

Ausarbeitung Übung 8

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg
Datum: 27. Januar 2021

Darmstadt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Ausarbeitung Übung 8

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg

Datum: 27. Januar 2021

Darmstadt

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Bearbeitung der Aufgaben	3
2.1	Doppelwirbelgleichung in 2D und 3D	3
2.2	Geschichteter Kondensator	5
2.3	Beschleunigermagnet, FEMM	8
3	Fazit	10
4	Anhang	11

1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Übungsblatt 7 des Faches „Einführung in die numerische Berechnung elektromagnetischer Felder“. Zunächst wird die skalare Laplace-Gleichung für den 2D-Fall hergeleitet. Anschließend wird durch Einsetzen der Maxwell- und Materialgleichungen die gedämpfte Wellengleichung hergeleitet. Es wird ein Kondensator mit linear-variierender Permittivität mit Hilfe der Methode der Finiten Integration simuliert und das Ergebnis in ParaView analysiert. Abschließend wird ein Beschleunigermagnet in FEMM simuliert und die Stärke der Homogenität sowie die Sättigung der Eisenteile überprüft.

2 Bearbeitung der Aufgaben

2.1 Doppelwirbelgleichung in 2D und 3D

Aus der statischen Doppelwirbelgleichung

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu \vec{J}, \quad (2.1)$$

lässt sich die skalare Laplace-Gleichung (2.2) für den 2D Fall mit $\vec{A} = [0, 0, A_z]^T$ herleiten:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} &= \mu \vec{J} \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} &= \mu \vec{J}, \end{aligned}$$

wobei

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot [0, 0, A_z]^T) = \nabla (\partial_z A_z) = 0.$$

Hierbei ist $\partial_z A_z = 0$, da A_z im zweidimensionalen Fall nur von x und y abhängt. Damit ergibt sich schließlich die Laplace-Gleichung

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (2.2)$$

Das Feld $\vec{A} = [0, 0, A_z]^T$ genügt mit $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ der Coulomb-Eichung. Daher ist \vec{A} bis auf eine additive Konstante $A = [0, 0, A_z + c]^T$ bestimmt.

Nun soll mithilfe des Faraday'schen Gesetzes (2.3) die gedämpfte Wellengleichung (2.6) hergeleitet werden. Hierfür werden die folgenden Maxwell'schen Gleichungen benötigt:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\partial_t \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{J} \right) \quad \text{mit } \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.4)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.5)$$

Nach Anwenden des Rotationsoperators auf (2.3) erhält man:

$$\begin{aligned}
\text{rot } \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \\
\text{rot rot } \vec{E} &= -\partial_t \text{rot } \vec{B} \\
\text{rot rot } \vec{E} &= -\partial_t \mu_0 (\partial_t \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{J}) && \text{nach einsetzen von (2.4)} \\
\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} &= -\partial_t \mu_0 (\partial_t \varepsilon_0 \vec{E} + \sigma \vec{E}) \\
\text{grad} \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) - \Delta \vec{E} &= -\partial_t \mu_0 (\partial_t \varepsilon_0 \vec{E} + \sigma \vec{E}) && \text{nach einsetzen von (2.5)}
\end{aligned}$$

Wir haben $\rho = 0$ gesetzt, da wir keinen anderen Weg gefunden haben den letzten störenden Term zu eliminieren. Somit gilt unsere gedämpfte Wellengleichung nur im Ladungsfreien Raum.

$$-\Delta \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \vec{E} + \underbrace{\mu_0 \partial_t (\sigma \vec{E})}_{\text{Dämpfung}} = 0 \tag{2.6}$$

Möchte man diese Formel nun mit der Potentialformulierung $\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \nabla \Phi$ ausdrücken erhält man:

$$\Delta (\partial_t \vec{A} + \nabla \Phi) - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 (\partial_t \vec{A} + \nabla \Phi) - \mu_0 \partial_t (\sigma (\partial_t \vec{A} + \nabla \Phi)) = 0 \tag{2.7}$$

Es wird schnell deutlich, dass dieses Vorgehen nicht empfehlenswert ist. Es handelt sich, abgesehen von Länge der Formel, nun auch um eine Differenzialgleichung dritter Ordnung, zuvor war die Ordnung nur zwei. Dies erschwert das Lösen der Gleichung erheblich.

2.2 Geschichteter Kondensator

Ein geschichteter Plattenkondensator lässt sich mit verschiedenen Programmen graphisch darstellen und analysieren. Während FEMM auf eine zwei Dimensionale Darstellung des Problems beschränkt ist, lassen sich mit Hilfe der Methode der Finiten Integration (FIT) und einem geeigneten Simulationsprogramm drei Dimensionale Darstellungen erzeugen. Das angehängte Skript `SkriptAg8_2` bildet den Vorgang der FIT ab, die Ergebnisse werden in ParaView graphisch dargestellt.

Zur Berechnung wird das Gebiet $\Omega = \{-1, 1\}^3$ betrachtet, es gilt $N_x = N_y = N_z = 21$ und damit $N_p = 9261$, dieses Gebiet wird kanonisch nummeriert. Allgemein wird ein Plattenkondensator mit linear-variiender Permittivität nachgestellt, die unterschiedlichen Permittivitäten werden mit der Methode `calc_eps_linear` bestimmt und in einem Vektor gespeichert. Des Weiteren ist an den Knoten, die die Elektroden widerspiegeln eine DIRICHLET-Randbedingung vorgegeben. Das Potential an diesen Knoten beträgt jeweils 0 V bzw. 1 V. Das elektrische Feld und die Potentiale zwischen den beiden Elektroden gilt es zu berechnen.

Die Methode `createMeps` liefert die zur Rechnung benötigte Matrix \mathbf{M}_ϵ , sie führt eine Materialmittlung durch. Um nun alle Potentiale in dem Gebiet Ω zu berechnen, muss das Gleichungssystem

$$\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\epsilon\tilde{\mathbf{S}}^T\boldsymbol{\Phi} = 0 \quad (2.8)$$

berechnet werden. Zur Vereinfachung nimmt man an, dass $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\epsilon\tilde{\mathbf{S}}^T$ gilt. Durch diese Rechnung wird garantiert, dass nur im Rechengebiet befindliche Gitterkanten und keine Geisterkanten beachtet werden, die Struktur der Matrix ist in Abbildung 2.1a zu sehen.

In $\boldsymbol{\Phi}$ befinden sich sowohl die bekannten Potentiale der Randbedingungen, als auch die noch unbekannten Potentiale. Ist das Potential ϕ_n an einem Knoten P_n des Gitters bekannt, so kann die n -te Zeile und Spalte der Matrix \mathbf{A} gestrichen werden, sowie der n -te Eintrag aus dem Vektor $\boldsymbol{\Phi}$.

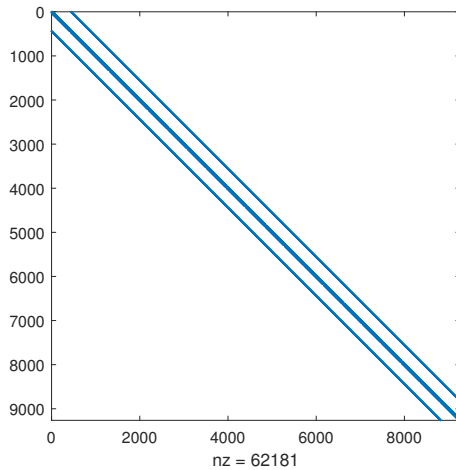
Die n -te Spalte, abzüglich des Eintrags in der n -ten Zeile, der Matrix \mathbf{A} wird auf der anderen Seite des Gleichungssystems (2.8) abgezogen und mit dem bekannten ϕ_n multipliziert. Führt man dies nun für alle Punkte durch, bei denen die Randbedingung bekannt ist, so entsteht ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 = -\mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2,$$

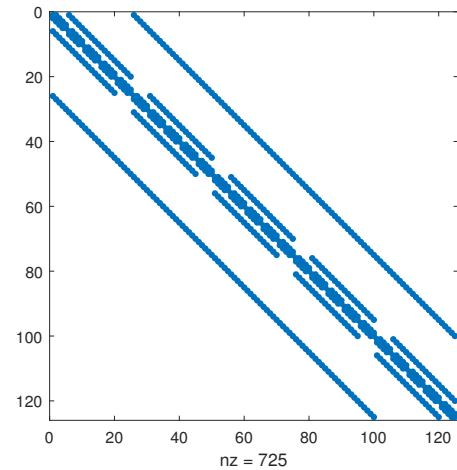
wobei in \mathbf{x}_1 alle nicht bekannten und in \mathbf{x}_2 alle bekannten Potentiale gespeichert sind. \mathbf{x}_1 lässt sich nun in Matlab ganz einfach mit

$$\mathbf{x}_1 = -\mathbf{A}_{11} \setminus \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2$$

berechnen. Der Potentialvektor $\boldsymbol{\Phi}$ kann aus \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 in der richtigen Reihenfolge bestimmt werden. Das dazugehörige elektrische Feld wird mit $\tilde{\mathbf{S}}^T\boldsymbol{\Phi} = \hat{\mathbf{e}}$ berechnet. Da es sich bei $\hat{\mathbf{e}}$ um eine Potentialdifferenz mit der Einheit Volt handelt, teilt man noch durch den räumlichen Abstand der beiden Gitterpunkte, um auf ein angenähertes elektrische Feld zu bestimmen.

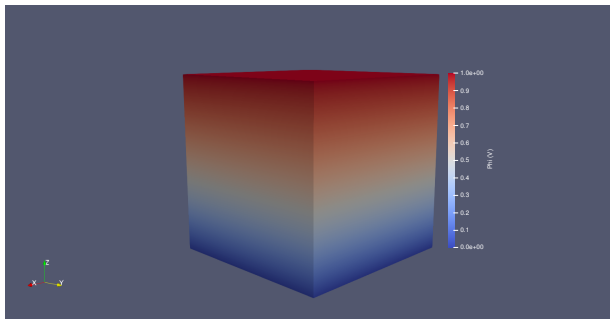


(a) Die Systemmatrix, die bei $N_x = N_y = N_z = 21$ entsteht

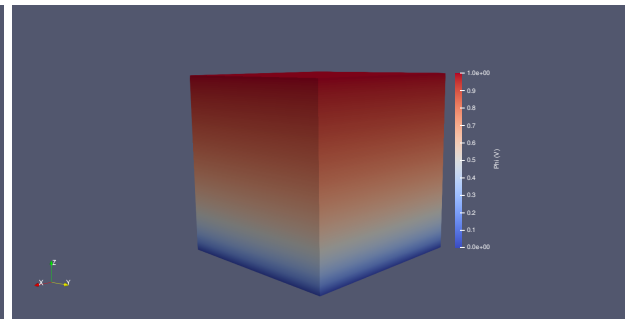


(b) Die Systemmatrix, die bei $N_x = N_y = N_z = 5$ entsteht

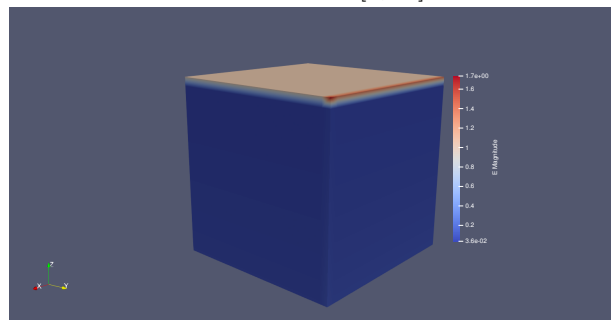
In Abbildung 2.2a und 2.2b sind verschiedene Potentialverläufe zu sehen, bei Abb. 2.2a wurde eine linear ansteigende Permittivität $\varepsilon_r \in [1, 2]$ gewählt, Abb. 2.2b wiederum beschreibt das Potential mit $\varepsilon_r \in [1, 10]$. Abbildung 2.2c zeigt das vorher berechnete elektrische Feld. Dieses hat nicht den erwarteten Verlauf, bei der Rechnung $\tilde{\mathbf{S}}^T \Phi = \mathbf{e}$ werden Geisterkanten beachtet, die das Ergebnis verfälschen, zudem müssen die Werte auf eine Zelle gemittelt werden. Zunächst wird eine Indexmenge bestimmt, die die Indizes aller primären Volumina, die vollständig im Rechengebiet liegen beinhaltet. In dem Skript SkriptAg8_2 geschieht dieser Vorgang in drei in sich geschachtelten Vorschleifen (Zeile 32 bis 45). Grafisch interpretiert, geht man zunächst alle Volumen in x -Richtung bis zum Index $N_x - 1$ durch und speichert diese Indizes. Hat man $N_x - 1$ erreicht geht man einen Schritt in y -Richtung und wiederholt die Zählung in x -Richtung. Diesen Vorgang wird $N_y - 1$ mal wiederholt, bis man die nächste Stufe in z -Richtung erreicht. Auch in z -Richtung wird die Zählung $N_z - 1$ mal durchgeführt.



(a) Potentialverteilung im Kondensator mit $\varepsilon_r \in [1, 2]$



(b) Potentialverteilung im Kondensator mit $\varepsilon_r \in [1, 10]$



(c) Mit dem dualen Divergenzoperator $\tilde{\mathbf{S}}^T \Phi$ berechnete elektrische Feld

Nun können der Methode `fit_pe2pc` die passenden Indizes übergeben werden und das elektrische Feld somit berechnet werden. Das daraus resultierende Ergebnis ist in Abbildung 2.3 dargestellt.

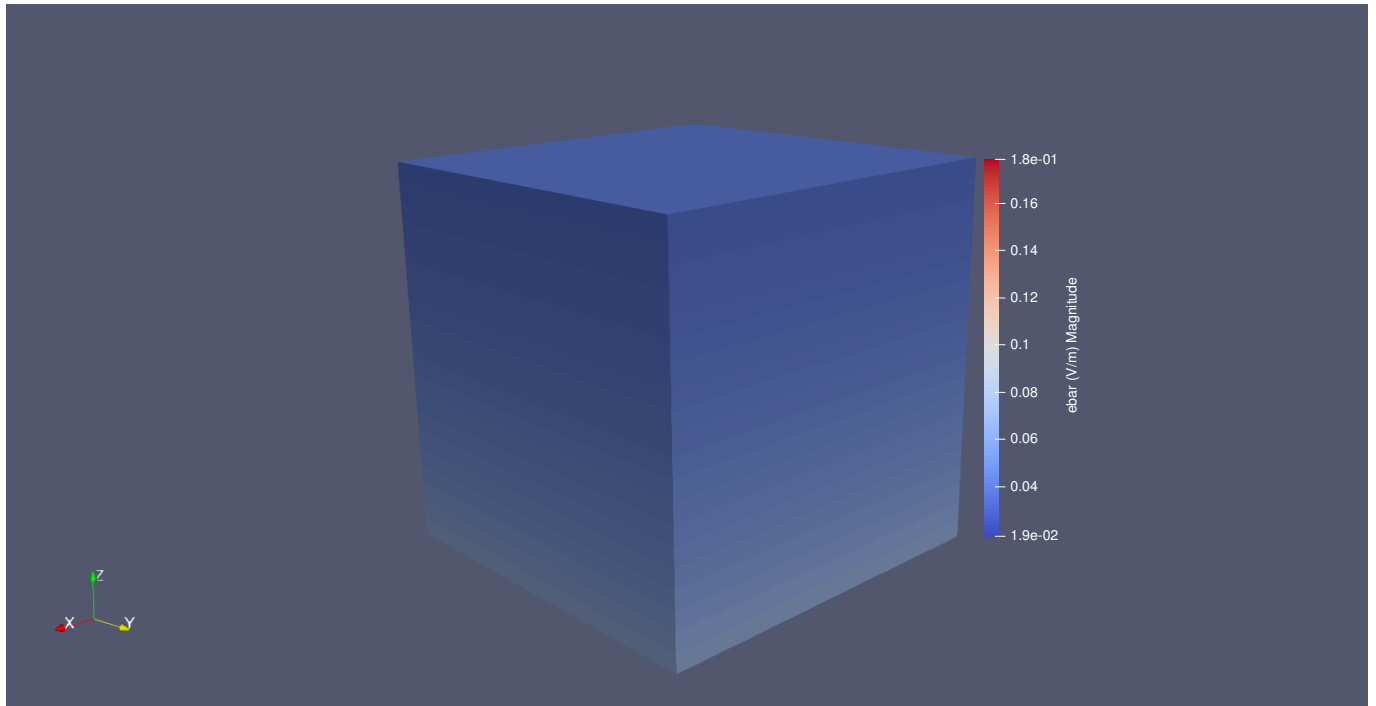
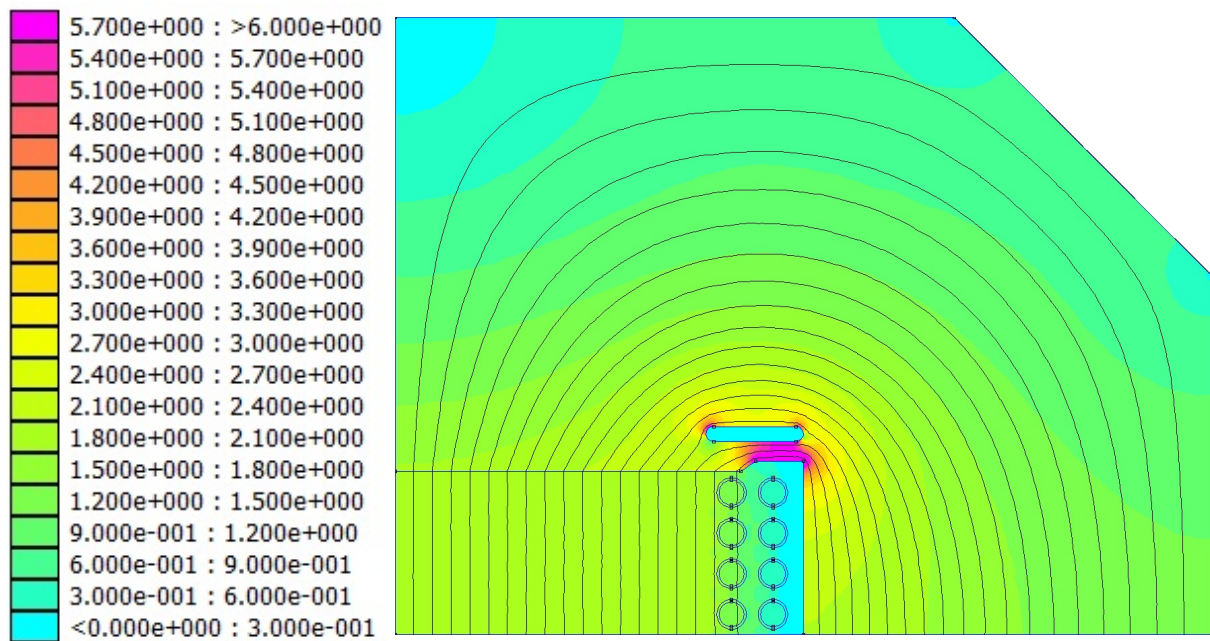


Abbildung 2.3: Mit dem dualen Divergenzoperator \tilde{S}^T und dem Potential Φ berechnete elektrische Feld mit anschließender Mittelung auf die Zellen

2.3 Beschleunigermagnet, FEMM

In Abbildung 2.4b ist der Verlauf des Magnetfeldes in einem vereinfachten Modell des Beschleunigermagnets SIS-100, der im FAIR Projekt der Gesellschaft für Schwerionenforschung verwendet wird, zu sehen. In dieser Simulation wurde ein linearer Materialzusammenhang zwischen magnetischer Flussdichte B und magnetischer Feldstärke H angenommen. Das B -Feld hat hierbei ein Maximum von ca. 5,7 Tesla. Die Flusslinien sind annähernd homogen allerdings ist zu erkennen, dass in der Nähe des Luftspaltes die Flusslinien deutlich näher beieinander liegen.



(a) Skala

(b) Lineare statische Simulation des Beschleunigermagnets SIS-100 in FEMM

Weist man dem Eisenjoch eine nichtlineare Materialbeziehung zu ergibt sich daraus Abbildung 2.5b. Der maximale Wert des B -Felds ist hier mit ca. 2,1 Tesla geringer als bei der linearen Simulation. Außerdem sind die Flusslinien noch deutlich homogener verteilt. Das liegt daran, dass bei dieser Simulation das Eisenjoch in Sättigung geht.

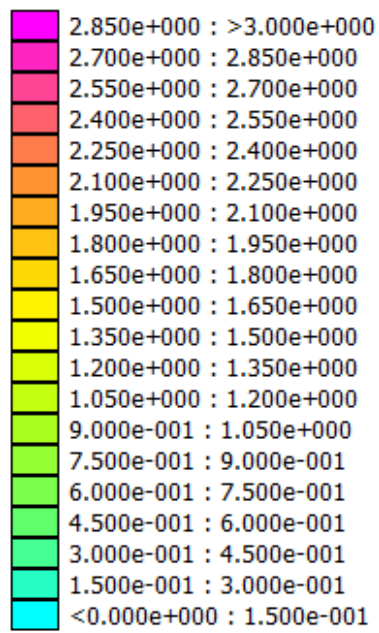
Über die Funktion `lineintegral` lässt sich die durchschnittliche Flussdichte über einen bestimmten Bereich berechnen. Mit

$$L = \frac{\Psi}{I}$$

und

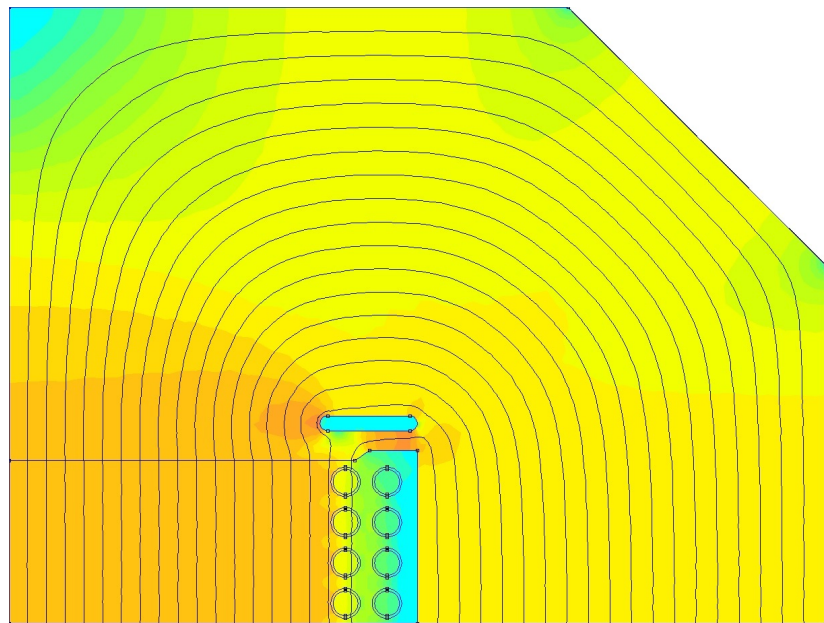
$$\Psi = \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

ergibt sich die Induktivität zu



Density Plot: |B|, Tesla

(a) Skala



(b) Simulation des Beschleunigermagnets SIS-100 mit nichtlinearer Materialbeziehung

$$L = \frac{BA}{I}$$

Wie in Abbildung 2.6 zu sehen ist, nimmt die Induktivität kontinuierlich ab, sobald eine Stromanregung von etwa 6000 A angelegt wird da dann der Eisenkern in Sättigung geht.

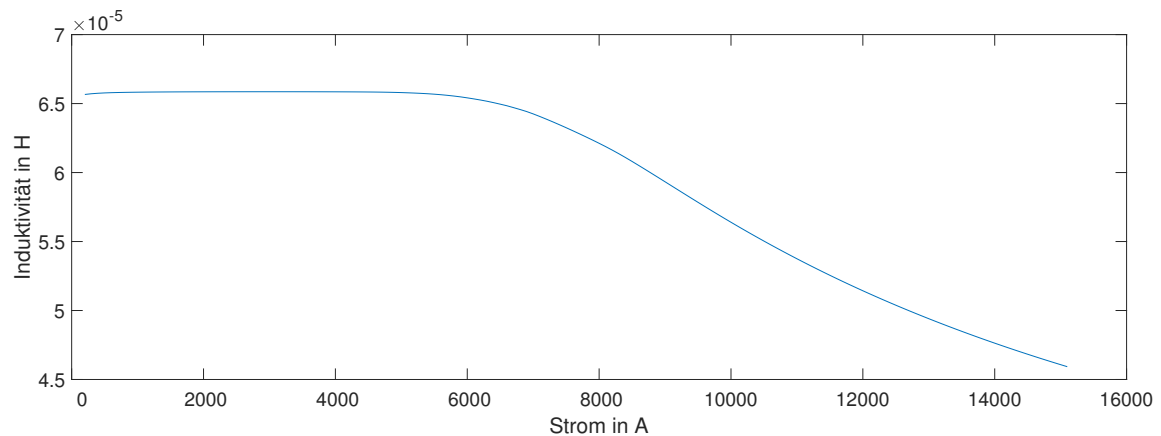


Abbildung 2.6: Induktivität in Abhängigkeit der Stromanregung



3 Fazit

Die Simulation des Plattenkondensators ergibt, dass die Geisterkanten entfernt werden müssen, da sonst irreführende Ergebnisse entstehen. Aus diesem Grund muss außerdem das elektrische Feld auf Zellen gemittelt werden. Das Modell des Beschleunigermagneten zeigt, dass die Induktivität mit steigendem Anregungsstrom kleiner wird. Darüber hinaus wird deutlich, dass eine nicht-lineare BH-Kurve für homogenere Flusslinien sorgt.

4 Anhang

```
1 function L = SIS (Amps)
2     addpath('c:\femm42\mfiles')
3     openfemm;
4     newdocument(0);
5     mi_probdef(0,'millimeters','planar',1.E-8,3000,30);
6
7     mi_addmaterial('Eisenjoch',1000,1000);
8     mi_addmaterial('Kupfer',0.9999936,0.9999936);
9     mi_addmaterial('Vakuum',1,1);
10
11     mi_addcircprop('Stromanregung',Amps,1);
12     mi_addboundprop('Randbedingung',0,0,0,0,0,0,0,0,0);
13
14     %Eisenjoch
15     mi_drawpolygon([0,124.5; 113,124.5; 165,72.5; 165,0; 82.5,0; 82.5,35; 72.86,35; 69.86,33;
16         0,33]);
17     mi_drawpolyline([0,33; 0,0; 82.5,0]);
18
19     mi_selectsegment(0,60);
20     mi_selectsegment(0,15);
21     mi_selectsegment(70,124.5);
22     mi_selectsegment(139,98.5);
23     mi_selectsegment(165,30);
24     mi_setsegmentprop('Randbedingung',10,1,0,0);
25     mi_clearselected;
26
27     %lufteinschluss
28     mi_drawline(81,42, 64.36, 42);
29     mi_drawline(81,39, 64.36, 39);
30     mi_addarc( 64.36, 42, 64.36, 39,180,10);
31     mi_addarc( 81, 39, 81, 42,180,10);
32
33     mi_addblocklabel(82.5,120);
34     mi_selectlabel(82.5,120);
35     mi_setblockprop('Eisenjoch',1,10,'<None>',0,0,0);
36     mi_clearselected;
37
38     mi_addblocklabel(72.68,40.5);
39     mi_addblocklabel(42,16);
40     mi_selectlabel(72.68,40.5);
41     mi_selectlabel(42,16);
42     mi_setblockprop('Vakuum',1,10,'<None>',0,0,0);
43     mi_clearselected;
44
45     %Spule
46     mi_drawarc(76.36,1.17,76.36,7.17,180,10);
```

```

47 mi_drawarc(76.36,7.17,76.36,1.17,180,10);
48
49 mi_drawarc(76.36,1.67,76.36,6.67,180,10);
50 mi_drawarc(76.36,6.67,76.36,1.67,180,10);
51
52 mi_addblocklabel(79.11,4.17);
53 mi_selectlabel(79.11,4.17);
54 mi_setblockprop('Kupfer',1,10,'Stromanregung',0,0,0);
55 mi_copytranslate2(-8.36,0,1,2);
56 mi_clearselected;
57
58 mi_addblocklabel(76.36,4.17);
59 mi_selectlabel(76.36,4.17);
60 mi_setblockprop('Vakuum',1,10,'<None>',0,0,0);
61 mi_copytranslate2(-8.36,0,1,2);
62 mi_clearselected;
63
64 mi_selectlabel(76.36,4.17);
65 mi_selectlabel(68,4.17);
66 mi_selectlabel(79.11,4.17);
67 mi_selectlabel(70.75,4.17);
68 mi_copytranslate2(0,8.18,3,2);
69 mi_clearselected;
70
71 mi_selectarcsegment(79.36,4.17);
72 mi_selectarcsegment(73.36,4.17);
73 mi_selectarcsegment(78.86,4.17);
74 mi_selectarcsegment(73.86,4.17);
75
76 mi_copytranslate2(-8.36,0,1,3);
77
78 mi_selectarcsegment(79.36,4.17);
79 mi_selectarcsegment(73.36,4.17);
80 mi_selectarcsegment(78.86,4.17);
81 mi_selectarcsegment(73.86,4.17);
82
83 mi_selectarcsegment(71,4.17);
84 mi_selectarcsegment(65,4.17);
85 mi_selectarcsegment(70.5,4.17);
86 mi_selectarcsegment(65.5,4.17);
87
88 mi_copytranslate2(0,8.18,3,3);
89
90 fileID = fopen('HB.txt','r');
91 formatSpec = '%f %f';
92 sizeA = [2 Inf];
93 A = fscanf(fileID,formatSpec,sizeA);
94 fclose(fileID);
95 A = A';
96
97 for i = 1:32
98     mi_addbpoint('Eisenjoch',A(i,1),A(i,2));
99 end
100
101
102
103
104

```

```

105
106 %Speichere die Datei ab
107 mi_saveas('Aufgabe8_3.FEM');
108
109 %Lade die gespeicherte Datei und erzeuge Simulation
110 mi_analyze(0);
111 mi_loadsolution;
112 mo_showdensityplot(1,0,3,0,'mag');
113 mo_seteditmode('contour');
114 mo_addcontour(82.5,0);
115 mo_addcontour(165,0);
116 B = mo_lineintegral(0);
117 L = ((B(1,2))*(3*0.0825))/Amps;
118
119
120
121
122
123
124 end

```

data/SIS.m

```

1 Nx = 5;
2 Ny = 5;
3 Nz = 5;
4 Np = Nx*Ny*Nz;
5 xmesh = [-1:0.5:1];
6 ymesh = [-1:0.5:1];
7 zmesh = [-1:0.5:1];
8
9
10 eps_r = calc_eps_linear(1,2,Nx,Ny,Nz);
11 length = 2;
12
13 Meps = createMeps(xmesh,ymesh,zmesh,eps_r);
14 Ss = fit_dual_div(Nx,Ny,Nz);
15 A = Ss*Meps*Ss';
16
17 spy(A);
18 Phi0 = zeros(Nx*Ny,1);
19 Phi1 = ones(Nx*Ny,1);
20
21 A12 = A([Nx*Ny+1:(Nz-1)*Nx*Ny],[1:Nx*Ny ((Nz-1)*Nx*Ny)+1:Np]);
22 A11 = A([Nx*Ny+1:(Nz-1)*Nx*Ny],[Nx*Ny+1:(Nz-1)*Nx*Ny]);
23 Phi01 = [Phi0;Phi1];
24
25 x1 = A11\(-A12*Phi01);
26 x = [Phi0;x1;Phi1];
27
28 e = Ss'*x;
29 E = [ e(1:Np), e(Np+(1:Np)), e(2*Np+(1:Np)) ] ;
30
31 %fit_write_vtk(xmesh,ymesh,zmesh,'kondensator.vtr',{ 'Phi(V)',x;'E',E});
32 n = 1;
33 index = 1;
34 idxV = zeros((Nx-1)*(Ny-1)*(Nz-1),1);
35 for i = 1 : Nz-1

```

```

36     for j = 1 : Ny-1
37         for k = 1 : Nx-1
38             idxV(index,1) = n;
39             index = index+1;
40             n = n+1;
41         end
42         n = n+1;
43     end
44     n = n+Nx;
45 end
46
47 ebar=fit_pe2pc(xmesh,ymesh,zmesh,e,idxV);
48 %fit_write_vtk(xmesh,ymesh,zmesh,'kondensator10.vtr',{ 'Phi (V) ',x},{ 'ebar (V/m) ',ebar(idxV
    ,1:3) });

```

data/SkriptAg8_2.m

```

1 result = zeros(150,1);
2 counter = 1;
3 for i = 0:100:15000
4     result(counter,1) = SIS(i);
5     counter = counter + 1;
6 end
7 plot(result);
8 ylabel('Induktivitaet in H');
9 xlabel('Strom in A');
10 xtick=get(gca,'xtick');
11 xTickLabels = cellstr(num2str(100*xtick(:)));
12 set(gca,'fontsize',20,'XTick',xtick,'XTickLabel',xTickLabels);

```

data/SkriptAg8_3d.m

Abbildungsverzeichnis

2.3	Mit dem dualen Divergenzoperator $\tilde{\mathbf{S}}^T$ und dem Potential Φ berechnete elektrische Feld mit anschließender Mittelung auf die Zellen	7
2.6	Induktivität in Abhängigkeit der Stromanregung	9