

Билеты по матану

Автор1, ..., АвторN

18 июня 2020 г.

Содержание

1. Интегральное исчисление	1
1.1 Билет 1: ! Дробление, ранг, оснащение, сумма Римана.	1
1.2 Билет 2: Оценка разности интеграла и интегральной суммы. Интеграл как предел интегральных сумм. Интегрируемость по Риману.	2
1.3 Билет 3: Эквивалентная для суммы $\sum_{k=1}^n k^p$. Формула трапеций.	3
1.4 Билет 4: NAME	4
1.5 Билет 5: NAME	4
1.6 Билет 6: NAME	4
1.7 Билет 7: NAME	4
1.8 Билет 8: NAME	4
1.9 Билет 9: NAME	4
1.10 Билет 10: NAME	4
1.11 Билет 11: NAME	4
2. Метрические и нормированные пространства	5
2.1 Билет 12: Метрические пространства. Примеры. Шары в метрических пространствах.	5
2.2 Билет 13: Открытые множества: определение и свойства.	6
2.3 Билет 14: Внутренние точки и внутренность множества. Свойства.	7
2.4 Билет 15: Замкнутые множества: определение и свойства. Замыкание множества, связь со внутренностью.	8
2.5 Билет 16: Свойства замыкания. Предельные точки. Связь с замыканием множества.	10
2.6 Билет 17: Индуцированная метрика. Открытые и замкнутые множества в пространстве и в подпространстве.	13
2.7 Билет 18: Скалярное произведение и норма. Свойства и примеры. Неравенство Коши–Буняковского.	14
2.8 Билет 19: Предел последовательности в метрическом пространстве. Определение и основные свойства.	17
2.9 Билет 20: Арифметические свойства пределов последовательности векторов. Покоординатная сходимость.	18

2.10	Билет 21: NAME	20
2.11	Билет 22: NAME	20
2.12	Билет 23: NAME	20
2.13	Билет 24: NAME	20
2.14	Билет 25: NAME	20
2.15	Билет 26: NAME	20
2.16	Билет 27: NAME	20
2.17	Билет 28: NAME	20
2.18	Билет 29: NAME	20
2.19	Билет 30: NAME	20
2.20	Билет 31: NAME	20
2.21	Билет 32: NAME	20
2.22	Билет 33: NAME	20
2.23	Билет 34: NAME	20
2.24	Билет 35: NAME	20
2.25	Билет 36: NAME	20
2.26	Билет 37: NAME	20
2.27	Билет 38: NAME	20
2.28	Билет 39: NAME	20
3.	Числовые и функциональные ряды	21
3.1	Билет 40: NAME	23
3.2	Билет 41: NAME	23
3.3	Билет 42: NAME	23
3.4	Билет 43: NAME	23
3.5	Билет 44: NAME	23
3.6	Билет 45: NAME	23
3.7	Билет 46: NAME	23
3.8	Билет 47: NAME	23
3.9	Билет 48: NAME	23
3.10	Билет 49: NAME	23
3.11	Билет 50: NAME	23
3.12	Билет 51: NAME	23
3.13	Билет 52: NAME	23
3.14	Билет 53: NAME	23
3.15	Билет 54: NAME	23
3.16	Билет 55: NAME	23
3.17	Билет 56: NAME	23
3.18	Билет 57: NAME	23

3.19 Билет 58: NAME	23
3.20 Билет 59: NAME	23
3.21 Билет 60: NAME	23
3.22 Билет 61: NAME	23
3.23 Билет 62: NAME	23
3.24 Билет 63: NAME	23
3.25 Билет 64: NAME	23
3.26 Билет 65: NAME	23
3.27 Билет 66: NAME	23
3.28 Билет 67: Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теорема Абеля.	23
3.29 Билет 68: Почленное интегрирование суммы степенного ряда.	25
3.30 Билет 69: NAME	25
3.31 Билет 70: NAME	25
3.32 Билет 71: NAME	25
3.33 Билет 72: NAME	25
4. Функции нескольких переменных	26
4.1 Билет 73: NAME	28
4.2 Билет 74: NAME	28
4.3 Билет 75: NAME	28
4.4 Билет 76: NAME	28
4.5 Билет 77: NAME	28
4.6 Билет 78: NAME	28
4.7 Билет 79: NAME	28
4.8 Билет 80: NAME	28
4.9 Билет 81: NAME	28
4.10 Билет 82: NAME	28
4.11 Билет 83: NAME	28
4.12 Билет 84: NAME	28
4.13 Билет 85: NAME	28
4.14 Билет 86: NAME	28
4.15 Билет 87: NAME	28
4.16 Билет 88: NAME	28
4.17 Билет 89: NAME	28
4.18 Билет 90: NAME	28
4.19 Билет 91: NAME	28
4.20 Билет 92: NAME	28
4.21 Билет 93: NAME	28
4.22 Билет 94: NAME	28

4.23 Билет 95: NAME	28
4.24 Билет 96: NAME	28
4.25 Билет 97: NAME	28
4.26 Билет 98: NAME	28
5. Теория меры	29
5.1 Билет 99: NAME	29
5.2 Билет 100: NAME	29
5.3 Билет 101: NAME	29
5.4 Билет 102: NAME	29

1. Интегральное исчисление

А разве можно всё упростить, всё обобщить? И вообще, разве по чужому желанию можно обобщать и упрощать?

Джером Дэвид Сэлинджер, "Над пропастью во ржи"

Привет, Путник! Я рад сопровождать тебя в начале твоего долгого и тяжёлого пути к (не) отчислению. Запасись терпением. А лучше корвалолом.

1.1. Билет 1: ! Дробление, ранг, оснащение, сумма Римана.

Определение 1.1.

Дробление отрезка $[a, b]$ – это набор точек τ , такой что

$$\tau = \{x_k\}_{k=0}^n : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Ранг (мелкость) дробления – $\max_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = |\tau|$

Оснащение – набор точек, такой что

$$\{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

Пара (τ, ξ) – оснащённое дробление

Определение 1.2.

Сумма Римана (интегральная сумма)

$f : [a, b] \mapsto R$ и оснащённое дробление (τ, ξ)

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Какой короткий и классный билет :)

Ну, удачи...

1.2. Билет 2: Оценка разности интеграла и интегральной суммы. Интеграл как предел интегральных сумм. Интегрируемость по Риману.

Теорема 1.1.

$$|S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f| \leq (b - a)\omega_f(|\tau|)$$

(ω_f – модуль непрерывности)

Доказательство.

$$\begin{aligned} \Delta &:= S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \int_a^b f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(t)) dt \\ |\Delta| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(\xi_k) - f(t)| dt \quad \text{по определению } \omega_f : |\xi_k - t| < |\tau| \Rightarrow |f(\xi_k) - f(t)| < \omega_f(|\tau|) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_f(|\tau|) dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_f(|\tau|)(x_{k+1} - x_k) \\ &\leq \omega_f(|\tau|)(b - a) \end{aligned}$$

□

Следствие.

$f \in C([a, b])$, тогда

Для любой последовательности оснащённых дроблений $(\tau, \xi)_n$, такой что $|\tau_n| \rightarrow 0$, верно:

$$\lim S(f, \tau_n, \xi_n) = \int_a^b f$$

Доказательство.

$$f \in C([a, b]) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \omega_f(x) = 0 \Rightarrow \lim \omega_f(|\tau_n|)(b - a) = 0$$

□

Определение 1.3.

Функция интегрируема по Риману, если:

Для любой последовательности оснащённых дроблений $(\tau, \xi)_n$, такой что $|\tau_n| \rightarrow 0$, верно:

$$\lim S(f, \tau_n, \xi_n) = I$$

И для всех последовательностей I – одинаковый

I – интеграл Римана

1.3. Билет 3: Эквивалентная для суммы $\sum_{k=1}^n k^p$. Формула трапеций.

Пример. $S_n(p) = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p$

Ограничим $S_n(p)$ сверху: $S_n(p) < n \cdot n^p = n^{p+1}$

Чтобы ограничить снизу, возьмем только вторую половину слагаемых. Заметим, что каждое слагаемое $\geq \frac{n}{2}$. Получаем: $S_n(p) > \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2}\right)^p = \frac{n^{1+p}}{2^{1+p}}$

$$\frac{n^{1+p}}{2^{1+p}} < S_n(p) < n^{p+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 f(t) dt$$

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(t) = t^p$$

$$\xi_k = \frac{k}{n}$$

Мелкость дробления $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

$$\implies \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} \rightarrow \int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1} \implies S_n(p) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$$

При $p = -1$ считаем, что $\frac{1}{p+1} = \infty$.

Лемма. $f \in C^2[a, b]$. Тогда:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} (\beta - \alpha) = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t) (t - \alpha) (\beta - t) dt$$

Доказательство.

$$\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) (t - \gamma)' dt = f(t) (t - \gamma) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) (t - \gamma) dt = f(\beta) (\beta - \gamma) - f(\alpha) (\alpha - \gamma) - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) (t - \gamma) dt =$$

$$= \frac{f(\beta) + f(\alpha)}{2} (\beta - \alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) \left(t - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) dt$$

$$((t - \alpha)(\beta - t))' = \alpha + \beta - 2t = -2(t - \gamma)$$

$$\Delta = - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) (t - \gamma) dt = - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) \left(-\frac{1}{2}\right) ((t - \alpha)(\beta - t))' dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) ((t - \alpha)(\beta - t))' dt =$$

$$= \frac{1}{2} f'(t) (t - \alpha)(\beta - t) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t) (t - \alpha)(\beta - t) dt = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t) (t - \alpha)(\beta - t) dt \quad \square$$

Теорема 1.2 (оценка погрешности в ф-ле трапеций).

$f \in C^2[a, b]$ и τ -дробление. Тогда:

$$\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''|$$

В частности, если дробление на равные отрезки

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2} \right) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{8n^2} \int_a^b |f''|$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\Delta &:= \int_a^b f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right) = \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t) (t - x_{k-1})(x_k - t) dt \\
|t - x_{k-1}| |x_k - t| &\leq \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4} \leq \frac{|\tau|^2}{4} \\
|\Delta| &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| (t - x_{k-1})(x_k - t) dt \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| \frac{|\tau|^2}{4} dt = \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''|
\end{aligned}$$

□

1.4. Билет 4: NAME**1.5. Билет 5: NAME****1.6. Билет 6: NAME****1.7. Билет 7: NAME****1.8. Билет 8: NAME****1.9. Билет 9: NAME****1.10. Билет 10: NAME****1.11. Билет 11: NAME**

2. Метрические и нормированные пространства

2.1. Билет 12: Метрические пространства. Примеры. Шары в метрических пространствах.

Определение 2.1.

Метрическое пространства - пара $\langle X, \rho \rangle$, где X - множество, $\rho : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ - метрика, ρ обладает следующими свойствами:

1. $\rho(x, y) \geq 0$, и $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника, \triangle)

Пример.

Обычная метрика на \mathbb{R} : $\langle \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y| \rangle$.

Пример.

«Метрика лентяя» на произвольном множестве: $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

Пример.

Обычная метрика на \mathbb{R}^2 - длина отрезка: $\rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Пример.

Множество - точки на поверхности сферы, метрика - кратчайшая дуга между точками.

Пример.

Манхэттанская метрика на \mathbb{R}^2 : $\rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Пример.

Французкая железнодорожная метрика: Есть центральный объект, от него есть несколько «лучей».

Если A и B на одном луче, то $\rho(A, B) = AB$

Если на разных: $\rho(A, B) = AP + PB$, где P - центральный объект.

Доказательство.

При условии что расстояния между объектами на одном луче являются метрикой, докажем что ФЖМ - метрика:

Если A и B находятся на одном луче, всё тривиально следует из того, что расстояние на луче - метрика.

Пусть A, B - на разных лучах $\implies A \neq B, A, B \neq P$.

$$\rho(A, B) = AP + PB > 0 \iff AP, PB > 0.$$

$$\rho(A, B) = AP + PB = PB + AP = BP + PA = \rho(B, A).$$

Пусть C лежит на одной ветке с A :

$$\rho(A, C) + \rho(C, B) = AC + (CP + PB) = (AC + CP) + PB \geq AP + PB = \rho(A, B).$$

Пусть C лежит на собственной ветке:

$$\rho(A, C) + \rho(C, B) = (AP + PC) + (CP + PB) \geq AP + PB = \rho(A, B). \quad \square$$

Определение 2.2.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Открытым шаром радиуса $r \in \mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a \in X$ называется $B_r(a) = \{x \in X \mid \rho(a, x) < r\}$.

Замкнутым шаром радиуса $r \in \mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a \in X$ называется $\overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(a, x) \leq r\}$.

Свойства.

$$B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$$

Если $a \neq b$, то $\exists r > 0 \quad B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset$.

Доказательство.

Возьмём $r = \frac{\rho(a, b)}{2}$.

Пусть $x \in B_r(a) \cap B_r(b)$.

Тогда $\rho(a, x) < \frac{\rho(a, b)}{2}$ и $\rho(x, b) < \frac{\rho(a, b)}{2}$.

Но тогда $\rho(a, x) + \rho(x, b) < \rho(a, b)$, противоречие с Δ . \square

Аналогичная пара свойств есть и у \overline{B} .

2.2. Билет 13: Открытые множества: определение и свойства.

Определение 2.3.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

Точка $a \in A$ называется внутренней если $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A$.

Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\text{Int } A$.

Определение 2.4.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

A называется открытым, если все его точки внутренние.

Свойства.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

1. \emptyset, X - открытые множества.

2. Объединение любого количества открытых множеств открыто

Доказательство.

Пусть $\forall \alpha \in I \quad A_\alpha$ - открытое множество. $A := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Возьмём точку a , $\exists \beta \in I \quad a \in A_\beta$.

Так-как A_β открытое, $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A_\beta \subset A$. \square

3. Пересечение конечного количества открытых множеств открыто

*Доказательство.*Пусть $I = [1; n]$, $\forall k \in I \quad a \in A_k$, A_k - открытое.Тогда $\forall k \in I \quad \exists r_k > 0 \quad B_{r_k}(a) \subset A_k$.Пусть $r = \min_k r_k > 0$.Тогда $\forall k \in I \quad B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k \implies B_r(a) \subset \bigcap_{k=1}^n A_k$. □4. $\forall a \in X \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad B_r(a)$ - открытое множество.*Доказательство.*Пусть $x \in B_r(a)$, $\tilde{r} = r - \rho(x, a)$.Покажем что $B_{\tilde{r}}(x) \subset B_r(a)$:

$$\begin{aligned}
y \in B_{\tilde{r}}(x) &\implies \rho(y, x) < \tilde{r} \\
&\implies \rho(y, x) < r - \rho(x, a) \\
&\implies \rho(y, x) + \rho(x, a) < r \\
&\stackrel{\triangle}{\implies} \rho(y, a) < r \\
&\implies y \in B_r(a)
\end{aligned}$$
□

2.3. Билет 14: Внутренние точки и внутренность множества. Свойства.*Определение 2.5* (повтор).Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.Точка $a \in A$ называется внутренней если $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A$.Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\text{Int } A$.*Свойства.*Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

1. $\text{Int } A \subset A$
2. $\text{Int } A$ - объединение всех открытых множеств содержащихся в A .

*Доказательство.*Пусть $G = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, где $U_\alpha \subset A$ - открытое. $\text{Int } A \subset G$:

$$\begin{aligned}
x \in G &\implies \exists \alpha \in I \quad x \in U_\alpha \\
&\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U_\alpha \subset A \\
&\implies x \in \text{Int } A
\end{aligned}$$

$G \subset \text{Int } A$: $x \in \text{Int } A \implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset A$. $B_r(x)$ - открытое множество, значит $\exists \alpha \in I \quad U_\alpha = B_r(x) \implies x \in G$. □

3. $\text{Int } A$ - открытое множество

Доказательство.

A - объединение открытых множеств, значит открыто. □

4. $\text{Int } A = A \iff A$ - открыто

Доказательство.

Необходимость (\implies): $\text{Int } A$ открыто.

Достаточность (\impliedby): A открыто \implies все точки внутренние $\implies A = \text{Int } A$. □

5. $A \subset B \implies \text{Int } A \subset \text{Int } B$

6. $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$

Доказательство.

В сторону \subset :

$$\begin{aligned} A \cap B \subset A &\implies \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } A \\ A \cap B \subset B &\implies \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } B \\ &\implies \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } A \cap \text{Int } B \end{aligned}$$

В сторону \supset :

$$\begin{aligned} x &\in \text{Int } A \cap \text{Int } B \\ x &\in \text{Int } A \\ x &\in \text{Int } B \\ \exists r_1 \quad B_{r_1}(x) &\subset A \\ \exists r_2 \quad B_{r_2}(x) &\subset B \\ B_{\min\{r_1, r_2\}}(x) &\subset A \cap B \\ x &\in \text{Int}(A \cap B) \end{aligned}$$

□

7. $\text{Int } \text{Int } A = \text{Int } A$

Доказательство.

Заметим, что $\text{Int } A$ - открытое по 3, дальше по 4 видно равенство. □

2.4. Билет 15: Замкнутые множества: определение и свойства. Замыкание множества, связь со внутренностью.

Определение 2.6.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

A называется замкнутым, если $X \setminus A$ - открыто.

Свойства.

1. \emptyset, X - замкнуты.

2. Пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто

Доказательство.

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

□

Так-как $\forall \alpha \quad X \setminus A_\alpha$ - открытое, то $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ - открытые, значит $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ - замкнутое.

3. Объединение конечного количества замкнутых множеств замкнуто

Доказательство.

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k)$$

□

$X \setminus A_k$ открыто, значит их конечное пересечение открыто, значит $\bigcup_{k=1}^n A_k$ - замкнуто.

4. $\forall a \in X \quad \forall r > 0 \quad \overline{B}_r(a)$ - замкнутое множество.*Доказательство.*

Покажем что $X \setminus \overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) > r\}$ - открыто.

Пусть $x \in X \setminus \overline{B}_r(a)$. $\tilde{r} = \rho(x, a) - r$. Тогда докажем что $B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a) = \emptyset$:

Пусть $y \in B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a)$, тогда $\rho(x, y) < \tilde{r}$, $\rho(y, a) \leq r$.

$$\rho(x, a) \stackrel{\Delta}{\leq} \rho(x, y) + \rho(y, a) < \tilde{r} + r = \rho(x, a).$$

Получили противоречие, значит $B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a) = \emptyset \implies B_{\tilde{r}}(x) \subset X \setminus \overline{B}_r(a)$, значит $X \setminus \overline{B}_r(a)$ - открытое. □

Определение 2.7.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Замыкание множества $A \subset X$ - пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A . Обозначается $\text{Cl } A$ или \overline{A} .

Теорема 2.1.

$$\text{Cl } A = X \setminus \text{Int}(X \setminus A).$$

Доказательство.

Будем доказывать в виде $X \setminus \text{Cl } A = \text{Int}(X \setminus A)$:

Знаем, что $\text{Int}(X \setminus A) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ по всем U_{α} таким, что $U_{\alpha} \subset (X \setminus A)$ и U_{α} открыто.

Пусть C - замкнутое множество, такое, что $A \subset C$. Тогда $X \setminus C$ - открытое, и $(X \setminus A) \subset (X \setminus C) \implies \exists \alpha \quad U_{\alpha} = X \setminus C$.

Аналогично в другую сторону - $\forall \alpha \quad X \setminus U_{\alpha}$ - замкнутое надмножество A .

Пусть $C_{\alpha} = X \setminus U_{\alpha}$.

$$X \setminus \text{Cl } A = X \setminus \bigcap_{\alpha} C_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (X \setminus C_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = \text{Int}(X \setminus A).$$

□

2.5. Билет 16: Свойства замыкания. Предельные точки. Связь с замыканием множества.

Свойства.

1. $A \subset \text{Cl } A$
2. $\text{Cl } A$ - замкнутое множество

Доказательство.

По определению, $\text{Cl } A$ - пересечение замкнутых множеств. □

3. $\text{Cl } A = A \iff A$ замкнуто

Доказательство.

$$\begin{aligned} A = \text{Cl } A &\iff X \setminus A = X \setminus \text{Cl } A \\ &\iff X \setminus A = \text{Int}(X \setminus A) \\ &\iff X \setminus A \text{ открыто} \\ &\iff A \text{ замкнуто} \end{aligned} \quad \square$$

4. $A \subset B \implies \text{Cl } A \subset \text{Cl } B$

Доказательство.

$$\begin{aligned} A \subset B &\implies (X \setminus B) \subset (X \setminus A) \\ &\implies \text{Int}(X \setminus B) \subset \text{Int}(X \setminus A) \\ &\implies X \setminus \text{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus \text{Int}(X \setminus B) \\ &\implies \text{Cl } A \subset \text{Cl } B \end{aligned} \quad \square$$

5. $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl } A \cup \text{Cl } B$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \text{Cl}(A \cup B) &= X \setminus \text{Int}(X \setminus (A \cup B)) \\ &= X \setminus \text{Int}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \\ &= X \setminus (\text{Int}(X \setminus A) \cap \text{Int}(X \setminus B)) \\ &= (X \setminus \text{Int}(X \setminus A)) \cup (X \setminus \text{Int}(X \setminus B)) \\ &= \text{Cl } A \cup \text{Cl } B \end{aligned} \quad \square$$

6. $\text{Cl}(\text{Cl } A) = \text{Cl } A$

Доказательство.

$\text{Cl } A$ замкнуто по свойству 2, равенство следует из свойства 3. □

Теорема 2.2.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$$a \in \text{Cl } A \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \neq \emptyset.$$

Доказательство.

Необходимость (\implies):

Предположим что $\exists r > 0 \quad B_r(a) \cap A = \emptyset$.

Тогда $a \notin A$ и $B_r(a) \subset X \setminus A$, значит $a \in \text{Int}(X \setminus A) \implies a \notin X \setminus \text{Int}(X \setminus A) \implies a \notin \text{Cl } A$.

Достаточность (\impliedby):

Пусть $a \notin \text{Cl } A$, тогда $\exists F$ - замкнутое надмножество A , такое, что $a \notin F \implies a \in X \setminus F$.

При этом, $X \setminus F$ открыто.

Тогда $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset X \setminus F \subset X \setminus A$.

Но тогда $B_r(a) \cap A = \emptyset$. □

Следствие.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$, а $U \subset X$ - открытое множество. При этом $A \cap U = \emptyset$.

Тогда $\text{Cl } A \cap U = \emptyset$

Доказательство.

$$\begin{aligned} x \in \text{Cl } A \cap U &\implies x \in U \\ &\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U \\ &\implies B_r(x) \cap A \subset U \cap A = \emptyset \\ &\implies x \notin \text{Cl } A \\ &\implies x \notin \text{Cl } A \cap U \end{aligned}$$

Получили противоречие, значит таких x не существует. □

Определение 2.8.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Проколотой окрестностью радиуса $r \in \mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a \in X$ называется $\mathring{B}_r(a) := B_r(a) \setminus \{a\} = \{x \in X \mid 0 < \rho(x, a) < r\}$.

Определение 2.9.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$a \in A$ называется предельной точкой, если $\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset$.

Множества предельных точек множества A обозначается A' .

Свойства.

$$1. \text{Cl } A = A \cup A'$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
a \in \text{Cl } A &\iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \neq \emptyset \\
&\iff \begin{cases} a \in A \\ \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a \in A \\ a \in A' \end{cases}
\end{aligned}$$

□

$$2. A \subset B \implies A' \subset B'$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
a \in A' &\implies \forall r \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \\
&\implies \mathring{B}_r(a) \cap B \neq \emptyset \\
&\implies a \in B'
\end{aligned}$$

□

$$3. (A \cup B)' = A' \cup B'$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
A \subset A \cup B &\implies A' \subset (A \cup B)' \\
B \subset A \cup B &\implies B' \subset (A \cup B)' \\
&\implies A' \cup B' \subset (A \cup B)'
\end{aligned}$$

Покажем другое включение: возьмём $x \in (A \cup B)'$.

Пусть $x \notin A'$: Тогда $\exists R > 0 \quad \mathring{B}_R(x) \cap A = \emptyset$.

Заметим, что $\forall 0 < r \leq R \quad \mathring{B}_r(x) \cap A \subset B_R(x) \cap A = \emptyset$, значит $\forall r > 0 \quad \exists 0 < R_r < r \quad B_{R_r}(x) \cap A = \emptyset$.

Так-как $\mathring{B}_{R_r}(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, значит $\mathring{B}_{R_r}(x) \cap B \neq \emptyset$. Тогда

$$\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(x) \cap B \supset \mathring{B}_{R_r}(x) \cap B \neq \emptyset.$$

Значит, $x \in B'$

□

$$4. A' \subset A \iff A - \text{замкнутое}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
A - \text{замкнутое} &\iff A = \text{Cl } A \\
&\iff A = A \cup A' \\
&\iff A' \subset A
\end{aligned}$$

□

Теорема 2.3.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$$a \in A' \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \text{ содержит бесконечно много точек.}$$

Доказательство.

Необходимость (\Rightarrow):

Знаем, что $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset$, возьмём точку $x_1 \in \mathring{B}_r(a) \cap A$, возьмём $r_2 = \rho(x_1, a)$, знаем, что $\mathring{B}_{r_2}(a) \cap A \neq \emptyset$, можем взять точку оттуда, и вообще повторять бесконечное число раз.

Достаточность (\Leftarrow): $B_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек $\Rightarrow \mathring{B}_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек $\Rightarrow \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow a \in A'$. \square

2.6. Билет 17: Индуцированная метрика. Открытые и замкнутые множества в пространстве и в подпространстве.

Определение 2.10.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $Y \subset X$.

Тогда пара $\langle Y, \rho|_{Y \times Y} \rangle$ называется метрическим подпространством X .

Далее, при разговоре о подпространствах обычно будет указываться только множество, а метрика использоваться та-же что и для основного пространства.

Теорема 2.4.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, Y - его подпространство.

$A \subset Y$ открыто в Y тогда и только тогда, когда $\exists G$ открытое в X , такое, что $A = G \cap Y$

Доказательство.

Необходимость (\Rightarrow):

$$\begin{aligned} A \text{ - открыто в } Y &\Rightarrow \forall a \in A \quad \exists r_a > 0 \quad B_{r_a}^Y(a) \subset A \\ &\Rightarrow A = \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}^Y(A) \subset \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}^X(a) =: G \end{aligned}$$

G - подходящее множество - оно открыто как объединение открытых, покажем что $A = G \cap Y$:

$$B_r^Y(x) = B_r^X(x) \cap Y.$$

$$G \cap Y = Y \cap \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}^X(a) = \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}^Y(a) = A.$$

Достаточность (\Leftarrow):

Пусть $A = G \cap Y$. Возьмём $a \in A$.

$$\begin{aligned} G \text{ открыто в } X &\Rightarrow \exists r > 0 \quad B_r^X(a) \subset G \\ &\Rightarrow B_r^X(a) \cap Y \subset G \cap Y \\ &\Rightarrow B_r^Y(a) \subset A \\ &\Rightarrow A \text{ открыто в } Y \end{aligned} \quad \square$$

Теорема 2.5.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, Y - его подпространство.

$A \subset Y$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\exists F$ замкнутое в X , такое, что $A = F \cap Y$.

Доказательство.

$F := X \setminus G$, где G - открытое в X такое, что $G \cap Y = Y \setminus A$ существование которого эквивалентно открытости $Y \setminus A \iff$ замкнутости A .

$$\begin{aligned} F \cap Y &= (X \setminus G) \cap Y \\ &= (X \cap Y) \setminus G \\ &= Y \setminus G \\ &= Y \setminus (G \cap Y) \\ &= Y \setminus (Y \setminus A) \\ &= A \end{aligned}$$

□

2.7. Билет 18: Скалярное произведение и норма. Свойства и примеры. Неравенство Коши–Буняковского.

Определение 2.11.

Нормированным пространством над \mathbb{R} называется пара $\langle X, \|\cdot\| \rangle$, где X - линейное пространство над \mathbb{R} (далее одно и то же обозначение используется для линейного пространства и его множества векторов), а $\|\cdot\| : X \mapsto \mathbb{R}$ - норма, обладающая следующими свойствами $\forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Δ)

Пример.

$$X = \mathbb{R}, \|x\| = |x|$$

Пример.

На $X = \mathbb{R}^d$ можно задать бесконечно много норм:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^d |x_i|. \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^d |x_i|^2}. \\ \|x\|_n &= \sqrt[n]{\sum_{i=1}^d |x_i|^n}. \\ \|x\|_\infty &= \max_{i \in \{1, \dots, d\}} |x_i|. \end{aligned}$$

Пример.

$$X = C[a, b], \|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Доказательство.

Докажем неравенство треугольника:

$$\begin{aligned}
 \|f + g\| &= \max_{x \in [a, b]} |f(x) + g(x)| \\
 &= |f(x_0) + g(x_0)| \\
 &\leq |f(x_0)| + |g(x_0)| \\
 &\leq \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |g(x)| \\
 &= \|f\| + \|g\|
 \end{aligned}$$

□

Определение 2.12.

Пусть X - линейное пространство, тогда функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если удовлетворяет следующим свойствам $\forall x, y, z \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}$.
2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Замечание.

Аналогичные определения можно дать над \mathbb{C} , тогда надо ещё потребовать $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$, и третий пункт примет вид $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Пример.

$$X = \mathbb{R}^d, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

Пример.

Пусть $w_1, \dots, w_d > 0$, тогда

$$X = \mathbb{R}^d, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d w_i x_i y_i$$

Пример.

$$X = C[a, b], \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

Свойства.

1. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ и $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$
2. Неравенство Коши-Буняковского: $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$

Доказательство.

Пусть $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \langle x + ty, x + ty \rangle &\geq 0. \\
 \langle x + ty, x + ty \rangle &= \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle.
 \end{aligned}$$

Это квадратное уравнение имеет корень только если $x + ty = 0$, значит не более одного корня. Его дискриминант ≤ 0 :

$$(2 \langle x, y \rangle)^2 - 4 \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leq 0 \implies \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle.$$

□

3. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ - норма

Доказательство.

(а) Первое свойство переносится напрямую, из аналогичных свойств для $\langle x, x \rangle$ и $\sqrt{\cdot}$.

(b) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = \lambda \|x\|$

(с)

$$\begin{aligned} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| &\iff \sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \\ &\stackrel{.2}{\iff} \langle x + y, x + y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &\iff \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\iff \langle x, y \rangle \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle} \\ &\iff \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

Последнее неравенство - неравенство Коши-Буняковского. □

Свойства.

1. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ - метрика

Доказательство.

(а) Первое свойство переходит прямо

(b) $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |(-1)|\|x - y\| = \rho(x, y)$

(с) $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$ (Δ для нормы).

□

2. $|||x| - |y||| \leq \|x - y\|$

Доказательство.

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \stackrel{\Delta}{\leq} \|x - y\| + \|y\|.$$

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \stackrel{\Delta}{\leq} \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|.$$

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| \implies \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

$$\|y\| \leq \|x - y\| + \|x\| \implies \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|.$$

□

2.8. Билет 19: Предел последовательности в метрическом пространстве. Определение и основные свойства.

Определение 2.13.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $x_n \in X$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon.$$

Определение 2.14.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $E \subset X$.

E называется ограниченным если $\exists r > 0 \quad \exists a \in X \quad E \subset B_r(a)$.

Свойства.

1. Предел единственен

Доказательство.

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, $a \neq b$.

Возьмём $\varepsilon = \frac{\rho(a,b)}{2}$, $a \neq b \implies \varepsilon > 0$, возьмём $N = \max\{N_a, N_b\}$, где N_a, N_b - N из соответствующих определений предела при подстановке ε .

Тогда, $\rho(x_N, a) < \varepsilon$ и $\rho(x_N, b) < \varepsilon$.

Но тогда $\rho(a, b) \stackrel{\Delta}{\leq} \rho(a, x_N) + \rho(x_N, b) < 2\varepsilon = \rho(a, b)$. Противоречие, значит предел единственен. \square

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$

Доказательство.

Определения посимвольно совпадают. \square

3. Если последовательность имеет предел, она ограничена

Доказательство.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0 \\ &\implies \rho(x_n, a) - \text{ограниченная последовательность вещественных чисел} \\ &\implies \exists R > 0 \quad \rho(x_n, a) < R \\ &\implies \{x_n\} \subset B_R(a) \end{aligned} \quad \square$$

4. Если a - предельная точка множества A , то можно выбрать последовательность $x_n \in A$, такую что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, и $\rho(x_n, a)$ строго монотонно убывает.

Доказательство.

По определению предельной точки, $\forall r > 0 \quad \dot{B}_r(a) \neq \emptyset$.

Пусть $r_1 = 1$, $r_n = \min\{\frac{1}{n}, \rho(x_{n-1}, a)\}$, $x_n \in \dot{B}_{r_n}(a)$ - такой x_n всегда можно выбрать, так как окрестность непуста. Тогда $\rho(x_n, a) < r \implies \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \implies \rho(x_n, a) \rightarrow 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, и при этом $\rho(x_n, a) < r_n < \rho(x_{n-1}, a)$. \square

2.9. Билет 20: Арифметические свойства пределов последовательности векторов. Покоординатная сходимость.

Теорема 2.6.

Пусть $\langle X, \|\cdot\| \rangle$ - нормированное пространство, $x_n, y_n, a, b \in X$, $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$, $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$.

Тогда:

$$\|x_n - a\| \rightarrow 0.$$

$$\|y_n - b\| \rightarrow 0.$$

$$1. \ x_n + y_n \rightarrow a + b$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|(x_n + y_n) - (a + b)\| \\ &= \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \\ &\triangleq \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \\ &\rightarrow 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

□

$$2. \ \lambda_n x_n \rightarrow \lambda a$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\lambda_n x_n - \lambda a\| \\ &= \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \lambda a\| \\ &= \|\lambda_n(x_n - a) + (\lambda_n - \lambda)a\| \\ &\leq \|\lambda_n(x_n - a)\| + \|(\lambda_n - \lambda)a\| \\ &= |\lambda_n| \|x_n - a\| + |(\lambda_n - \lambda)| \|a\| \\ &\rightarrow |\lambda| \cdot 0 + 0 \cdot \|a\| = 0 \end{aligned}$$

□

$$3. \ x_n - y_n \rightarrow a - b$$

Доказательство.

$$-y_n = -1 \cdot y_n \implies -1 \cdot b = -b, \ x_n + (-y_n) \rightarrow a + (-b) = a - b.$$

□

$$4. \ \|x_n\| \rightarrow \|a\|$$

Доказательство.

$$0 \leq |||x| - |a||| \leq \|x - a\| \rightarrow 0.$$

□

$$5. \ \text{Если задано скалярное произведение и } \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \text{ то } \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle.$$

Доказательство.

Заметим следующий факт:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) &= \frac{1}{4} (\langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle) \\
 &= \frac{1}{4} (\langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle - (\langle x, x \rangle - 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle)) \\
 &= \frac{1}{4} \cdot 4 \langle x, y \rangle \\
 &= \langle x, y \rangle
 \end{aligned}$$

Теперь:

$$\begin{aligned}
 \langle x_n, y_n \rangle - \langle a, b \rangle &= \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, b \rangle + \langle x_n, b \rangle - \langle a, b \rangle \\
 &= \langle x_n, y_n - b \rangle - \langle x_n - a, y_n \rangle \\
 &= \frac{1}{4} (\|x_n + y_n - b\|^2 - \|x_n - y_n + b\|^2 - \|x_n - a + y_n\|^2 + \|x_n - a - y_n\|^2) \\
 &\rightarrow \frac{1}{4} (\|a\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2 + \|b\|^2) = 0
 \end{aligned}$$

□

Определение 2.15.

Пусть $x_n \in \mathbb{R}^d$, $x_n = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(d)})$.

Тогда x_n покоординатно сходится к x_0 , если

$$\forall k \in [1, d] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(k)} = x_0^{(k)}.$$

Теорема 2.7.

В \mathbb{R}^d с евклидовой нормой сходимость по норме эквивалентна координатной.

Доказательство.

Необходимость (норма \implies коорд):

$$\forall k \in [1, d] \quad 0 \leq (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 \leq \sum_{j=1}^d (x_n^{(j)} - x_0^{(j)})^2 = \|x_n - x_0\|^2 \rightarrow 0.$$

Достаточность (коорд \implies норма)

$$0 \leq \|x - x_0\|^2 = \sum_{k=1}^d (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 \rightarrow 0.$$

□

2.10. Билет 21: NAME

2.11. Билет 22: NAME

2.12. Билет 23: NAME

2.13. Билет 24: NAME

2.14. Билет 25: NAME

2.15. Билет 26: NAME

2.16. Билет 27: NAME

2.17. Билет 28: NAME

2.18. Билет 29: NAME

2.19. Билет 30: NAME

2.20. Билет 31: NAME

2.21. Билет 32: NAME

2.22. Билет 33: NAME

2.23. Билет 34: NAME

2.24. Билет 35: NAME

2.25. Билет 36: NAME

2.26. Билет 37: NAME

2.27. Билет 38: NAME

2.28. Билет 39: NAME

3. Числовые и функциональные ряды

3.1. Билет 40: NAME

3.2. Билет 41: NAME

3.3. Билет 42: NAME

3.4. Билет 43: NAME

3.5. Билет 44: NAME

3.6. Билет 45: NAME

3.7. Билет 46: NAME

3.8. Билет 47: NAME

3.9. Билет 48: NAME

3.10. Билет 49: NAME

3.11. Билет 50: NAME

3.12. Билет 51: NAME

3.13. Билет 52: NAME

3.14. Билет 53: NAME

3.15. Билет 54: NAME

3.16. Билет 55: NAME

3.17. Билет 56: NAME

3.18. Билет 57: NAME

3.19. Билет 58: NAME

3.20. Билет 59: NAME

3.21. Билет 60: NAME

3.22. Билет 61: NAME

3.23. Билет 62: NAME

3.24. Билет 63: NAME

3.25. Билет 64: NAME

3.26. Билет 65: NAME

3.27. Билет 66: NAME

R – радиус сходимости, $0 < r < R$. Тогда в круге $|z| \leq r$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

$r < R \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ сходится абсолютно. Для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| \leq r$ воспользуемся признаком Вейерштрасса. $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$, $|a_n| r^n$ сходится \implies по признаку Вейерштрасса $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| \leq r$ сходится равномерно. \square

Замечание.

Равномерной сходимости во всем круге может не быть.

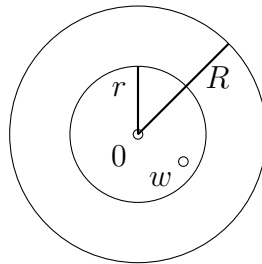
Контрпример $R = 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, хвост ряда $\sum_{k=n}^{\infty} z^k = \frac{z^n}{1-z} \not\rightarrow 0$, т.к. можем одновременно приблизить числитель к единице, а знаменатель к нулю, и дробь получается сколь угодно большой.

Следствие.

Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.

Доказательство.

Возьмем произвольную точку w из круга сходимости, достаточно доказать лишь непрерывность в окрестности. Берем r , т.ч. $|w| < r < R$. Знаем, что в круге $|z| < r$ ряд равномерно сходится. Есть равномерная сходимость и каждое слагаемое это непрерывная функция \implies в круге $|z| < r$ сумма непрерывна \implies есть непрерывность суммы и в w . В силу произвольности w сумма непрерывна в любой точке $|z| < R$.



\square

Теорема 3.2 (Абеля).

Пусть R – радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и ряд сходится при $z = R$. Тогда на отрезке $[0, R]$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$. Применим признак Абеля. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится равномерно (нет зависимости от x), $\left(\frac{x}{R}\right)^n \in [0, 1] \implies$ равномерно огранич., $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ монотонно убывает, тогда по признаку Абеля $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно. \square

Следствие.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, если выполнены условия теоремы, то $f(x) \in C[0, R]$, т.к. равномерная сходимость влечет непрерывность. В частности, $\lim_{x \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

3.29. Билет 68: Почленное интегрирование суммы степенного ряда.**Лемма.**

$x_n, y_n \in \mathbb{R}$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \in (0, +\infty)$. Тогда $\overline{\lim} x_n y_n = \lim x_n \overline{\lim} y_n$.

Доказательство.

$A = \lim x_n, B = \overline{\lim} y_n, C = \overline{\lim} x_n y_n$. (Напоминание: верхний предел это наибольший из частичных).

$\exists n_k$, т.ч. $x_{n_k} y_{n_k} \rightarrow C$. $\lim x_{n_k} y_{n_k} = \lim x_{n_k} \lim y_{n_k}$, равенство есть, т.к. существует предел слева и предел x_{n_k} . Из равенства следует, что $\lim y_{n_k} = \frac{C}{A} \leq B \implies C \leq AB$.

$\exists m_k$, т.ч. $y_{m_k} \rightarrow B$. $\lim x_{m_k} y_{m_k} = \lim x_{m_k} \lim y_{m_k} \implies \lim x_{m_k} y_{m_k} = AB \leq C$.

Итого равенство. □**Следствие.**

Радиусы сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$ совпадают.

Доказательство.

Домножение на z не влияет на радиус, поэтому докажем для рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n+1}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^n.$$

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}, R_2 = \frac{1}{\overline{\lim} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n+1}}}, R_3 = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{n}}$$

$\lim \sqrt[n]{n+1} = \lim \sqrt[n]{n} = 1$, по лемме можем вытащить из под верхнего предела и окажется, что $R_1 = R_2 = R_3$. □

Теорема 3.3 (Почленное интегрирование степенного ряда).

R – радиус сходимости ряда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Тогда при $|x - x_0| < R$

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \text{ и полученный ряд имеет тот же радиус сходимости.}$$

Доказательство.

На $[x_0, x]$ ряд сходится равномерно (теорема из билета 67) $\implies f \in C[x_0, x]$ и можно интегрировать почленно $\int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^x (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$. □

3.30. Билет 69: NAME**3.31. Билет 70: NAME****3.32. Билет 71: NAME****3.33. Билет 72: NAME**

4. Функции нескольких переменных

- 4.1. Билет 73: NAME
- 4.2. Билет 74: NAME
- 4.3. Билет 75: NAME
- 4.4. Билет 76: NAME
- 4.5. Билет 77: NAME
- 4.6. Билет 78: NAME
- 4.7. Билет 79: NAME
- 4.8. Билет 80: NAME
- 4.9. Билет 81: NAME
- 4.10. Билет 82: NAME
- 4.11. Билет 83: NAME
- 4.12. Билет 84: NAME
- 4.13. Билет 85: NAME
- 4.14. Билет 86: NAME
- 4.15. Билет 87: NAME
- 4.16. Билет 88: NAME
- 4.17. Билет 89: NAME
- 4.18. Билет 90: NAME
- 4.19. Билет 91: NAME
- 4.20. Билет 92: NAME
- 4.21. Билет 93: NAME
- 4.22. Билет 94: NAME
- 4.23. Билет 95: NAME
- 4.24. Билет 96: NAME
- 4.25. Билет 97: NAME
- 4.26. Билет 98: NAME

5. Теория меры

5.1. Билет 99: NAME

5.2. Билет 100: NAME

5.3. Билет 101: NAME

5.4. Билет 102: NAME