בס"ד

אלגברה מילולית

המורה : שולמית קמינסקי

פרק ראשון : מספרים בינאריים

מבוא

קימות בעולם שיטות ספירה שונות. חלק אנו מכירים. לדוגמא: שיטת הספירה הרומית (I,II,III,IV,V…IX,X, …), שיטת הספירה העברית (א, ב, ג, ...י, יא, יב,...כ, כא, ... ק,...) והשיטה העשרונית המוכרת לנו. שיטה זו נקראה השיטה הטבעית כי הילד שמתחיל לספור עושה זאת בדרך כלל באמצעות אצבעות ידיו – 10. אך שיטה זו שייכת גם למשפחה שלמה – משפחת הבסיסים.

בסיסים שונים

שיטת הבסיסים נקראת גם שיטת ה'פוזיציה' – מקום. העיקרון בשיטה הוא: <u>ערך המספר נקבע על פי מקומו</u>.

כדי להבין את השיטה - נתבונן בספרה 5 בשלושה המספרים העשרוניים הבאים : 325, 352, 532. במספר 325 – הספרה 5 מסמלת 5 יחידות, במספר 352 – הספרה 5 מסמלת 5 עשרות כלומר 50, ובמספר 532 – הספרה 5 מסמלת 5 מאות כלומר 500.

זאת אומרת בשיטה העשרונית המוכרת לנו – הספרה הימנית ביותר מצביעה על כמות היחידות במספר, הספרה השמאלית לה מצביעה על כמות העשרות במספר, הספרה השמאלית לספרת העשרות מצביעה על כמות המאות וכן הלאה. בסך הכל כמות היחידות הכללית במספר הוא:

$$532 = 2 + 30 + 500 = 2 * 1 + 3 * 10 + 5 * 100 = 2 * 10^0 + 3 * 10^1 + 5 * 10^2$$

ובצורה כללית : אם נסמן ספרה עשרונית כלשהיא הנמצאת במקום ה- i מימין באות a_i כאשר האינדקס i מקבל ערכים לסירוגין מ- 0 – המקום הימני ביותר , עד n - המקום השמאלי ביותר, כך שהמספר מיוצג על ידי n+1 ספרות. כלומר מספר עשרוני כללי- $N= a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$

ערכו של המספר: $N = a_0 * 1 + a_1 * 10 + a_2 * 100 + \ldots + a_n * 10^n$

או $N = a_0 * 10^0 + a_1 * 10^1 + a_2 * 10^2 + \ldots + a_i * 10^i + \ldots + a_n * 10^n$

את הביטוי האחרון אפשר לכתוב בצורה מצומצמת כך: $N = \sum_{i=0}^{n} a_i * 10^i$.

הסימן Σ (סיגמה) הוא סמל מתמטי המצביע על סכום האיברים המתקבלים מהאיבר הכללי תוך הצבה לסרוגין של כל המספרים הטבעיים בין הגבול התחתון (במקרה שלנו – 0) לבין הגבול העליון (המסומן במקרה שלנו n) בתוך האינדקס i .

בשיטת בסיס 10 כפי הידוע לנו קימות 10 ספרות : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 . וכן ערך הספרה יגדל פי 10 בכל פעם שנזיז אותה שמאלה מקום אחד.
קיימים בסיסים נוספים , בהמשך נעמיק בשימושיים יותר.

לדוגמה : שיטת בסיס 5. בשיטה זו קימות רק 5 ספרות : 0, 1, 2, 3, 4 . וכן ערך הספרה יגדל פי 5 בכל פעם שנזיז אותה שמאלה מקום אחד .

נקה את המספר 234 לפי בסיס 5 פרושו : $4 * 5^0 + 3 * 5^1 + 2 * 5^2 = 4 * 1 + 3 * 5 + 2 * 25 =$

$$4 + 15 + 50 = 69$$

זאת אומרת המספר 234 הרשום לפי בסיס 5 שווה למספר 69 הרשום לפי בסיס 10.

כותבים זאת גם כך $(234)_5 = (69)_{10}$

תרגלי גם : 270 לפי בסיס 9, (= 225 לפי בסיס 10).

1201 לפי בסיס 3 (= 46 לפי בסיס 10)

<u>כללי</u> : כדי לכתוב מספר לפי בסיס n , זקוקים למקסימום n סימנים שונים של ספרות. (כפי שראינו כבסיס 10 ו – 5). בכל בסיס הספרה הראשונה היא 0. תפקיד ה – 0 הוא שומר מקום, ולכן חשיבותו רבה. באופן כללי – כאשר נתון לנו מספר בבסיס b כלשהוא ,כדי למצוא את ערכו בבסיס 10 נשתמש בנוסחה הבאה:

$$.\ N = \sum_{i=0}^{n} a_i * b^i$$

בסיס בעל חשיבות רבה בעולם המחשבים הוא בסיס 2. בבסיס 2 יש רק 2 ספרות 0 ו – 1. (גם בחשמל יש רק 2 מצבים – או שיש, או שאין) המספרים במיוצגים לפי בסיס 2, נקראים גם מספרים בינאריים.

לדוגמה : $(1010)_2 = (10)_{10}$ $(110101)_2 = (53)_{10}$.

בסיס 8 משמש לכתיבה מקוצרת של בסיס 2 (בהמשך נראה כיצד) . מספרים הכתובים בבסיס זה נקראים מספרים אוקטליים. בבסיס זה 8 ספרות : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. נסי למצוא את צורתם העשרונית של המספרים האוקטליים הבאים $(\mathbf{752})_8 = (490)_{10}$, $(\mathbf{406})_8 = (262)_{10}$.

נבדוק כעת כיצד נרשום מספר לפי בסיס גדול מ – 10. נקח את בסיס 16 . מספרים הכתובים לפי בסיס 16 נקראים מספרים הקסדצימליים. בבסיס זה אנו זקוקים ל - 16 ספרות שונות, לשם כך נשתמש באותיות אנגליות גדולות. אם כך כל הספרות ההקסדצימליות הן:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

<u>לוח ספירה בבסיס 5</u>

0 1 2 3 4

10 11 12 13 14

20 21 22 23 24

30 31 32 33 34

40 41 42 43 44

100 101 104

110 114

...

140 141 ...144

200 ....

<u>לוח ספירה בבסיס 2</u>

0 1 10 11 100 101 110 111 1000 1001 1010 1011 1100 1101 1110 1111

10000 10001 10010 10011 10100 10101 10110 10111 11000 11001 ....

<u>לוח ספירה בבסיס 16</u>

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	2A	2B	C2	2D	2E	2F
30	31				....				39	3A		....		3E	3F
40								....							4F
								....							
90	91				....			99	99	9A	9B		....	9E	9F
A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	AA	AB	AC	AD	AE	AF
B0	B1				....			B8	B9	BA	BB		....	BE	BF
								....							
F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	FA	FB	FC	FD	FE	FF
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	10A	10B	10C	10D	10E	10F
110					....				119	11A			....		11F
								....							
1A0	1A1				....				1A9	1AA		....		1AE	1AF
								....							
1F0	1F1				....				1F9	1FA			....		1FF
200	201				....				209	20A			....		20F
								....							
2F0	2F1				....				2F9	2FA			....		2FF
								....							
F00	F01				....				F09	F0A			....		F0A
								....							
FF0	FF1				....				FF9	FFA			....		FFF

נביא דוגמה של רישום מספר לפי בסיס 16 ונרשום את אותו מספר לפי בסיס 10.

$$(9A1D)_{16} = D * 16^0 + 1 * 16^1 + A * 16^2 + 9 * 16^3 =$$

$$= 13 * 1 + 1 * 16 + 10 * 256 + 9 * 4096 = 13 + 16 + 2560 + 36864 = 39453$$

כלומר : $(9A1D)_{16} = (39453)_{10}$.

לפניך טבלה בת 5 עמודות , מלאי בה לפחות 50 שורות. שמרי טבלה זו לאורך כל השנה.

בסיס 16 הקסדצימלי	בסיס 8 אוקטלי	בסיס 4	בסיס 2 בינארי	בסיס 10 דצימלי
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	10	2
3	3	3	11	3
4	4	10	100	4
5	5	11	101	5
6	6	12	110	6
7	7	13	111	7
8	10	20	1000	8
9	11	21	1001	9
A	12	22	1010	10
B	13	23	1011	11
C	14	30	1100	12
D	15	31	1101	13
E	16	32	1110	14
F	17	33	1111	15
10	20	100	10000	16
11	21	101	10001	17
12	22	102	10010	18
13	23	103	10011	19
14	24	110	10100	20
15	25	111	10101	21
16	26	112	10110	22
17	27	113	10111	23
18	30	120	11000	24
19	31	121	11001	25
1A	32	122	11010	26
				. . .
32	62	302	110010	50

מעבר מבסיס לבסיס

כדי לעבור מבסיס לבסיס נתייחס ל -3 מקרים :

1. מעבר מבסיס כלשהוא b שונה מ- 10 לבסיס 10.

נקח מספר כלשהוא N בעל n+1 ספרות $(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)$

ערכו של המספר בבסיס 10 יהיה :

$$N = a_0 * b^0 + a_1 * b^1 + \dots + a_i * b^i + \dots + a_{n-1} * b^{n-1} + a_n * b^n$$

או בקיצור : $\sum_{i=0}^{n} a_i * b^i$ **כפי שכבר ראינו.**

דוגמה 1 : $(30213)_4 = 3 * 4^0 + 1 * 4^1 + 2 * 4^2 + 0 * 4^3 + 3 * 4^4 =$

$= 3 * 1 + 1 * 4 + 2 * 16 + 0 * 64 + 3 * 256 = 3 + 4 + 32 + 0 + 768 = 807$

$(30213)_4 = (807)_{10}$

דוגמה 2 : $(725)_8 = 5 * 8^0 + 2 * 8^1 + 7 * 8^2 = 5 * 1 + 2 * 8 + 7 * 64 =$

$= 5 + 16 + 448 = 469$

$(725)_8 = (469)_{10}$

2. מעבר מבסיס 10 לבסיס כלשהוא b.

נקח את המספר בבסיס 10 ונחלק ל – b , את השארית נרשום בתור הספרה הימנית של המספר החדש. את המנה נמשיך לחלק ל – b . את השארית החדשה נרשום שמאלה לספרה הקודמת. כך נמשיך עד שהמנה שנקבל תהיה קטנה מ- b .נרשום את השארית האחרונה , ואת המנה נרשום בתור הספרה השמאלית ביותר (זכרי בפעולת החילוק האחרונה רושמים גם את השארית וגם את המנה). המספר החדש שקיבלנו הוא המספר בבסיס b.

דוגמה 1 : $(238)_{10} = (?)_3$

$8 : 3 = 2\ (\underline{2}) \quad 26 : 3 = 8\ (\underline{2}) \quad 79 : 3 = 26\ (\underline{1}) \quad 238 : 3 = 79\ (\underline{1})$

$(238)_{10} = (22211)_3$

דוגמה 2 : $(420)_{10} = (?)_2$

$52 : 2 = 26\ (\underline{0}) \quad 105 : 2 = 52\ (\underline{1}) \quad 210 : 2 = 105\ (\underline{0}) \quad 420 : 2 = 210\ (\underline{0})$

$3 : 2 = \underline{1}\ (\underline{1}) \quad 6 : 2 = 3\ (\underline{0}) \quad 13 : 2 = 6\ (\underline{1}) \quad 26 : 2 = 13\ (\underline{0})$

$(420)_{10} = (110100100)_2$

3. <u>מעבר מבסיס כלשהוא לבסיס כלשהוא.</u>

בדרך כלל כדי לעבור מבסיס b1 לבסיס b2 כאשר שניהם שונים מ – 10 חייבים לעבור דרך בסיס 10. כלומר נעבור מבסיס b1 לבסיס 10 (מקרה 1) ומשם לבסיס b2 (מקרה 2).

פרט למקרה פרטי שבו $b1 = (b2)^n$ כלומר ש- b1 הוא חזקה שלמה של b2. ואז כל ספרה של b1 שווה ל- n ספרות של b2.

לדוגמה: $(101010)_2 = (\ ?\ )_8$ כדי להעביר מבסיס 2 ל – 8 יש אפשרות להעביר את המספר לבסיס 10 (42), ואח"כ להעביר מבסיס 10 לבסיס 8 (52).

אפשרות קצרה יותר וחכמה יותר היא האפשרות הבאה: כיון ש- $8 = 2^3$ כל 3 ספרות בבסיס 2 שוות לספרה אחת בבסיס 8. לפי הטבלה הבאה (שהיא למעשה החלק הראשון בטבלת המספרים הקודמת שיצרנו):

בסיס 2	000	001	010	011	100	101	110	111
בסיס 8	0	1	2	3	4	5	6	7

כלומר נחלק את המספר בבסיס 2 לקבוצות בנות 3 ספרות מימין, וכל קבוצה נהפוך לבסיס 8.

בדוגמה שלנו <u>010</u> <u>101</u> = 52. וכן להפך – כל ספרה בבסיס 8 תהפוך ל-3 ספרות בבסיס 2.

לדוגמה : $(7035)_8 = (\ ?\ )_2$ 5 = 101 ,3 = 011 ,0 = 000 ,7 = 111. ולכן $(7035)_8 = (111\ 000\ 011\ 101)_2$.

השיטה עובדת גם בקשר בין בסיס 2 לבסיס 16, שכן $16 = 2^4$.

לדוגמה : $(A5C1)_{16} = (\ ?\ )_2$

$(A)_{16} = (1010)_2 \quad (5)_{16} = (0101)_2 \quad (C)_{16} = (1100)_2 \quad (1)_{16} = (0001)_2$

ולכן : $(A5C1)_{16} = (1010010111000001)_2$

יש לשים לב שה-0 עוזר לנו גם כאן. לדוגמה הספרה 5 בבסיס 16 שווה ל- 101 בבסיס 2 אך כשנהפוך מספר מבסיס 16 ל- 2 נתרגם אותו ל-0101 כיוון שאנו צריכים 4 ספרות.

<u>ייצוג שברים</u>

ייצוג השברים מציית לאותם הכללים בהם אנו משתמשים לרישום מספרים שלמים לפי בסיס מסויים. בתור דוגמה נתחיל עם שבר עשרוני :

$$(0.238) = 2 * \frac{1}{10} + 3 * \frac{1}{100} + 8 * \frac{1}{1000}$$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$= 2 * 10^{-1} + 3 * 10^{-2} + 8 * 10^{-3}$$

זאת אומרת הספרה הנמצאת במקום הראשון מימין לנקודה מצביעה על כמות העשיריות במספר, הספרה השניה מימין לנקודה – על כמות המאיות, השלישית – על כמות האלפיות וכן הלאה.

באופן כללי – אם נרשום שבר לפי בסיס b כלשהוא ב – n ספרות אחרי הנקודה הוא יראה כך:

$$(N)_b = (0.\,a_{-1}\,a_{-2} \ldots a_{-n})_b = a_{-1} * b^{-1} + a_{-2} * b^{-2} + \ldots + a_{-i} * b^{-i} + \ldots + a_{-n} * b^{-n}$$

או בצורה מצומצמת : $(N) = \sum_{i=-1}^{-n} a_i * b^i$

ובשבר בינארי : $(0.1011) = 1 * 2^{-1} + 0 * 2^{-2} + 1 * 2^{-3} + 1 * 2^{-4} = ½ + 0 + 1/8 + 1/16 =$
$= 11/16 = 0.6875$

$(0.1011)_2 = (0.6875)_{10}$

<u>העברת שברים מבסיס לבסיס</u>

1. כדי לעבור מבסיס כלשהוא לבסיס 10 נכפול כל ספרה בבסיס בחזקת מינוס המקום של הספרה מימין לנקודה, ונחבר את המכפלות (כפי שראינו בקטע הקודם).

2. כדי לעבור מבסיס 10 לבסיס כל שהוא נכפול את השבר כולו בבסיס. את החלק השלם נרשום מימין לנקודה ואת החלק השבור נמשיך לכפול בבסיס. את השלם החדש נרשום מימין לספרה הקודמת ואת החלק השבור החדש נמשיך לכפול. כך עד שהחלק השבור שווה 0 או עד שהגענו למספר ספרות מקסימלי אחרי הנקודה.

הערה : התהליך של מעבר שבר מבסיס לבסיס הוא לא תמיד סופי, לדוגמה $(0.1)_3 = (0.333\ldots)_{10}$ וכן $(0.2)_{10} = (0.00110011\ldots)_2$.

דוגמה : $(0.375)_{10} = (\ ?\ )_2$

$0.375 * 2 = \underline{0}.75 \quad 0.75 * 2 = \underline{1}.5 \quad 0.5 * 2 = \underline{1}.0$

ולכן $(0.375)_{10} = (0.011)_2$

3. גם הכללים למעבר מבסיס כלשהוא לבסיס כלשהוא קיימים כאן, כלומר כאשר $b_2 = (b_1)^n$ אז כל n ספרות בבסיס b_1 שווה לספרה אחת בבסיס b_2 ולהפך. ולא חיבים לעבור דרך בסיס 10.

לדוגמה: $(0.32)_8 = (0.011010)_2$

$(0.0101101)_2 = (0.\underline{0101}\ \underline{1010})_2 = (0.5A)_{16}$

הערה : במספרים שלמים כדי להשלים לקבוצות שלמות של מספרים- מוסיפים אפסים קדימה- שמאלה, ובשברים מוסיפים אפסים אחורה- ימינה .

במספרים מעורבים – שלמים + שברים, מטפלים בנפרד בחלק השלם ובנפרד בחלק השבור ולבסוף מחברים את שתי התוצאות.

לדוגמה: $(14.625)_{10} = (?)_2$

$14 : 2 = 7(\underline{0})$ $7 : 2 = 3(\underline{1})$ $3 : 2 = \underline{1}(\underline{1})$

$0.625 \times 2 = \underline{1}.25$ $0.25 \times 2 = \underline{0}.5$ $0.5 \times 2 = \underline{1}.0$

$(14.625)_{10} = (1110.101)_2$

אריתמטיקה בינארית

הפעולות החשבוניות בבסיס 2 מתבצעות לפי אותם הכללים המשמשים בפעולות החשבוניות בבסיס 10.

חיבור

כאשר מחברים 2 ספרות בינריות התוצאה מורכבת מהתוצאה עצמה ומנשא (carry).

הנשא מופיע כאשר תוצאת החיבור גדולה או שווה לבסיס ומחברים אותו לספרות הסמוכות משמאל.

לפניך טבלה המסכמת את פעולת החיבור.

הנשא	הסכום	הספרות	
carry	a + b	b	a
0	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
1	0	1	1

דוגמאות: בדוגמאות הבאות יש חיבור תרגילים בבינארי ובדיקתם בבסיס 10. (רצוי לרשום תרגילים אלו לאורך).

$(10101)_2 + (11001)_2 = (101110)_2$ $21 + 25 = 46$

$(1011)_2 + (1000)_2 = (10011)_2$ $11 + 8 = 19$

$(1111)_2 + (1111)_2 = (11110)_2$ $15 + 15 = 30$

$(101)_2 + (100011)_2 = (101000)_2$ $5 + 35 = 40$

$(11011)_2 + (101100)_2 = (1000111)_2$ $27 + 44 = 71$

$(1100110000)_2 + (1011000101)_2 = (10111110101)_2$ $816 + 709 = 1525$

$(101.01)_2 + (110.11)_2 = (1100.00)_2$ $5.25 + 6.75 = 12.00$

$(110010.1011)_2 + (100110.01)_2 = (1011000.1111)_2$ $50.6875 + 38.25 = 88.9375$

כלל : המספר הבינארי הגדול ביותר שניתן לכתוב ע"י n ספרות הוא : $2^n - 1$.

לדוגמה : $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7 = (111)_2$ $2^2 - 1 = 4 - 1 = 3 = (11)_2$

מספר הספרות הבינריות	המספר הבינרי המקסימלי	ערכו העשרוני	ערך הביטוי $2^n - 1$
2	11	3	$2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$
3	111	7	$2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$
4	1111	15	$2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$
5	11111	31	$2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$
. . .			

חיסור:

באיפן אנלוגי לשיטה העשרונית, תוצאת ההפרש מורכבת משני חלקים: התוצאה ממש והלוה (borrow) אשר מופיע כאשר הספרה שאותה מחסרים גדולה מהספרה אשר ממנה מחסירים. הלוה מקטין את הספרה הסמוכה משמאל ביחידה אחת.

כללי החיסור מופיעים בטבלה הבאה :

לוה	הפרש	הספרות	
borrow	a - b	b	a
0	0	0	0
1	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1

דוגמאות:

$11 - 5 = 6$ $\qquad (1011)_2 - (101)_2 = (110)_2$

$15 - 10 = 5$ $\qquad (1111)_2 - (1010)_2 = (101)_2$

$43 - 37 = 6$ $\qquad (101011)_2 - (100101)_2 = (110)_2$

$16 - 11 = 5$ $\qquad (10000)_2 - (1011)_2 = (101)_2$

$5.625 - 2.375 = 3.25$ $\qquad (101.101)_2 - (10.011)_2 = (11.01)_2$

$16.5 - 3.3125 = 13.1875$ $\qquad (10000.1)_2 - (11.0101)_2 = (1101.0011)_2$

$(1001)_2 - (1011)_2 = (1110)_2 \qquad 9 - 11 = -2$

בדוגמה האחרונה אנו נתקלים בבעיה, אותה נפתור בהמשך כאשר נלמד מספרים שליליים.

<u>כפל</u>

בטבלה הבאה מופיעים כללי הכפל של 2 ספרות בינריות

התוצאה	הספרות	
b*a	b	a
0	0	0
0	1	0
0	0	1
1	1	1

דוגמאות:

$(101)_2 * (110)_2 = (11110)_2 \qquad 5 * 6 = 30$

$(1010)_2 * (11)_2 = (11110)_2 \qquad 10 * 3 = 30$

$(111)_2 * (111)_2 = (110001)_2 \qquad 7 * 7 = 49$

$(1010.01)_2 * (110.101)_2 = (1000011.11101)_2 \qquad 10.25 * 6.625 = 67.90625$

<u>חילוק</u>

גם החילוק הבינארי מתבצע אנלוגי לחילוק העשרוני. (רצוי לחלק באמצעות חילוק "ר").

דוגמאות :

$(10010)_2 : (110)_2 = (11)_2 \qquad 18 : 6 = 3$

$(100001)_2 : (11)_2 = (1011)_2 \qquad 33 : 3 = 11$

$(10001)_2 : (100)\ 2 = (100.01)_2 \qquad 17 : 4 = 4.25$

$(101101.1111)_2 : (1100.01)\ 2 = (11.11)_2 \qquad 45.9375 : 12.25 = 3.75$

<u>תרגיל מסכם :</u>

יש לבצע את החישוב הבא תוך שימוש בהצגה בינארית של המספרים: (בדקי כל שלב גם בשיטה העשרונית).

$$\frac{(2.375 + 1.625) \times (13.75 - 7.25)}{1.75 + 1.5}$$

$$\frac{[(10.011)_2 + (1.101)_2] \times [(1101.11)_2 - (111.01)_2]}{(1.11)_2 + (1.1)_2}$$

<u>שיטה נוספת ומהירה למציאת ערכו העשרוני של מספר בינארי ולהפך.</u>

השיטה מבוססת על העיקרון ערך המספר נקבע על פי מקומו.אם נתון לי מספר שלם בבסיס 2, אני כותבת מעל ספרותיו מימין לשמאל את החזקות של 2 החל מהחזקה $2^0 = 1$. אם הספרה הבינארית היא 0 אני לא מתייחסת לחזקה שמעליה ואם היא 1 אני מסכמת אותה יחד עם החזקות האחרות שתחתיהן יש 1. לדוגמה:

$$\begin{array}{ccccccc} 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$(1\,1\,0\,0\,1\,0\,1)_2 = 1 + 4 + 32 + 64 = (101)_{10}$$

גם לגבי השברים השיטה דומה אבל שם מתחילים מהנקודה ימינה בחזקות שליליות . לדוגמה:

$$\begin{array}{cccc} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0. & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$(0.\,1\,0\,1)_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} = (\tfrac{5}{8})_{10}$$

כמובן שבמספרים מעורבים הנקודה היא נקודת המוצא, כלומר, בשלמים מטפלים מהנקודה שמאלה ובשברים מטפלים מהנקודה ימינה.

כאשר רוצים לעבור מבסיס 10 ל 2 עושים זאת כך: מחפשים את החזקה הכי גבוהה של 2 אבל עדיין קטנה מהמספר הנתון. רושמים אותה ואז כותבים משמאל לחזקה שמצאנו ימינה את כל החזקות של 2 הקטנות ממנה בסדר יורד. מתחת לחזקה הגבוהה ביותר כותבים 1. מחסרים מהמספר המקורי את החזקה שמצאנו. אם התוצאה של החיסור קטנה מהחזקה הבאה, נרשום מימין לספרה 1 את הספרה 0 ונעבור לבדוק את החזקה הבאה (בסדר יורד), ואם היא גדולה או שווה מהחזקה נרשום את הספרה 1 ונחסר את החזקה ממה שנותר. כך נמשיך עד שמתחת לכל החזקות תהינה ספרות בינריות.

לדוגמה : $(86)_{10} = (\,?\,)_2$ החזקה הגבוהה ביותר של 2 שעדיין קטנה מ- 86 היא 64, ולכן נכתוב את כל החזקות של 2 מ – 64 עד 1. מתחת ל- 64 נכתוב 1 ונחסר 64 מ- 86 – נותר לנו 22. 22 קטן מהחזקה הבאה שהיא 32, ולכן מתחת ל- 32 נרשום 0. החזקה הבאה היא 16, 22 גדול מ- 16 לכן מתחת ל- 16 נרשום 1 ונחסר מ- 22 את המספר 16 ונקבל 6. 6 קטן מהחזקה הבאה שהיא 8, ולכן מתחת ל- 8 נרשום 0. החזקה הבאה היא 4 , 6 גדול מ- 4 לכן נרשום מתחת ל- 4 את הספרה 1 ונחסר מ- 6 את ה- 4, נותר לנו 2 שהוא שווה לחזקה הבאה ולכן גם תחתיה נרשום את הספרה 1ונחסר ממנה 2. נותר לנו 0 שהוא קטן מהחזקה הבאה שהיא 1 ולכן מתחת ל- 1 נרשום 0.

$$\begin{array}{ccccccc} 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$(86)_{10} = (1\,0\,1\,0\,1\,1\,0)_2$$

בס"ד

<u>מספרים שליליים</u>

קיימות מספר שיטות להצגת מספרים שליליים בבסיס 2. אנו נלמד להשתמש רק בשיטת משלים 2 שהיא השיטה הנפוצה. ככלל הספרה השמאלית ביותר מצביעה על כיוון המספר, כלומר אם הספרה השמאלית ביותר היא 0 אנו מבינים שמדובר במספר חיובי , ואם הספרה השמאלית ביותר היא 1 הרי מדובר במספר שלילי.

כאשר אנו מטפלים במספרים מכוונים עלינו לדעת ראשית את גודל המשתנה אליו נכנס המספר מבחינת מספר הביטים - סיביות. לכל ביט נכנסת ספרה בינארית אחת. כלומר אם המספר נכנס לבית זאת אומרת מדובר במספר בינארי בן 8 ספרות בינאריות. אם המספר נכנס למילה שלמה, זאת אומרת שהמספר בן 32 ספרות בינאריות. וכן הלאה. מספר האפשרויות ליצירת מספרים שונים בתוך n ספרות בינאריות הוא 2^n. למשל בתוך 8 סיביות אפשר לכתוב $2^8 = 256$ מספרים בינאריים שונים, מחציתם חיוביים ומחציתם שליליים. המספר 0 הוא בקטע החיובי (כי הספרה השמאלית ביותר שלו היא 0) לכן בסך הכל תחום המספרים הבינאריים ב – 8 ביטים הוא $_{10}$(128-) – $_{10}$(127). ומאותה סיבה תחום המספרים ב- 16 ביטים (חצי מלה) הוא (32,767)$_{10}$ – (32,768-)$_{10}$, סה"כ 65,536 מספרים שונים.

כדי להפוך מספר חיובי בבסיס 10 למספר בבסיס 2, נתרגם אותו כמו שלמדנו ונדאג להוסיף לפחות 0 אחד קדימה. כלומר – אם הפכנו את המספר לבסיס 2 וקיבלנו 7 ספרות בינאריות, כאשר נכניס אותו לבית אחד שיש בו מקום רק ל- 8 ספרות בינאריות נוסיף לו רק 0 אחד קדימה במקום שנותר. אבל אם אנחנו מכניסים אותו לחצי מילה, אזי יש מקום ל- 16 ספרות בינאריות ואז נוסיף קדימה 9 אפסים. (להזכירך המספר החיובי המקסימלי שאפשר להכניס ב- 8 ביטים הוא 127 שהוא 7 אחדים ו- 0 אחד $(01111111)_2$).

כדי להפוך מספר שלילי בבסיס 10 למספר בבסיס 2, קיימות 2 שיטות:

1. נתרגם את הנגדי שלו (החיובי) כמו שלמדנו ונדאג להוסיף לפחות 0 אחד קדימה, כעת כל 1 נהפוך ל- 0 וכל 0 נהפוך ל- 1, ולמספר החדש שנוצר נחבר 1 מימין (הדבר נכון גם לגבי מספרים מעורבים ושם נחבר לספרה הימנית ביותר שהיא למעשה הספרה הימנית של השבר) .

2. אם ידוע מספר הספרות של המספר הבינרי (מספר הסיביות) נחשב 2 בחזקת מספר הספרות פחות הערך הנגדי של המספר הנתון. את המספר החדש נתרגם לבינרי .

כאשר נתון מספר בינרי מכוון והספרה הימנית ביותר שלו היא 1, ברור שהוא שלילי. כדי למצוא את ערכו החיובי קיימות 2 שיטות:

1. להפוך כל 1 ל – 0 וכל 0 ל – 1 , להוסיף 1 לספרה הימנית. כעת קיבלנו מספר חיובי שאותו נהפוך לעשרוני. זה הנגדי למספר שלנו.

2. נהפוך את המספר הנתון לעשרוני ונחסר ממנו 2 בחזקת מספר הספרות.

(-85)
64 32 16 8 4 2 1
$(0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1)_2 = (85)_{10}$
1 0 1 0 1 0 1 0
+ 1
$(1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,1)_2 = (-85)_{10}$

$256 + (-85) = 171$
128 64 32 16 8 4 2 1
$(1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,1)_2$

172-256= 128 64 32 16 8 4 2 1
(-84) $(1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0)_2 = (-84)_{10}$
+ 0 1 0 1 0 0 1 1
1
0 1 0 1 0 1 0 0
64 32 16 8 4 2 1 = $(84)_{10}$

1) רשום לפי שיטה העשרונית את כמות היחידות הנכללות בכל אחד מהמספרים הבאים:

a) $(1011)_2$
b) $(1100)_2$
c) $(0111)_2$
d) $(10000)_2$
e) $(10011)_2$
f) $(10101)_2$
g) $(202)_3$
h) $(210)_3$
j) $(322)_4$
k) $(402)_5$
l) $(2302)_6$
m) $(6000)_7$
n) $(723)_8$
o) $(560)_8$
p) $(317)_8$
q) $(407)_8$
r) $(82)_9$
s) $(B\ 79)_{16}$
t) $(20CD)_{16}$
u) $(2F5E)_{16}$

2) נתון מספר רשום לפי בסיס כל שהוא: 4217

a) מה הם הבסיסים קטנים מ- 10 בהם המספר יכול להיות רשום?

b) חשב את ערכו בכל אחד מהבסיסים שקבעת בנקודה (a. רשום את התוצאה לפי בסיס עשרוני.

3) רשום את המספרים הבאים לפי בסיס 10:

a) $(1101)_2$
b) $(101010)_2$
c) $(232)_3$
d) $(562)_7$
e) $(81)_9$
f) $(3D1)_{16}$

4) בצע את ההעברות הבאות:

a) $(232)_{10} = (?)_8$
b) $(127)_{10} = (?)_5$
c) $(45)_{10} = (?)_4$
d) $(87)_{10} = (?)_6$
e) $(100)_{10} = (?)_3$
f) $(29)_{10} = (?)_2$
g) $(131)_{10} = (?)_2$
h) $(59)_{10} = (?)_2$
k) $(67)_{10} = (?)_2$
l) $(68)_{10} = (?)_2$

15

5) בצע את ההעברות הבאות ע"י תהליך מקוצר:

a) $(10110)_2 = (?)_8$

b) $(10101)_2 = (?)_8$

c) $(110011)_2 = (?)_8$

d) $(1000111)_2 = (?)_8$

e) $(212)_3 = (?)_9$

f) $(1122)_3 = (?)_9$

g) $(202210)_3 = (?)_9$

h) $(120120)_3 = (?)_9$

k) $(3220)_4 = (?)_{16}$

l) $(1023)_4 = (?)_{16}$

m) $(67)_8 = (?)_2$

n) $(2150)_8 = (?)_2$

o) $(721)_8 = (?)_2$

p) $(76)_9 = (?)_3$

q) $(B7A2)_{16} = (?)_4$

6) רשום את השברים הבאים לפי בסיס 10:

a) $(0.203)_4$

b) $(0.0101)_2$

c) $(0.521)_8$

d) $(0.10101)_2$

e) $(0.110011)_2$

7) רשום את השברים הבאים לפי הבסיס הדרוש (במידה שהשבר לא סופי, הסתפק בחמש ספרות אחרי הנקודה).

a) $(0.52)_{10} = (?)_4$

b) $(0.21)_{10} = (?)_2$

c) $(0.3125)_{10} = (?)_8$

d) $(0.8125)_{10} = (?)_2$

e) $(0.71875)_{10} = (?)_2$

8) רשום את המספרים הבאים בצורה בינרית:

a) $(16.5)_{10}$

b) $(13.75)_{10}$

c) $(22.25)_{10}$

d) $(37.375)_{10}$

e) $(28.875)_{10}$

9) בצע את החישובים הבינריים הבאים ובדוק את התוצאה ע"י חישוב רגיל (עשרוני)

a) 1011.01 + 11.1 = ?

b) 110011.101 + 100101.1 ?

c) 110.111 + 1.01 = ?

d) 101.0001 + 0.101 = ?

e) 1111111.11 + 11.11 = ?

f) 1101 - 110 = ?

g) 1111 - 1000 = ?

h) 1000 - 111 = ?

k) 1001.11 - 11.1 = ?

l) 10101.01 - 111.11 = ?

m) 11 x 101 = ?

n) 101 x 1010 = ?

o) 110011 x 1010 = ?

p) 11.01 x 101.11 = ?

q) 111 x 111 = ?

r) 1110 : 1010 = ?

s) 11001 : 101 = ? 101

t) 111100 : 110 = ? 1010

u) 101.1011 : 1.11 = ? 11.01

v) 10.0011 : 1.01 = ?

10) בצע את הפעולה הבאה ע"י חישוב בינרי. לנתח קטעים 8 ו16 1-2 ולחשב ק-2

a) $$\frac{(5.25 - 3.75) \times (1.5 + 4.5)}{3.75 - 1.75} = \frac{9}{2} = 4.5$$

b) $$\frac{(2.25 + 3.50 + 4.75) \times 2}{5.75 - 2.75} = 7$$

11) הצפן את הספרות העשרוניות מ- 0 עד 9 לפי קוד בעל משקל הבא:

6 3 1 -1

602.25 : 25.5

23.617647051

602.2.50000000 : 255

510

922

765

1575

1530

450

255

1950

1785

1650

1530

1200

1020

1800

1785

1500

1275

255

255

==