Problemas de Matemáticas con Procedimientos

Nahin Jose Peñaranda y Nicolas Jimenez Blanco

March 17, 2024

Problema 1

Sea $L = \{a + b\sqrt{-6} \mid a, b \in Z\}$, donde Z denota el conjunto de números enteros. Determinar si n=10 es primo o compuesto en L. Si es compuesto determine si tiene una factorizacion unica o no.

Solución

Primero, verifiquemos si $n = 10$ es primo o compuesto, Para determinar si n=10 es primo o compuesto en L, primero debemos entender qué implica ser primo en este conjunto. Un número n en L es primo si no se puede expresar como el producto de dos números no triviales en L, es decir, no se puede escribir como $n = a + b\sqrt{-6} * (c + d\sqrt{-6})$ donde a, b, c, d son enteros distintos de cero.

Expresabilidad en L

como queremos expresar $10 = (a + b\sqrt{-6}) * (c + d\sqrt{-6})$

tenemos que quitar el numero complejo para que el resultado sea un entero
podemos hacer esto haciendo que $d = -b$, y $a = c$

$$
\begin{aligned}
& 10 = (a + b\sqrt{-6}) * (a - b\sqrt{-6}) \\
& 10 = a^2 + 6b^2 \\
deducimos : a = 2, a = -2, b = 1, a = -1 & \\
& 10 = (2 + 1\sqrt{-6}) * (2 - 1\sqrt{-6})
\end{aligned}
$$

Observamos que 10 se puede escribir como $10 = 2 + 1\sqrt{-6} * (2 - 1\sqrt{-6})$ por tanto 10 es compuesto en L

Factorización única en L

Para verificar si 10 tiene una factorización única en L, necesitamos comprobar si existen distintas factorizaciones para 10. Analizaremos todas las posibles combinaciones de factores de 10 en L y verificaremos si son iguales o diferentes.

$$
\begin{aligned}
10 &= (2 + 1\sqrt{-6}) \cdot (2 - 1\sqrt{-6}) \\
10 &= (2 - 1\sqrt{-6}) \cdot (2 + 1\sqrt{-6}) \\
10 &= (-2 + 1\sqrt{-6}) \cdot (-2 - 1\sqrt{-6}) \\
10 &= (-2 - 1\sqrt{-6}) \cdot (-2 + 1\sqrt{-6})
\end{aligned}
$$

Observamos que las factorizaciones de 10 en L son los conjugados Cuando hablo del conjugado de un número complejo en este contexto, me refiero a cambiar el signo de la parte imaginaria. Por lo tanto, 10 si tiene una factorización única en L.

Problema 2

Demostrar que para todo $n \in N$, $n^5 - n$ es divisible entre 30.

Solución

Usaremos el principio de inducción matemática para demostrar este resultado.

1. **Base Inductiva:** Para $n = 1$:

$$1^5 - 1 = 0$$

   Claramente, 0 es divisible entre 30.

   Hipótesis de Inducción:

   Supongamos que para algún $k \in N$, $k^5 - k$ es divisible entre 30.
   $k^5 - k = 30$q

   Paso Inductivo:

   Demostraremos que $(k+1)^5 - (k+1)$ es divisible entre 30.

$$\begin{aligned}(k+1)^5 - (k+1) &= (k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) - (k+1) \\ &= k^5 - k + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k \\ &= (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) \\ &= 30q + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)\end{aligned}$$

2. **Paso 2:** Ahora demostraremos que $(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$ es divisible entre 6.

   Base inductiva:

   Para $n = 1$:

$$(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$$

$$(1^4 + 2 * 1^3 + 2 * 1^2 + 1) = 6$$

   Claramente, 6 es divisible entre 6.

   Hipótesis de Inducción:

   Supongamos que para algún $k \in N$, $(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$ es divisible entre 6.
   $(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) = 6$w

Paso Inductivo:

Demostraremos que $(k+1)^4 + 2(k+1)^3 + 2(k+1)^2 + (k+1)$ es divisible entre 6.

$$\begin{aligned}
((k+1)^4 + 2(k+1)^3 + 2(k+1)^2 + (k+1)) &= k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 + 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 + 2(k+1)^2 + k + 1 \\
&= (k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) + 4k^3 + 10k^2 + 5k + 2 + 2(k+1)^2 + k + 1 \\
&= 6w + 4k^3 + 12k^2 + 14k + 6 \\
&= 6w + 2(2k^3 + 6k^2 + 7k + 3)
\end{aligned}$$

3. **Paso 3:** Ahora demostraremos que $(2k^3 + 6k^2 + 7k + 3)$ es divisible entre 3.

   Base inductiva:

   Para $n = 1$:

$$(2k^3 + 6k^2 + 7k + 3)$$

$$(2 * 1^3 + 6 * 1^2 + 7 * 1 + 3) = 18$$

   Claramente, 18 es divisible entre 3.

   Hipótesis de Inducción:

   Supongamos que para algún $k \in N$, $(2k^3 + 6k^2 + 7k + 3)$ es divisible entre 3.
   $(2k^3 + 6k^2 + 7k + 3) = 3\text{r}$

   Paso Inductivo:

   Demostraremos que $2(k+1)^3 + 6(k+1)^2 + 7(k+1) + 3$ es divisible entre 3.

$$\begin{aligned}
(2(k+1)^3 + 6(k+1)^2 + 7(k+1) + 3) &= 2k^3 + 12k^2 + 25k + 18 \\
&= (2k^3 + 6k^2 + 7k + 3) + 6k^2 + 18k + 15 \\
&= 3r + 6k^2 + 18k + 15 \\
&= 3r + 3(3k^2 + 6k + 5) \\
&= 3(r + 3k^2 + 6k + 5)
\end{aligned}$$

4. **Paso 4:** Ahora nos regresaremos a nuestro problema principal.

   Demostraciones:

   $2k^3 + 6k^2 + 7k + 3 = 3r$
   $k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k = 6w + 2(2k^3 + 6k^2 + 7k + 3)$

Retomando:

$$\begin{aligned}
(k+1)^5-(k+1) &= (k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)-(k+1) \\
&= k^5-k+5k^4+10k^3+10k^2+5k \\
&= (k^5-k)+5(k^4+2k^3+2k^2+k) \\
&= 30q+5(k^4+2k^3+2k^2+k) \\
&= 30q+5(6w+2(2k^3+6k^2+7k+3)) \\
&= 30q+5(6w+2(3r)) \\
&= 30q+5(6w+2(3r)) \\
&= 30q+5(6w+6r)) \\
&= 30q+5*6(w+r)) \\
&= 30q+30(w+r)) \\
&= 30*(q+w+r))
\end{aligned}$$

Por el principio de inducción matemática, hemos demostrado que para todo $n \in N$, n^5-n es divisible entre 30.

Problema 3

Dados los numeros α y β con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha + \beta \neq 1$. definimos $m = \alpha + \beta$; $a = \alpha\beta$; $A_2 = m - \frac{a}{m-1}$; $A_3 = m - \frac{a}{m-(\frac{a}{m-1})}$; $A_4 = m - \frac{a}{m-(\frac{a}{m-(\frac{a}{m-1})})}$

es decir, $\forall k > 1$ se tiene que $A_{k+1} = m - \frac{a}{A_k}$

Probar que $A_n = \frac{\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)-(\alpha^n-\beta^n)}{\left((\alpha^n-\beta^n)-(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\right))}$

Solución

Usaremos el principio de inducción matemática para demostrar este resultado.

1. **:**

   Hipótesis de Inducción:

   $m = \alpha + \beta$; $a = \alpha\beta$; $A_2 = m - \frac{a}{m-1}$; $A_3 = m - \frac{a}{m-(\frac{a}{m-1})}$; $A_4 = m - \frac{a}{m-(\frac{a}{m-(\frac{a}{m-1})})}$

   $A_{k+1} = m - \frac{a}{A_k}$

   Paso Inductivo:

   Demostraremos que $(k+1)^5 - (k+1)$ es divisible entre 30.

$$A_{K+1} = \frac{\left(\alpha^{(k+1)+1} - \beta^{(k+1)+1}\right) - \left(\alpha^{(k+1)} - \beta^{(k+1)}\right)}{\left(\left(\alpha^{(k+1)} - \beta^{(k+1)}\right) - (\alpha^{(k+1)-1} - \beta^{(k+1)-1}\right))} = \frac{\left(\alpha^{(k+2} - \beta^{(k+2)}\right) - \left(\alpha^{(k+1)} - \beta^{(k+1)}\right)}{\left(\left(\alpha^{(k+1)} - \beta^{(k+1)}\right) - (\alpha^{(k)} - \beta^{(k)}\right))}$$

$$= (\alpha+\beta) + \frac{\alpha\beta}{\frac{\left(\alpha^{(k+2}-\beta^{(k+2)}\right)-\left(\alpha^{(k+1)}-\beta^{(k+1)}\right)}{\left(\left(\alpha^{(k+1)}-\beta^{(k+1)}\right)-(\alpha^{(k)}-\beta^{(k)}\right))}}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)(\alpha^{(k+1)} - \beta^{(k+1)}) - (\alpha+\beta)(\alpha^{(k)} - \beta^{(k)}) - [(\alpha\beta)(\alpha^{(k)} - \beta^{(k)}) - ((\alpha\beta)(\alpha^{(k-1)} - \beta^{(k-1)})]}{(\alpha^{(k+1)} - \beta^{(k+1)}) - (\alpha^k - \beta^k)}$$

$$= \frac{(\alpha^{(k+1)}\alpha + \beta^{(k+1)} - \beta) + (\alpha^{(k)} - \alpha + \beta^{(k)}\beta)}{(\alpha^{(k+1)} - \beta^{(k+1)}) - (\alpha^k - \beta^k)}$$

$$= \frac{(\alpha^{(k+2)} - \beta^{(k+2)}) - (\alpha^{(k+1)} - \beta^{(k+1)}\beta)}{(\alpha^{(k+1)} - \beta^{(k+1)}) - (\alpha^k - \beta^k)}$$

2. **:** con esto demostramos que $A_n = \frac{\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)-(\alpha^n-\beta^n)}{\left((\alpha^n-\beta^n)-(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\right))}$.

Problema 4

Calcular las infinitas Soluciones de la ecuacion Diofantica **42823x+6409y=34**

Solución

La solución al tercer problema se presenta a continuación:

1. **Paso 1:** MCD(42824,6409).

   metodo de Euclides:

$$\begin{array}{c} 42823 = 6409 \times 6 + 4369 \\ \hline \downarrow \\ 42823 \,\big|\, 6409 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 6409 = 4369 \times 1 + 2040 \\ \hline \downarrow \\ 6409 \,\big|\, 4369 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 4369 = 2040 \times 2 + 289 \\ \hline \downarrow \\ 4369 \,\big|\, 2040 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2040 = 289 \times 7 + 17 \\ \hline \downarrow \\ 2040 \,\big|\, 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 289 = 17 \times 17 + 0 \\ \hline \downarrow \\ 289 \,\big|\, 17 \end{array}$$

MCD(42824,6409) = 17

COMO 34/17 = 2 Si tiene solucion

2. **Paso 2:** Solucion Particular Bezout

$$\begin{aligned}
17 &= 2040 - (289 * 7) \\
&= 2040 - ((4368 - 2040 * 2) * 7) \\
&= 2040 - (4369 * 7) + 2040 * 14 \\
&= (15 * 2040) - (7 * 4368) \\
&= (15 * (6409 - 4369)) - (7 * 4368) \\
&= ((15 * 6409) - (4369 * 22)) \\
&= (15 * 6409) - ((42823 - 6409) * 22) \\
&= (6409 * 147) - (22 * 42823) \\
x &= -22 \\
y &= 147
\end{aligned}$$

3. **Paso 3:** Soluciones Infinitas.

α = MCD(42824,6409)
c= 34

$$X_0 = \frac{c}{\alpha} x$$

$$X_0 = \frac{34}{17} * -22$$

$$X_0 = -44$$

$$Y_0 = \frac{c}{\alpha} y$$

$$Y_0 = \frac{34}{17} * 147$$

$$Y_0 = 294$$

Solucion General

$$X = X_0 + k * \frac{b}{c} = -44 + k * \frac{6409}{17}$$
$$X = 377k - 44$$

$$Y = Y_0 + k * \frac{b}{c} = 266 + k * \frac{42823}{17}$$
$$X = 294 - 2519K$$

Problema 5

Aquí se describe el tercer problema.

Solución

La solución al tercer problema se presenta a continuación:

1. **Base Binaria:**

División	Cociente	Residuo
$10247 \div 2$	5123	(1)
$5123 \div 2$	2561	(1)
$2561 \div 2$	1280	(1)
$1280 \div 2$	640	(0)
$640 \div 2$	320	(0)
$320 \div 2$	160	(0)
$160 \div 2$	80	(0)
$80 \div 2$	40	(0)
$40 \div 2$	20	(0)
$20 \div 2$	10	(0)
$10 \div 2$	5	(0)
$5 \div 2$	2	(1)
$2 \div 2$	1	(0)
$1 \div 2$	0	(1)

Por lo tanto, 10247_{10} es igual a 10100000000111_2.

2. **Base Octal:**.

División	Cociente	Residuo
$10247 \div 8$	1280	(7)
$1280 \div 8$	160	(0)
$160 \div 8$	20	(0)
$20 \div 8$	2	(4)
$2 \div 8$	0	(2)

Por lo tanto, 10247_{10} es igual a 24007_8.

3. **Base Octal:**.

División	Cociente	Residuo
$10247 \div 16$	640	(7)
$640 \div 16$	40	(0)
$40 \div 16$	2	(8)
$2 \div 16$	0	(2)

Por lo tanto, 10247_{10} es igual a 2807_{16}.

4. **Base Veintedicimal:**.

División	Cociente	Residuo
$10247 \div 20$	512	(7)
$512 \div 20$	25	(12)
$25 \div 20$	1	(5)
$1 \div 20$	0	(1)

Por lo tanto, 10247_{10} es igual a $15C7_{20}$.