2x\cdot\frac{b}{2}+\frac{b^2}{4}+c-\frac{b^2}{4} = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4c-b^2}{4}$$

$4c-b^2>0$ из става

смена: $t = x+\frac{b}{2}$ /d

$dt = dx$

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}dx = \int\frac{\overbrace{B}^{=\alpha}t\;\overbrace{-\frac{Bb}{2}+C}^{\beta}}{\Big(t^2+\big(\underbrace{\sqrt{\tfrac{4c-b^2}{4}}}_{a}\big)^2\Big)^n}dt$$

пример

$$\int\frac{3x+4}{(x^2+12x+40)^3}dx =$$

- $x^2+12x+40 = x^2+2x\cdot6+36+40-36 = (x+6)^2+4$

смена: $t = x+6$ $\quad(x=t-6)$

$dt = dx$

$$= \int\frac{3t-14}{(t^2+4)^3}dt = 3\int\frac{t\,dt}{(t^2+4)^3}-14\int\frac{dt}{(t^2+4)^3} = \ldots$$

* $\int\frac{e^x}{x}dx$ – постоји интеграл али се не може израчунати

11.10.20

Свођење неких интеграла на интеграл рационалне ф-је

* Интеграли облика:

$$\int\underbrace{\overset{(*)}{P(x)}}_{\text{полином}}\cdot\underbrace{\ln\overbrace{R(x)}^{\text{може и } P(x)}}_{\substack{\text{рац. ф-ја}\\ \text{(или полином)}}}dx = \underbrace{\ln R(x)}_{u}\cdot\underbrace{Q(x)}_{v}-\int\underbrace{\frac{Q(x)\cdot R'(x)}{R(x)}}_{\substack{du\cdot v\\ \text{рац. ф-ја}}}dx$$

$u = \ln R(x)$ /' $\qquad du = \frac{1}{R(x)}\cdot R'(x)dx$

$dv = P(x)dx$ /∫ $\qquad v = \int P(x)dx = \underbrace{Q(x)}_{\text{полином}}$ $\quad(Q'=P)$

пример

$$\int(x+1)\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}dx =$$

$u = \ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$ /' $\qquad du = \frac{\cancel{1+x^2}}{1-x^2}\cdot\frac{-2x(1+\cancel{x^2})-2x(1-\cancel{x^2})}{(1+x^2)^{\cancel{2}}}dx = \frac{-4x}{1-x^4}dx$

$dv = (x+1)dx$ /∫ $\qquad v = \frac{x^2}{2}+x$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}+2\int\underbrace{\frac{x^3+2x^2}{1-x^4}}_{R(x)}dx = \ldots$$

(*) може да буде рац. ф-ја уместо полинома али неће увек радити јер v мора да буде полином а извод од $R(x)$ не мора увек бити рац. ф-ја

* Интеграли облика: $\int P(x)\cdot \operatorname{arctg} R(x)\,dx$

полином, рац. ф-ја

$u = \operatorname{arctg} R(x)\ /'$ $\quad du = \frac{1}{1+(R(x))^2}\cdot R'(x)dx$ (рац. ф-ја)

$dv = P(x)dx\ /\int$ $\quad v = \int P(x)dx = Q(x) \quad (Q' = P)$

$$= Q(x)\cdot \operatorname{arctg} R(x) - \int \underbrace{\frac{Q(x)\cdot R'(x)}{1+(R(x))^2}}_{\text{рац. ф-ја}}dx$$

пример $\int x \operatorname{arctg}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{x^2 dx}{x^2+1}}_{\text{рац. ф-ја}} = \dots$

$u = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ $\quad du = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-1}{x^2}dx = -\frac{dx}{x^2+1}$

$dv = x\,dx$ $\quad v = \frac{x^2}{2}$

* Интеграли тригонометријских ф-ја

$P(u,v) = -7u^6v^2 + 3u^2v^3 - 2u^2 + 3v - 4$ ✓

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

смена: $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$, $\frac{x}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$

$x = 2\operatorname{arctg} t\ /d$

$dx = 2\frac{1}{1+t^2}dt$

$a = \sin\frac{x}{2}$, $b = \cos\frac{x}{2} > 0$

$t = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b\cdot t$

$a^2 + b^2 = 1$

$b^2(t^2+1) = 1$

$b^2 = \frac{1}{t^2+1}$

$b = (+)\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$a = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$\sin x = 2\cdot\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

пример $\int \frac{2-\sin x\cos x\ dx}{\cos^3 x + 4\sin x\cos^2 x} = \int \underbrace{\frac{2-\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3} + 4\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}}}_{\text{рационална ф-ја}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \dots$

1. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ смена: $t = \operatorname{tg} x$ (даје једноставнију рац. ф-ју)

ако важи

2. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ смена: $t = \cos x$

3. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ смена: $t = \sin x$

Пример $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+1} \underset{\substack{t=x^2\\ dt=2x\,dx}}{=} \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + c$

$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2 = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$

* Интеграли неких ирационалних ф-ја:

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \sqrt[n_2]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$$

смена: $\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} = t \,/^n$, где је $n = НЗС(n_1, n_2, \dots, n_k)$

$t^n = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$

$(\gamma t^n-\alpha)x = \beta-\delta t^n$

• $x = \underbrace{\frac{\beta-\delta t^n}{\gamma t^n-\alpha}}_{\text{рац. ф-ја}} \,/d$

• $dx = \underbrace{\left(\frac{\beta-\delta t^n}{\gamma t^n-\alpha}\right)'}_{\text{рац. ф-ја}}dt$

• $\sqrt[n_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} = \underbrace{t^{n/n_1}}_{\text{рац. ф-ја}}$, $n/n_1 \in \mathbb{N}$, $\dots$, $\sqrt[n_k]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} = \underbrace{t^{n/n_k}}_{-\|-}$

јер је n дељиво са n_1

примери

1) $\displaystyle\int\frac{2x^2-3x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx = 2\int\underbrace{\frac{2t^2-3t^3}{1+t}}_{\text{мора да се дели}}t\,dt = \dots$

смена: $t=\sqrt{x} \,/^2$

$t^2 = x \,/d$

$2t\,dt = dx$

2) $\displaystyle\int\frac{x-\sqrt[3]{x+1}}{2\sqrt{x+1}+5}dx = 6\int\frac{t^6-1-t^2}{2t^3+5}t^5dt = \dots$

смена: $t=\sqrt[6]{x+1} \,/^6$

$t^6 = x+1 \,/'$

$6t^5dt = dx$

3) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{2x+1}{3x-7}}dx = -34\int\frac{t\cdot t\,dt}{(3t^2-2)^2} = \dots$

смена: $t=\sqrt{\frac{2x+1}{3x-7}} \,/^2$

$t^2 = \frac{2x+1}{3x-7}$

$(3t^2-2)x = 1+7t^2$

$x = \frac{1+7t^2}{3t^2-2} \,/'$

$dx = \frac{14t(3t^2-2)-6t(1+7t^2)}{(3t^2-2)^2}dt = \frac{-34t\,dt}{(3t^2-2)^2}$

Одређени интеграл

(Риманов интеграл)

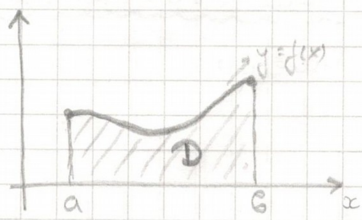
18.10.2018.

неформална дефиниција

* Имамо ф-ју f дефинисану на $[a,b]$. Тк да је $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

$\int_a^b f(x)dx := P(D)$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$



• Шта је површина од D? То је нејасно у овој неформалној дефиницији.

$a < b$ $[a,b]$

* Подела сегмента $[a,b]$: $P := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$$P:\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

• $\mathcal{P}([a,b])$ → скуп свих подела сегмента $[a,b]$

* Параметар (дијаметар) поделе P: $\lambda(P) := \max\{\underbrace{x_1 - x_0}_{\text{дужина првог сегмента}}, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$

$$= \max(x_i - x_{i-1}),\ i \in [1,n]$$

* Скуп истакнутих тачака за поделу P: $\overset{\text{кси}}{\xi} := \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, при чему је $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in [1,n]$

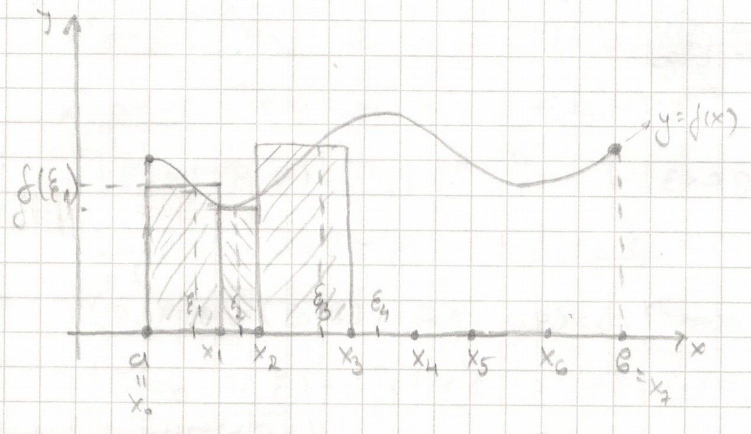
* Подела сегмента $[a,b]$ са истакнутим тачкама: (P, ξ)

* Скуп свих подела са истакнутим тачкама: $\overline{\mathcal{P}}([a,b])$

* Нека је ф-ја f дефинисана на $[a,b]$ и нека је $(P, \xi) \in \overline{\mathcal{P}}([a,b])$.

Интегрална сума: $\boxed{\overset{\text{сигма}}{\sigma}(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}$

ф-је f за поделу P са истакнутим тачкама ξ



Деф (форм.) За ф-ју f кажемо да је интеграбилна (тј. Риман-интеграбилна) на сегменту $[a,b]$ ако постоји $I \in \mathbb{R}$ са следећим својством:

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall \underbrace{(P,\xi)}_{\text{подела са истак. тачкама}} \in \underbrace{\overline{\mathcal{P}}([a,b])}_{\text{скуп свих подела са истак. тачкама}})$ важи $\underbrace{\lambda(P)}_{\text{параметар поделе}}<\delta \Rightarrow \overset{(*)}{|\sigma(f,P,\xi)-}$ ...

растојање

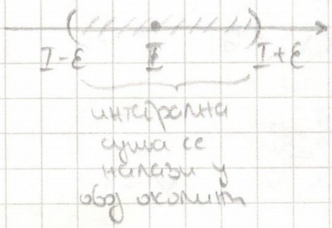
Тада I називамо одређеним (Римановим) интегралом f на сегменту $[a,b]$ и пишемо:

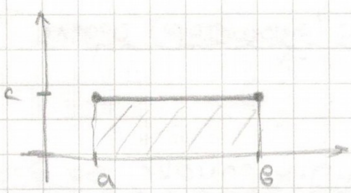
$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx}$$

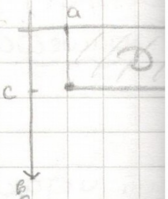
Скуп свих интеграбилних ф-ја на сегменту $[a,b]$ означава...

$$\boxed{\mathcal{R}([a,b])}$$

(*)







$\int_a^b c\,dx = c(b-$ ...

Пример $f(x) = \underset{\text{const ф-ја}}{c}$ за $\forall x \in [a,b]$

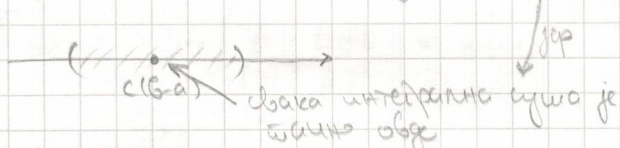
$$\int_a^b f(x)dx \overset{?}{=} \underbrace{c\cdot(b-a)}_{P_{\square}}$$

$(P,\xi)\in\overline{\mathcal{P}}([a,b])$. $\sigma(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}_{\substack{\text{const}\\ =c}}\cdot(x_i-x_{i-1}) \overset{\uparrow}{=} c\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})}_{\text{дужина целог сегмента}} = c\cdot$ ...

дистрибут. шим. у односу на сабирање

Треба да докажемо: $I = c(b-a)$.

→ $\varepsilon>0$ произвољно, $\delta :=$ било који позитиван број.



Став (линеарност Римановог интеграла)

Нека су $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow f+g, \alpha f \in \mathcal{R}([a,b])$ и важе једнакости:

- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$,

- $\int_a^b \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx$.

Доказ

(1) $I_1 := \int_a^b f(x)dx$, $I_2 := \int_a^b g(x)dx$. I_1, I_2 постоје из пп.: $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$.

Треба доказати: $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = I_1 + I_2$ тј. $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)$ т.д.

$(\forall (P,\xi) \in \overline{\mathcal{P}}([a,b]))$ важи $\lambda(P)<\delta \Rightarrow |\sigma(f+g,P,\xi)-(I_1+I_2)|<\varepsilon$.

Нека је $\varepsilon>0$ произвољно. Из $I_1 \Rightarrow (\exists \delta_1>0)(\forall (P,\xi)\in \overline{\mathcal{P}}([a,b]))$ $\lambda(P)<\delta_1 \Rightarrow$

$(*) \Rightarrow |\sigma(f,P,\xi)-I_1|<\frac{\varepsilon}{2}$. Слично, из $I_2 \Rightarrow (\exists \delta_2>0)(\forall (P,\xi)\in\overline{\mathcal{P}}([a,b]))$

$\lambda(P)<\delta_2 \Rightarrow |\sigma(g,P,\xi)-I_2|<\frac{\varepsilon}{2}$.

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Узмимо $(P,\xi)\in\overline{\mathcal{P}}([a,b])$ тако да $\lambda(P)<\delta$ $\begin{smallmatrix}\le\delta_1\\ \le\delta_2\end{smallmatrix}$

$$\sigma(f+g,P,\xi) = \sum_{i=1}^n (f(\xi_i)+g(\xi_i))\cdot(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (f(\xi_i)\cdot(x_i-x_{i-1}) + g(\xi_i)(x_i-x_{i-1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = \sigma(f,P,\xi)+\sigma(g,P,\xi).$$

$$|\sigma(f+g,P,\xi)-(I_1+I_2)| = |\sigma(f,P,\xi)-I_1+\sigma(g,P,\xi)-I_2| \overset{\text{неј.}\Delta}{\le} \underbrace{\underbrace{|\sigma(f,P,\xi)-I_1|}_{\lambda(P)<\delta_1 \Rightarrow <\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|\sigma(g,P,\xi)-I_2|}_{\lambda(P)<\delta_2 \Rightarrow <\frac{\varepsilon}{2}}}_{<\varepsilon}.$$

(2) $\int_a^b \alpha f(x)dx \overset{?}{=} \alpha \cdot I_1$

1° $\alpha=0$: $\int_a^b 0dx \overset{?}{=} 0 \Rightarrow$ важи на основу претходног примера ($f(x)=c$)

2° $\alpha\neq 0$: Треба доказати $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall(P,\xi)\in\overline{\mathcal{P}}([a,b]))$ $\lambda(P)<\delta \Rightarrow$

$|\sigma(\alpha f,P,\xi)-\alpha I_1|<\varepsilon$. Нека је $\varepsilon>0$ произвољно. Знамо да $\exists\delta$

т.д. важи $|\sigma(f,P,\xi)-I_1|<\frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ (из $(*)$), само што је δ уместо δ_1

$(P,\xi)\in\overline{\mathcal{P}}([a,b])$ т.д. $\lambda(P)<\delta$. Треба доказати:

$$|\underbrace{\sigma(\alpha f,P,\xi)}_{=\alpha\cdot\sigma(f,P,\xi)}-\alpha I_1|<\varepsilon \Rightarrow |\alpha|\cdot|\sigma(f,P,\xi)-I_1| < |\alpha|\cdot\frac{\varepsilon}{|\alpha|}=\varepsilon.$$

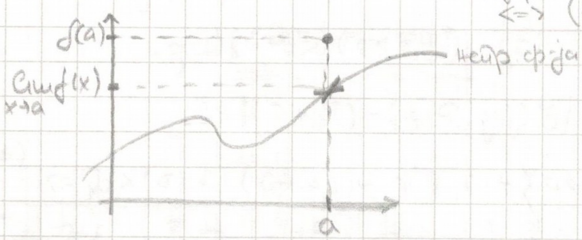
* $\int_a^b : \underset{\text{векторски простор}}{\mathcal{R}([a,b])} \longrightarrow \mathbb{R}$ линеарно пресликавање

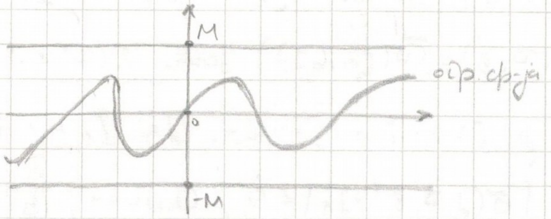
Теорема Нека је f дефинисана на $[a,b]$. Тада важе наредне импликације:

Ако је f непрекидна на $[a,b]$ $\Rightarrow$ f је интеграбилна на $[a,b]$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f је ограничена на $[a,b]$ (обрнуто не мора да важи)

Деф f је непрекидна у тачки $a \overset{деф}{\iff} \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\overset{деф.}{\iff} (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in D_f)\ |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

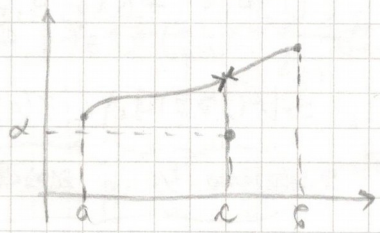




Деф Ф-ја f је ограничена на скупу $A \overset{деф.}{\iff} (\exists M>0)(\forall x\in A)\ |f(x)| \le M$

* $\underset{\text{скуп свих непрекидних}}{C([a,b])} \subset \underset{\text{скуп свих интеграбилних}}{\mathcal{R}([a,b])} \subset \underset{\text{скуп свих ограничених}}{\mathcal{B}([a,b])}$ претходна (ТМА)

Став $f\in\mathcal{R}([a,b])$, $c\in[a,b]$, $\alpha\in\mathbb{R}$. $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x) := \begin{cases} f(x), & x\in[a,b]\setminus\{c\} \\ \alpha, & x=c \end{cases}$

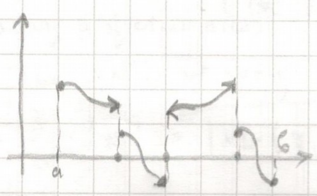


$\Rightarrow g\in\mathcal{R}([a,b])$, $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

- Промена вредности у једној тачки код интеграбилне ф-је то ништа не мења (ако на коначно много места променимо - не мења се)

Став Ако је f ограничена на $[a,b]$ и ако f има коначно много прекида на $[a,b]$, онда је f интеграбилна на $[a,b]$

Пример



има прекиде али је интеграбилна

Став Нека су $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$. Тада важи:

1) $f \cdot g \in \mathcal{R}([a,b])$,
2) $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$,
3) $f \in \mathcal{R}([\alpha,\beta])$.

~ Њутн-Лајбницова формула ~

Теорема Нека је f интеграбилна ф-ја на $[a,b]$ ($f \in \mathcal{R}([a,b])$) и нека је F њена примитивна ф-ја на том сегменту. Тада важи:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Њутн-Лајбницова формула

- $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, $\int f(x)\,dx = F(x) + c$
- $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$ (интеграли извода ф-је f су исти - зависи само од вредности ф-је на границама)

*** Доказ ***

$I := \int_a^b f(x)\,dx$ (из претпоставке). Треба доказати: $I = F(b) - F(a) \iff$

$\iff |\underbrace{F(b) - F(a) - I}_{\text{растојање им је } 0}| = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0)\ |F(b) - F(a) - I| \overset{?}{<} \varepsilon$.

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. $(\exists \delta > 0)$ т.д. $(\forall (P, \xi) \in \overline{\mathcal{P}}([a,b]))\ \lambda(P) < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |\underbrace{\sigma(f, P, \xi)}_{(*)} - I| < \varepsilon$. ((*) хоћемо да докажемо да је $= F(b) - F(a)$).

Нека је $P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $P \in \mathcal{P}([a,b])$ т.д. $\lambda(P) < \delta$.

$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, где је $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ т.д. $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ (Лагранжова тм о ср. вред. на F и $[x_{i-1}, x_i]$)

$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}(x_i - x_{i-1}) \overset{\text{из тма}}{=} \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$ може јер диф. а то јесте јер је примитивна

$= \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(\cancel{x_1}) - F(\underset{a}{x_0}) + \cancel{F(x_2)} - \cancel{F(x_1)} + \dots + F(\underset{b}{x_n}) - \cancel{F(x_{n-1})} =$

$= \underline{F(b) - F(a)}$.

Пример

1) $\displaystyle\int_{-2}^{1} x^5 dx = \underbrace{\frac{x^6}{6}}_{\text{прим. ф-ја}}\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{1^6}{6} - \frac{(-2)^6}{6} = \frac{1}{6} - \frac{64}{6} = \underline{\underline{-\frac{63}{6}}}$

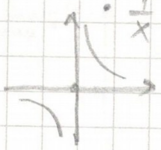
2) $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x \Bigg|_{-\pi/3}^{0} = tg\, 0 - tg(-\pi/3) = 0 - (-\sqrt{3}) = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$

3) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-3}} = \sqrt{x^2-3}\Bigg|_{2}^{3} = \sqrt{3^2-3} - \sqrt{2^2-3} = \underline{\underline{\sqrt{6} - 1}}$

$\displaystyle\cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-3}} = \left(\begin{matrix} x^2-3=t \\ 2x\,dx = dt\end{matrix}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{t^{1/2}}{\cancel{1/2}} + c = \sqrt{t} + c = \underline{\underline{\sqrt{x^2-3} + c}}$

4)! $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x}\ \cancel{=} \ln|x|\Bigg|_{-2}^{1} = \cancel{\ln|1|}^{\,0} - \ln|-2| = \underline{\underline{-\ln 2}}$ не постоји овај интеграл

$\Downarrow$



$\cdot\ \frac{1}{x}$ није деф. на интервалу $\underbrace{(-2, 1)}_{\text{није деф. у } 0}$ т.ј. не важи Њ.Л. ф-ла

није ни ограничена

• Треба проверавати границе интервала!!!

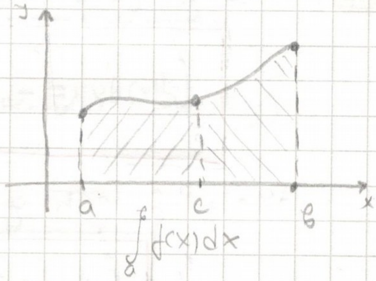
Адитивност и монотоност Римановог интеграла

25.10.2018.

Теорема (Адитивност)

$f \in \mathcal{R}([a,b])$ и $c \in (a,b) \Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$

Доказ



$I := \int_a^b f(x)dx$, $I_1 := \int_a^c f(x)dx$, $I_2 := \int_c^b f(x)dx$.

Треба доказати $I \overset{?}{=} I_1 + I_2$ тј. $(\forall \varepsilon > 0)\, |I - (I_1 + I_2)| < \varepsilon$.

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно.

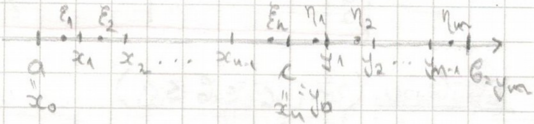
$I_1 \Rightarrow (\exists \delta_1 > 0)(\forall (P_1, \xi) \in \overline{\mathcal{P}}([a,c]))$ важи $\lambda(P_1) < \delta_1 \Rightarrow |\sigma(f, P_1, \xi) - I_1| < \varepsilon/3$,

$I_2 \Rightarrow (\exists \delta_2 > 0)(\forall (P_2, \eta) \in \overline{\mathcal{P}}([c,b]))$ важи $\lambda(P_2) < \delta_2 \Rightarrow |\sigma(f, P_2, \eta) - I_2| < \varepsilon/3$,

$I \Rightarrow (\exists \delta_0 > 0)(\forall (P, \theta) \in \overline{\mathcal{P}}([a,b]))$ важи $\lambda(P) < \delta_0 \Rightarrow |\sigma(f, P, \theta) - I| < \varepsilon/3$.

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_0\}$. Нека је $(P_1, \xi) \in \overline{\mathcal{P}}([a,c])$ т.д.

је $\lambda(P_1) < \delta^{\le \delta_1}$, P_1: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = c$.



Слично, $(P_2, \eta) \in \overline{\mathcal{P}}([c,b])$ т.д. $\lambda(P_2) < \delta^{\le \delta_2}$,

P_2: $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = b$. Посматрамо P као унију $P_1 \cup P_2$:

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = b$. Слично, $\theta := \xi \cup \eta$. Параметар

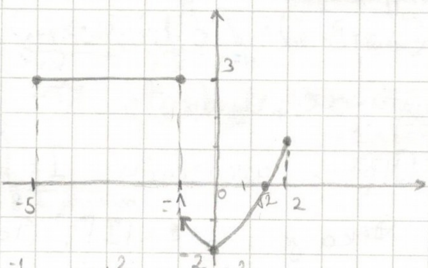
поделе P: $\lambda(P) = \max\{\lambda(P_1), \lambda(P_2)\} < \delta^{\le \delta_0}$. $\underline{\sigma(f, P, \theta)} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) + \sum_{j=1}^{m} f(\eta_j)(y_j - y_{j-1})$

$= \underline{\sigma(f, P_1, \xi) + \sigma(f, P_2, \eta)}$.

$|I - (I_1 + I_2)| = |I - \sigma(f, P, \theta) + \sigma(f, P_1, \xi) - I_1 + \sigma(f, P_2, \eta) - I_2| \le$

$\le \underbrace{|\sigma(f, P, \theta) - I|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|\sigma(f, P_1, \xi) - I_1|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|\sigma(f, P_2, \eta) - I_2|}_{< \varepsilon/3} < \varepsilon$.

Пример



1) $\int_{-5}^{2} f(x)\,dx =$, $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-5, -1] \\ x^2 - 2, & x \in (-1, 2] \end{cases}$

$\Rightarrow \int_{-5}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-5}^{-1} 3\,dx + \int_{-1}^{2} (x^2 - 2)\,dx = 3x\Big|_{-5}^{-1} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} - 2x\Big|_{-1}^{2} =$

$= 3\cdot 4 + \frac{1}{\cancel{3}_1}\cdot \cancel{9}^3 - 2\cdot 3 = \underline{9}$

2) $\int_{-4}^{0}|x^3+27|\,dx = -\int_{-4}^{-3}(x^3+27)\,dx + \int_{-3}^{0}(x^3+27)\,dx =$ $\qquad x^3+27 = \begin{cases} x^3+27, & x\geq -3 \\ -(x^3+27), & x\leq -3\end{cases}$

$= -\frac{x^4}{4}\Big|_{-4}^{-3} - 27x\Big|_{-4}^{-3} + \frac{x^4}{4}\Big|_{-3}^{0} + 27x\Big|_{-3}^{0} = \dots$

Деф Ако је $f\in\mathcal{R}([a,b])$ (интеграбилна), $a<b$:

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx}$$

Ако је f деф. у a, $a\in D_f$:

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx := 0}$$

Ако имамо $a,b,c\in\mathbb{R}$ и $f\in\mathcal{R}([\min\{a,b,c\},\max\{a,b,c\}])$:

(*) $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

провера (за $c\leq b\leq a$)

$\int_c^a = \int_c^b + \int_b^a$ знамо да важи на основу теореме. Треба доказати (*):

$\int_a^b = -\int_b^a = \int_c^b - \int_c^a = \int_a^c + \int_c^b$.

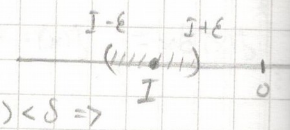
Став $f\in\mathcal{R}([a,b])$, $(\forall x\in[a,b])\ f(x)\geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Доказ

Ако узмемо било коју поделу $(P,\xi)\in\overline{\mathcal{P}}([a,b])$ тада

(*) $\sigma(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{f(\xi_i)}_{\geq 0}\underbrace{(x_i-x_{i-1})}_{>0} \geq 0$. Какву год поделу узели и истакнуте тачке, сума ће бити већа од нуле.

Треба доказати $I=\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. ПпС, $I<0$.



Нека је $0<\varepsilon<|I|$ (растојање од 0). По деф интеграла $(\exists\delta>0)\ \lambda(P)<\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow I-\varepsilon < \sigma(f,P,\xi) < I+\varepsilon < 0$ ↯ (са (*))

Теорема (Монотоност)

$f,g\in\mathcal{R}([a,b])$ и $(\forall x\in[a,b])$ важи $f(x)\le g(x)$, тада:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx}$$

Доказ

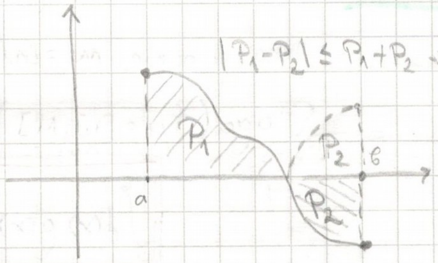
$(\forall x\in[a,b])$ $g(x)-f(x)\ge 0$ (примењујемо прет. став на ову разлику).

$$\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{линеа.}}{=} \int_a^b (g(x)-f(x))\,dx \overset{\text{прет}}{\ge} 0.$$

Став (Основна интегрална неједнакост)

$f\in\mathcal{R}([a,b])$, $a<b$. Тада важи:

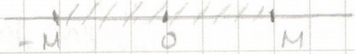
$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx}$$



Доказ

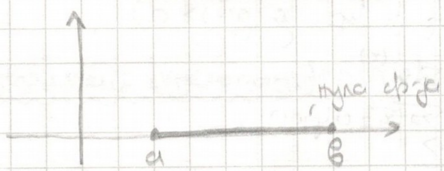
$(\forall x\in[a,b])$ $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$ $/\int$ (по монотоности чува се неједнакост)

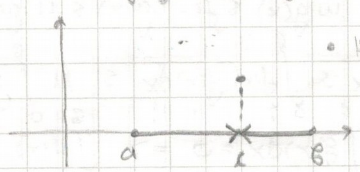
$$\overset{\text{монотон}}{\Longrightarrow} -\int_a^b|f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \underbrace{\underbrace{\int_a^b |f(x)|\,dx}_{\ge 0}}_{\ge 0 = M}$$



$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le M = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

* Интеграл ненегативне ф-је $f(x)\ge 0$ може бити једнак нули:





• Не важи: $\int_a^b f(x)\,dx>0$ без услова да је $f(x)$ непрекидна

(промена у 1 тачки не мења интеграл)

Став Ако је $f\in \overset{\text{интегр.+непр.}}{C}([a,b])$ и $(\forall x\in[a,b])\, f(x)\ge 0$, $(\exists c\in[a,b])\, f(c)>0$, важи:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx > 0}$$

Доказ

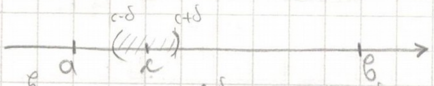
I случај: $c=a$

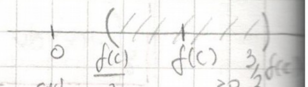
II случај: $c=b$

III случај: $a < c < b$

$$\overbrace{x\in(c-\delta,c+\delta)}\qquad \overbrace{f(x)\in\left(\frac{f(c)}{2},\frac{3}{2}f(c)\right)}$$

f је непр. у $c \Rightarrow (\exists \delta>0)(\forall x\in[a,b])\ |x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(c)| < \dfrac{f(c)}{2}$





$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{адит.}}{=} \underbrace{\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx}_{\geq 0} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx}_{\geq 0} \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \underbrace{f(x)}_{>\frac{f(c)}{2}}\,dx \overset{\text{монот.}}{\geq} \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2}\,dx = \frac{f(c)}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}\delta > 0$$

Прва теорема о средњој вредности интегралног рачуна

25. 10. 2018.

Теорема Нека имамо $f,g\in \mathcal{R}([a,b])$ и нека важи да $(\forall x\in[a,b])\ g(x)\geq 0$, нека је даље $m=\inf f(x)$ (за $x\in[a,b]$), а $M=\sup f(x)$ (за $x\in[a,b]$).

Тада $(\exists \mu\in[m,M])$ са својством:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu\cdot\int_a^b g(x)\,dx}$$

Шта више, ако је f још и непрекидна на $[a,b]$, онда $(\exists c\in[a,b])$ са својством:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx}$$

Доказ

(1) $(\forall x\in[a,b])$ важи $m\leq f(x)\leq M\ /\cdot g(x)$ (јер је $m=\inf f(x)$, а $M=\sup f(x)$).

$\Rightarrow (\forall x\in[a,b])\quad m\,g(x)\leq f(x)\cdot g(x)\leq M\cdot g(x)\ /\int_a^b$ (уреду је јер је $g(x)\geq 0$)

$\Rightarrow\ m\cdot\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx \leq M\cdot\int_a^b g(x)\,dx\ /:\underbrace{\int_a^b g(x)\,dx}_{>0\text{ (за II случај)}}{}^{(*)}$ (монотоност + линеарност)

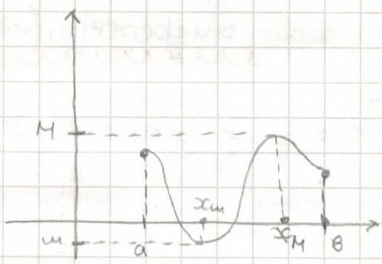
I случај: $\int_a^b g(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu\in[m,M]$ је било која вредност јер је $\mu\underbrace{\int_a^b g(x)\,dx}_{=0} = 0$.

II случај: $\int_a^b g(x)\,dx > 0$.

$$(*)\Rightarrow\ m\leq \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}}_{=\mu}\leq M$$

(2) из непрекидности и Вајерштрасове теореме



$\Rightarrow \exists (x_m, x_M \in [a,b])\ f(x_m) = m,\ f(x_M) = M$

(ф-ја на сегменту $[a,b]$ достиже inf и sup)

Из Коши-Болцанове теореме и $\mu \in [m,M] \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists c \in [a,b])\ f(c) = \mu$ (достиже се свака тачка између m и M).

μ из првог дела доказа можемо да заменимо са $f(c)$, $c \in [a,b]$.

Напомена: $(\forall x \in [a,b])\ g(x) \geq 0$; овај услов може да се замени условом $(\forall x \in [a,b])\ g(x) \leq 0$ и даље важи теорема:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\underbrace{|g(x)|}_{\geq 0}\,dx = -\mu\int_a^b |g(x)|\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

Последица: Нека је $f \in \mathcal{R}([a,b])$, $m = \inf f(x)$, а $M = \sup f(x)$ за $x \in [a,b]$. Тада: $\exists \mu \in [m,M]$ т.д.:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)}$$

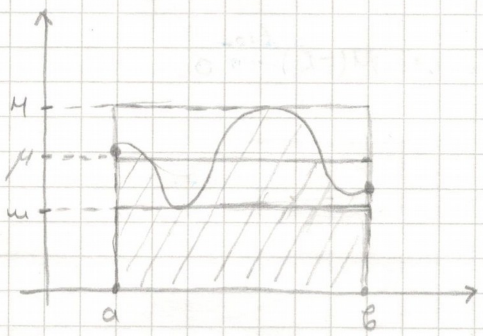
Шта више, ако је f непр. на $[a,b]$, онда $\exists c \in [a,b]$ са својством:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)}$$

Доказ

Из теореме $\rightarrow g(x) \equiv 1 \Rightarrow \int_a^b 1\,dx = x\Big|_a^b = b-a.$

* Геометријска интерпретација:

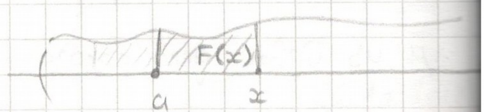


25.10.201

Диференцирање и интеграција

* Нека је f дефинисано на интервалу A и нп да је f интеграбилна на сваком сегменту садржаном у интервалу A $\left((\forall [\alpha,\beta]\subseteq A)\, f\in \mathcal{R}([\alpha,\beta])\right)$ и нека фиксирамо тачку $a\in A$.

$$F: A\to\mathbb{R}, \quad \boxed{F(x) := \int_a^x f(t)\,dt, \ x\in A}$$



- $F(a) = 0$
- x може да буде и мање од a

Став F је непрекидна на интервалу A.

Доказ

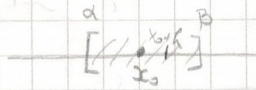
Произвољно $x_0\in A$. Треба доказати да је F непр. у x_0. $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} F(x) \overset{?}{=} F(x_0)$

$$\underset{x=x_0+h}{\Leftrightarrow} \lim_{h\to 0} F(x_0+h) \overset{?}{=} F(x_0) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\left(F(x_0+h)-F(x_0)\right) \overset{?}{=} 0.$$

$h\to 0+$

- $\lim\limits_{h\to 0+}\left(F(x_0+h)-F(x_0)\right)\overset{?}{=}0$. Фиксирамо $h>0$. Посматрамо $0\le |F(x_0+h)-F(x_0)|$

$$= \left|\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right| \overset{\text{адит.}}{=} \Bigg|\underset{(\heartsuit)}{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}\Bigg| \le \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)|\,dt \quad (*)$$



$x_0\in[\alpha,\beta]\subseteq A$

f интеграб. $\Rightarrow$ f је ограничена на $[\alpha,\beta]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists M>0)(\forall t\in[\alpha,\beta])\ |f(t)|\le M$

$$\Rightarrow (*) \int_{x_0}^{x_0+h} \underbrace{|f(t)|}_{\le M}\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{за довољно} \\ \text{мало } h}}{\le} \int_{x_0}^{x_0+h} M\,dt = M\cdot h \xrightarrow{h\to 0+} 0$$

$$\Rightarrow \quad 0\le \underbrace{|F(x_0+h)-F(x_0)|}_{=0} = 0$$

- $\underline{h\to 0-}$. $h<0$. $(\heartsuit) \ldots \le \int_{x_0+h}^{x_0} |f(t)|\,dt \ \ldots \ M(-h) \xrightarrow{h\to 0-} 0$

(калкулуса)

Теорема (Основна теорема диференцијалног рачуна)

Ако је f непрекидна ф-ја на интервалу A и ако је $a \in A$, онда је ф-ја $F : A \to \mathbb{R}$ дефинисана на сл. начин: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in A$, диференцијабилна на интервалу A и $(\forall x \in A)\ F'(x) = f(x)$.

(F је једна примитивна ф-ја ф-је f)

Доказ

$x_0 \in A$ и треба доказати да $F'(x_0) = f(x_0)$, тј. да је

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

• $h \to 0_+$. $h > 0$: $\frac{1}{h}\left(F(x_0+h) - F(x_0)\right) \xrightarrow{h \to 0_+} f(x_0)$?

$$\frac{1}{h}\left(F(x_0+h) - F(x_0)\right) \underset{\text{из прет. ТМЕ}}{=} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \underset{\substack{\text{из Последице} \\ \exists c_h \in [x_0, x_0+h]}}{=\!=\!=} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot f(c_h)\cancel{(x_0+h-x_0)} = f(c_h) \xrightarrow{h \to 0_+} f(x_0).$$

$h \to 0_+$: $x_0 \le c_h \le x_0 + h$, $c_h \to x_0$ (важи због непрекидности)

• $h \to 0_-$. $h < 0$: разлика је што је $c_h \in [x_0+h, x_0]$.

Последица Свака ф-ја непрекидна на неком интервалу има примитивну ф-ју на том интервалу.

Пример

$\int \sin x^2\,dx$ не може да се израчуна, али сигурно има примитивну $\int_0^x \sin t^2\,dt$ па и постоји неодр. интеграл.

(не може да се представи преко елементарних)

Смена променљиве и парцијална интеграција
(у одређеном интегралу)

01.11.20

Теорема (о смени променљиве).

Нека је f непр. на $[a,b]$ ($f \in C([a,b])$), нека је $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ глатка ф-ја (φ је диференцијабилна и φ' непрекидна ф-ја) тако да је: $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Тада је:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt}$$

$x=\varphi(t)$

• X мора да се изр... преко t (ф-ја је ...

Доказ

Из претх. последице $\Rightarrow$ F примитивна ф-ја ф-је f на $[a,b]$.

$\int_a^b f(x)\,dx \xlongequal{\text{Њутн Лајбниц}} F(b)-F(a)$. Треба нам примитивна ф-ја за подинтеграл... са десне стр. једнакости да бисмо могли да на њу применимо Њутн-Лајбницову формулу и то је: $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))$...

$\longrightarrow \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \xlongequal{\text{Њутн Лајбниц}} F(\underbrace{\varphi(\beta)}_{b}) - F(\underbrace{\varphi(\alpha)}_{a}) \xlongequal{\text{из прет.}} F(b)-F(a)$.

Напомена $\varphi(\alpha)=b$, $\varphi(\beta)=a$: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$

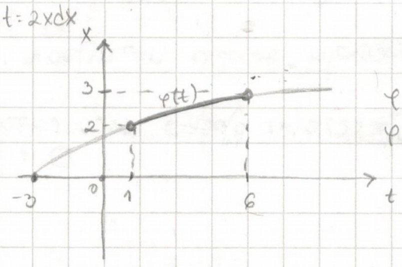
Пример1 $\int_2^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-3}} =$

$t=x^2-3$, $x^2=t+3$, $dt=2x\,dx$

$\varphi:[1,6]\to[2,3]$

$x=\varphi(t):=\sqrt{t+3}$

$\varphi'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t+3}}$



$\varphi(1)=2$
$\varphi(6)=3$

• φ је диф. на $[1,6]$ и њен извод је непр. $\Rightarrow$ φ је глатка $\Rightarrow$ можемо да применимо теорему

$= \int_1^6 \frac{\cancel{\sqrt{t+3}}}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2\cancel{\sqrt{t+3}}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{+1/2}}{+1/2}\Big|_1^6 = \sqrt{6}-1$

Пример2 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(a>0)$ $= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\underbrace{a^2-a^2\sin^2 t}_{a^2\cos^2 t}}\cdot a\cos t\,dt = a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt =$

$|\cos t|$ због услова је: $\cos t$

$\varphi(t)=x=a\sin t$

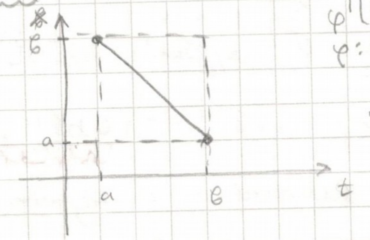
$\varphi:[0,\frac{\pi}{2}]\to[0,a]$

$\varphi'(t)=a\cos t$

$\Rightarrow \varphi$ је глатка

пример3 $f\in C([a,b]) \Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx}$

смена: $x=a+b-t=\varphi(t)$



$\varphi'(t)=1$

$\varphi:[a,b]\to[a,b]$

$\varphi(a)=b,\ \varphi(b)=a$

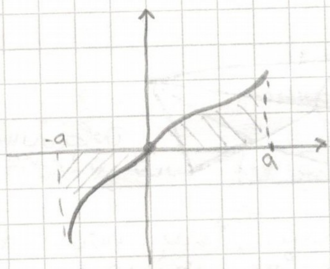
важи наопачке

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(\underbrace{a+b-t}_{\varphi(t)})\cdot(-1)\,dt = \int_a^b f(a+b-t)\,dt = \int_a^b (a+b-x)\,dx$$

(за нез. пром. је употребљено друго слово, али то је исто јер се свеједно ода мењају вредности граница на крају)

пример4 $a>0$, $f\in C([-a,a])$ (сим. сегмент), f непарна на $[-a,a]$ (тј. $\forall x\in[-a,a]\ f(-x)=-f(x)$)

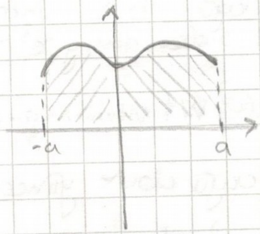
$$\Rightarrow \boxed{\int_{-a}^a f(x)dx=0}$$



$$\int_{-a}^a f(x)dx \overset{\text{претх. пример}}{=} \int_{-a}^a f(-x)dx \overset{\text{непарна}}{=} -\int_{-a}^a f(x)dx .$$

пример5 $a>0$, $f\in C([-a,a])$, f парна на $[-a,a]$ ($\forall x\in[-a,a]\ f(-x)=f(x)$).

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx}$$



$$\int_{-a}^a f(x)dx = \underbrace{\int_{-a}^0 f(x)dx} + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx,$$

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \begin{pmatrix} x=-t \\ dx=-dt\end{pmatrix} = -\int_a^0 \underbrace{f(-t)}_{\text{парна}}dt = \int_0^a f(t)\,dt$$

* Примери 3,4,5 важе иако фја није непрекидна (довољно је да је f интеграбилна) $f\in\mathcal{R}([a,b])$

Теорема (Парцијална интеграција)

Ако су u, v глатке фје на $[a,b]$, онда је:

$$\boxed{\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx}$$

Доказ

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \ \Big/\int_a^b \Rightarrow \int_a^b (u(x)\cdot v(x))'dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b u(x)v'(x)dx .$$

Пример $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx = \left(\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=e^{-x}dx & v=\int e^{-x}dx=-e^{-x}\end{matrix}\right) = -xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x}dx =$

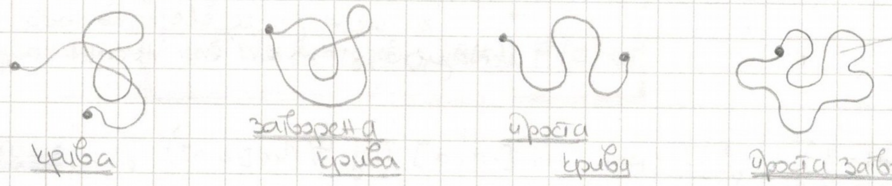
$$= -\ln 2\cdot \underbrace{e^{-\ln 2}}_{1/2} - e^{-x}\Big|_0^{\ln 2} = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}(1-\ln 2) > 0$$

01.11.2

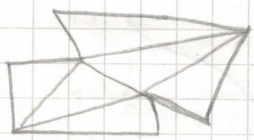
Површина равне фигуре

Деф Равна фигура је део равни ограничен простом затвореном кривом

*

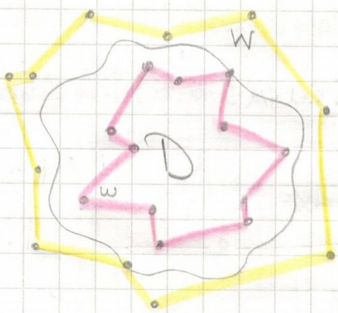


*



површина многоуглова $= \sum P_\Delta$

* D равна фигура:



• O_D - скуп свих описаних многоуглова око ове фигуре

$O_D = \{W \mid W \text{ многоугао}, D \subseteq W\}$

• U_D - скуп свих уписаних многоуглова

$U_D = \{w \mid w \text{ многоугао}, w \subseteq D\}$

• Нека је $W_0 \in O_D$ један описан многоугао (привремено га фиксирамо). Тад

$(\forall w \in U_D)\quad w \subseteq D \subseteq W \Rightarrow (\forall w \in U_D)\ P(w) \le P(W_0)$

$\Rightarrow$ Скуп $\{P(w) \mid w \in U_D\}$ је ограничен одозго и $P(W_0)$ је једно не
свих уп. многоуглова
горње ограничење

$\Rightarrow \boxed{\underline{P}(D) := \sup_{w \in U_D} P(w)}$ унутрашња површина, $\underline{P}(D) \le P(W_0)$
најмање горње огр.

– због произвољности W_0 важи:

$(\forall W \in O_D)\quad \underline{P}(D) \le P(W)$

$\Rightarrow$ Скуп $\{P(W) \mid W \in O_D\}$ је ограничен одоздо и $\underline{P}(D)$ је једно доње огр
овог скупа

$\Rightarrow$ $\boxed{\overline{P}(D) := \inf\limits_{W \in O_D} P(W)}$ спољашња површина , $\underline{P}(D) \le \overline{P}(D) \le P(W_0)$ највеће горње ограничење

Деф Равна фигура D је мерљива (тј. да има површину) ако је $\underline{P}(D) = \overline{P}(D)$. (не морају увек да буду једнаке) -Пеанове криве-

Тада се дефинише површина равне фигуре D ($P(D)$) као:

$$\boxed{P(D) := \underline{P}(D) = \overline{P}(D)}$$

Лема Равна фигура D јесте мерљива акко $(\forall \varepsilon > 0)(\exists w_0 \in U_D)(\exists W_0 \in O_D)$ т.д. $P(W_0) - P(w_0) < \varepsilon$. (разликују се за мање од ε).

Доказ

$\boxed{\Rightarrow}$ Пп да је фигура мерљива $\overset{def.}{\Rightarrow} P(D) = \underline{P}(D) = \overline{P}(D)$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. $P(D)$ је највеће доње ограничење па ако додамо $\varepsilon/2$: $P(D) + \varepsilon/2$ више није доње ограничење скупа $\{P(W) \mid W \in O_D\} \Rightarrow \exists$ елемент овог скупа, $W_0 \in O_D$, тако да је: $P(W_0) < P(D) + \varepsilon/2$.

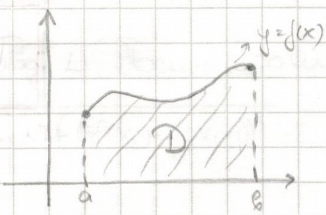
Слично, $P(D)$ је најмање горње ограничење па $P(D) - \varepsilon/2$ није више горње ограничење скупа $\{P(w) \mid w \in U_D\} \Rightarrow (\exists w_0 \in U_D)$ т.д. $P(w_0) > P(D) - \varepsilon/2$.

$\Rightarrow P(W_0) - P(w_0) < \cancel{P(D)} + \varepsilon/2 - \cancel{P(D)} + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пп да важи $\underbrace{(\forall \varepsilon > 0)(\exists w_0 \in U_D)(\exists W_0 \in O_D)}_{(*)}$ т.д. $\underbrace{P(W_0) - P(w_0) < \varepsilon}_{(*)}$. Треба доказати да је $\underline{P}(D) = \overline{P}(D)$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Треба доказати да је $\underbrace{\overline{P}(D) - \underline{P}(D)}_{\ge 0 \text{ јер } \underline{P}(D) \le \overline{P}(D)} < \varepsilon$. Из услова $(*)$ следи: $\overline{P}(D) - \underline{P}(D) < \varepsilon$, јер је $\underbrace{\overline{P}(D) \le P(W_0)}_{\text{инфимум}}$, слично $\underbrace{\underline{P}(D) \ge P(w_0)}_{\text{супремум}} \Rightarrow \overline{P}(D) - \underline{P}(D) \le P(W_0) - P(w_0) < \varepsilon$.

Теорема Нека је f непр на $[a,b]$ и $(\forall x \in [a,b])\ f(x) \ge 0$. Нека је равна фигура: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$. Тада је ова фигура D мерљива и важи да је:

$$\boxed{P(D) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

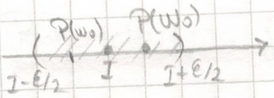


Доказ

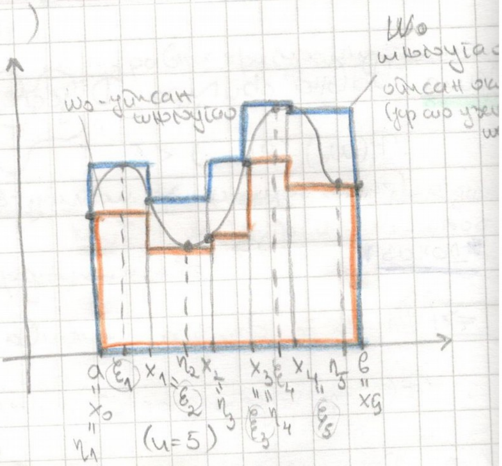
Треба доказати да је D мерљива. Нека је $\varepsilon>0$ произвољно. Нека је $I := \int_a^b f(x)\,dx$. Из дефиниције интеграла $\Rightarrow (\exists\delta>0)(\forall (P,\xi)\in \mathcal{P}([a,b]))$

$\lambda(P)<\delta \Rightarrow |\sigma(f,P,\xi)-I|<\varepsilon/2$.

Бирамо поделу P т.д. важи $\underset{(*)}{\lambda(P)<\delta}$: $P: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$.



(идеја је да истакнуте тачке изаберемо на 2 начина:
I интеграл одговара $P(w_0)$
II интеграл одговара $P(W_0)$)



Бирамо истакнуте тачке:

- $1\le i\le n$: $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ т.д. $f(\xi_i)=\max\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)$

  (има sup јер је непрекидна)

$(1) \Rightarrow \sigma(f,P,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = P(W_0),\ W_0\in O_D$

Слично, $\eta_i\in[x_{i-1},x_i]$ т.д. $f(\eta_i)=\min\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)$

$(2) \Rightarrow \sigma(f,P,\eta)=\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)(x_i-x_{i-1}) = P(w_0),\ w_0\in U_D$

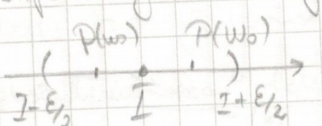
$\Rightarrow$ из (1) и $(*)$: $|P(W_0)-I|<\varepsilon/2$

$\Rightarrow$ из (2) и $(*)$: $|P(w_0)-I|<\varepsilon/2$

$\Rightarrow |P(W_0)-P(w_0)| \overset{\pm I,\ \text{неј. }\Delta}{\le} \underbrace{|P(W_0)-I|}_{<\varepsilon/2}+\underbrace{|P(w_0)-I|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon$

На основу претходне леме $\Rightarrow$ D је мерљива. тј. $\exists P(D)$.

Треба доказати да је $P(D)=I$. Нека је $\varepsilon>0$ произвољно. $|P(D)-I| \overset{?}{<} \varepsilon$



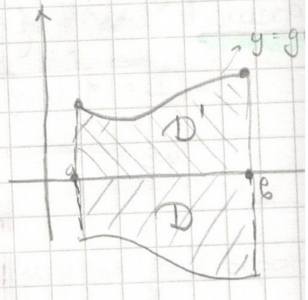
(из претходног дела).

$I-\varepsilon/2 < P(w_0) \underset{\text{јер је sup свих } P(w_0)}{\le} P(D) \underset{\text{јер је inf свих } P(W_0)}{\le} P(W_0) < I+\varepsilon/2 \Rightarrow P(D)$ пада и интервал $(I-\varepsilon/2, \ldots$

$\Rightarrow |P(D)-I| < \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Последица Ако је f непр. на $[a,b]$ и $(\forall x\in[a,b])\ f(x)\le 0$. Нека је $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ f(x)\le y\le 0\}$. Тада је D мерљива и важи:

$$\boxed{P(D) = -\int_a^b f(x)\,dx}$$



Доказ (директно из претходне теореме)

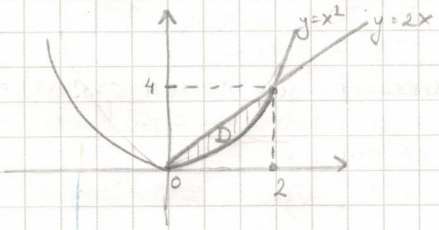
Дефинишемо $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:=-f(x)\geq 0$ (добија се фигура симетрична у односу на x-осу и једнака D).

$$D' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq g(x)\}$$

$$\overset{\text{истие}}{\Rightarrow} P(D') = \int_a^b g(x)\,dx = P(D) = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

пример

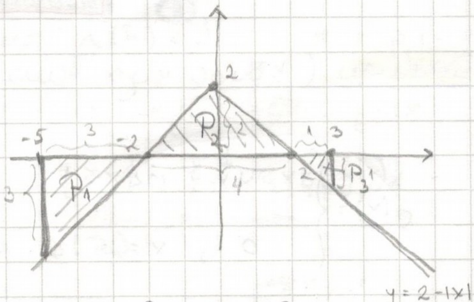
1) Одредити $P(D)$ где је D део равни ограничен кривама $y=x^2$ и $y=2x$.



$x^2 = 2x \Rightarrow x=2$

$$P(D) = \int_0^2 2x\,dx - \int_0^2 x^2\,dx = x^2\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 4-\frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

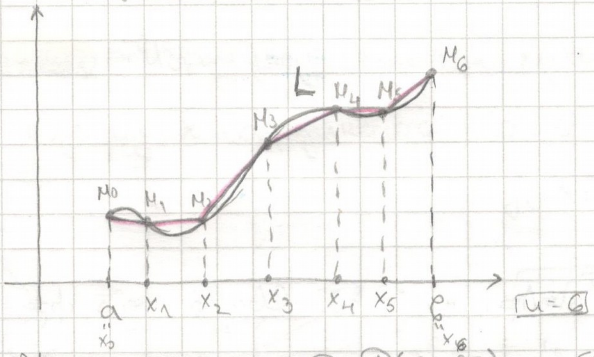
2) $$\int_{-5}^{3}(2-|x|)\,dx = -P_1+P_2-P_3 = -\frac{9}{2}+4-\frac{1}{2} = -1$$

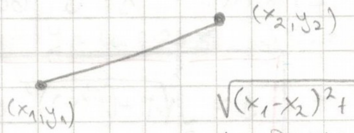


08.11.2018.

Дужина криве

* $f\in C([a,b])$ непрекидна, $L := \{(x,f(x))\in\mathbb{R}^2 \mid a\leq x\leq b\}$ крива





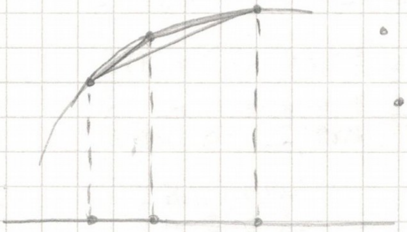
$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
растојање 2 тачке у равни

- Уочимо поделу $P\in\mathcal{P}([a,b])$ и поделне тачке P: $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$.

– За $i\in[0,n]$ уочимо тачку $M_i(x_i,f(x_i))\in L$ која припада кривој L. Посматрамо дужину полигоналне линије $s(P) := \sum_{i=1}^{n}\underbrace{|M_{i-1}M_i|}_{\text{растојање двеју тачака}} = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$

горње огр. (sup)

* Дужина криве s мора бити већа од $s(P)$, $s \geq s(P)$, $\forall P\in\mathcal{P}([a,b])$ за сваку поделу.



• Кад уситнимо поделу P $s(P)$ расте.

• Што је подела ситнија то полигонална линија више личи на нашу криву.

Деф Кажемо да крива L има дужину (тј. да се може исправити) ако је скуп $\{ s(P) \mid P\in\mathcal{P}([a,b])\}$ ограничен одозго.

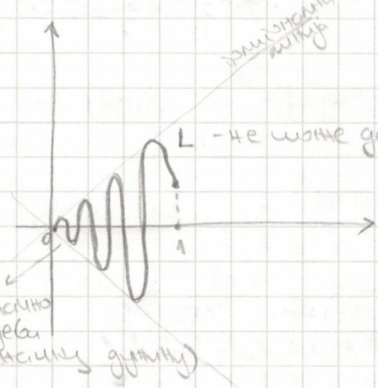
• крива не мора имати дужину (тј. скуп не мора бити ограничен одозго).

Тада дужину криве L дефинишемо на сл. начин:

$$\boxed{s := \sup_{P\in\mathcal{P}([a,b])} s(P)}$$

Пример (крива која нема дужину)

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



Теорема Ако је f глатка на $[a,b]$, онда крива $L = \{(x,f(x))\in\mathbb{R}^2 \mid a\leq x\leq b\}$ има дужину s и важи:

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

Доказ

f глатка $\Rightarrow$ f' непр. на $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\sqrt{1+f'^2}$ непр. на $[a,b]$. Свака непр. ф-ја је интеграбилна $\Rightarrow$ $\exists \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$. $\Rightarrow$ f' је ограничена на $[a,b]$

$\mathcal{C}([a,b]) \subset \mathcal{R}([a,b]) \subset \mathcal{B}([a,b])$

$\Rightarrow (\exists M>0)(\forall x\in[a,b]) \sqrt{1+(f'(x))^2} \leq M$. (огр. одозго)

Треба да докажемо да крива има дужину и да је то овај инте-

Узмимо произвољну поделу $P\in\mathcal{P}([a,b])$ и посматрамо $s(P)$.

$$s(P)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\Big(\underbrace{\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}}_{\text{Лагранжова теорема на } f \text{ и } [x_{i-1},x_i]}\Big)^2}\cdot\underbrace{(x_i-x_{i-1})}_{>0}=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}}_{\le M}\cdot(x_i-x_{i-1})\le$$

$\exists\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$ т.д. $=f'(\xi_i)$ (f је диференц.)

$\le M\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\underline{M(b-a)}$ једно горње ограничење скупа из дефиниције

$\Rightarrow$ скуп је огр. одозго $\Rightarrow$ крива L има дужину.

Треба доказати да је $s=\int_a^b\underbrace{\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}_{=I}$ $\left(s=\sup\limits_{P\in\mathcal{P}([a,b])}s(P)\right)$, тј. $(\forall\varepsilon>0)\ |s-I|<\varepsilon$. Нека је $\varepsilon>0$ произвољно. По деф. интеграла

$\Rightarrow (\exists\delta>0)(\forall(P,\xi)\in\overline{\mathcal{P}}([a,b]))\ \lambda(P)<\delta\overset{(*)}{\Rightarrow}|\sigma(\sqrt{1+f'^2},P,\xi)-I|<\varepsilon/2$.

Посматрамо број $s-\varepsilon/2<s\Rightarrow$ пошто је s sup, $s-\varepsilon/2$ није горње ограничење скупа $\{s(P)\mid P\in\mathcal{P}([a,b])\}\Rightarrow\exists$ елемент скупа који је већи од $s-\varepsilon/2$ тј. постоји $P\in\mathcal{P}([a,b])$ т.д. $s(P)\overset{(1)}{>}s-\varepsilon/2$. $\lambda(P)\overset{?}{<}\delta$.

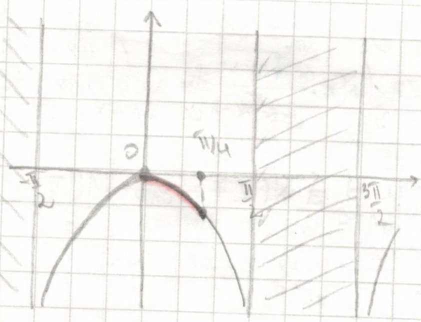
Уситњавањем поделе можемо да добијемо (да бити) $\lambda(P)\overset{(2)}{<}\delta$, а не нарушавамо неједнакости $s(P)>s-\varepsilon/2$! (тражимо да важе обе неједнакости за ову поделу) Бирамо скуп истакнутих тачака помоћу Лагранжове теореме ($\xi:=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$):

$$\sigma(\sqrt{1+f'^2},P,\xi)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\cdot(x_i-x_{i-1})=s(P).$$

$$\Rightarrow|s-I|=|s-s(P)+s(P)-I|=|s-s(P)+\sigma(\sqrt{1+f'^2},P,\xi)-I|\overset{\text{нej.}\Delta}{\le}$$

$$\le\underbrace{|s-s(P)|}_{\substack{\ge 0 \text{ јер је } s=\sup s(P)\\ <\varepsilon/2\ (1)}}+\underbrace{|\sigma(\sqrt{1+f'^2},P,\xi)-I|}_{\substack{<\varepsilon/2\\ \text{из } (*) \text{ и } (2)}}<\varepsilon.$$

Пример Израчунај дужину лука криве $y=\ln\cos x$ између тачака чије су x координате 0 и $\pi/4$.



$f(x)=\ln\cos x \qquad f'(x)=\frac{1}{\cos x}(-\sin x)=-\operatorname{tg}x$

$$\sqrt{1+(f'(x))^2}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}=\sqrt{\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}}\underset{\cos x>0}{=}\frac{1}{\cos x}$$

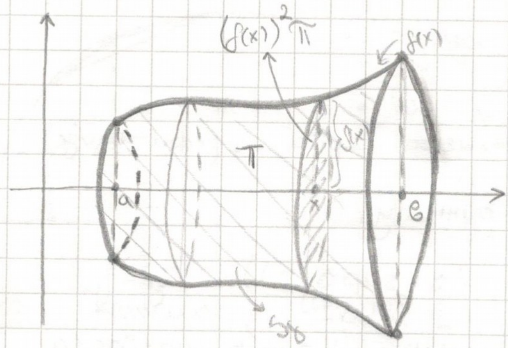
$$s=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos x}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos x\,dx}{\underbrace{\cos^2x}_{1-\sin^2x}}=\left(\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos x\,dx=dt\end{matrix}\right)=$$

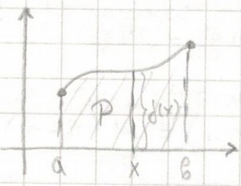
$$=\int_0^{\sqrt2/2}\frac{dt}{1-t^2}=\frac12\int_0^{\sqrt2/2}\frac{1-t+1+t}{(1-t)(1+t)}dt=\frac12\left(\ln|1+t|-\ln|1-t|\right)\Big|_0^{\sqrt2/2}=\dots$$

Запремина и површина ротационог тела

08. 11. 2018.

* f је непр. на $[a,b]$





$$P=\int_a^b f(x)\,dx$$

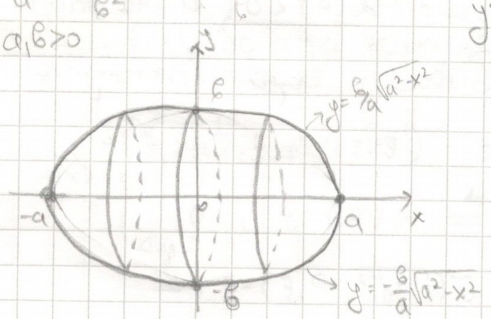
S_f - ротациона површ

Теорема Ако је f непр., тада: $\boxed{V(T)=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx}$

интеграл површина кругова

Пример Израчунати V елипсоида који настаје ротацијом елипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ око x-осе.
$a,b>0$

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \qquad y=\overset{\text{лакше}}{(\pm)}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$



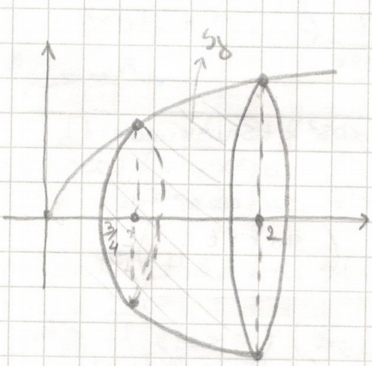
$$V=\pi\underbrace{\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx}_{\text{парна ф-ја}}=\frac{\pi b^2}{a^2}\cdot 2\int_0^a (a^2-x^2)\,dx=$$

$$=\frac{2b^2\pi}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{4}{3}ab^2\pi$$

Теорема Ако је f глатка на $[a,b]$, онда је: $\boxed{P(S_f)=2\pi\int_a^b |f(x)|\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$

Пример Израчунај $P(S_f)$ која настаје ротацијом криве $y=\sqrt{x}$, $\frac{3}{4}\le x\le 2$, око x-осе.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$



$$P(S_f)=2\pi\int_{3/4}^{2}\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx=\cancel{2}\pi\int_{3/4}^{2}\cancel{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}}{\cancel{2\sqrt{x}}}\,dx=\left(\begin{matrix}4x+\ldots\\4dx\ldots\end{matrix}\right.$$

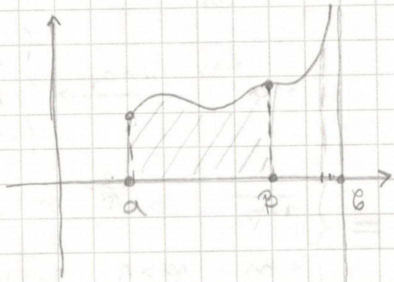
$$=\frac{1}{4}\pi\int_4^9\sqrt{t}\,dt=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{3/2}\Big|_4^9=\frac{\pi}{6}\cdot(27-8)=\frac{19\pi}{6}$$

08.11.2018.

Несвојствени интеграли

Деф Нека су $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ и нека је f дефинисана на $[a,b)$. Нека су за $(\forall \beta \in (a,b))$ испуњени сл. услови:

- $f \in \mathcal{R}([a,\beta])$
- f неограничена на (β, b)



Несвојствени интеграл ф-је f на $[a,b)$, у ознаци $\int_a^b f(x)dx$, дефинишемо на сл. начин:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \lim_{\beta \to b_-} \int_a^\beta f(x)dx}$$ површина неограниченог дела равни (ако она је коначна (конвергенција))

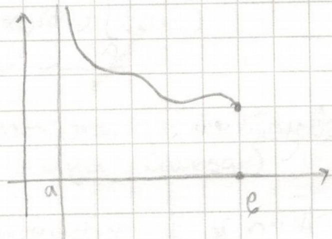
Риманов инт.

* Сингуларитет интеграла $\leftarrow b$

* $\int_a^b f(x)dx$ конвергира ако $\lim_{\beta\to b_-}\int_a^\beta f(x)dx$ постоји и коначан је.
(у супротном дивергира)

Деф Слично, ако је f деф. на $(a,b]$ и $(\forall \alpha \in (a,b))$ $f \in \mathcal{R}([\alpha, b])$ и f неогр. на (a,α), тада је:

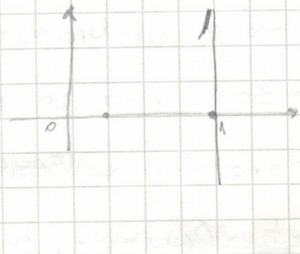
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \lim_{\alpha \to a_+} \int_\alpha^b f(x)dx}$$



* a - сингуларитет * слично за конвергенцију

Примери

1) Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ и у случају да конвергира, израчунати га.



$$\lim_{x\to 1_-} \frac{\overbrace{(\arcsin x)}^{\to \pi/2}}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\to 0_+}} = +\infty$$

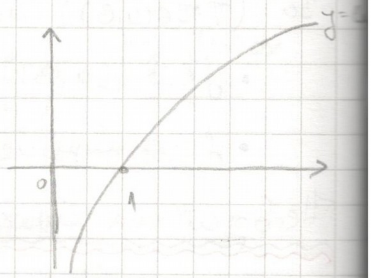
$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\beta\to 1_-}\int_0^\beta \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{pmatrix} t=\arcsin x \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{\beta\to 1_-}\int_0^{\arcsin\beta} t\,dt = \lim_{\beta\to 1_-}\frac{(\arcsin\beta)^2}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$ (конвергира)

2) У зависности од $p>0$ испитати конвергенцију интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\underbrace{x^p}_{\to 0+}} = +\infty$. $\quad \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\alpha\to 0+}\int_\alpha^1 \frac{dx}{x^p} \overset{p\neq 1}{=} \lim_{\alpha\to 0+} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_\alpha^1 = \lim_{\alpha\to 0+}\left(\frac{1}{1-p} - \frac{\alpha^{1-p}}{1-p}\right) =$

• $\alpha^{1-p} \xrightarrow{\alpha\to 0+} \begin{cases} 0, & 1-p>0 \\ 1, & 1-p=0 \\ +\infty, & 1-p<0 \end{cases}$



$= \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & p<1 \text{ конвергира} \\ +\infty, & p>1 \text{ дивергира} \end{cases}$

• за $p=1$: $\quad \lim_{\alpha\to 0+} \ln|x|\Big|_\alpha^1 = \lim_{\alpha\to 0+}(-\underbrace{\ln\alpha}_{-\infty}) = +\infty$ дивергира

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ конвергира акко $p<1$. (из напомене $\Rightarrow$ важи и за било ко

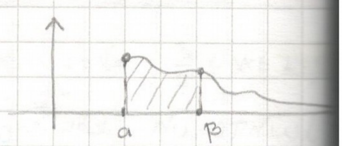
Напомена Ако имамо Риман интеграбилну ф-ју $f\in\mathcal{R}([a,b])$ и $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(\beta):=\int_a^\beta f(x)dx$, F је непр. на $[a,b]$. Тада је Риман својствени интеграл:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = \lim_{\beta\to b-} F(\beta) = \lim_{\beta\to b-}\int_a^\beta f(x)dx$$

$\Rightarrow$ својствени интеграли конвергирају

Деф Нека је f дефинисана на $[a,+\infty)$ и нека је $(\forall\beta>a)\, f\in\mathcal{R}([a,\beta])$ (не мора бити ограничена). Тада је:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{\beta\to+\infty}\int_a^\beta f(x)dx}$$



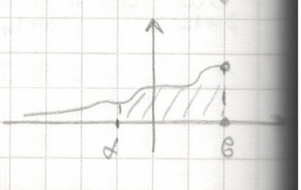
• $+\infty$ је сингуларитет интеграла

• важи исто за конвергенцију

• ако lim конвергира, површина је коначна

Деф Слично, ако је f деф. на $(-\infty,b]$ и $(\forall\alpha<b)\, f\in\mathcal{R}([\alpha,b])$, тада:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^b f(x)dx}$$



• $-\infty$ - сингуларитет

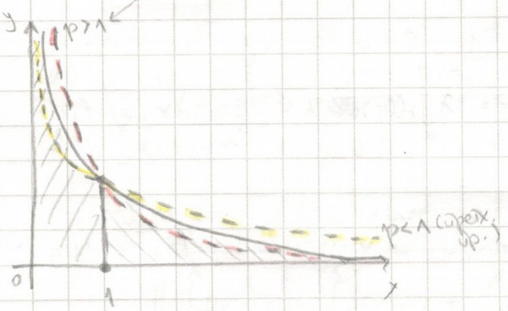
Примери

1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{\beta\to+\infty}\int_1^\beta \frac{dx}{x^p} \overset{p\neq 1}{=} \lim\limits_{\beta\to+\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^\beta = \lim\limits_{\beta\to+\infty}\left(\frac{\beta^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right) = \begin{cases} +\infty, & p<1 \text{ див.}\\ \frac{1}{p-1}, & p>1 \text{ конв.}\end{cases}$

• $\beta^{1-p} \xrightarrow{\beta\to+\infty} \begin{cases}+\infty, & 1-p>0\\ 1, & 1-p=0 \\ 0, & 1-p<0\end{cases}$

• за $p=1$: $\lim\limits_{\beta\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^\beta = \lim\limits_{\beta\to+\infty}\ln\beta = +\infty$ див.

$\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ конвергира акко $p>1$.



2) $\lambda>0$ $\quad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \lim\limits_{\beta\to+\infty}\int_0^\beta e^{-\lambda x}dx = \lim\limits_{\beta\to+\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^\beta = \lim\limits_{\beta\to+\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}\cdot e^{\overset{-\infty}{-\lambda\beta}}+\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}$ конв.

$\lambda=1$ $\quad \int_0^{+\infty} e^{-\overset{1}{\lambda} x}dx = 1.$

Напомена $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\overset{\text{пустити lim}}{+\infty}} = 0+\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$ (боље писати lim)

• $\int_0^{+\infty} u\,dv \overset{?}{=} uv\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} v\,du$ (јер за lim не важи увек да је limes разлике једнак разлици limesa) нпр. $\infty-\infty$

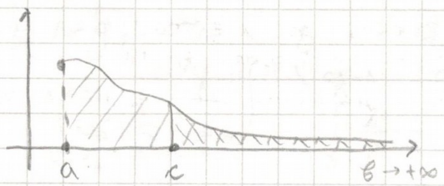
Став Нека су $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ несвојствени интеграли са сингуларитетом b ($b\in\mathbb{R}$ и f и g неогр. у свакој околини од b или $b=+\infty$).

а) Ако оба интеграла конвергирају и ако су $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, онда конвергира и интеграл: $\int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))dx$ и важи:

$$\boxed{\int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))dx = \lambda\int_a^b f(x)dx + \mu\int_a^b g(x)dx}$$ (линеарност)

б) Ако је $c\in(a,b)$, онда $\int_c^b f(x)dx$ конвергира акко $\int_a^b f(x)dx$ конвергира и тада важи:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$ (адитивност)



Да ли интеграл $\int_c^{b}$ конвергира?

(у околини сингуларитета)

$\iff$ Да ли интеграл $\int_a^{b}$ конвергира?

- Када је сингуларитет горња граница.
- Аналогно, важи и када је доња гр. сингуларитет

Доказ

(A) Нека је $a<\beta<b$. Сви интеграли између a и β су Риманови (нема сингуларитета). $\int_a^\beta (\lambda f(x)+\mu g(x))dx = \lambda\int_a^\beta f(x)dx + \mu\int_a^\beta g(x)dx$. $/ \lim_{\beta\to b_-}$

(линеарност Римановог интеграла).

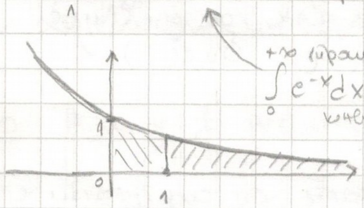
Лимес интеграла који конвергира постоји и коначан је. Добија се да једнакост из става важи.

(Б) $c<\beta<b$. $\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \underbrace{\int_c^\beta f(x)dx}_{}$ $/ \lim_{\beta\to b_-}$

лимес ∃ и коначан је акко ∃ $\lim_{\beta\to b_-}\int_a^\beta f(x)dx$ и коначан

Примери

1) $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ => конвергира (нема сингуларитета између 0 и 1):

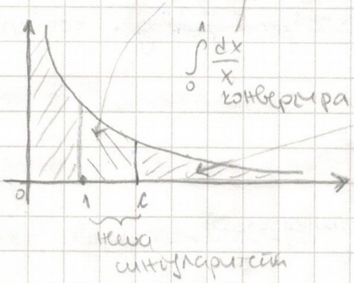


$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$ (прављени) конвергира

$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = 1 - \int_0^{1} e^{-x}dx =$

$= 1 + e^{-x}\Big|_0^1 = \cancel{1} + e^{-1} \cancel{-1} = \frac{1}{e}$

2) $c>0$ $\int_0^{c}\frac{dx}{x^p}$ => конвергира акко $p<0$



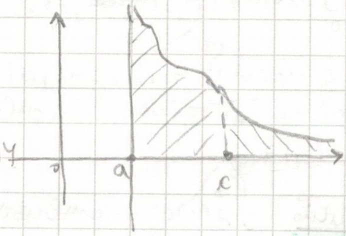
$\int_0^{1}\frac{dx}{x}$ конвергира

Слично, за $\int_c^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ => конвергира акко $p>1$

Деф 1) Нека је ф-ја f дефинисана на (a,b) (интервал). Нека је $c \in (a,b)$ (било која тачка) и претпоставимо да су $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$ несвојствени интеграли и да су сингуларитети a и b. Тада важи:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

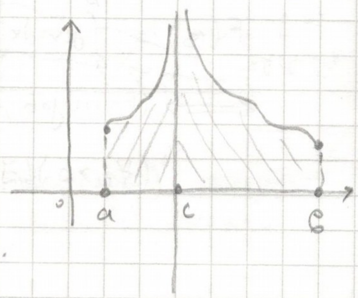
несвојствени интеграл са 2 сингуларитета → конвергира ако конвергирају оба интеграла на десној страни једнакости



2) Нека је f дефинисана $[a,b]\setminus\{c\}$ (сегмент) где је $c \in (a,b)$ и нека су $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$ несвојствени при чему су сингуларитети c. Тада дефинишемо интеграл:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛ СА УНУТРАШЊИМ СИНГУЛАРИТЕТОМ → конвергира ако конв. оба на десној страни једн.



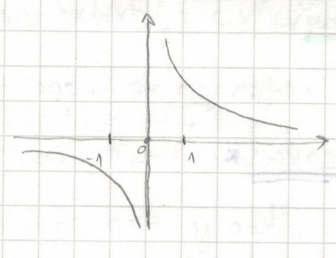
Примери

1) $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \underbrace{\int_0^{59}\frac{dx}{x^p}}_{\text{конв. ако } p<1} + \underbrace{\int_{59}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}}_{\text{конв. ако } p>1} \Rightarrow \text{дивергира за } p\in\mathbb{R}$$

(из тога што ова 2 са десне стр конвергирају за разл. (супротне) вредности)

59 – било који број између 0 и $+\infty$

2) $$\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}}_{\text{несвојствен. инт. са ун. синг.}} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x} + \underbrace{\int_{0}^{1}\frac{dx}{x}}_{\text{дивергира јер је } p=1 \text{ а треба да буде } p<1} \Rightarrow \text{интеграл дивергира}$$



15.11.2018.

Поредбени критеријуми
(за несвојствене интеграле)

* $\int_a^{b} f(x)dx$ → горња граница је једини сингуларитет (све аналогно важи и кад је доња гр. сингуларитет)

* Да ли интеграл конвергира или не? - питање лекције

Став $\int_a^{b} f(x)dx$ конвергира $\iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \beta\in(a,b))$ т.д. $(\forall \beta',\beta''\in\mathbb{R})$ важи:

ако $\beta<\beta'<\beta''<b \Rightarrow \left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

Доказ

$F(\beta):=\int_a^{\beta} f(x)dx$, $F:[a,b)\to\mathbb{R}$. $\int_a^{b} f(x)dx$ конвергира $\overset{\text{деф. конв}}{\iff} \exists \lim\limits_{\beta\to b_-} F(\beta)$ и коначан

$\iff$ (Кошијев критеријум за постојање коначног лимеса):

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\beta\in(a,b))$ т.д. $(\forall\beta',\beta''\in\mathbb{R})$ важи $\beta<\beta'<\beta''<b \Rightarrow \underbrace{|F(\beta'')-F(\beta')|}_{\text{по адитивности се добије } \int_{\beta'}^{\beta''} f(x)dx}<\varepsilon$.

Деф За интеграл $\int_a^{b} f(x)dx$ кажемо да апсолутно конвергира ако конвергира интеграл: $\int_a^{b}|f(x)|dx$.

Став Ако $\int_a^{b} f(x)dx$ апсолутно конвергира $\Rightarrow \int_a^{b} f(x)dx$ конвергира.

• обрнуто не мора да важи.

Доказ (помоћу претх. става)

Нека је $\varepsilon>0$ произвољно. $(\exists\beta\in(a,b))$ т.д. $(\forall\beta',\beta''\in\mathbb{R})$ важи: $\beta<\beta'<\beta''<b \Rightarrow$

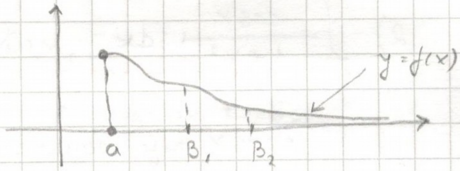
$\Rightarrow \underbrace{\left|\int_{\beta'}^{\beta''} \underbrace{|f(x)|}_{\geq 0}dx\right|}_{\text{Римански интеграл } \geq 0}<\varepsilon$. $\beta<\beta'<\beta''<b \Rightarrow \left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x)dx\right| \underset{\text{особина инт. нej.}}{\leq} \int_{\beta'}^{\beta''}|f(x)|dx<\varepsilon$.

$\Rightarrow$ (претх. став) $\int_a^{b} f(x)dx$ конвергира је $\int_a^{b}|f(x)|dx$ конвергира.

* Ако $(\forall x\in[a,b])$ $f(x)\geq 0$ (позитивна ф-ја)

$F:[a,b)\to\mathbb{R}_+$, $F(\beta):=\int_a^\beta f(x)\,dx$

(такође позитивна)



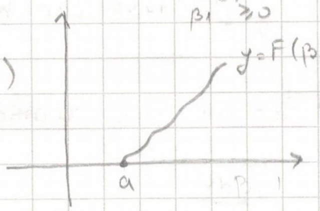
$\beta_1<\beta_2 \Rightarrow F(\beta_1)\leq F(\beta_2)$

$F(\beta_2)-F(\beta_1)=\underbrace{\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)\,dx}_{\geq 0}\geq 0$

$F\nearrow$ на $[a,b)$

$\int_a^b f(x)dx$ конвергира $\iff \exists$ коначан $\lim_{\beta\to b}F(\beta)$

$\iff$ F је ограничена ф-ја на $[a,b)$



Теорема (Први поредбени критеријум)

Нека $(\forall x\in[a,b))$ $\underbrace{0\leq f(x)\leq g(x)}$ (позитивне ф-је). Тада важи:

$\int_a^b g(x)dx$ конвергира $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)$ конвергира

(ако интеграл веће ф-је конвергира => интеграл мање ф-је конвергира) под условом да су обе позитивне!

Доказ

Посматрамо ф-ју $G(\beta):=\int_a^\beta g(x)dx$, g конвергира и позитивна је

=> G је ограничена на интервалу $[a,b)$

=> $(\exists M>0)$ т.д. $(\forall \beta\in[a,b))$ важи: $|G(\beta)|\leq M$.

$|F(\beta)|=\underbrace{\left|\int_a^\beta \underbrace{f(x)}_{\geq 0}dx\right|}_{\geq 0}=\int_a^\beta f(x)dx$ желимо да докажемо да је ово такође $\leq M$ $(\forall\beta\in[a,b))$

монотоност интеграла $\Rightarrow$ из $0\leq f(x)\leq g(x)$ $\Rightarrow$ $\int_a^\beta f(x)dx \leq \int_a^\beta g(x)dx=|G(\beta)|\leq M$.

Примери

1) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$, доказати да конвергира.

Ојлер-Пуасонов интеграл

- знамо да $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ конв.
- за $x\geq 1$, $0\leq e^{-x^2}\leq e^{-x}$ => по 1. поред. критеријуму $\int_1^{+\infty}e^{-x^2}dx$ такође конвергира

  $x^2\geq x$ /(-1)

  $-x^2\leq -x$ /exp
- од 0 до 1 нема сингуларитета па ту ф-ја такође конвергира

=> $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ конвергира

2) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx$, испитати конвергенцију.

• $\cos x$ није само позитивна па не можемо директно применити 1. пор

$\Rightarrow 0 \le \left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| = \frac{|\cos x|^{\le 1}}{1+x^2} \le \frac{1}{x^2}$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ конвергира јер је $\underset{2}{p}>1$

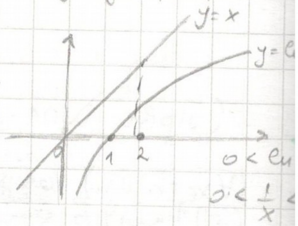
$\overset{\text{I пор.кр.}}{\Longrightarrow} \int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right|dx$ конвергира $\overset{\text{став}}{\Longrightarrow} \int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx$ конвергира

3) Ако интеграл мање ф-је дивергира => интеграл веће ф-је дивергира

$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\ln x}$, • за $x \ge 2$, $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x} > 0$

$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x}$ дивергира јер је $p=1$

$\overset{\text{I. пор. кр}}{\Longrightarrow}$ и $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\ln x}$ дивергира



$0<\ln$

$0<\frac{1}{x}<$

Теорема (други поредбени критеријум)

// ако $b=+\infty$ не смеш

$(\forall x\in[a,b))$ $\overset{\text{ове позитивне}}{f(x), g(x)} > 0$ и посматрамо $c := \lim_{x\to b_-}\frac{f(x)}{g(x)} \ge 0$. Тада:

А) Ако је $c\ne+\infty$ (тј. $c\in[0,+\infty)$), тада важи сл. импликација:
ако конвергира $\int_a^b g(x)dx \Rightarrow$ конвергира $\int_a^b f(x)dx$

Б) Ако је $c\ne 0$ (тј. $c\in(0,+\infty)$ или $c=+\infty$), тада важи сл. импликација:
$\int_a^b f(x)dx$ конв. $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ конв.

• Ако је c неки коначан број ($c\ne 0$ и $c\ne+\infty$), тада:
$\int_a^b f(x)dx$ конв $\Leftrightarrow \int_a^b g(x)dx$ конв (еквиконвергентни

Доказ

(А) $\exists M>c$: $(\exists c\in(a,b))$ т.д. $(\forall x\in(c,b))$ $\frac{f(x)}{g(x)} < M$.

да је c бесконачно не би важило да $\exists$ овакво M.

$0<\frac{1}{M}f(x)<g(x)$

$\int_a^b g(x)dx$ конвергира $\Leftrightarrow \int_c^b g(x)dx$ конв $\overset{\text{I. п. к.}}{\Longrightarrow} \int_c^b \frac{1}{M}f(x)dx$ конв. (између c

нема сингуларитета) $\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx$ конвергира.

(б) $\lim\limits_{x\to b-} \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{c}, & c\in(0,+\infty) \\ 0, & c = +\infty \end{cases} \in [0,+\infty)$

$\overset{(A)}{\Rightarrow}$ (кад f и g замене места) $\int_a^b f(x)dx$ конв. $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ конв.

Последица (спец. случај када је $c\in(0,+\infty)$ и $c=1$)

$(\forall x\in[a,b))$ $f(x), g(x) > 0$ тада $f(x)\sim g(x)$, $x\to b-$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ конв. $\Leftrightarrow \int_a^b g(x)dx$ конв.
(еквиконвергентни су)

Пример У зависности од $\alpha\in\mathbb{R}$ испитати конв. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(x+1)}$.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha(x+1)} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}}_{(1)} + \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha(1+x)}}_{(2)}$$

(1) $\frac{1}{x^\alpha \underbrace{(1+x)}_{\to 1}} \sim \frac{1}{x^\alpha}$, $x\to 0_+$. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ конв. $\Leftrightarrow$ $\underline{\alpha<1}$

(2) $\frac{1}{x^\alpha \underbrace{(1+x)}_{\sim x}} \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}}$, $x\to+\infty$. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha+1}}$ конв. $\Leftrightarrow$ $\alpha+1>1$ тј. $\underline{\alpha>0}$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha(x+1)}$ конвергира ако конвергирају (1) и (2) тј. $\Leftrightarrow$ $\underline{\alpha\in(0,1)}$

~ Гама и Бета функција ~

$$* \ \Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \underbrace{\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx}_{(1)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx}_{(2)}$$

- $\Gamma: \underbrace{(0,+\infty)}_{\text{домен (област за које вр. } \alpha \text{ интеграл конвергира тј. } \Gamma \text{ је дефинисано)}} \to \underbrace{(0,+\infty)}$

(1) $x^{\alpha-1}\underbrace{e^{-x}}_{\to 1} \sim x^{\alpha-1} = \frac{1}{x^{1-\alpha}}$, $x\to 0_+$

$1-\alpha<1$ $\Rightarrow$ $\underline{\alpha>0}$
да би конвергирало

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{e^{-x/2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\overset{\to+\infty}{x^{\alpha-1}}}{\underset{\to+\infty}{e^{x/2}}} = 0$, $\int_1^{+\infty} e^{-x/2}dx$ конвергира

брже тежи бесконачности

$\overset{\text{II п.к. (A)}}{\Rightarrow}$ (2) конвергира за $\underline{\forall\alpha\in\mathbb{R}}$

Став $(\forall\alpha>0)$ важи: $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\cdot\Gamma(\alpha)$.

Доказ

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx = \begin{pmatrix} u = x^\alpha & du = \alpha x^{\alpha-1}dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x}\end{pmatrix} = \overset{0}{\cancel{-x^\alpha e^{-x}\Big|_0^{+\infty}}} + \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx =$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} = 0$ ($e^x \to +\infty$ брже)

$= \alpha\cdot\Gamma(\alpha)$.

Последица $(\forall n\in\mathbb{N})\ \Gamma(n) = (n-1)!$

доказ (индукцијом)

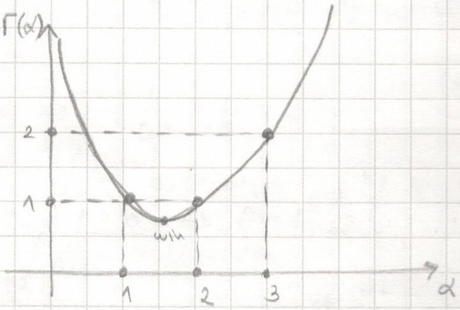
1° $n=1$: $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1 = 0!$ ✓

2° $n\in\mathbb{N}$, тј да је $\Gamma(n)=(n-1)!$. Треба доказати да важи за $n+1$:

$\Gamma(n+1) = n!$

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \overset{ИХ}{=} n(n-1)! = n!$ ✓

* График Γ ф-је:



Теорема (формула допуњавања)

$(\forall \alpha\in(0,1))$ важи: $\boxed{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}}$

• нпр. $\alpha=\frac{1}{2}$: $\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$\alpha=\frac{3}{2}$: $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\alpha=\frac{5}{2}$: $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$ итд.

Пример $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ (Ојлер-Пуасонов интеграл)

• неодређен интеграл не може да се израчуна

смена: $t = x^2$, $x=\sqrt{t}$, $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{-1/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

* $B(\alpha,\beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$

• $B: \underline{(0,+\infty)\times(0,+\infty)} \to \underline{(0,+\infty)}$

• $x^{\alpha-1}\underbrace{(1-x)^{\beta-1}}_{\to 1} \sim x^{\alpha-1}, x\to 0_+$; $x^{\alpha-1} = \frac{1}{x^{1-\alpha}}$ да би конв. $\Rightarrow \alpha>0$

• $B(\alpha,\beta) = -\int_1^0 (1-t)^{\alpha-1}\cdot t^{\beta-1}dt = \int_0^1 t^{\beta-1}\cdot(1-t)^{\alpha-1}dt = B(\beta,\alpha)$ симетрична у одн на аргументе $\Rightarrow \beta>0$

$t=1-x$
$x=1-t$
$dx=-dt$

Став $(\forall \alpha, \beta > 0)$ $\boxed{B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx}$

Доказ

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\cancel{\alpha-1}}(1+y)^{\cancel{\beta-1}}} \cdot \frac{1}{(1+y)^{\cancel{2}}} dy = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy.$$

$x = \frac{y}{1+y}$, $1 - x = \frac{1}{1+y}$

$dx = \frac{1+\cancel{y}-\cancel{y}}{(1+y)^2} = \frac{1}{(1+y)^2} dy$

$y = \frac{x}{1-x}$

Теорема (Веза између Γ и B ф-ја)

$(\forall \alpha, \beta > 0)$ $\boxed{B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}}$

Пример $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-3/4}}{1+t} dt = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{4}) \cdot \Gamma(\frac{3}{4})}{\cancel{\Gamma(1)}_{1}} = \quad \alpha = \frac{1}{4}$

$t = x^4$

$x = \sqrt[4]{t} = t^{1/4}$

$dx = \frac{1}{4} t^{-3/4} dt$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Нумерички (бројевни) редови

06. 12. 2018.

$a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots$ знамо ово да саберемо. Можемо да додамо још; ако их има коначно много можемо да саберемо. Шта ако их има бесконачно много?

* Нека је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ реалних бројева. Дефинишимо још један низ.

$S_1 := a_1$

$S_2 := a_1+a_2$

$\ldots$

$S_n := a_1+a_2+\ldots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$

Овим поступком од једног низа добијамо други $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \dashrightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Деф Уређени пар $((a_n)_{n\in\mathbb{N}},(S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ називамо (бројевним) редом и означавамо са:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$$

, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - општи члан

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - низ парцијалних сума

Деф Кажемо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако конвергира низ његових парцијалних сума $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Тада, граничну вредност низа $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ називамо сумом датог реда и означавамо са $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

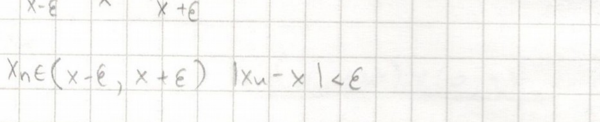
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ (ако низ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира)

У супротном, ред дивергира (или lim не постоји или није коначан)

АНАЛИЗА 1

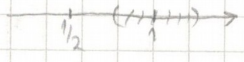
* Шта значи да низ конвергира?

$x_n \to x$ $(\lim_{n\to\infty} x_n = x)$



$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\geq n_0)$ $x_n\in(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ $|x_n-x|<\varepsilon$

пример $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$



Пример Да ли ред конвергира?

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\dots+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=1$ конвергира

2) $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$, $q\in\mathbb{R}$ (геометријски ред)

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}q^k=q+q^2+\dots+q^n=\begin{cases}\frac{q-q^{n+1}}{1-q}, & q\neq 1\\ n, & q=1\end{cases}=\begin{cases}\frac{q(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1\\ n, & q=1\end{cases}$$

- $\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}\nexists\lim, & q\leq -1\\ 0, & -1<q<1 \to \text{само у овом случају конвергира}\\ 1, & q=1\\ +\infty, & q>1\end{cases}$

* Геометријски ред $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ конвергира акко $-1<q<1$. Тада

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n=\frac{q}{1-q},\quad |q|<1.$$

Напомена Ако имамо $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, онда нам то даје $a_0, a_1, a_2, \dots$

→ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ и онда имамо ред $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ или нпр. $(a_n)_{n\geq 10}\to(S_n)_{n\geq 10}$

→ $\sum_{n=10}^{\infty}a_n$

Пример $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$, $S_n=\sum_{k=0}^{n}q^k=1+q+\dots+q^n=\begin{cases}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q\neq 1\\ n, & q=1\end{cases}$ ред конв. акко $|q|<1$ али сума није иста.

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}=1+\frac{q}{1-q}=1+\sum_{n=1}^{\infty}q^n,\quad |q|<1$$

Пример $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$ конвергира

Став (Неопходан услов конвергенције реда)

Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ конвергира онда $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

доказ

$$S_n=\underbrace{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}_{S_{n-1}}+a_n \Rightarrow a_n=S_n-S_{n-1}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\overset{S}{S_n}-\overset{S}{S_{n-1}})=0.$$

- Ово није довољан услов (не важи други смер)

Примери

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ дивергира јер $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \not\to 0$ (тежи e)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ дивергира за $|q|\geq 1$ јер $q^n \not\to 0$ у овом случају

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ (хиперхармонијски ред) дивергира за $\alpha\leq 0$ јер $\frac{1}{n^\alpha}\to\begin{cases}0, & \alpha>0\\ 1, & \alpha=0\\ +\infty, & \alpha<0\end{cases}$

Став (Кошијев критеријум конвергенције редова)

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира акко важи Кошијев услов:

$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n,p\in\mathbb{N})\quad n\geq n_0 \Rightarrow |a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon.$

Доказ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв. $\Leftrightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конв. $\Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n,p\in\mathbb{N})\ n\geq n_0 \Rightarrow \underbrace{|S_{n+p}-S_n|}_{(*)}<\varepsilon$

$(*)$ су произвољна 2 члана из S_n после n_0 $\Rightarrow$ што је тачно

$|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|.$

Пример $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (хармонијски ред) дивергира

→ Доказујемо негацију Кошијевог критеријума ($\neg(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow p\wedge(\neg q)$)

? $(\exists\varepsilon>0)(\forall n_0\in\mathbb{N})(\exists n,p\in\mathbb{N})\quad n\geq n_0 \wedge |a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}|\geq\varepsilon$?

$$\Big|\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq\frac{1}{n+p}}+\underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\geq\frac{1}{n+p}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{n+p}}_{\geq\frac{1}{n+p}}\Big| \geq \frac{p}{n+p} \underset{n=p}{=} \frac{1}{2}$$

$\varepsilon:=\frac{1}{2}$, $n_0\in\mathbb{N}$ произвољно, $n:=n_0$ $p:=n_0$

Став Нека су $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергентни редови и нека је $\lambda\in\mathbb{R}$. Тада конвергирају и редови $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\cdot a_n$ и важи:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda a_n=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

Доказ

(1) $$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \quad / \lim_{n\to\infty}$$

комутативност и асоцијативност

(2) $$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k \quad / \lim_{n\to\infty}$$

дистрибутивност множења у одн. на сабирање

Пример $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} - \frac{2}{3^n} \right) = 3 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}}_{=1} - 2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}}_{= \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}} = 3 \cdot 1 - \cancel{2} \frac{1}{\cancel{2}} = 2$$

- Да бисмо сумом прошли кроз њихов збир редови морају бити конвергентни!!

Став $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $n_0 \in \mathbb{N}$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв. $\iff \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ конв.

- За питање конвергенције реда није битно одакле креће ред, али ако конвергирају, не морају ка истом (тј. су битне границе)

Доказ

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0-1}}_{S_{n_0-1}} + \underbrace{a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n}_{\tilde{S}_n} \qquad (n \geq n_0)$$

$\tilde{S}_n$ - n-та парцијална сума реда $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

$$S_n = \underbrace{S_{n_0-1}}_{\text{константа}} + \tilde{S}_n$$

Пример $$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{3^n} \text{ конвергира } = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} - \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{3^n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}}_{=\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \right)$$

Редови са позитивним члановима (одређени)

06. 12. 2018.

* Посматрамо редове $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тако да је $\forall n\ a_n>0$.

- не морају сви да буду позитивни; потребно је да су позитивни почев од неког
- ако су сви негативни:

$$a_n<0,\ \forall n:\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-|a_n|) = -\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|}_{\text{ред са поз. члановима}}$$

Став Нека је $a_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Тада важи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв. акко низ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ јесте ограничен одозго.

Доказ

$$S_{n+1}=S_n+\underbrace{a_{n+1}}_{>0} > S_n,\ \forall n \Rightarrow S_n\uparrow \text{ растући низ}$$

$\Rightarrow$ сума ће конвергирати супремуму тј. најмањем горњем ограничењу

Пример хипрехармонијски низ за $\alpha=2$: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}$ конвергира

$$S_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n\cdot n} \le 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{(n-1)\cdot n} = 1+1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\dots$$

$$\dots+\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n} = 1+1-\frac{1}{n} = 2-\frac{1}{n} < 2$$

$\Rightarrow$ S_n огр. одозго па овај ред конвергира

Став (Први поредбени критеријум)

Ако важи да је $0<a_n\le b_n$, $\forall n$ тј. $\forall n\ge n_0$ и ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, онда и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

Доказ

$\forall n\ \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k \le M$. $(\exists M>0)$ због конвергенције $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и претходног става $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

Примери

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$, $\frac{1}{n(n+3)}<\frac{1}{n^2}$ (за $\sum\frac{1}{n^2}$ смо доказали да конв.) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$ конв.

2) $\sum_{n=2} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$, $\frac{\sqrt{n}}{n-1} > \frac{\sqrt{n}}{n} \geq \frac{1}{n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира $\underset{(*)}{\Rightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ такође дивергира

(*) по контрапозицији Првог поредбеног критеријума:

- Ако дивергира ред са мањим општим чланом, онда дивергира и ред са већим општим чланом.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ див за $\alpha \leq 1 \to \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ конв. за $\alpha \geq 2 \to \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$

Став (Други поредбени критеријум)

Нека су $a_n > 0$ и $b_n > 0$, $\forall n (\forall n \geq n_0)$ и нека је $c := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

1. Ако је $c \in [0, +\infty)$ онда важи импликација: ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конв., онда и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв.
2. Ако је $c \in (0, +\infty)$ или $c = +\infty$ онда важи импликација: ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв., онда и ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конв.

доказ

(1) $\exists M > c$, $\forall n \geq n_0$ $\frac{a_n}{b_n} < M \Rightarrow a_n < M b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} M b_n$ конв $\xRightarrow{\text{П.к.}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 1/c, & c \in (0,+\infty) \\ 0, & c = +\infty \end{cases}$ испуњени су услови од (1) када a_n и b_n замене места

Последица Ако су $a_n > 0$ и $b_n > 0$ и ако важи $a_n \sim b_n$ ($\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$), тада $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв. $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конв.

- a_n и b_n су еквиконвергентни

примери

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$, $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ дивергира ((3) пример за $\alpha = 1/2$)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt{n^5+4}}$, $\frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt{n^5+4}} \sim \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5}} = \frac{n^{1/3}}{n^{5/2}} = \frac{1}{n^{(13/6)>2}}$ конвергира

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{2\pi}{n}$, $\sin\frac{2\pi}{n} \sim \frac{2\pi}{n} = 2\pi \cdot \frac{1}{n}$ дивергира према последици

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-2}{n^4+3} (e^{1/n} - 1)$, $\frac{n^3-2}{n^4+3}(e^{1/n} - 1) \sim \frac{n^3}{n^4} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$ конвергира

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-2}{n^4+3} \cdot e^{1/n}$, $\frac{n^3-2}{n^4+3} \underset{\to 1}{e^{1/n}} \sim \frac{n^3}{n^4} \cdot 1 = \frac{1}{n}$ дивергира

08.12.2018.

Д'Аламберов и Кошијев (корени) критеријум

Теорема (Д'Аламбер)

Нека су $a_n > 0$, $\forall n$.

А) Ако постоји неки број $q \in (0,1)$ такав да је $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ за све $n \geq n_0$ (почев од неког), онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира. Ако је $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ за све $n \geq n_0$, онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.

Б) Ако је $\ell := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ онда важе следеће импликације:

- $\ell > 1 \Rightarrow$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира
- $\ell < 1 \Rightarrow$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

Доказ

(А) Без губитка општости: $n_0 = 1$, важи за $\forall n$ то важи и за

$n=1$: $a_2/a_1 < q$, $n=2$: $a_3/a_2 < q$ ..., $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$

$\Rightarrow \frac{\cancel{a_2}}{a_1} \cdot \frac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n+1}}{\cancel{a_n}} \leq q^n \quad / \cdot a_1$

$a_{n+1} \leq a_1 \cdot q^n$, $n \in \mathbb{N}$

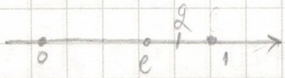
$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^n$ конвергира зато што је q између 0 и 1, $|q|<1$

$\overset{\text{Г.п.к.}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ конв. $= a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$ конв.

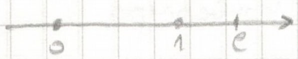
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad / \cdot a_n \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \nearrow$ сви чланови низа су већи од a_1

то не може да тежи нули, што је неопходан услов за конвергенцију

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.

(Б) $\ell < 1$  за q узмемо било коју const већу од ℓ и мању од 1. $q \in (\ell, 1)$

$\Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \overset{(А)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

$\ell > 1$ 

$\Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \overset{(А)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира

Теорема (Кошијев критеријум)

Нека су $a_n > 0$, $\forall n$.

А) Ако постоји $q \in (0,1)$ тако да је $\sqrt[n]{a_n} \le q$ за све $n \ge n_0$, онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

Ако је $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ за све $n \ge n_0$, ред дивергира.

Б) Ако је $\ell := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, онда важе импликације:

- $\ell < 1 \Rightarrow$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв.
- $\ell > 0 \Rightarrow$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ див.

Доказ $(n_0 = 1)$

(А) $\sqrt[n]{a_n} \le q \;/^n \Rightarrow a_n \le q^n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ конв $\overset{\text{Пп.к}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв.

$\sqrt[n]{a_n} \ge 1 \;/^n \Rightarrow a_n \ge 1, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ див

(Б) $\underline{\ell < 1}$ $\quad q \in (\ell, 1) \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \ge n_0)\ \sqrt[n]{a_n} \le q \overset{(А)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв.

$\underline{\ell > 1}$ $\quad (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \ge n_0)\ \sqrt[n]{a_n} \ge 1 \overset{(А)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ див.

Примери

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$, $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)5^n}{n \cdot 5^{n+1}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{n+1}{n} \longrightarrow \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ конв.

II начин:

$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{5} \to \frac{1}{5} < 1$ конв.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{3n+2}{n+4}\right)^n$, $\quad \sqrt[n]{a_n} = \ln \frac{3n+2}{n+4} \longrightarrow \ln 3 > 1 \overset{\text{Кош.к.}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n \frac{3n+2}{n+4}$ дивергира

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{3^{n^2}}$, $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{3^{(n+1)^2}} \cdot \frac{3^{n^2}}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2 \cancel{(n!)^2} \cdot \cancel{3^{n^2}}}{\cancel{3^{n^2}} + 2n+1 \cdot \cancel{(n!)^2}} = \frac{(n+1)^2}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3} \frac{n^2+2n+1}{9^n} \to 0 < 1$

$\overset{\text{Д.к.}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{3^{n^2}}$ конв

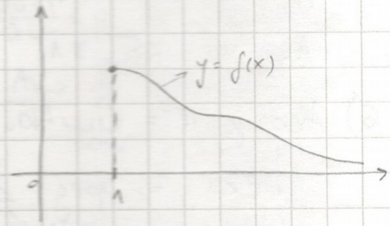
Напомена Ако Д'аламберов критеријум да 1, онда нема сврхе покушавати Кошијев јер ће исто дати 1.

Д'аламберов критеријум је погодан када имамо производ n чинилаца (нпр. n!).

08. 12. 2018.

Интегрални критеријуми

Теорема Нека је f ф-ја дефинисана на интервалу $[1,+\infty)$ и та ф-ја је непрекидна, позитивна и опадајућа. Тада важи да ред $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ конвергира $\Leftrightarrow$ $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ конвергира



Доказ

$F(x) := \int_1^x f(t)\,dt$ примитивна ф-ја, F је дифер.

и важи $F'(x) = f(x)$; $x \in [1,+\infty)$.

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} F(x)$. Пошто је $f>0 \Rightarrow F'(x)>0 \Rightarrow F \nearrow$ на $[1,+\infty)$

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ конв. акко $\exists$ коначан $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)\,dt$ тј. $\exists$ коначан $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ коначан $\lim_{n\to\infty} F(n)$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ коначан $\lim_{n\to\infty}\big(\underbrace{F_n - F(n-1)} + \underbrace{F(n-1) - F(n-2)} + \dots + - F(2) + \underbrace{F(2) - F(1)}\big)$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ коначан $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\big(F(k)-F(k-1)\big)$ $\Leftrightarrow$ ред $\sum_{n=1}^{\infty}\big(F(n)-F(n-1)\big)$ конв.

($\Rightarrow$ важи; $\Leftarrow$ у општем случају не мора да важи, али овде имамо еквиваленцију због $F\nearrow$ на $[1,+\infty)$)

Сада посматрамо $F(n)-F(n-1)$. По Лагранжовој теореми о средњој вредности: $\exists c_n \in (n-1,n)$ т.ј. $F(n) - F(n-1) = F'(c_n)(n-(n-1))$ (користимо да је F дифер. тј f непр.) $\Rightarrow$ $n-1 < c_n < n$, $f(n-1) \geq f(c_n) \geq f(n)$ (користимо што је f опадајућа) $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=2}^{+\infty} f(c_n)$ конвергира

$0 < f(n) \leq f(c_n) \leq f(n-1)$, $n \geq 2$. По I поредбеном критеријуму

$\Leftrightarrow$ $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ конв. $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ конв.

$\parallel$

$\sum_{n=2}^{\infty} f(n-1)$ тако да имамо еквиваленцију

Пример хиперхармонијски ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$

• $\alpha \leq 0$: $\frac{1}{n^\alpha} \not\to 0$ дивергира

• $\alpha > 0$: $f(x) := \frac{1}{x^\alpha}$, $f'(x) = \underbrace{-\alpha}_{<0}\cdot\underbrace{x^{-\alpha-1}}_{>0} < 0$ за све $x \geq 1$ $\Rightarrow f\downarrow$

$\Rightarrow$ важи конвергенција из интегралног критеријума

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ конв. $\Leftrightarrow$ $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ конв $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

Напомена: Конвергенција реда не зависи од првих коначно много чланова. Слично, $\int^{+\infty}$ конвергира за било који интервал од неког позитивног броја до $+\infty$.

08. 12. 2018

Редови са произвољним члановима. Лајбницов критеријум. Апсолутна и условна конвергенција.

Теорема (Лајбницов критеријум)

Нека је c_n опадајући низ који тежи ка нули $c_n \downarrow$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ ($\Rightarrow c_n \geq 0, \forall n$).
Тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$ конвергира.

Доказ (преко дефиниције)

конв.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} c_k \quad , \quad S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} c_k = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + c_{2n-1} - c_{2n}$$

$$S_{2(n+1)} = S_{2n+2} = S_{2n} + \underbrace{c_{2n+1} - c_{2n+2}}_{\geq 0 \text{ (јер је } c_n \downarrow)} \Rightarrow S_{2(n+1)} \geq S_{2n} \Leftrightarrow S_{2n} \uparrow.$$

Потребно је још доказати да је ограничен одозго:

$$S_{2n} = c_1 - \underbrace{(c_2 - c_3)}_{\geq 0} - \ldots - \underbrace{(c_{2n-2} - c_{2n-1})}_{\geq 0} - \underbrace{c_{2n}}_{\geq 0} \leq c_1, \forall n \Rightarrow \exists S := \lim_{n\to\infty} S_{2n}$$

$$S_{2n+1} = \underbrace{S_{2n}}_{\to S} + \underbrace{c_{2n+1}}_{\to 0} \longrightarrow S \quad (\lim_{n\to\infty} c_n = 0).$$

$\Rightarrow$ низ S_n конвергира $\overset{def}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$ конвергира

Напомена: Конвергенција не зависи од првих коначно много чланова; $c_n \downarrow$ почев од неког.

* Лајбницов критеријум важи и за редове облика: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$, знак се мења $\to$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$. Може да важи и за: $(-1)^{n+2}, (-1)^{n-1} \ldots$

Деф Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ је алтернирајући ред ако је $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, $\forall n$.

Примери

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $c_n = \frac{1}{n}$ $c_n \downarrow$ $c_n \to 0$

по Лајбницовом крит. ово конвергира $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ конвергира

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^3+15}}$, $\frac{n}{\sqrt{n^3+15}} \overset{:\sqrt{n^3}}{=} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0}{\sqrt{1+\frac{15}{n^3}} \to 0} \longrightarrow 0$ или $\frac{n}{\sqrt{n^3+15}} \sim \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$

· Кад испитујемо монотоност:

$$\frac{n}{\sqrt{n^3+15}} \overset{?}{\geq} \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^3+15}} \quad /^2 \Rightarrow \frac{n^2}{n^3+15} \geq \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+15} \quad / (n^3+15)((n+1)^3+15)$$

$$\Rightarrow n^2(n^3+3n^2+3n+16) \geq (n^3+15)(n^2+2n+1)$$

$$\Rightarrow \cancel{n^5}+3n^4+3n^3+16n^2 \geq \cancel{n^5}+2n^4+n^3+15n^2+30n+15$$

$$\Rightarrow n^4+2n^3+n^2-30n-15 \geq 0 \Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^3+15}} \downarrow$$ почев од неког члана

Лајб.
$\Rightarrow$ ред конвергира.

Деф Кажемо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира или да је апсолутно конвергентан ако конвергира ред: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Став Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конв. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

Доказ (I Кошијев критеријум)

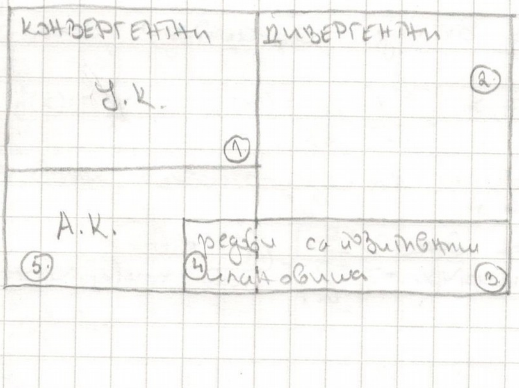
$\varepsilon > 0$ произв. $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow \left| |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| \right| < \varepsilon$

$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$.

Пример Ред који конвергира али не и апсолутно конв: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира

Деф Кажемо да ред условно конвергира ако конвергира, а не конвергира апсолутно.



Примери

1. условно конв. ред: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

2. дивергентан (не са поз. члановима): $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$

3. дивергентан (са поз. члановима): $\sum_{n=1}^{\infty} n$

4. апсолутно конв. ред (са поз. члановима): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

5. апсолутно конв ред (не са поз. чл.): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

08.12.2018.

Функционални низови и редови

* функционални низ = низ ф-ја
* f_n реална ф-ја дефинисана на неком скупу $X \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Нека имамо још једну ф-ју: f реална ф-ја на X

Деф Кажемо да функционални низ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира обично (конвергира тачка по тачка) ка ф-ји f на скупу X у ознаци:

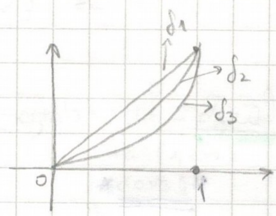
$f_n \to f$ на X ако $(\forall x \in X) \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

$\iff (\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Тада ф-ју називамо граничном ф-јом функционалног низа $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ на скупу X.

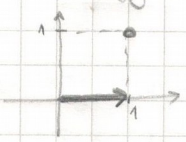
Примери

1) $X = [0,1]$, $f_n := x^n$, $n \in \mathbb{N}$.



→ Тражимо гран. ф-ју: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

График:

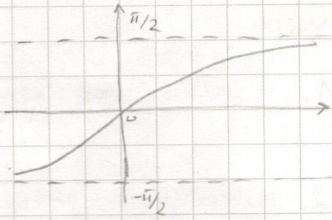


$f_n \to f$ на $[0,1]$

2) $X = [0,1]$, $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, фиксирамо $x \in [0,1]$

$f(x) = \lim_{n\to\infty} (x^n - x^{n+1}) = 0 \Rightarrow f_n \to \underset{\text{нула ф-ја}}{0}$ на $[0,1]$

3) $(0,+\infty)$, $f_n(x) := \operatorname{arctg} n\cdot x$, $x>0, n\in\mathbb{N}$

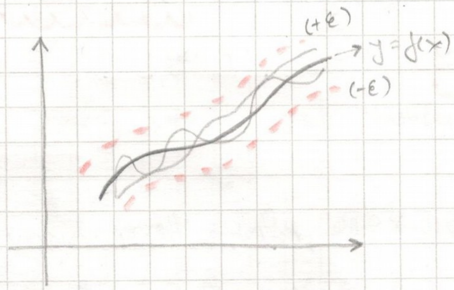


$x>0$ фиксирано

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \underbrace{nx}_{+\infty} = \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{x>0}$, $f_n \to \frac{\pi}{2}$ на $(0,+\infty)$

Деф Кажемо да функционални низ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно конвергира (униформно) ка ф-ји f на скупу X у ознаци $f_n \rightrightarrows f$ на X ако $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall x\in X)(\forall n\in\mathbb{N})\ n\geq n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

• у тачк. деф. n_0 зависи и од x и од ε (овде само од ε)



$y = f_n(x)$, $n\geq n_0$

• Графици ф-ја не могу да напусте овај појас

Став А) $f_n \rightrightarrows f$ на X $\Rightarrow$ $f_n \to f$ на X

• Равномерна конв. је јачи услов од обичне конв.

$\hookrightarrow$ $\exists a\ \forall b\ P(a,b) \Rightarrow \forall b\ \exists a\ P(a,b)$

Б) $f_n \rightrightarrows f$ на X, $A\subseteq X$ $\Rightarrow$ $f_n \rightrightarrows f$ на A

• Ако имамо равномерну конв. на неком скупу, онда је имамо и на сваком подскупу

В) $f_n \rightrightarrows f$ на A, $f_n \rightrightarrows f$ на B $\Rightarrow$ $f_n \rightrightarrows f$ на $A\cup B$

$\to$ $\varepsilon>0$, $n_1\in\mathbb{N}$, $n_2\in\mathbb{N}$: $n_0 := \max\{n_1,n_2\}$

Став Низ ф-ја $f_n \rightrightarrows f$ на X акко $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| = 0$.

Доказ

$b_n := \overset{\text{низ}}{\sup\limits_{x\in X}}|f_n(x)-f(x)|$, $b_n \geq 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\varepsilon>0$ произвољно, ? $(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\geq n_0)\ |b_n-0|<\varepsilon$?

$(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\geq n_0)\ \underbrace{(\forall x\in X)\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2}$

посматрамо овај део

(сваки елем скупа је $<\varepsilon/2$)

$\Rightarrow \sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| \le \varepsilon/2 < \varepsilon \quad \Rightarrow b_n<\varepsilon.$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Треба доказати равномерну конв. тј

? $(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\ge n_0)(\forall x\in X)\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$?

Из $\lim_{n\to\infty} b_n=0$ знамо да $(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\ge n_0)\ \overset{\sup}{b_n}<\varepsilon \Rightarrow (\forall x\in X)\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

Примери

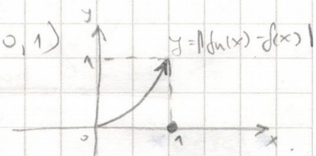
1) $f_n(x)=x^n,\ x\in[0,1] \Rightarrow f_n\to f$ на $[0,1]$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ 1, & x=1\end{cases}$

? $f_n \overset{?}{\rightrightarrows} f$ на $[0,1]$?

• На основу претх. става, треба да одредимо $\lim\sup$. $n\in\mathbb{N}$ фиксирамо.

$b_n=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0,1)}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = \sup[0,1) = 1$

$f(1)=0$ избацујемо

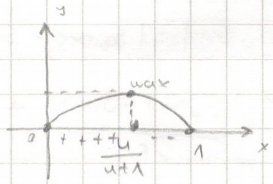


$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\underbrace{\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|}_{=1} = 1 \Rightarrow f_n \not\rightrightarrows f$ на $[0,1]$

$b_n \not\to 0$

$|f_n(x)-f(x)| = f_n(x)-f(x) = \begin{cases} x^n, & x\in[0,1)\\ 0, & x=1\end{cases}$

2) $f_n(x)=x^n-x^{n+1},\ x\in[0,1]$ и $f_n\to 0$ на $[0,1]$, ? $f_n \overset{?}{\rightrightarrows} 0$ на $[0,1]$?



$n\in\mathbb{N}$ фикс., $b_n=\sup_{x\in[0,1]}|\underbrace{f_n(x)}_{\ge 0}-0| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x)$

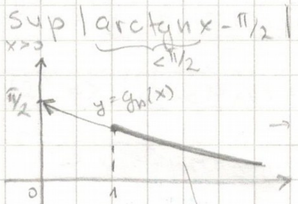
$f_n'(x) = n x^{n-1}-(n+1)x^n = \underbrace{x^{n-1}}_{\ge 0}(n-(n+1)x)$

$\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} =$

$= \underbrace{\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{\to 1/e} \underbrace{\left(1-\frac{n}{n+1}\right)^1}_{\to 0}}_{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow f_n\rightrightarrows 0$ на $[0,1]$.

3) $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx,\ x\in(0,+\infty)$, $f_n\to \pi/2$ на $(0,+\infty)$, ? $f_n \overset{?}{\rightrightarrows}\pi/2$ на $(0,+\infty)$?

$b_n=\sup_{x>0}|\underbrace{\operatorname{arctg} nx-\pi/2}_{<\pi/2}| = \sup_{x>0}(\underbrace{\pi/2-\operatorname{arctg} nx}_{g_n(x)\downarrow}) = \pi/2 \not\to 0 \Rightarrow f_n\not\rightrightarrows \pi/2$ на $(0,+\infty)$



→ скуп на коме испитујемо је битан!

• ? $f_n\overset{?}{\rightrightarrows}\pi/2$ на $[1,+\infty)$? : $b_n=\sup_{x\ge 1}(\pi/2-\operatorname{arctg} nx) = \pi/2-\operatorname{arctg} n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow f_n\rightrightarrows\pi/2$ на $[1,+\infty)$

* Функционални ред — општи члан зависи и од x. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$

$S_n(x)=a_1(x)+a_2(x)+\dots+a_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ — и низ парц. сума је функц. низ

• за њега је значајан сл. скуп: $D_S := \{t\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_{a_n} \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)$ конвергира$\}$

$\Rightarrow$ област конвергенције функционалног реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$

уређени пар: $(\underset{\text{општи члан}}{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}, \underset{\text{низ парц. сума}}{(S_n)_{n\in\mathbb{N}}})$ је ф-ни ред

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ → област конв. је: $(-1,1)=D_S$

Деф Кажемо да функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ конвергира обично (конвергира равномерно) (ка својој суми) на скупу $X \overset{D_S}{\subseteq}$ ако функционални низ његових парцијалних сума $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира обично (конв. равномерно) на скупу X.

Став (Неопходан услов конвергенције)

Ако функционалан ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конв. на X ($S_n \rightrightarrows S$ на X)

$\Rightarrow$ $a_n \rightrightarrows \underset{\text{нула ф-ја}}{0}$ на X (равномерно конв. ка нули ф-ји на X).

Доказ

$\varepsilon>0$ произв. $\overset{?}{:}$ $(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n>n_0)(\forall x\in X)\ |a_n(x)-0|<\varepsilon$?

$S_n \rightrightarrows S$ на X $\Rightarrow (\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\geq n_0)(\forall x\in X)\ |S_n(x)-S(x)|<\varepsilon/2$. Треба док. $|a_n(x)|<\varepsilon$.

$x\in X, n>n_0: |a_n(x)| = |S_n(x)-S_{n-1}(x)| = |S_n(x)-S(x)+S(x)-S_{n-1}(x)| \overset{н.\Delta}{\leq}$

$\leq \underbrace{|S_n(x)-S(x)|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|S_{n-1}(x)-S(x)|}_{<\varepsilon/2\ (n-1\geq n_0)} < \varepsilon.$

$*$ $S(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ → постоји кад год бројни ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ конвергира ($x\in D_S$)

↑ сума функционалног реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- $S_n \longrightarrow S$ на D_S

Пример

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$, $x\in(-1,1)$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$, $D_S=\mathbb{R}$ јер: $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, $3>1$ конвергира $\overset{\text{Тп.к}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right|$ конв.

Пример

$\overset{?}{:}$ $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ равн. конв. на $(-1,1)$? Ако да: $x^n \rightrightarrows 0$ на $(-1,1) \Rightarrow x^n \rightrightarrows$ на $[0,1)$ ↯ (из прет. примера)

⇓

не конв. равномерно на $(-1,1)$

Кошијев и Вајерштрасов критеријум равном. конв.

13. 12. 2018.

Теорема (Коши)

Функционални низ $(f_n)_{n\in N}$ равномерно конвергира (ка некој ф-ји) на скупу X акко важи (Кошијев услов): $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n,p\in N)(\forall x\in X)\ n\geq n_0 \Rightarrow |f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

Последица (Кошијеви редови)

Функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конв. на скупу X акко важи:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n,p\in N)(\forall x\in X)\ n\geq n_0 \Rightarrow |\underbrace{a_{n+1}(x)+\dots+a_{n+p}(x)}_{=S_{n+p}(x)-S_n(x)\ (\text{доказ})}|<\varepsilon.$$

Теорема (Вајерштрас) - даје $\boxed{\text{довољне}}$ услове, не и неопходне

Нека имамо неки функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ и ако су испуњени следећи услови:

1) $(\forall n\in N)(\forall x\in X)\ |a_n(x)|\leq c_n$ (довољно је за $n\geq n_0$)

   c_n – не зависи од x, али може да зависи од n

2) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (бројни ред) конвергира,

онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конвергира на X.

Доказ (на основу последице)

Нека је $\varepsilon>0$ произвољно.

(2) $\Rightarrow (\exists n_0\in N)(\forall n,p\in N)\ n\geq n_0 \Rightarrow |c_{n+1}+\dots+c_{n+p}|<\varepsilon$ $(*)$. (Кошијев критеријум за конвергенцију бројних (бројевних) редова). Докажимо да је то и оно тражено n_0. Нека су $n,p\in N$ произв. т.д. $n\geq n_0$ и $x\in X$.

Посматрамо: $|a_{n+1}(x)+\dots+a_{n+p}(x)| \overset{?}{<} \varepsilon$.

$$|a_{n+1}(x)+\dots+a_{n+p}(x)| \overset{\text{н.д.}}{\leq} \underbrace{|a_{n+1}(x)|}_{(1)\ \leq c_{n+1}}+\dots+\underbrace{|a_{n+p}(x)|}_{(1)\ \leq c_{n+p}} \leq \underbrace{c_{n+1}}_{\geq 0}+\dots+\underbrace{c_{n+p}}_{\geq 0} =$$

$$= |c_{n+1}|+\dots+|c_{n+p}| \overset{(*)}{<} \varepsilon.$$

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 e^{-nx}}{3^n}$ равн. конв. на $[0,+\infty)$?

1) $(\forall n\in\mathbb{N})(\forall x\in[0,+\infty))\ \left|\frac{n^2 e^{-nx}}{3^n}\right| = \frac{n^2\cdot e^{-nx}}{3^n} \le \frac{n^2}{3^n}$ ($e^{-nx} \le 1$)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2}{3^n}}_{=c_n}$ конвергира

$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} < 1$ (Даламберов крит.) конв.

Теорема о 2 лимеса и непрекидности граничне ф-је — 13. 12. 2018.

Теорема (о два лимеса)

Имамо ф-је $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ и $f: X\to\mathbb{R}$, и нека је $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа X. Ако важе следећи услови:

1) $f_n \rightrightarrows f$ на X (кључан услов)

2) $(\forall n\in\mathbb{N})(\exists$ коначан $\lim_{x\to x_0} f_n(x) =: b_n)$

онда $\exists$ коначан $\lim_{x\to x_0} f(x)$, низ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира и важи да је $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} b_n$ тј. $\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$.

доказ

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је Кошијев (тј. конвергира):

→ Нека је $\varepsilon>0$ произвољно. Примењујемо Кошијеву теорему (претх. стр. и услов (1). $\Rightarrow (\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n,p\in\mathbb{N})\underline{(\forall x\in X)}\ n\ge n_0 \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2 \ /\lim_{x\to x_0}$

$\Rightarrow |\underbrace{\lim_{x\to x_0} f_{n+p}(x)}_{=b_{n+p}\,(2)} - \underbrace{\lim_{x\to x_0} f_n(x)}_{=b_n\,(2)}| \le \varepsilon/2 \Rightarrow (\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n,p\in\mathbb{N})\ n\ge n_0\ \ |b_{n+p} - b_n| \le \varepsilon/2$

$\Rightarrow$ низ b_n је Кошијев па он конвергира $\Rightarrow b := \lim_{n\to\infty} b_n$. (*)

Треба доказати сад да је $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$:

→ 1° $\underline{x_0\in\mathbb{R}}$: ? $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in X)\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$?

2° $x_0=+\infty$
3° $x_0=-\infty$

Нека је $\varepsilon>0$ произв. $\overset{(1)}{\Rightarrow} (\exists n_1\in\mathbb{N})(\forall x\in X)(\forall n\ge n_1)\ |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon/3$

(*) $(\exists n_2\in\mathbb{N})(\forall n\ge n_2)\ |b_n - b| < \varepsilon/3$. $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$.

(2) $\lim_{x\to x_0} f_{n_0}(x) = b_{n_0} \Rightarrow (\exists\delta>0)(\forall x\in X)\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - b_{n_0}| < \varepsilon/3$

δ, $x\in X$ т.д. $0<|x-x_0|<\delta$ $|f(x)-b| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - b_{n_0} + b_{n_0} - b|$

$\le \underbrace{|f(x)-f_{n_0}(x)|}_{n_0\ge n_1\ <\varepsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - b_{n_0}|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|b_{n_0} - b|}_{n_0\ge n_2\ <\varepsilon/3} < \varepsilon$.

Последица Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равн. конв. на X, ако је $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа X и ако $(\forall n \in \mathbb{N})\ \exists$ коначан $\lim_{x\to x_0} a_n(x)$, онда $\exists$ коначан $\lim_{x\to x_0} a_n(x)$, бројевни ред $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} a_n(x)$ конвергира и важи једнакост:

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} a_n(x)$$

Доказ

Теорема о 2 лимеса: $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$

(1) $S_n \rightrightarrows S$ на X $\wedge$

(2) $(\forall n \in \mathbb{N})\ \exists$ коначан $\lim_{x\to x_0} S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lim_{x\to x_0} a_k(x)$ $\wedge$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \underbrace{S(x)}_{\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lim_{x\to x_0} a_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} a_n(x).$$

Теорема (о непрекидности граничне ф-је)

$(\forall n \in \mathbb{N})$ f_n непр. на X, $f_n \rightrightarrows f$ на X $\Rightarrow$ f је непр. на X.

- За f_n непр. на X и $f_n \to f$ на X $\not\Rightarrow$ f је непр. на X

Доказ

Треба доказати: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $x_0 \in X$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\lim_{x\to x_0} f_n(x)}_{= f_n(x_0)\ \text{(због непрекидности)}} = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

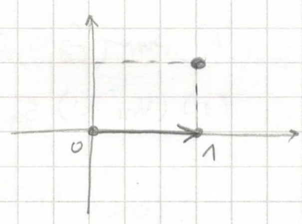
Важи на основу прет. тме:

(1) $f_n \rightrightarrows f$ на X

(2) $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ је коначан (из непрекидности)

Пример $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$

$\underset{\text{непр.}}{f_n} \to \underset{\text{није непр.}}{f}$ на $[0,1]$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$



$\Rightarrow f_n \not\rightrightarrows f$ на $[0,1]$

Последица Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равн. конв. на X и ако $(\forall n \in \mathbb{N})$ a_n непр на X, онда је и $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ непр. на X.

Доказ

$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ конв. $\forall n$, $S_n \rightrightarrows S$ на $X \overset{\text{прет. тма}}{\Longrightarrow} S$ је непр. на X.

Пример $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{\cos nx}{n^3}}_{a_n(x)}$ испитати непр. на $D_f=\mathbb{R}$

$(\forall n\in\mathbb{N})$ a_n непр. на $\mathbb{R}$ ✓

$? \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ равномерно конв. на $\mathbb{R}$?

Вајерш. $\Rightarrow$ 1) $(\forall n\in\mathbb{N})(\forall x\in\mathbb{R})$ $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ конв. $\Big\}\overset{посл.}{\Longrightarrow} f(x)$ је непр.

Интеграбилност граничне функције — 13. 12. 2018.

Теорема Ако важи:

1) $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$,

2) $(\forall n\in\mathbb{N})$ $f_n\in\mathcal{R}([a,b])$

$\Longrightarrow$ $f\in\mathcal{R}([a,b])$, низ $\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира и важи:

$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\underbrace{\lim_{n\to\infty}f_n(x)}_{f(x)}dx.$

Последица Ако $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ равн. конв. на $[a,b]$ и ако $(\forall n\in\mathbb{N})$ $a_n\in\mathcal{R}([a,b])$, онда је и сума $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ интеграбилна ф-ја на $[a,b]$, одређени ред $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n(x)dx$ конвергира и важи: $\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n(x)dx$.

• функционални ред се може интегралити члан по члан на $[a,b]$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$

Доказ

$S_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$. Из претх. теореме:

(1) $S_n\rightrightarrows S$ на $[a,b]$

(2) $(\forall n\in\mathbb{N})$ $S_n=a_1+\dots+a_n\in\mathcal{R}([a,b])$ $\Big\}$ $\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx=\int_a^b\underbrace{\lim_{n\to\infty}S_n(x)}_{\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)}dx$

$=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b a_k(x)dx}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n(x)dx.$

Пример Функ. ред $\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}}_{a_n}$ се може интегралити на $[0,2019]$?

$\int_0^{2019}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}dx\overset{?}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2019}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}dx.$

(2) $(\forall n\in\mathbb{N})$ $a_n\in\mathcal{R}([0,2019])$ ✓ (због непрекидности)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$ равн конв на $[0,2019]$?

(1) Вајерштрас: 1° $(\forall n\in\mathbb{N})(\forall x\in[0,2019])$ $\left|\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right| \le \left|\frac{x}{n^2}\right| = \frac{x}{n^2} \le \frac{2019}{n^2}$ $\lceil |\operatorname{arctg} x| \le |x|, x\in$

2° $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2019}{n^2}$ конвергира ✓

$\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$ равн. конв. $[0,2019]$

$\xRightarrow{\text{посл.}}$ Важи

Диференцијабилност граничне ф-је

22.12.2018

Теорема Имамо функционални низ $f_n, n\in\mathbb{N}$ дефинисан на $[a,b]$. Ако важи:

1) Постоји $\bar{x}\in[a,b]$ тако да низ $(f_n(\bar{x}))_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира, (ово је реални бројевни низ)

2) $(\forall n\in\mathbb{N})$ f_n је диференцијабилна на $[a,b]$,

3) функционални низ $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно конвергира на $[a,b]$.

Тада функционални низ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно конвергира на сегменту $[a,b]$ ка некој ф-ји f, па f је такође диференцијабилна на сегменту $[a,b]$ и $(\forall x\in[a,b])$ $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ тј.

$(\forall x\in[a,b])\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$

- теорема даје довољне услове да лимес и извод замене места, у општем случају то не важи
- кључна је равномерна конвергенција

~~*Доказ*~~ (помоћу Кошијевог критеријума за равн. конв.)

Треба доказати: $?(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n,p\in\mathbb{N})(\forall x\in[a,b])$ $n\ge n_0 \Rightarrow |f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$

Фиксирамо $\varepsilon>0$ произвољно и тражимо n_0.

$\xRightarrow[\text{из Коши и}]{(3)}$ $(\exists n_1\in\mathbb{N})(\forall n,p\in\mathbb{N})(\forall x\in[a,b])$ $n\ge n_1 \Rightarrow |f_{n+p}'(x)-f_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

$\xRightarrow[\text{из Коши и}]{(1)}$ $(\exists n_2\in\mathbb{N})(\forall n,p\in\mathbb{N})$ $n\ge n_2 \Rightarrow |f_{n+p}(\bar{x})-f_n(\bar{x})| < \varepsilon/2$.

Овај конкретан низ је Кошијев. $n_0 := \max\{n_1,n_2\}$. $n,p\in\mathbb{N}$, $n\ge n_0$, $x\in[a,b]$

$|f_{n+p}(x)-f_n(x)| \overset{?}{<} \varepsilon$:

$|f_{n+p}(x)-f_n(x)| = |f_{n+p}(x)-f_n(x)-f_{n+p}(\bar{x})+f_n(\bar{x})+f_{n+p}(\bar{x})-f_n(\bar{x})| \overset{\text{нej.}\,\Delta}{\le}$

$\le |f_{n+p}(x)-f_n(x)-(f_{n+p}(\bar{x})-f_n(\bar{x}))| + |f_{n+p}(\bar{x})-f_n(\bar{x})|$.

~~Теорема~~ Нека су $f_n, n\in\mathbb{N}$ дефин. на интервалу A. Ако важи:

1) $(\exists \bar{x}\in A)$ т.д. реални низ $(f_n(\bar{x}))_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира,

2) $(\forall n\in\mathbb{N})$ f_n је дифер. на A,

3) функц. низ $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ равном. конв. на сваком сегменту садржаном у A,

Тада, функц. низ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно конв. на сваком сегменту садржаном у A, f је диф. на A и $(\forall x\in A)\ f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$

• доказ се у потпуности ослања на претходну теорему

Последица Нека имамо функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ за $x\in A$, A-интервал. Ако бројевни ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(\bar{x})$ конвергира за неко $\bar{x}\in A$, ако је $\forall n\in\mathbb{N}$ a_n диф. на A и ако функц. ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ равном. конв. на сваком сегменту садржаном у A, онда и функц. ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равн. конв на сваком сегменту садржаном у A. Сума тог реда је диф. ф-ја на A.

$$(\forall x\in A)\quad \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x).$$

• функц. ред диференцира члан по члан.

пример $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{\sin nx}{n^3}}^{a_n(x)}$, $D_f=\mathbb{R}$. Испитати диф. ф-је на домену.

(1) услов тривијалан

(2) $a_n(x)$ јесте дифер. као композиција диф. ф-ја

(3) $a_n'(x) = \frac{1}{n^{\cancel{3}2}}\cdot \cancel{n}\cdot \cos nx = \frac{\cos nx}{n^2}$. Треба нам равномерна конв. реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$. По Вајерштрасовом критеријуму ово равн. конв на $\mathbb{R}$: $(\forall x\in\mathbb{R})\ \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ конв. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ р.к. на $\mathbb{R}$

$\xRightarrow{\text{послед.}}$ f јесте диф. на $\mathbb{R}$.

22.12.2018.

Степени редови

Деф $x_0\in\mathbb{R}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ – низ реалних бројева. Функционални ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ називамо степени ред:

$X := D_S = \{t\in\mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n$ конвергира$\}$

област конв. степеног реда

- $0^n=0$, $0^0=1$.

0^0, A,B коначни скупови, $|A|,|B|\in\mathbb{N}_0$, $B^A=\{f:A\to B\}$

$|B^A|=|B|^{|A|}$, $1=|\{\emptyset\}|=|\emptyset^{\emptyset}|=|\emptyset|^{|\emptyset|}=0^0$

пример $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $x_0=0$ $a_n=1$, $n\in\mathbb{N}$ $X=(-1,1)$

Став $\bar{x}\in X$, $t\in\mathbb{R}$ такав да $|t-x_0|<|\bar{x}-x_0| \Rightarrow t\in X$. Штавише $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n$, овај ред апсолутно конвергира.

Доказ

$$0\le |a_n(t-x_0)^n| = \underbrace{|a_n(\bar{x}-x_0)^n|}_{\to 0\ (\bar{x}\in X)}\cdot \underbrace{\left(\frac{|t-x_0|}{|\bar{x}-x_0|}\right)^n}_{q<1} \Rightarrow M\cdot q^n$$

$(\exists M>0)(\forall n\in\mathbb{N}_0)\ |a_n(\bar{x}-x_0)^n|\le M$ (за сваки конв. ред важи да је огр

$\sum_{n=0}^{\infty} M\cdot q^n$ конвергира јер је $q<1$

$\overset{\text{Пр.к.}}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(t-x_0)^n|$ конв. ред.

* $R := \sup \overbrace{\{|t-x_0| \mid t\in X\}}^{=:E} = \sup_{t\in X}|t-x_0|$

полупречник конвергенције степеног реда

Став а) $R=0 \Rightarrow X=\{x_0\}$;

б) $R=+\infty \Rightarrow X=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$;

в) $R\in(0,+\infty) \Rightarrow (x_0-R,x_0+R) \overset{(1)}{\subseteq} X \overset{(2)}{\subseteq} [x_0-R,x_0+R]$

Доказ

(А) $t\in X \Rightarrow 0\le |t-x_0| \in E\ (:=\{|t-x_0| \mid t\in X\})$

$\Rightarrow 0\le |t-x_0| \le \sup E = 0 \Rightarrow |t-x_0| = 0$ тј. $t = x_0$

(В) (1) $t\in (x_0-R, x_0+R)$? $t\in X$?

$|t-x_0| < R = \sup E \Rightarrow |t-x_0|$ није горње ограничење скупа E

$\Rightarrow (\exists \bar{x}\in X)\ \underbrace{|\bar{x}-x_0|}_{\in E} > |t-x_0| \xRightarrow{\text{став}} t\in X$

(2) $t\in X$? $t\in [x_0-R, x_0+R]$?

$\Downarrow$

$|t-x_0|\in E \Rightarrow |t-x_0| \le \sup E = R$, $|t-x_0|\le R \Rightarrow t\in [x_0-R, x_0+R]$

(Б) $t\in\mathbb{R}$ $|t-x_0|$ није огр. скупа E (овај скуп нема горње огр. ($\sup = +\infty$)

$\Rightarrow (\exists \bar{x}\in X)\ \underbrace{|\bar{x}-x_0|}_{\in E} > |t-x_0| \xRightarrow{\text{став}} t\in X$.

- $\underbrace{(x_0-R, x_0+R)}_{\text{интервал конв. степ. реда}} \subseteq \underbrace{X}_{\text{област конв.}}$

- Степени ред апсолутно конв. на свом интервалу конвергенције

Теорема (Коши-Адамарова формула)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, R полупречник конвергенције. $\rho = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ тада

израчунат [illegible] [illegible] тачка нагомилавања

важи: *) $\rho\in(0,+\infty) \Rightarrow R = \frac{1}{\rho}$

б) $\rho = +\infty \Rightarrow R = 0$

в) $\rho = 0 \Rightarrow R = +\infty$

Доказ

(А) $t\in\mathbb{R}$. Пп $|t-x_0| > \frac{1}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{|t-x_0|} < \rho$

$\Rightarrow (\exists\varepsilon>0)\ \frac{1}{|t-x_0|} < \rho-\varepsilon$ тј. $(\rho-\varepsilon)|t-x_0| > 1$. $\sqrt[n]{|a_n|} > \rho-\varepsilon$ за бесконачно много $n\in\mathbb{N}$. $|a_n(t-x_0)^n| = (\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|t-x_0|)^n > ((\rho-\varepsilon)|t-x_0|)^n > 1$.

$\Rightarrow a_n(t-x_0)^n \not\to 0$ (јер знамо да њу је бесконачно много чланова овде)

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n$ дивергира тј. $t\notin X$. Доказали смо: $|t-x_0| > \frac{1}{\rho} \Rightarrow t\notin X$ и контрапозицију ове импликације $t\in X \Rightarrow \underbrace{|t-x_0|}_{\in E} < 1/\rho$

$\Rightarrow 1/\rho$ јесте једно горње ограничење скупа $E \Rightarrow R\le\frac{1}{\rho}$ јер $R=\sup E$

$R \overset{?}{=} 1/\rho$. Птс: $R < 1/\rho$ $(\exists t \in \mathbb{R})$ $R < |t-x_0| < \underline{\underline{1/\rho}} \Rightarrow \frac{1}{|t-x_0|} > \rho$

$$\rho \quad \rho+\varepsilon \quad \frac{1}{|t-x_0|}$$

$\Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)$ т.д. $\frac{1}{|t-x_0|} > \rho + \varepsilon$ тј. $(\rho+\varepsilon)|t-x_0| < 1$. $(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0)\ \sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \varepsilon$

(јер је ρ највећа тачка нагомилавања низа) $\sqrt[n]{|a_n(t-x_0)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|t-x_0| < \underbrace{(\rho+\varepsilon)}_{=q}$

$0 < q < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(t-x_0)^n|$ конвергира (Кошијев корени критеријум

први део (*)), $t \in X$ $|t-x_0| \in E \Rightarrow |t-x_0| \leq \sup E = R$ ↯ $R = \frac{1}{\rho}$

горњи и доњи lim се поклапају

* Ако постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, онда $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

* Ако постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, онда постоји и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ и они су једнаки

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Последица: Ако постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, онда је $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Примери: Одреди област конвергенције степеног реда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ $\quad (-1,1) \subseteq X \subseteq [-1,1]$

- $-1 \in X$?: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ конв. по Лајбницу $\underline{-1 \in X}$
- $1 \in X$?: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира $\underline{1 \notin X}$

$\Bigg\}$ $X = [-1, 1)$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n^2}$

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = 1$ $\quad (-1,1) \subseteq X \subseteq [-1,1]$

- $-1 \in X$?: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ конв $\quad -1 \in X$
- $1 \in X$?: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конв $\quad 1 \in X$

$\Bigg\}$ $X = [-1, 1]$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$, $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow X = \{0\}$

$a_n = n!$, $x_0 = 0$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n!}$, $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = +\infty \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}(3+(-1)^n)^n(x+5)^n$, $a_n=(3+(-1)^n)^n$ $\quad x_0=-5$

$\rho \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(3+(-1)^n)^n}=\lim_{n\to\infty}(3+(-1)^n)$, $\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}(3+(-1)^n)=4 \quad R=1/4$

$(-5-1/4, -5+1/4)\subseteq X\subseteq[-5-1/4,-5+1/4]$

• $-21/4\in X$?: $\sum_{n=0}^{\infty}(3+(-1)^n)^n(-1/4)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n(-1)^n}_{b_n}$

$b_{2k}\not\to 0 \Rightarrow b_n\not\to 0 \Rightarrow$ ред дивергира $\quad -21/4\notin X$

• $-19/4\in X$?: $\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n}_{c_n}$ $\quad c_{2k}=1\not\to 0 \Rightarrow c_n\not\to 0$ див. $-19/4\notin X$ $\Big\}\ X=(-21/4,-19/4)$

Равномерна конвергенција степених редова

22.12.2018.

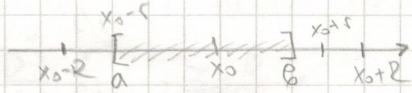
*Да ли $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ равномерно конвергира на X? - У општем случају, не.

пример $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, $X=(-1,1)$ не конв. равн. на $(-1,1)$ јер $x^n\not\rightrightarrows 0$ на $(-1,1)$

Теорема Степени ред $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ $(*)$ равномерно конв. на сваком сегменту $[a,b]\subseteq X$.

доказ

Доказујемо само случај $[a,b]\subseteq(x_0-R,x_0+R)\Rightarrow r=\max\{|a-x_0|,|b-x_0|\}$, $0<r<R$



$[a,b]\subseteq[x_0-r,x_0+r]\subseteq(x_0-R,x_0+R)$

$(*)$ равномерно конв на $[x_0-r,x_0+r]$. Вајерштрас:

(1) $(\forall n\in\mathbb{N}_0)(\forall x\in[x_0-r,x_0+r])\quad |a_n(x-x_0)^n|<|a_n||x-x_0|^n\le|a_n|\cdot r^n$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot r^n=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(\underbrace{x_0+r}_{x}-x_0)^n|$ конв. јер $x_0+r\in(x_0-R,x_0+R)$

$\Rightarrow (*)$ равн. конв. на $[x_0-r,x_0+r]$ па и равн. конв. на сваком подсегменту.

Последица Нека је S сума реда $(*)$ $\quad (S: \overset{D_S}{X}\to\mathbb{R})$

А) S је непрекидна на X

Б) S се може интегралити члан по члан на сваком сегменту садржаном у X

В) S је диф. на (x_0-R,x_0+R) и може се диф. члан по члан на (x_0-R,x_0+R)

$(\forall x\in(x_0-R,x_0+R))\quad S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}$

Доказ (последице)

(А) $t \in X$, $t \in [a,b] \subseteq X$, $b_n(x) = a_n(x-x_0)^n$ непр. на $[a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n(x-x_0)^n}_{b_n}$ равн. конв. на $[a,b]$ => S непр. на $[a,b]$

=> S непр. у тачки t.

(Б) $[a,b] \subseteq X$ $(\forall n)$ $b_n \in \mathcal{R}([a,b])$ => $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x)$ се може интегралити члан по члан на $[a,b]$.

(В) $(\forall n)$ b_n диф. на (x_0-R, x_0+R) (2) ТМА (диференцијаб.) 22.12.

(1) тривијално је

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}}_{\text{степени ред}}$? равн. конв. на сваком $[a,b] \subseteq (x_0-R, x_0+R)$?

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|n a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

=> на сваком $[a,b] \subseteq (x_0-R, x_0+R)$ равн. конв.

=> важи В)

* S је бесконачно диф. ф-ја на (x_0-R, x_0+R)

Тејлоров ред, развијање елементарних ф-ја у степене редове.

Став Нека је ф-ја f једнака суми степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ на некој околини тачке x_0 ($f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ за све $x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$).
Тада је f бесконачно диференцијабилна на тој околини и важи
$(\forall n\in\mathbb{N}_0)\quad a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Доказ

$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ бесконачно диф. на (x_0-R, x_0+R).

$f(x)=S(x)$ за $x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \Rightarrow f$ је бесконачно диф. на $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}=f'(x)$, за $x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

$f''(x)=S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$ . . .

$k\in\mathbb{N}_0$: $f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$, за $\forall x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

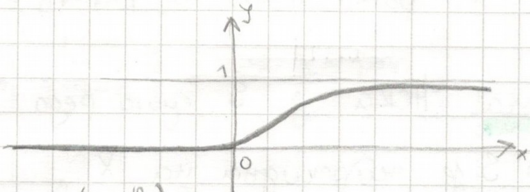
$x=x_0$: $f^{(k)}(x_0)=\underbrace{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}_{k!}\cdot a_k\cdot 0^{0=1} \Rightarrow a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Деф Нека је ф-ја f бесконачно дифер. на некој околини тачке $x_0\in\mathbb{R}$. Степени ред $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ називамо Тејлоровим редом ф-је f у тачки x_0.

- Тејлоров ред у тачки $x_0=0$ називa се Маклоренов ред ф-је f: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

- Ако је ф-ја f једнака суми степеног реда на околини тачке x_0, тада је тај ред баш Тејлоров ред

Пример $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0\\ \underbrace{e^{-1/x}}_{>0}, & x>0\end{cases}$



- f је бесконачно диф. у свим тачкама (на $\mathbb{R}$)
- сви изводи у 0 су једнаки нули

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0\neq f(x)$ (ни на једној околини нуле)

- није једнака суми свог Маклореновог реда

Деф. Ф-ја f је аналитичка у тачки x_0 ако је једнака суми свог Тејлоровог реда на некој околини тачке x_0: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

* f аналитичка у x_0 $\Rightarrow$ f бесконачно диф. на некој околини x_0
$\not\Leftarrow$ (претх. пример)

~Развој неких елементарних ф-ја у Маклоренове редове~

1. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА Ф-ЈА

$f(x)=e^x$, $D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=e^x, \dots, f^{(n)}(x)=e^x$

$f^{(n)}(0)=e^0=1$

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}$ Маклоренов ред (конв. за $x\in\mathbb{R}$)

* Да ли је $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$?

$\longrightarrow$ фиксирамо $x\in\mathbb{R}$. $f(x)=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}_{=M_n(x)}+\overbrace{R_n(x)}^{\text{остатак}}$ $/\lim_{n\to\infty}$

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $\exists\xi\in(0,x)$ ако је $x>0$, $\xi=\xi(n,x)$
(Лагранжов облик остатка) $\exists\xi\in(x,0)$ ако је $x<0$ (зависи од n и x)

$0\le|R_n(x)|=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\cdot|x|^{n+1}$ $(\xi<|x|)$ $\le e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

ТМА о 2 полицајца: $R_n(x)\longrightarrow 0$.

$\Rightarrow e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$.

2. СИНУС

$f(x)=\sin x$

$f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{iv}(x)=\sin x$

$f^{(2k)}(x)=(-1)^k\sin x$, $k\in\mathbb{N}_0$ $\qquad f^{(2k)}(0)=0$

$f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k\cos x$, $k\in\mathbb{N}_0$ $\qquad f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$ Маклоренов ред

$\longrightarrow f(x)=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{=M_{2n+1}(x)}+R_{2n+1}(x)$ $/\lim_{n\to\infty}$, $x\in\mathbb{R}$

$0\le|R_{2n+1}(x)|=\left|\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right|=\frac{\overbrace{|\sin\xi|}^{\le 1}}{(2n+1)!}|x|^{2n+2}\le\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+1)!}\longrightarrow 0$

$\Rightarrow R_{2n+1}\xrightarrow{n\to\infty}0$. $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in\mathbb{R}$

3. КОСИНУС

$f(x) = \cos x$

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}, \quad \underline{x \in \mathbb{R}}$$

Маклоренов ред

4. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА #2

$\alpha \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (1+x)^{\alpha}$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1), \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} \Rightarrow \binom{\alpha}{n}, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}$

$\binom{\alpha}{0} := 1 \qquad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n}$ (биномни развој)

Маклоренов ред

* За које x важи $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$?

→ 1° $\underline{\alpha \in \mathbb{N}_0}$: $\binom{\alpha}{n} = 0$ за $n > \alpha$

$\rightarrow (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \underline{x \in \mathbb{R}}$

2° $\underline{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0}$:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{\alpha(\alpha-1)}\cdot\ldots\cdot\cancel{(\alpha-n+1)}}{\cancel{n!}} \cdot \frac{(n+1)\cancel{X}}{\cancel{\alpha(\alpha-1)}\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|\alpha-n|} = 1$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \underline{\underline{x \in (-1,1)}} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

област конв. реда

5. ЛОГАРИТАМСКА Ф-ЈА

$f(x) = \ln(1+x), \quad D_f = (-1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \underset{|x|=|-x|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad \underline{x \in (-1,1)}$$

Њутн-Лајб. ф-ла

$$\longrightarrow \underline{x \in (-1,1)}, \quad f(x) = f(x) - \overset{0}{f(0)} = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1 \qquad \underline{\underline{X = (-1, 1]}} \text{ област конв.}$$

$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1, 1], \quad f(x) = S(x), \ x \in (-1,1).$ S је

непр. на $(-1, 1] \Rightarrow S$ је непр. у 1. f непр. на $D_f \Rightarrow f$ непр. у 1.

$$f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} S(x) = S(1).$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}} \quad \underline{\underline{x \in (-1, 1]}}$$

• за $x=1$: $\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ — битно је одакле иде n у сумама

примери Одредити суме:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} - 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e^3 - 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(први знак једнакости: треба оба реда да конвергирају)

$= e^3 - 1 - 2e$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}}_{\ln 2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}}_{\ln 2 - 1} = 2\ln 2 - 1$

27.12.2018.

Фуријеови редови

ПРЕД-ХИЛБЕРТОВИ РЕДОВИ

Деф Нека је X векторски простор над пољем $\mathbb{R}$. Скаларни производ на X јесте ф-ја $\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ таква да за $(\forall x,y,z \in X)(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R})$ важе:

1) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$, линеарност по 1. промењивој

2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, симетричност

3) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0$ акко $x = 0$ (нула вектор).

* Векторски простор X са фиксираним скаларним производом се зове пред-Хилбертов простор.

* $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle \overset{(2)}{=} \langle \lambda y + \mu z, x \rangle \overset{(1)}{=} \lambda \langle y, x \rangle + \mu \langle z, x \rangle \overset{(2)}{=} \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$

→ скаларни производ је линеаран и по 2. промењивој (*)

⇒ Скаларни производ је билинеарна ф-ја.

пример $\mathbb{R}^n$ - векторски простор над $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}$$

* Стандардни (Еуклидски) скаларни производ:

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i .$$

Теорема X је пред-Хилбертов простор и нека су $x, y \in X$ два вектора. Тада важи:

А) $|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}$ Коши-Шварцова неједнакост

Б) $\sqrt{\langle x+y, y+x\rangle} \leq \sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}$ Неједнакост Минковског

Доказ

(А) $(\forall \lambda\in\mathbb{R})\ 0 \overset{(3)}{\leq} \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \overset{(1)}{=} \langle x, x+\lambda y\rangle + \lambda\langle y, x+\lambda y\rangle \overset{(*)}{=}$

$\overset{(*)}{=} \langle x,x\rangle + \lambda\langle x,y\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle \overset{(2)}{=}$

$\overset{(2)}{=} \underbrace{\langle y,y\rangle}_{a}\cdot\lambda^2 + 2\underbrace{\langle x,y\rangle}_{b}\cdot\lambda + \underbrace{\langle x,x\rangle}_{c}$

$b^2 - 4ac \leq 0 \Rightarrow 4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle \leq 0 \ /:4$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \ /\sqrt{\ }$.

(Б) $\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \leq \langle x,x\rangle + 2|\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle$

$\overset{(A)}{\leq} \sqrt{\langle x,x\rangle}^2 + 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}^2 =$

$= \left(\sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}\right)^2 \ /\sqrt{\ }$.

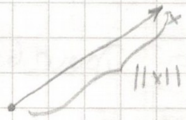
Пример $\mathbb{R}^n$

$|x_1y_1 + \dots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$ (Коши-Шварц)

$\sqrt{(x_1+y_1)^2 + \dots + (x_n+y_n)^2} \leq \sqrt{x_1 + \dots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$ (Минковски)

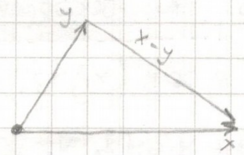
Деф X пред-Хилбертов простор, и нека су $x, y \in X$. Норма (дужина, интензитет) вектора x је:

$$\boxed{\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}}$$



(геометријски)

Растојање између вектора x и y: $\boxed{\|x-y\|}$ норма разлике



* Особине норме: $\forall x, y \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| \iff x = 0$

2. $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|$

   • Посебно: $\|-x\| = \|x\|$, $\|x - y\| = \|y - x\|$

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неједнакост Минковског) (троугла)

   • $\|x - y\| = \|x + (-y)\| \leq \|x\| + \|-y\| = \|x\| + \|y\|$

   $\Rightarrow$ $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$ и $\|x \pm y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big|$

   $\rightarrow$ $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$

   $\|x - y\| = \|y - x\| \geq \|y\| - \|x\| \Rightarrow \|x - y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big|$.

   $\rightarrow$ $\|x + y\| = \|x - (-y)\| \geq \big| \|x\| - \underbrace{\|-y\|}_{\|y\|} \big|$.

4. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (Коши-Шварц)

* Надаље подразумевамо да имамо X - пред-Хилбертов простор.

Деф Нека је дат низ вектора $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у X и $x \in X$. Кажемо да низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергира ка вектору x, у ознаци: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ или $x_n \to x$, ако је $\lim\limits_{n \to \infty} \underbrace{\|x_n - x\|}_{\text{низ растојања } \in \mathbb{R}} = 0$.

• вектор x је гранична вредност низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

• ако вектор x постоји, одг. низ вектора је конвергентан.

лимес може да прође кроз лимес норме

Лема Ако низ вектора $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \to x$ ($\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$), онда $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\| = \|x\|$.

• (непрекидност норме)

Доказ (преко особине (3) за разлику)

$\lim\limits_{n \to \infty} \big| \|x_n\| - \|x\| \big| \overset{?}{=} 0$, $0 \leq \underbrace{\big| \|x_n\| - \|x\| \big|}_{\Rightarrow \to 0} \leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0}$.

Став (**) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle$.

• (непрекидност скаларног производа)

Доказ

$\lim\limits_{n \to \infty} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \overset{?}{=} 0$, $0 \leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x,$

$= |\langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle|$

$$\overset{(3)}{\leq} |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \overset{(4)}{\leq} \underbrace{\underbrace{\|x_n\|}_{\xrightarrow{\text{пеша}} \|x\|}\underbrace{\|y_n - y\|}_{\xrightarrow{n} 0}}_{\to 0} + \underbrace{\underbrace{\|x_n - x\|}_{n \to 0}\|y\|}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \to 0.$$

* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ вектора у X

$$\underbrace{S_n := x_1 + x_2 + \dots + x_n}_{\text{сабирање вектора}} = \sum_{k=1}^{n} x_k \quad , \quad \Big(\underbrace{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}_{\text{општи чл.}}, \underbrace{(S_n)_{n\in\mathbb{N}}}_{\text{низ парц. сума}}\Big) \text{ (све су вектори)}$$

– уређен пар ова два низа називамо редом вектора у X

$$\Big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) \stackrel{..}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

* Ред $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ конвергира ако низ парц. сума $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира.

• Граничну вр. $s = \lim_{n\to\infty} S_n$ називамо сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

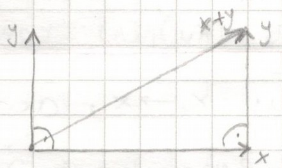
$$s = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Деф $x, y \in X$, кажемо да је вектор x ортогоналан (нормалан) на y, у ознаци $x \perp y$, ако је $\langle x, y\rangle = 0$.

• $(\forall x \in X)$ важи $x \perp 0$

$$\longrightarrow \langle x, 0\rangle = \langle x, 0 \cdot x\rangle \overset{\text{алин.}}{=} 0\langle x, x\rangle = 0.$$

Теорема (Питагорина теорема)



Ако су $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Доказ

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle \overset{\text{алинеар.}}{=} \langle x, x\rangle + 2\underbrace{\cancel{\langle x, y\rangle}}_{x\perp y,\ 0} + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

10.01.2019.

Ортонормирани системи. Фуријеови редови.

Деф (X је пред-Хилбертов простор) Скуп вектора $\{e_i \mid i\in I\} \subseteq X$ (не мора бити коначан скуп) називамо **ортонормираним системом** у X ако је $(\forall i,j\in I)$ испуњено да је

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 0, & i\neq j \\ 1, & i=j \end{cases}$$

тј. $\|e_i\| = 1$, $e_i \perp e_j$ за $i\neq j$

Пример $\mathbb{R}^n$, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ - ортонормиран систем, $e_i = (0,0,\dots,\underset{i\text{-то место}}{1},0,\dots,0)$

- ако узмемо $1\le k<n$ и узмемо првих k вектора: $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, то је опет ортонормиран систем
- ортонормиран систем не мора да буде база, али мора бити лин. нез.

Став Нека је $\{e_i \mid i\in I\}$ ортонормиран систем у $X \Rightarrow \{e_i \mid i\in I\}$ је линеарно **независан**.

Доказ

Када узмемо коначно много вектора (међусобно различитих) из I: $i_1, i_2, \dots, i_m \in I$ и узмемо реалне бројеве $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ и тд да је лин. комб. $\lambda_1 e_{i_1} + \lambda_2 e_{i_2} + \dots + \lambda_m e_{i_m} = 0_X$ (нула вектор).

Треба доказати да је $\lambda_k = 0$, $(\forall k\in[1,m])$.

$$0 = \langle \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_{i_j}}_{=0}, e_{i_k}\rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \underbrace{\langle e_{i_j}, e_{i_k}\rangle}_{=\begin{cases}0, & j\neq k\\ 1, & j=k\end{cases}} = \lambda_k \cdot 1 \Rightarrow \lambda_k = 0.$$

овде 1 сабирак

Деф Нека је $\{e_1, e_2, e_3, \dots\} = \{e_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ (бесконачан) ортонормиран систем у X и нека је $x\in X$. Реалне бројеве $\alpha_n = \alpha_n(x) := \langle x, e_n\rangle$, $n\in\mathbb{N}$ називамо **Фуријеовим коефицијентима** вектора x у односу на ортонормиран систем $\{e_n \mid n\in\mathbb{N}\}$.

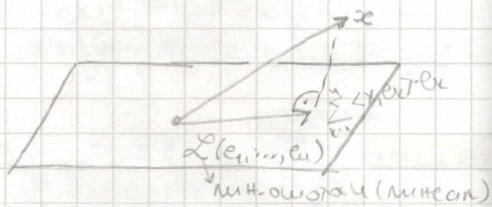
Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\alpha_n \cdot e_n}_{\text{вектор}} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \cdot e_n$ се зове **Фуријеов ред** вектора x у односу на ортонормиран систем $\{e_n \mid n\in\mathbb{N}\}$. (векторски ред)

<u>Став</u> Имамо ортонормиран систем у X, и $x \in X$. $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R})$

Важи неједнакост: $\|x - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle \cdot e_k}_{\text{n-та парц. сума Фуријеовог реда}}\| \le \|x - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k}_{\text{лин. комб. првих n вектора (подпростор)}}\|$, при чему важи

једнакост акко $\lambda_k = \langle x, e_k\rangle$, $(\forall k \in [1, n])$.

- Вектор (лин. омотача) који је најближи вектору x је n-та парц. сума Фуријеовог реда



Доказ

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\|^2 = \langle x - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k, x - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\rangle =$$

$$\overset{\text{билин.}}{=} \langle x, x\rangle - 2\langle x, \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\rangle + \langle \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j\rangle =$$

$$\overset{\text{-"-}}{=} \langle x, x\rangle - 2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \langle x, e_k\rangle + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_k\lambda_j \underbrace{\langle e_k, e_j\rangle}_{=\begin{cases}0, & j \neq k\\ 1, & j = k\end{cases}} =$$

$$= \langle x, x\rangle - 2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\langle x, e_k\rangle + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \cdot \lambda_k =$$

$$= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k^2 - 2\lambda_k\langle x, e_k\rangle + \underbrace{\langle x, e_k\rangle^2}_{\text{мобо}}) - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle^2 =$$

$$= \|x\|^2 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \langle x, e_k\rangle)^2}_{\geq 0} - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle^2$$

$$\Rightarrow \|x - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\|^2 \geq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle^2 \to \text{важи једнакост акко}$$

$\lambda_k = \langle x, e_k\rangle$, $\forall k \in [1, n]$.

$$(*)\ \underbrace{\|x - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\|^2}_{\geq 0} = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle^2.$$

<u>Теорема</u> (Беселова неједнакост) (за све ортонорм. системе)

$(\forall x \in X)$ бројевни ред $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle^2$ конвергира и важи $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle^2 \le \|x\|^2}$.

Доказ

Треба доказати да $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle^2 \le \|x\|^2$ (да је огр. одозго). ($\lim_{n\to\infty}$ (за доказ неједн.))

$\Rightarrow$ неједнакост важи из $(*)$.

<u>Последица</u> $(\forall x \in X)$ низ Фуријеових коеф. $\lim_{n\to\infty}\langle x, e_n\rangle = 0$.

- општи члан тежи 0 ако ред конвергира

* $0 \le \|x - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\| \searrow$ из $(*)$

* Да ли $\|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$?

$\Leftrightarrow$ Да ли је $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \cdot e_n$?

- У општем случају то не важи.
- Ортонормирани системи за које то важи су потпуни

Деф Кажемо да је ортонормирани систем $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ <u>потпун</u> (или да је ортонормирана база пред-Хилбертовог простора X) ако је: $(\forall x \in X)$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \cdot e_n .$$

Теорема (Парсевалова једнакост)

Ако је $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ <u>потпун</u> ортонормиран систем од X, онда је:

$$(\forall x \in X) \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 = \|x\|^2}$$

- Беселова неједнакост постаје једнакост ако је орт. систем потпун

Доказ

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \text{(из тога да је ортонормирана база)} =$$

$$= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n , \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \right\rangle =$$

$$= \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k , \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle = \text{(став (**) са претх. часа)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k , \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle = \text{(билинеарност)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle x, e_j \rangle \underbrace{\langle e_k, e_j \rangle}_{= \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}} =$$

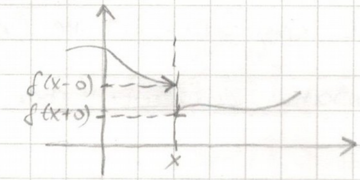
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 .$$

Пред-Хилбертов простор $C_0([-\pi,\pi])$. Тригонометријски Фуријеови редови

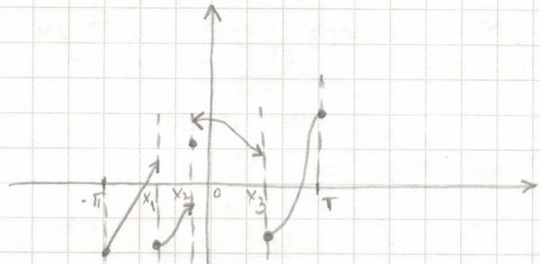
10.01.2019.

* $f(x-0) := \lim\limits_{t\to x_-} f(t)$ леви лимес

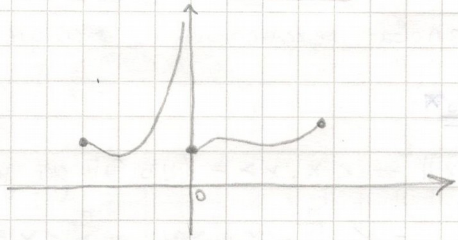
$f(x+0) := \lim\limits_{t\to x_+} f(t)$ десни лимес



Деф Нека је ф-ја f дефинисана на $[a,b]$. Кажемо да је f део по део непрекидна на сегменту $[a,b]$ ако $(\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in [a,b])$ т.д. је f непр. на $[a,b]\setminus\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $(\forall k=\overline{1,n})$: ако је $x_k > a$ $\exists$ коначан $f(x_k-0)$ или ако је $x_k < b$ $\exists$ коначан $f(x_k+0)$ (тј. x_k је прекид прве врсте).



пример део по део непр. ф-је



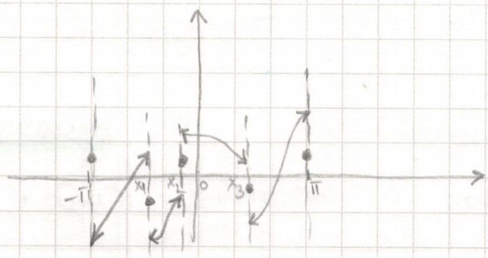
пример ф-је која није део по део непр. ($\lim \to +\infty$)

* $C_0([-\pi,\pi]) := \Big\{ f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R} \;\Big|\; f$ део-по-део-непр. на $[-\pi,\pi]$, $\forall x\in(-\pi,\pi)$ $f(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$,

$f(-\pi)=f(\pi)=\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}\Big\}$.

• f непр. у $x \Rightarrow f(x)=f(x-0)=f(x+0) \Rightarrow f(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ ✓

• (измењена слика одозго како би задовољавала услове):



• Може се доказати:

f део-по-део непр. на $[a,b] \Rightarrow f$ је огран. на $[a,b]$

* Ако је ф-ја ограничена и има коначно много прекида, мора бити интеграбилна, па важи: $\underbrace{C_0([-\pi,\pi])}_{\text{векторски потпростор од } R([-\pi,\pi])} \subseteq R([-\pi,\pi])$.

* За две ф-је $f,g \in C_0([-\pi,\pi])$ дефинишемо скаларни производ:

$$\boxed{\langle f,g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx}$$

• Овако деф. ф-ја $\langle\cdot,\cdot\rangle : C_0([-\pi,\pi])\times C_0([-\pi,\pi]) \to \mathbb{R}$ је скаларни производ на $C_0([-\pi,\pi])$. (→ је пред-Хилбертов простор)

<u>Теорема</u> Скуп ф-ја $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \dots\right\}$ јесте једна ортонормирана база пред-Хилбертовог простора $C_0([-\pi,\pi])$.

* $f \in C_0([-\pi,\pi])$

$$\alpha_0 = \alpha_0(f) := \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$n\in\mathbb{N}$ $$\alpha_n = \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$\beta_n = \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$\boxed{\alpha_0\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx + \beta_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right)}$$ Тригонометријски Фуријеов ред ф-је f

модификација

$a_0 := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha_0$; $n\in\mathbb{N}$: $a_n := \frac{\alpha_n}{\sqrt{\pi}}$, $b_n := \frac{\beta_n}{\sqrt{\pi}}$

$\Rightarrow$ $\underbrace{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx}_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\underbrace{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx}_{n\in\mathbb{N}}$

Нови облик фур. реда: $$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)}$$

* Из ТМА $\Rightarrow$ $f\in C_0([-\pi,\pi])$, $\left\| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right)\right\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

норма на 2 $= \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right)^2 dx \xrightarrow[\text{ТМА}]{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow$ Триг. фур. ред <u>конвергира</u>

* ? $(\forall x\in[-\pi,\pi])$ испуњено да је $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$?

- Да ли конв. тачка по тачка? → У општем случају, не!

• Довољан услов да би ово важило је да је ф-ја део-по-део глатка

Деф Нека је ф-ја f дефинисана на $[a,b]$. Кажемо да је f део по део глатка на $[a,b]$ ако $(\exists x_1,\dots,x_n \in [a,b])$ т.д је f глатка у свим осталим тачкама и $(\forall k=\overline{1,n})$

(диф. и f' непр.) тачке у којима није глатка

ако је $x_k > a$ $\exists$ коначан $f'(x_k - 0)$

ако је $x_k < b$ $\exists$ коначан $f'(x_k + 0)$.

Теорема Ако је ф-ја $f \in C_0([-\pi,\pi])$ и f је део-по-део глатка на $[-\pi,\pi]$, онда важи: $(\forall x \in [-\pi,\pi])$ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.