

## به نام خدا

تمرین سری دوم درس طراحی الگوریتم

استاد درس: دکتر ملکی مجد

دستیاران آموزشی: محمد تابع امام، حمیدرضا ثنائی و مصطفی محمد علی ابراهیم

برای انجام تمرینات به مسائل زیر توجه کنید:

۱- در تمامی سوالات زیر در صورت ارائه الگوریتم آن را از نظر پیچیدگی زمانی و حافظه‌ای تحلیل کنید. در همین راستا در صورت امکان الگوریتم ارائه شده را با کمک شبه کد توضیح دهید.

۲- هرگونه مشکل را می‌توانید در گروه درس در تلگرام عنوان کنید، یا به استاد و دستیارهای آموزشی درس مراجعه کنید.

۳- در صورت مشاهده تقلب نمره تمرین کسر می‌شود و عواقب بعدی به عهده خود دانشجو است.

۴- تاخیر در ارسال تمرین، هر روز موجب کسره ده درصد از نمره می‌شود و بعد از دو روز نمره ای برای تمرین لحاظ نمی‌شود.

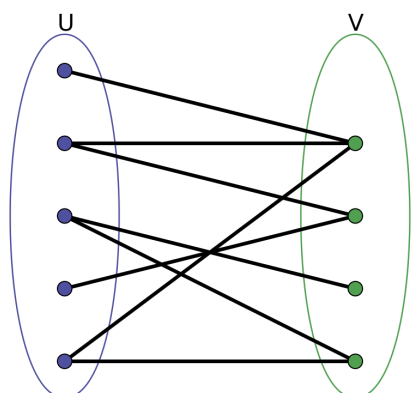
۵- برای تحویل تمرین باید تصویر مناسبی از تمرین در سایت درس (کوئرا) آپلود شود، و همچنین اصل تمرین باید حداکثر تا یک هفته پس از مهلت ارسال به استاد تحویل داده شود.

۶- در صورت خوانایی پایین تمرین (مثال بد خط بودن یا خط خوردگی) نمره تمرین تا ۵۰ درصد می‌تواند کم شود. (می‌توانید تمرین‌ها را تایپ شده تحویل بدهید).

۷- پیاده سازی الگوریتم مسئله چهارم قسمت ب و مسئله پنجم با یکی از زبان‌های آموزش داده شده در درس مبانی برنامه نویسی، نمره اضافه دارد. برای این قسمت باید علاوه بر آنچه در بند ۵ تحویل داده اید، کد خود را قسمت مربوطه در کوئرا آپلود کرده و در صورت جواب درست (با داوری سایت) برای نمونه‌های تست، نمره اضافی را دریافت کنید (توضیحات بیشتر در مورد نحوه ورودی و خروجی برنامه در قسمت آپلود کد در کوئرا داده خواهد شد). دقت کنید کد شما باید مطابق راه حل خودتان باشد و تسلط کافی برای تحویل حضوری داشته باشید.

۸- مهلت ارسال جواب‌ها تا روز ۲۵ آبان می‌باشد.

## ۱- گراف ۲ بخشی



گراف ۲ بخشی به گرافی گفته می‌شود که بتوان راس‌های آن را به دو زیرمجموعه مستقل  $U$  و  $V$  تقسیم کرد به نحوی بین راس‌های مجموعه  $U$  یالی وجود نداشته باشد و همینطور بین راس‌های مجموعه  $V$ . در واقع هر یال گراف را که در نظر بگیرید یک سر آن در مجموعه  $U$  و سر دیگر آن در مجموعه  $V$  است.

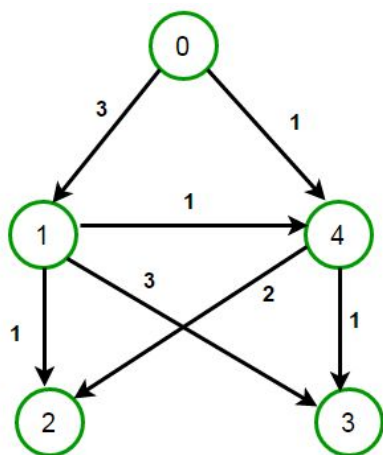
دو شرط لازم و کافی برای گراف ۲ بخشی بودن وجود دارد:

۱- گرافی ۲ بخشی است اگر و تنها اگر ۲-رنگ پذیر باشد.

۲- گرافی ۲ بخشی است اگر و تنها اگر دور فرد در آن وجود نداشته باشد.

با استفاده از هر کدام از شرط‌ها الگوریتمی برای بررسی کردن دو بخشی بودن یک گراف ارایه دهید. همچنین در صورت دو بخشی بودن، الگوریتم ارایه شده باید رنگ هر گره را مشخص کند و در صورت دو بخشی نبودن باید یک دور با طول فرد برگرداند.

## ۲- مسیر با کمترین هزینه



فرض کنید یک گراف جهت‌دار داریم که وزن هر کدام از یال‌های آن یکی از عددهای  $2x$ ،  $x$  و  $3x$  باشد ( $x$  عددی طبیعی است). الگوریتمی ارائه دهید که مسیر با کمترین هزینه را برای مبدا و مقصد مشخص پیدا کند. زمان اجرای الگوریتم شما باید از پیچیدگی زمانی  $O(E+V)$  باشد. خروجی الگوریتم خود را برای گراف روبرو بنویسید.

## ۳- مرتب‌سازی توپولوژیکی

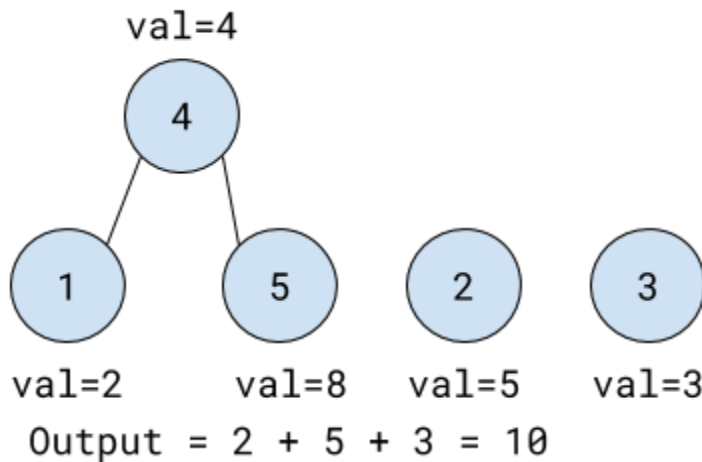
فرضیه: در یک DAG حداقل یک راس با درجه ورودی ۰ و یک راس با درجه خروجی ۱ وجود دارد.

اثبات: از آنجا که DAG شامل دور نمی‌باشد پس همه‌ی مسیرهای آن با طول محدود است. حال فرض می‌کنیم مسیر  $S$  با مبدا  $u$  و مقصد  $v$  بلندترین مسیر در این گراف است. در این صورت یال ورودی به راس  $u$  و یال خروجی از یال  $v$  وجود ندارد اگر اینگونه نباشد پس  $S$  بلندترین مسیر نیست.

با استفاده از این فرضیه الگوریتمی برای مرتب‌سازی توپولوژیکی یک گراف DAG ارایه کنید.

#### ۴- اجزای قویاً همبند

الف) الگوریتمی ارائه دهید که با یکبار استفاده از DFS اجزای قویاً همبند یک گراف را پیدا کند.  
ب) فرض کنید هر راس دارای یک وزن مثبت است. ارزش هر مولفه همبندی برابر با وزن راس با کمترین وزن در مولفه همبندی است. با تغییر کوچکی در الگوریتم قسمت قبل (یا گفته شده در کلاس) مجموع ارزش همه مولفه‌های همبندی را حساب کنید.



#### ۵- زنجیره کلمات

یک دیکشنری از کلمه‌ها داریم که طول کلمه‌ها (تعداد حرف‌های هر کلمه) یکسان است. دو کلمه از این دیکشنری (به اسم کلمه مبدا و کلمه مقصد) داده شده است و هدف پیدا کردن زنجیره‌ای از کلمات است که هر کلمه با کلمه بعدی خود تنها در یک حرف تفاوت داشته باشد در حالی که این زنجیره از کلمه مبدا شروع شده و با کلمه مقصد پایان بپذیرد. الگوریتمی ارائه کنید که به عنوان ورودی، دیکشنری (مجموعه کلمه‌ها)، دو کلمه از این دیکشنری (به عنوان کلمه مبدا و کلمه مقصد) را بگیرد و به عنوان خروجی طول یکی از کوتاه‌ترین زنجیره‌های ممکن را برگرداند.

مثال: کلمات دیکشنری {kooh, mood, mool, fard, mard, mord, pool, baro}

mool: ابتدا

fard: انتها

mool-mood-mord-mard-fard: خروجی