Ausarbeitung Übung 9

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg
Datum: 9. Februar 2021

Darmstadt

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Ausarbeitung Übung 9

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg

Datum: 9. Februar 2021

Darmstadt

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Ausarbeitung der Aufgaben **3**

2.1 Konkrete FEM Matrizen in 1D 3

2.2 Anhang 5

1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Übungsblatt 11 des Faches „Einführung in die numerische Berechnung elektromagnetischer Felder“. Hier soll mithilfe des Ritz-Galerkin Verfahren die Finite Elemente Methode im eindimensionalen Fall teilweise implementiert werden.

2 Ausarbeitung der Aufgaben

2.1 Konkrete FEM Matrizen in 1D

Das Problem $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}U(x)\right) + b(x) = 0$ soll mit dem Ritz-Galerkin Verfahren gelöst werden. Hierbei gilt nach der Vorlesung

$$\mathbf{K}^i\mathbf{u}^i = \mathbf{f}^i, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{K}^i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\mathrm{d}(\mathbf{N}^i(x))^T}{\mathrm{d}x} a(x) \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}^i(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{f}^i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (\mathbf{N}^i(x))^T b(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.3}$$

mit $a(x) = a_i$ für $x \in (x_i, x_{i+1}]$ und $b(x)$ analog. Zu dem ist $\mathbf{N}$ definiert als $\mathbf{N}^i(x) = [N_i(x), N_{i+1}(x)]$ mit

$$N_i = \begin{cases} 0 & x < x_{i-1} \\ \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x_{i-1} \le x < x_i \\ 1 - \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} & x_i \le x < x_{i+1} \\ 0 & x \ge x_{i+1} \end{cases}. \tag{2.4}$$

Die expliziten Formen von $\mathbf{K}^i$ und $\mathbf{f}^i$ lauten:

$$\mathbf{K}^i = \frac{a_i}{x_{i+1}-x_i}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

$$\mathbf{f}^i = \frac{1}{2} b_i (x_{i+1}-x_i) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Für den Fall von $n = 5$ Knoten $(x_1, x_2, \dots, x_5)$ müssen für jedes Intervall die Matrizen $\mathbf{K}^i$ und $\mathbf{f}^i$ aufgestellt werden, also insgesamt $n - 1 = 4$ mal. Das Gleichungssystem (2.1) ergibt sich aus der Zusammensetzung von vier Matrizen $\mathbf{K}^i$ und $\mathbf{f}^i$:

$$\begin{bmatrix} K^1_{1,1} & K^1_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ K^1_{2,1} & K^1_{2,2}+K^2_{1,1} & K^2_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & K^2_{2,1} & K^2_{2,2}+K^3_{1,1} & K^3_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & K^3_{2,1} & K^3_{2,2}+K^4_{1,1} & K^4_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 & K^4_{2,1} & K^4_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{f}^1_1 \\ \mathrm{f}^1_2+\mathrm{f}^2_1 \\ \mathrm{f}^2_2+\mathrm{f}^3_1 \\ \mathrm{f}^3_2+\mathrm{f}^4_1 \\ \mathrm{f}^4_2 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Hierbei gilt:

$$\mathbf{K}^i = \begin{bmatrix} K^i_{1,1} & K^i_{1,2} \\ K^i_{2,1} & K^i_{2,2} \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{f}^i = \begin{bmatrix} \mathrm{f}^i_1 \\ \mathrm{f}^i_2 \end{bmatrix}.$$

Die Routine, die die Matrizen für das Gleichungssystem (2.7) aufstellt ist im Anhang zu finden (Code (2.1)).

2.2 Anhang

Implementation des Ritz-Galerkin Verfahren

```
function [K,f] = make_Kf(x,a,b)
  % Dimension von x muss eins groesser sein als von a,b
  dim = length(x);
  % ci ist die Konstante vor Matrix Ki
  % di ist die Konstante vor Vektor fi
  for i = 1:(dim-1)
    ci(i,1) = a(i)/(x(i+1)-x(i));
    di(i,1) = 1/2*b(i)*(x(i+1)-x(i));
  endfor
  K = zeros(dim,dim);
  f = zeros(dim,1);
  for i = 1:(dim-1);
    Ki = [1,-1;-1,1];
    Ki = ci(i)*Ki;
    % 2x2 Matrix Ki in grosse Matrix K uebertragen
    K(i,i) = K(i,i) + Ki(1,1);
    K(i+1,i) = Ki(2,1);
    K(i,i+1) = Ki(1,2);
    K(i+1,i+1) = Ki(2,2);
    % Werte in k eintragen
    f(i) = f(i) + di(i);
    f(i+1) = di(i);
  endfor
endfunction
```

Listing 2.1: Routine `make_Kf` in Octave zur Berechnung der Matrizen K und f