

Ausarbeitung Übung 6

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg
Datum: 13. Januar 2021

Darmstadt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Ausarbeitung Übung 6

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg

Datum: 13. Januar 2021

Darmstadt

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 2 |
| 2 | Bearbeitung der Übungsaufgaben | 3 |
| 2.1 | Stetigkeitsbedingung des Stromes | 3 |
| 2.2 | Überspannungsableiter | 6 |
| 3 | Fazit | 12 |
| 4 | Anhang | 13 |



1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Übungsblatt 6 des Faches „Einführung in die numerische Berechnung elektromagnetischer Felder“.

2 Bearbeitung der Übungsaufgaben

2.1 Stetigkeitsbedingung des Stromes

Mithilfe des Ampereschen Gesetzes

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{J}(\vec{r}, t) \quad (1)$$

und des Gaußschen Gesetzes

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) = \varrho(\vec{r}, t), \quad (2)$$

lässt sich die Kontinuitätsgleichung (siehe Gleichung 3) herleiten. Bildet man auf beiden Seiten der Gleichung 1 die Divergenz der Vektorfelder erhält man

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{J}(\vec{r}, t) \right),$$

wobei $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$ und $\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b}$ gilt. Es ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) + \operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}, t) = 0.$$

Setzt man zuletzt nun Gleichung 2 ein erhält man die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}, t) = 0. \quad (3)$$

Aus Gleichung 3 soll nun die Stetigkeitsbedingung für die Stromdichte bestimmt werden. Hierzu werden Überlegungen an einer Grenzfläche unternommen. Gleichung 3 wird auf beiden Seiten über ein quaderförmiges Volumen V integriert, durch das die Grenzfläche verläuft (siehe Abbildung 2.1).

Durch dieses Vorgehen erhält man die Gleichung

$$\int_V \operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}, t) dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho(\vec{r}, t) dV.$$

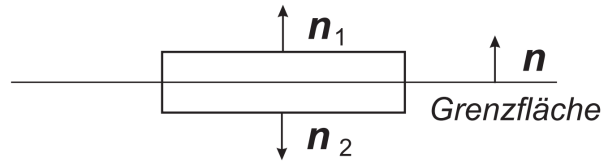


Abbildung 2.1: Grenzfläche zwischen zwei Vektorfeldern \vec{J}_1 und \vec{J}_2 mit eingeführtem Quadervolumen V

Mithilfe des Integralsatz von Gauss (siehe Gleichung 4)

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \int_{\partial V} \vec{F} d\vec{A} \quad (4)$$

Ergibt sich der erste Teil der Gleichung zu

$$\int_{\partial V} \vec{J}(\vec{r}, t) d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho(\vec{r}, t) dV.$$

Hierbei beschreibt ∂V den Rand des Volumens. Es handelt sich nun um ein Oberflächenintegral, die Dimension wurde um eins verringert.

Das Volumenintegral über die Raumladungsdichte ϱ im zweiten Teil der Gleichung lässt sich durch die Gesamtladung Q_V innerhalb des gedachten Volumens V ersetzen.

$$\int_{\partial V} \vec{J}(\vec{r}, t) d\vec{A} = -\frac{\partial Q_V(t)}{\partial t}.$$

Die Seitenflächen des Quaders, die senkrecht zu der Grenzfläche liegen, werden nun als vernachlässigbar klein angenommen. Demnach müssen für das Oberflächenintegral nur noch die zwei Stirnflächen A mit Normalenvektor \vec{n}_1 und \vec{n}_2 betrachtet werden, die fast auf der Grenzfläche liegen. Oberhalb der Grenzfläche liegt das Vektorfeld \vec{J}_1 , unterhalb \vec{J}_2 vor. Da die Normalenvektoren in unterschiedliche Richtung zeigen ergibt sich die Gleichung

$$\int_A \vec{J}_1(\vec{r}, t) d\vec{A} - \int_A \vec{J}_2(\vec{r}, t) d\vec{A} = -\frac{\partial Q_A(t)}{\partial t}.$$

Ist Fläche A nun selbst infinitesimal klein, so kann \vec{J}_1 und \vec{J}_2 auf der gesamten Fläche als konstant angenommen werden. Die Integrale lassen sich zu

$$A(\vec{J}_1 - \vec{J}_2) \cdot \vec{n}$$

vereinfachen. Auch die Flächenladung Q_A kann bei einer unendlich kleinen Fläche wieder durch die Flächenladungsdichte ϱ_A beschreiben werden mit $Q_A = \varrho_A \cdot A$. Abschließend ergibt sich

$$A(\vec{J}_1(t) - \vec{J}_2(t)) \cdot \vec{n} = \frac{\partial \varrho_A(t) \cdot A}{\partial t}$$

und nach kürzen von A

$$(\vec{J}_1(t) - \vec{J}_2(t)) \cdot \vec{n} = \frac{\partial \varrho_A(t)}{\partial t} \quad (5)$$

Formel 5 trifft nun Aussagen über die Stetigkeit der Stromdichte \vec{J} an einer Grenzfläche. \vec{J}_1 und \vec{J}_2 sind stetig in normaler Richtung, wenn $\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = 0$ gilt, also sich die Ladungsdichte an der Grenzfläche nicht zeitlich verändert.

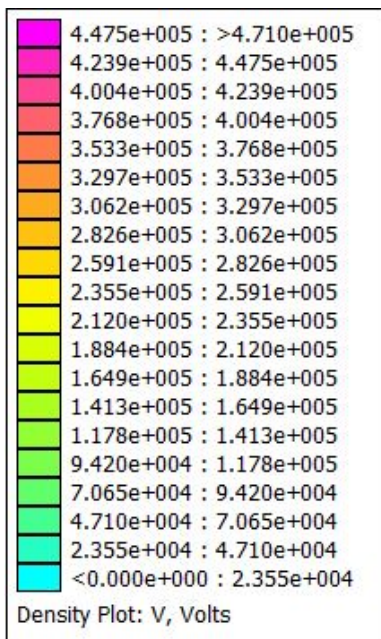
2.2 Überspannungsableiter

Im Folgenden wird mit Hilfe des Simulationsprogramms FEMM das Modell eines Überspannungsableiters erstellt und das tangential elektrische Feld E_t entlang der Mittelachse des Ableiters unter verschiedenen Bedingungen ermittelt.

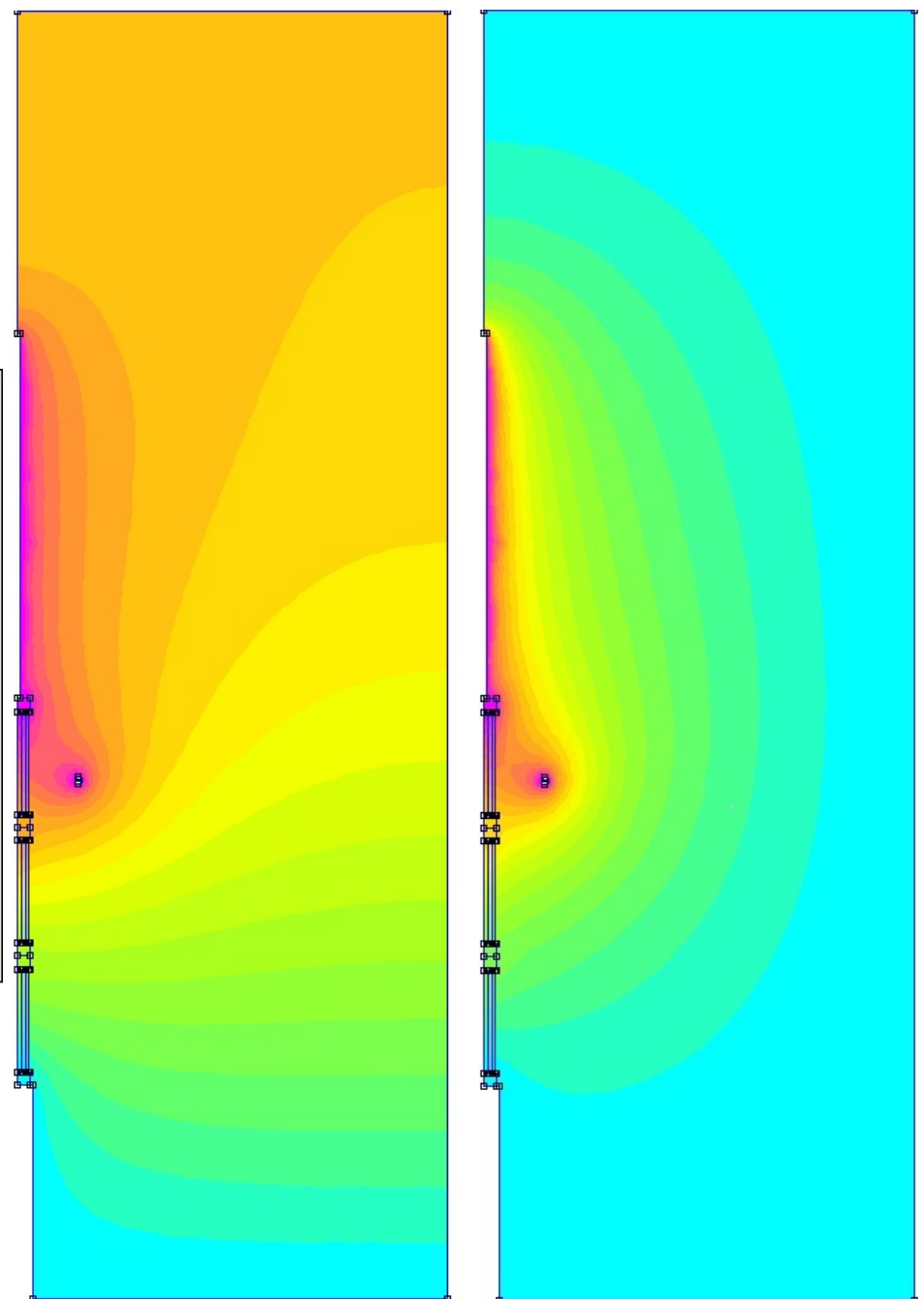
Um das Modell zu erzeugen wurde eine OctaveFEMM Routine geschrieben, diese ist unter dem Namen `Aufgabe6_2a.m` im Anhang zu finden. Als Parameter nimmt sie den Außendurchmesser d des Rings entgegen und dessen Höhe z . Der Parameter `meshnet` bestimmt die Größe der zum Meshen benutzen Dreiecke. Es ist zu erwähnen, dass Kanten des unteren Mast und Teile der Antenne nicht modelliert werden, da sie beim Meshen nicht berücksichtigt werden sollen. Setzt man dort die Materialproperty `<No Mesh>`, um zu verhindern, dass diese gemesht werden, so endet das Programm mit einer Fehlermeldung.

In Abbildung 2.2 ist der Überspannungsableiter sowie das entstehende Potenzial im Raum zu sehen. Die Randbedingungen werden für die rechte und die obere Begrenzung des Spannungsableiters gesetzt. Abb. 2.2b zeigt die Entwicklung des Potenzial, wenn keine Randbedingungen gesetzt wurden. Abb. 2.2c hingegen zeigt das Potenzial, wenn am Rand die Bedingung von 0 V gesetzt wird. Am oberen Mast, sowie an allen damit verbundenen leitenden PEC-Gebieten und am feldsteuernden Ring liegt ein Potenzial von 471 000 V an. Am Boden und am unteren Mast liegt das Potenzial 0 V an.

Da der Überspannungsableiter in der Realität nicht in einem geerdeten Kasten steht, ist es sinnvoller die Berechnung ohne explizite Randbedingungen durchzuführen.



(a) Skala



(b) Entwicklung des Potentials ohne explizite Randbedingung

(c) Entwicklung des Potentials mit Randbedingung 0 V

Abbildung 2.2: Überspannungsableiter mit unterschiedlichen Randbedingungen

Darüber hinaus wurde untersucht, wie sich das tangential elektrische Feld entlang der Symmetrieachse entwickelt. Das Feld wurde nur in den Ableitersegmenten in der Höhe zwischen 2000 mm und 5480 mm berechnet. In Abbildung 2.3 sind die Stärken der tangentialen Elektrischen Felder zu sehen. Der blaue Graph entsteht, wenn keine Randbedingungen vorgegeben werden, der rote bei der Randbedingung 0 V. Es ist zu erkennen, dass das elektrische Feld bei der Randbedingung 0 V mit zunehmender Höhe deutlich stärker wird, als das Feld ohne Randbedingungen.

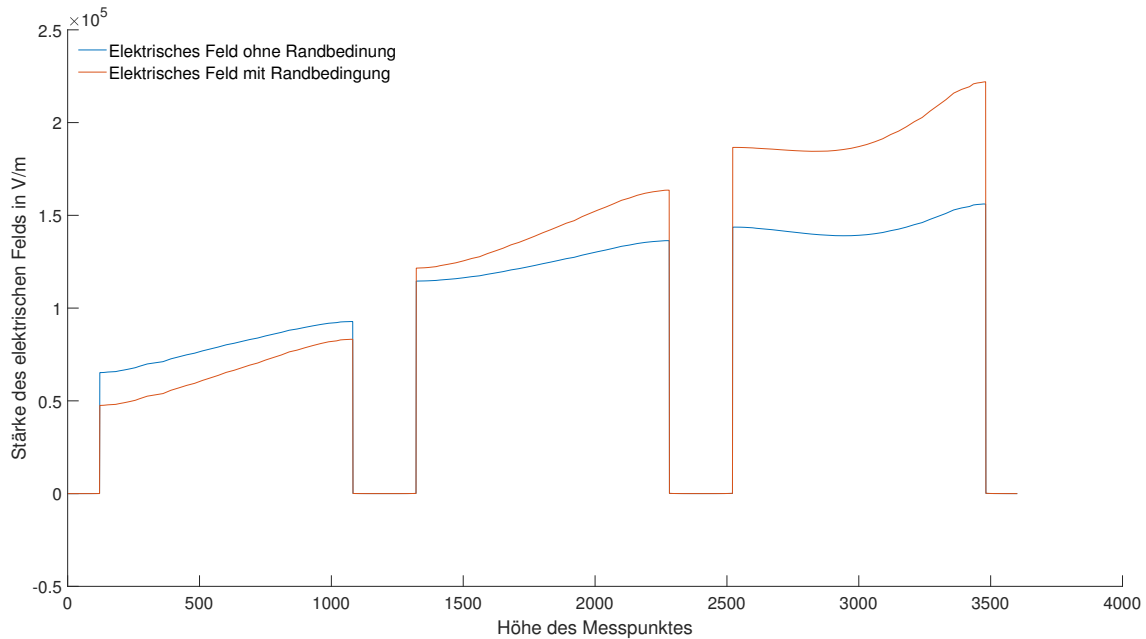
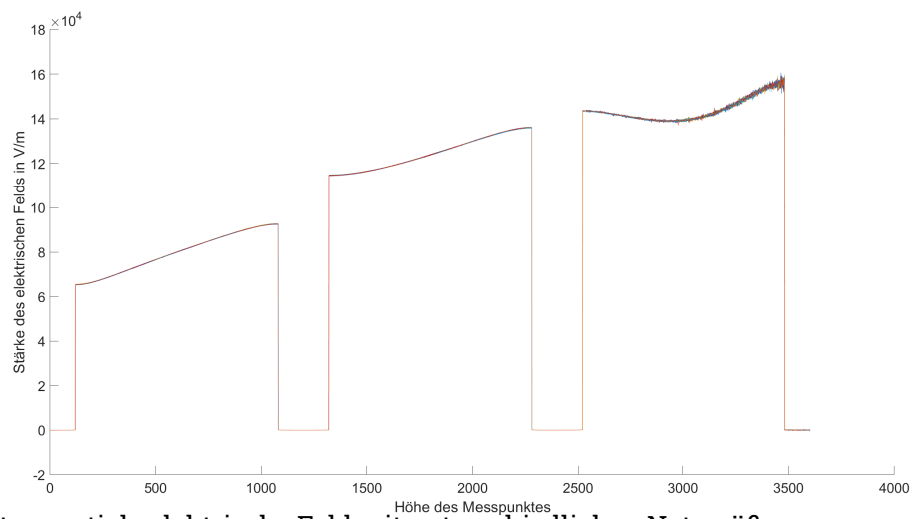
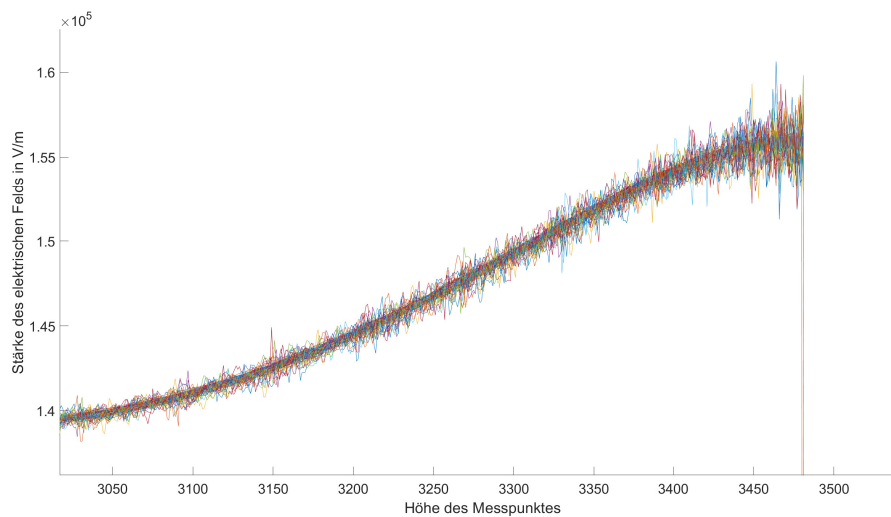


Abbildung 2.3: Vergleich des tangentialen elektrischen Feldes bei unterschiedlichen Randbedingungen

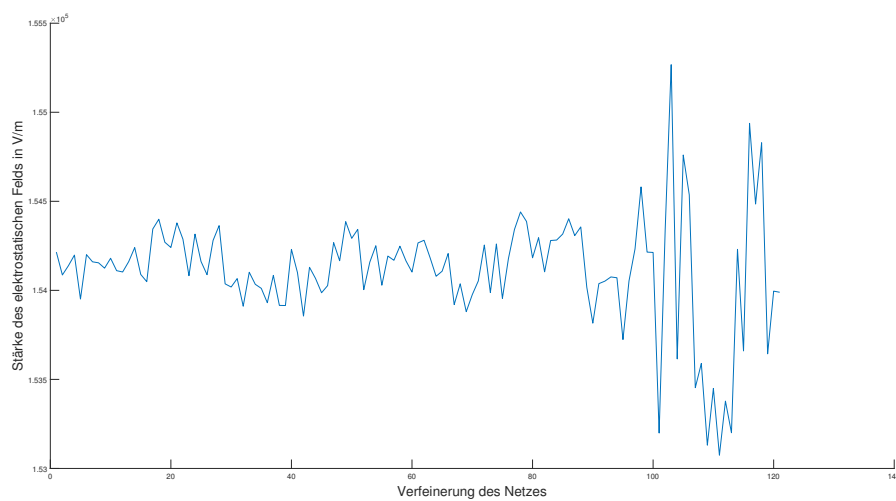
Zusätzlich gibt es bei FEMM die Möglichkeit das Gitter, das zum Meshen benutzt wird manuell einzustellen bzw. zu beeinflussen. Der Routine `Aufgabe6_2` wurden 120 unterschiedliche Netzgrößen von 10, bis minimal 0.8 übergeben und anschließend das tangential elektrische Feld berechnet. In Abbildung 2.4a sind diese Felder zu sehen. Bei der Verfeinerung des Gitters ließ sich kein Wert ermitteln, ab dem sich das Feld nicht mehr verändert. Beobachtet werden konnte, dass die maximale Netzgröße mit der FEMM arbeitet 10 und die minimale 0.8 beträgt. Der zum Vergleichen gewählte Messpunkt hat die Höhe 4600 mm, auffällig ist, dass ab einer Netzgröße kleiner als eins (Messpunkt 100) die Rechenergebnis sehr stark variieren, wie in Abb. 2.4c deutlich wird.



(a) Das tangentielle elektrische Feld mit unterschiedlichen Netzgrößen



(b) Detailausschnitt von 2.4a



(c) Stärke des elektrischen Feldes, abhängig von der gewählten Netzgröße

Abbildung 2.4: Auswirkung der Verfeinerung des Gitters, das FEMM zum Meshen benutzt

Des Weiteren wurde die Auswirkung des feldsteuernden Rings auf das tangential elektrische Feld betrachtet. Zur Visualisierung des elektrischen Felds wurde der Octave Befehl `surf` benutzt. Dadurch ist es möglich einen dreidimensionalen Plot zu erzeugen. Das elektrische Feld hängt dabei von der Höhe des Messpunktes und dem Außendurchmesser d_a des Rings ab, dieser variiert zwischen 600 und 2000 mm. Dem Modell wurden keine Randbedingungen vorgegeben.

Die tangentialen elektrischen Felder sind in der Abbildung 2.5 zu sehen. Auffällig ist, dass bei steigendem Abstand zwischen dem Ring und dem Mast sich die elektrischen Felder unterschiedlich verändern. Das elektrische Feld in dem oberen und mittleren Ableitersegment nimmt ab, während es im untersten Segment ein stärkeres Feld entsteht.

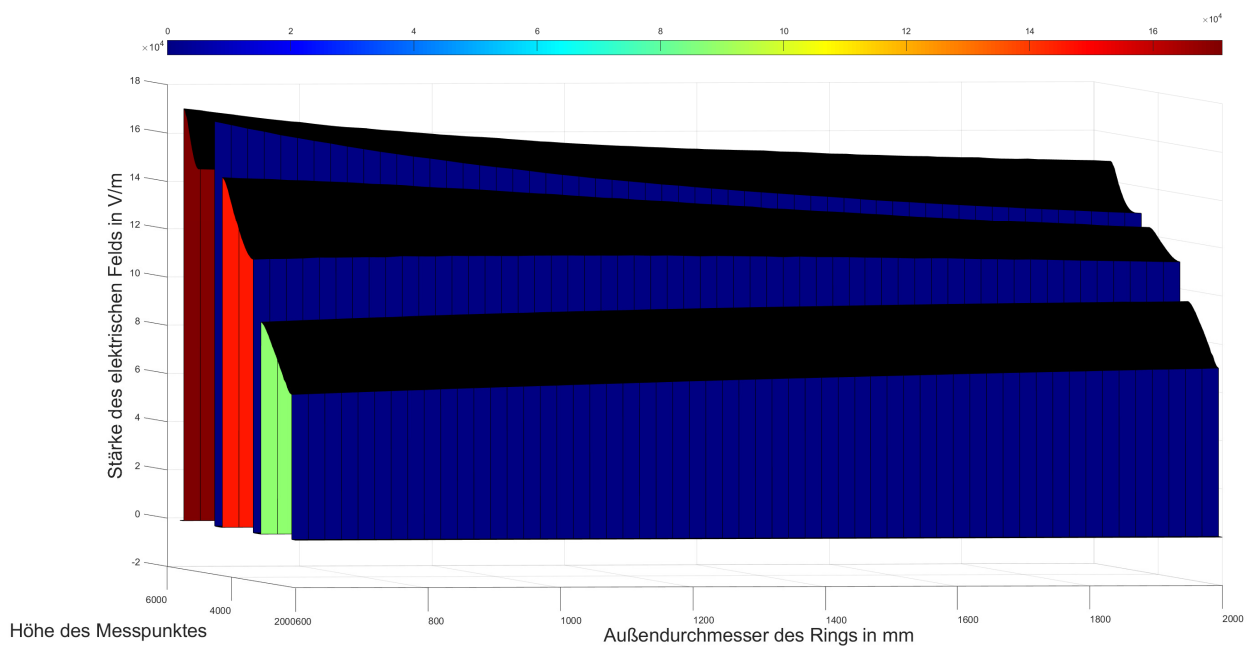
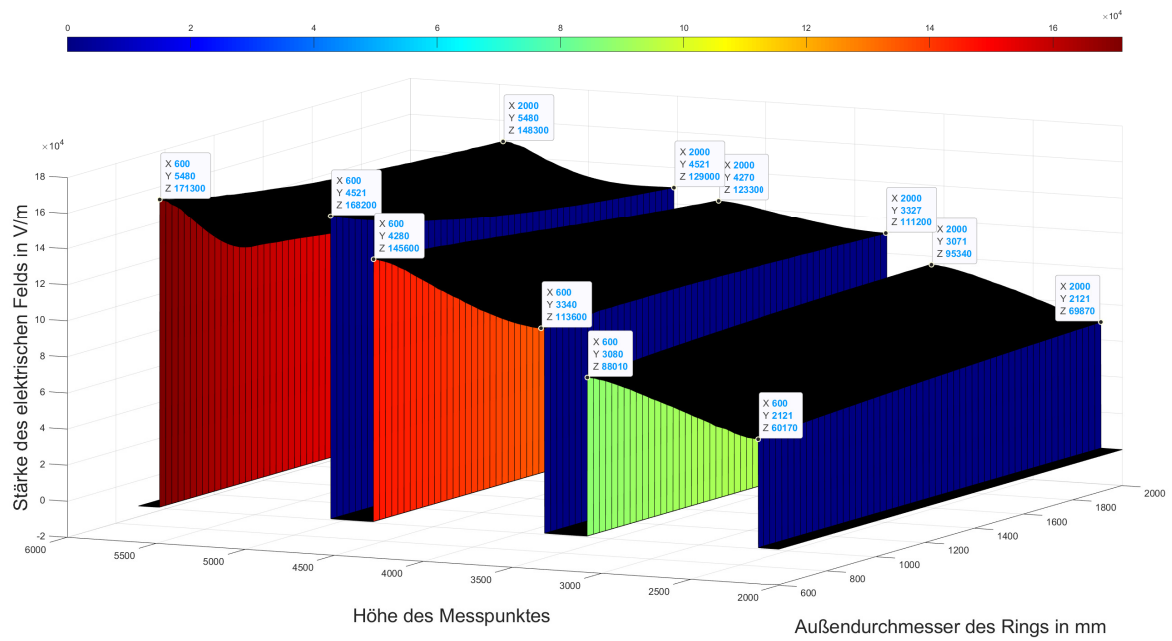


Abbildung 2.5: Das tangentielle elektrische Feld in Abhängigkeit des Außendurchmesser des Rings und der Höhe des Messpunktes



3 Fazit

Hier könnte Ihr Fazit stehen.

4 Anhang

```
1 function F = Aufgabe6_2a (d, z, meshnet)
2     openfemm;
3     newdocument(1);
4     ei_probdef('millimeters','axi',1.E-8,0,30);
5
6     ei_addmaterial('ZnO', 800, 800, 0);
7     ei_addmaterial('Vakuum', 1, 1, 0);
8     ei_addmaterial('PEC', 10.E5, 10.E5, 0);
9     ei_addmaterial('Porzellan', 6, 6, 0);
10
11     ei_addconductorprop('HighVoltage',471000,0,1);
12     ei_addconductorprop('Ground',0,0,1);
13
14     ei_addboundprop('boundary',0,0,0,0,0);
15
16     %bottom
17     ei_drawrectangle(0,0,140,2000);
18     ei_addblocklabel(70,1000);
19     ei_selectlabel(70,1000);
20     ei_setblockprop('<No Mesh>',0,0,0);
21     ei_clearselected;
22     ei_selectsegment(140,1000);
23     ei_setsegmentprop('None', 0,1,0,0,'Ground');
24     ei_clearselected;
25
26
27     %white block
28     ei_drawrectangle(0,2000,115,2120);
29     ei_addblocklabel(57,2060);
30     ei_selectlabel(57,2060);
31     ei_setblockprop('PEC',0,0,0);
32     ei_clearselected;
33
34     %three layers
35     ei_drawrectangle(0,2120,30,3080);
36     ei_addblocklabel(15,2500);
37     ei_selectlabel(15,2500);
38     ei_setblockprop('ZnO',0,0,0);
39     ei_clearselected;
40
41     ei_drawrectangle(30,2120,70,3080);
42     ei_addblocklabel(50,2500);
43     ei_selectlabel(50,2500);
44     ei_setblockprop('Vakuum',0,0,0);
45     ei_clearselected;
46
47     ei_drawrectangle(70,2120,100,3080);
```

```

48 ei_addblocklabel(85,2500);
49 ei_selectlabel(85,2500);
50 ei_setblockprop('Porzellan',0,0,0);
51 ei_clearselected;
52
53 %white blocks
54 ei_drawrectangle(0,3080,115,3200);
55 ei_addblocklabel(57,3140);
56 ei_drawrectangle(0,3200,115,3320);
57 ei_addblocklabel(57,3260);
58 ei_selectlabel(57,3140);
59 ei_selectlabel(57,3260);
60 ei_setblockprop('PEC',0,0,0);
61 ei_clearselected;
62
63 %three layers
64 ei_drawrectangle(0,3320,30,4280);
65 ei_addblocklabel(15,3700);
66 ei_selectlabel(15,3700);
67 ei_setblockprop('ZnO',0,0,0);
68 ei_clearselected;
69
70 ei_drawrectangle(30,3320,70,4280);
71 ei_addblocklabel(50,3700);
72 ei_selectlabel(50,3700);
73 ei_setblockprop('Vakuum',0,0,0);
74 ei_clearselected;
75
76 ei_drawrectangle(70,3320,100,4280);
77 ei_addblocklabel(85,3700);
78 ei_selectlabel(85,3700);
79 ei_setblockprop('Porzellan',0,0,0);
80 ei_clearselected;
81
82 %white blocks
83 ei_drawrectangle(0,4280,115,4400);
84 ei_addblocklabel(57,4340);
85 ei_drawrectangle(0,4400,115,4520);
86 ei_addblocklabel(57,4460);
87 ei_selectlabel(57,4340);
88 ei_selectlabel(57,4460);
89 ei_setblockprop('PEC',0,0,0);
90 ei_clearselected;
91
92 %three layers
93 ei_drawrectangle(0,4520,30,5480);
94 ei_addblocklabel(15,5000);
95 ei_selectlabel(15,5000);
96 ei_setblockprop('ZnO',0,0,0);
97 ei_clearselected;
98
99 ei_drawrectangle(30,4520,70,5480);
100 ei_addblocklabel(50,5000);
101 ei_selectlabel(50,5000);
102 ei_setblockprop('Vakuum',0,0,0);
103 ei_clearselected;
104
105 ei_drawrectangle(70,4520,100,5480);

```



```

106 ei_addblocklabel(85,5000);
107 ei_selectlabel(85,5000);
108 ei_setblockprop('Porzellan',0,0,0);
109 ei_clearselected;
110
111 %white block
112 ei_drawrectangle(0,5480,115,5600);
113 ei_addblocklabel(57,5540);
114 ei_selectlabel(57,5540);
115 ei_setblockprop('PEC',0,0,0);
116 ei_clearselected;
117 ei_selectrectangle(0,5480,115,5600);
118 ei_setsegmentprop('None', 0,1,0,0,'HighVoltage');
119 ei_clearselected;
120
121 %antenna
122 ei_drawrectangle(0,5600,20,9000);
123 ei_addblocklabel(10,7000);
124 ei_selectlabel(10,7000);
125 ei_setblockprop('<No Mesh>',0,0,0);
126 ei_clearselected;
127 ei_selectsegment(20,7500);
128 ei_selectsegment(90,5600);
129 ei_selectsegment(115,5540);
130 ei_selectsegment(107,5480);
131 ei_setsegmentprop('None',0,1,0,0,'HighVoltage');
132 ei_clearselected;
133
134
135
136 % %ring
137 ei_drawarc(565,4800,565,4870,180,1);
138 ei_selectarcsegment(565,4800);
139 ei_setarcsegmentprop(10,'None',0,0,'HighVoltage');
140 ei_copyrotate2(565,4835,180,1,3);
141 ei_clearselected;
142 ei_addblocklabel(565,4835);
143 ei_selectlabel(565,4835);
144 ei_setblockprop('<No Mesh>',0,0,0);
145 ei_clearselected;
146
147 %ring with user input
148 ei_drawarc((d/2)-35,z,(d/2)-35,z+70,180,1);
149 ei_selectarcsegment((d/2)-35,z);
150 ei_setarcsegmentprop(10,'None',0,0,'HighVoltage');
151 ei_copyrotate2((d/2)-35,z+35,180,1,3);
152 ei_clearselected;
153 ei_addblocklabel((d/2)-35,z+35);
154 ei_selectlabel((d/2)-35,z+35);
155 ei_setblockprop('<No Mesh>',0,0,0);
156 ei_clearselected;
157
158 %boundary
159 ei_drawrectangle(0,0,4000,12000);
160 ei_addblocklabel(2000,6000);
161 ei_selectlabel(2000,6000);
162 ei_setblockprop('Vakuum',0,0,0);
163 ei_clearselected;

```

```

164 ei_selectsegment(2000,0);
165 ei_setsegmentprop('None',0,1,0,0,'Ground');
166 ei_clearselected;
167 ei_selectsegment(0,1000);
168 ei_selectsegment(70,0);
169 ei_selectnode(0,0);
170 ei_selectsegment(0,7500);
171 ei_deleteselected;
172 ei_clearselected;
173 ei_selectsegment(4000,6000);
174 ei_selectsegment(2000,12000);
175 ei_setsegmentprop('boundary',0,1,0,0,'None');
176 ei_clearselected;
177
178 %Segmente fuer feineres Netz auswaehlen
179 ei_selectsegment(0,2050);
180 ei_selectsegment(0,2600);
181 ei_selectsegment(0,3140);
182 ei_selectsegment(0,3260);
183 ei_selectsegment(0,3800);
184 ei_selectsegment(0,4350);
185 ei_selectsegment(0,4450);
186 ei_selectsegment(0,5050);
187 ei_selectsegment(0,5550);
188 ei_setsegmentprop('None',meshnet,0,0,0,'None');
189 ei_clearselected;
190
191 %Speichere die Datei ab
192 ei_saveas('Aufgabe6_2a.FEE');
193
194 %Lade die gespeicherte Datei und erzeuge Simulation
195 ei_analyze(0);
196 ei_loadsolution;
197
198 F = zeros(3600,1);
199 E = [0,0];
200 for y = 2000 : 5600
201     E = eo_gete(0,y);
202     F(y-1999) = -E(2);
203 end
204
205 %Liegenden Vektor erstellen , Ladung / Spannung ergibt Kapazit\ "at C
206 %G = [0,0];
207 %G = eo_getconductorproperties('Rand1');
208 %C = G(1,2)/G(1,1);
209 F;
210 end

```

data/Aufgabe6_2a.m

```

1 % A = zeros(3601,60);
2 % B = zeros(3601,20);
3 % R = zeros(3601,1);
4 % counter = 1;
5 % %
6 % for i = 0.1 : -0.001 : 0.08
7 % R = Aufgabe6_2a(1200,4800,i);
8 % for j = 1 : 1 : 3601

```

```

9      B(j, counter) = R(j,1);
10     end
11     counter = counter + 1;
12     end
13
14 % plot(A(:,1));
15 % title('Combine Plots ');
16
17 % hold on
18
19 % for i = 1 : 64
20 %     plot(A(:,i));
21 % endfor
22
23 % %axis([3400 3500]);
24 % xlabel("Hoehe des Messpunktes in mm","FontSize",24);
25 % ylabel("Staerke des elektrostatischen Felds in V/m","FontSize",24);
26 % hold off
27
28
29 % %R = Aufgabe6_2a(1200,4800,4);
30
31 % hold on
32
33 % plot(A(:,60));
34 % plot(R);
35
36 % legend("Feld ohne Randbedingung","Feld mit Randbedingung Potential 0V");
37 % h = legend('Feld ohne Randbedingung','Feld mit Randbedingung', "location", "northwest");
38 % set(h,'FontSize',20,'color','none');
39 % legend boxoff;
40 % xlabel("Hoehe des Messpunktes in mm","FontSize",18);
41 % ylabel("Staerke des elektrostatischen Felds in V/m","FontSize",18);
42 % set(gca,"fontsize",18);
43 % hold off
44
45 % for d = 600 : 25 : 2000
46 %     R = Aufgabe6_2a(d,4800,1000);
47 %     for j = 1 : 1 : 3601
48 %         A(j, counter) = R(j,1);
49 %     endfor
50 %     counter += 1;
51 % endfor
52
53 A = dlmread('C:\Users\simon\OneDrive\Desktop\Uni\ENBEF\Git\ENBEF Abgaben\Uebung06\data\A60.txt');
54 surf(600:25:2000,2000:5600,A(:,1:57));
55 % hold on
56 % plot(C(2600,:))
57 % hold off
58 ylabel("Hoehe des Messpunktes","FontSize",20);
59 zlabel("Staerke des elektrischen Felds in V/m","FontSize",20);
60 %l = legend('Elektrisches Feld ohne Randbedingung','Elektrisches Feld mit Randbedingung', "location", "northwest");
61 %set(l,'FontSize',18,'color','none');
62 %set(gca,'FontSize',18);
63
64 %legend boxoff;

```

65 `xlabel("Aussendurchmesser des Rings in mm","FontSize",20);`

`data/SkriptAg6_2.m`

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Grenzfläche zwischen zwei Vektorfeldern \vec{J}_1 und \vec{J}_1 mit eingeführtem Quadvolumen V . . . | 4 |
| 2.2 | Überspannungsableiter mit unterschiedlichen Randbedingungen | 7 |
| 2.3 | Vergleich des tangentialen elektrischen Feldes bei unterschiedlichen Randbedingungen | 8 |
| 2.4 | Auswirkung der Verfeinerung des Gitters, das FEMM zum Meshen benutzt | 9 |
| 2.5 | Das tangential elektrische Feld in Abhängigkeit des Außendurchmesser des Rings und der Höhe des Messpunktes | 11 |