

Ausarbeitung Übung 3

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg
Datum: 2. Dezember 2020

Darmstadt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Ausarbeitung Übung 3

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg

Datum: 2. Dezember 2020

Darmstadt



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Frequenzbereich	3
1.2	Simulation homogener Plattenkondensator	6
2	Fazit	9
3	Anhang	10



1 Einleitung

Dies ist die Einleitung.

1.1 Frequenzbereich

In der Elektrotechnik arbeitet man oft an Problemen mit sinus-förmigen Schwingungen. Um die Rechnungen dafür zu vereinfachen bietet es sich an diese Probleme nur im Frequenzbereich zu betrachten. Im folgenden wird allerdings zuerst eine Lösung für die skalare lineare gewöhnliche Differentialgleichung im Zeitbereich

$$x'(t) = f(t, x) := -kx(t) + r(t) \quad (1.1)$$

mit Startwert $x(t_0) = x_0$ und $k > 0$ ermittelt. Die Anregung ist durch $r(t) = \cos(\omega t)$ als sinus-förmige Schwingung gegeben, wobei ω die Kreisfrequenz ist. Aus der vorgegebenen allgemeinen Lösung

$$x(t) = e^{-k(t-t_0)} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{k(s-t_0)} r(s) ds \right) \quad (1.2)$$

betrachtet man vorerst nur das Integral und wird dieses lösen.
Mit der partiellen Integrationsregel

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

setzt man nun $f'(x) = e^{k(s-t_0)}$ und $g(x) = \cos(\omega s)$ erhält man $f(x) = \frac{1}{k} e^{k(s-t_0)}$ sowie $g'(x) = -\omega \sin(\omega s)$ und eingesetzt ergibt das

$$\int_{t_0}^t e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s) ds = \left[\frac{e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s)}{k} \right]_{s=t_0}^t - \int_{t_0}^t -\frac{\omega \sin(\omega s) e^{k(s-t_0)}}{k} ds.$$

Nun wird erneut partiell integriert, diesmal unter der Annahme $f'(x) = \frac{e^{k(s-t_0)}}{k}$, $g(x) = -\omega \sin(\omega s)$ und daraus folgend $f(x) = \frac{e^{k(s-t_0)}}{k^2}$ und $g'(x) = -\omega^2 \sin(\omega s)$. Die Lösung für das Integral sieht nun

$$\int_{t_0}^t e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s) ds = \left[\frac{e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s)}{k} \right]_{s=t_0}^t - \left(- \left[\frac{\omega e^{k(s-t_0)} \sin(\omega s)}{k^2} \right]_{s=t_0}^t - \int_{t_0}^t -\frac{\omega^2 e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s)}{k^2} ds \right)$$

so aus. Weiter vereinfachen führt zu

$$\int_{t_0}^t e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s) ds = \left[\frac{e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s)}{k} \right]_{s=t_0}^t + \left[\frac{\omega e^{k(s-t_0)} \sin(\omega s)}{k^2} \right]_{s=t_0}^t - \frac{\omega^2}{k^2} \int_{s=t_0}^t e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s) ds.$$

Nun findet man Ausgangsintegral auch auf der rechten Seite der Gleichung wieder, weshalb man diese beiden Integrale nun auf einer Seite zusammenfassen kann wie folgt:

$$\int_{t_0}^t e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s) ds \cdot \left(\frac{k^2 + \omega^2}{k^2} \right) = \left[\frac{e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s)}{k} \right]_{s=t_0}^t + \left[\frac{\omega e^{k(s-t_0)} \sin(\omega s)}{k^2} \right]_{s=t_0}^t$$

Teilt man nun noch durch $\frac{k^2 + \omega^2}{k^2}$ und setzt die Integrationsgrenzen ein erhält man mit

$$\int_{t_0}^t e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s) ds = \frac{\omega e^{kt} \sin(\omega t) + k e^{kt} \cos(\omega t)}{e^{kt_0} (\omega^2 + k^2)} - \frac{\omega \sin(\omega t_0) + k \cos(\omega t_0)}{\omega^2 + k^2}.$$

Somit ist die Lösung für (1.2)

$$x(t) = e^{-k(t-t_0)} \left(x_0 + \frac{\omega e^{kt} \sin(\omega t) + k e^{kt} \cos(\omega t)}{e^{kt_0} (\omega^2 + k^2)} - \frac{\omega \sin(\omega t_0) + k \cos(\omega t_0)}{\omega^2 + k^2} \right)$$

und mit ausmultiplizieren und aufteilen in gedämpften Anteil abhängig vom Startwert x_0 und sinus-förmiger Schwingung erfüllt

$$x(t) = e^{-k(t-t_0)} \left(x_0 - \frac{\omega \sin(\omega t_0) + k \cos(\omega t_0)}{\omega^2 + k^2} \right) + \frac{\omega \sin(\omega t) + k \cos(\omega t)}{\omega^2 + k^2}.$$

die Differentialgleichung (1.1) im Zeitbereich.

Nach der Berechnung der Differentialgleichung im Zeitbereich folgt nun die Betrachtung im Frequenzbereich. Hierbei wird die Lösung als Kosinus unbekannter Amplitude

$$x_{freq}(t) = \Re \{ \underline{x} e^{j\omega t} \}$$

angenommen, mit $\cos(\omega t) = \Re \{ e^{j\omega t} \}$ wobei \underline{x} der Phasor ist. Die zeitliche Ableitung lautet dann

$$x'_{freq}(t) = \Re \{ j\omega \underline{x} e^{j\omega t} \}$$

und einsetzen in (1.1) liefert

$$\Re \{ j\omega \underline{x} e^{j\omega t} \} = -k \Re \{ \underline{x} e^{j\omega t} \} + \Re \{ e^{j\omega t} \}$$

Zieht man alles auf eine Seite und fasst die Realteile zusammen erhält man

$$\Re \{ (j\omega \underline{x} + k \underline{x} - 1) e^{j\omega t} \} = 0$$

und somit muss $j\omega \underline{x} + k \underline{x} - 1 = 0$ gelten. Nach \underline{x} aufgelöst gilt

$$\underline{x} = \frac{k - j\omega}{k^2 + \omega^2}.$$

Setzt man dass alles zusammen und nutzt außerdem noch die Umformung der Exponentialfunktion $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$ lautet die Lösung für (1.1) im Frequenzbereich

$$x_{freq}(t) = \frac{k\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)}{k^2 + \omega^2}.$$

Zwar vernachlässigt man mit dem Ansatz der Lösung im Frequenzbereich das transiente Anfangsverhalten, aber die Lösung ist deutlich leichter und weniger zeitaufwändig zu ermitteln als der Ansatz zur Lösung im Zeitbereich, da man nur einmal eine sehr einfache Ableitung berechnen muss.

1.2 Simulation homogener Plattenkondensator

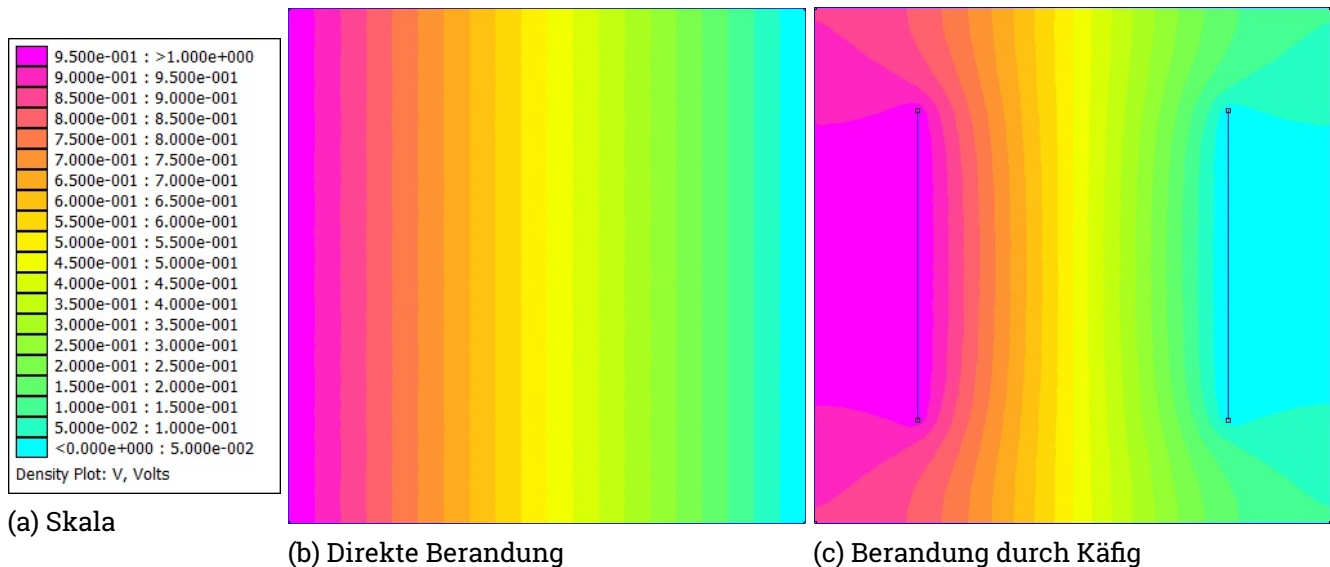
In dieser Aufgabe wird ein harmonischer Plattenkondensator in dem Simulationsprogramm „FEMM“ nachgebaut. FEMM steht kostenfrei zur Verfügung und kann in Octave eingebunden werden.

Zunächst soll der Einfluss unterschiedlicher Randbedingungen auf das elektrische Feld eines Kondensators betrachtet werden.

Ein Kondensator ist eine Anordnung von zwei beliebigen Elektroden, die durch ein Dielektrikum von einander getrennt sind und die gleiche Ladung, aber mit unterschiedlicher Polarität in sich tragen, die Kapazität lässt sich mit $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$ berechnen, wobei A die Fläche der Platten, d den Abstand der Platten, ϵ_0 die elektrische Feldkonstante und ϵ_r die relative Permittivität des Dielektrikums beschreibt. Außerdem kann die Formel $C = \frac{Q}{U}$ zur Berechnung der Kapazität benutzt werden, Q ist die Ladung in A s und U die Spannung in V.

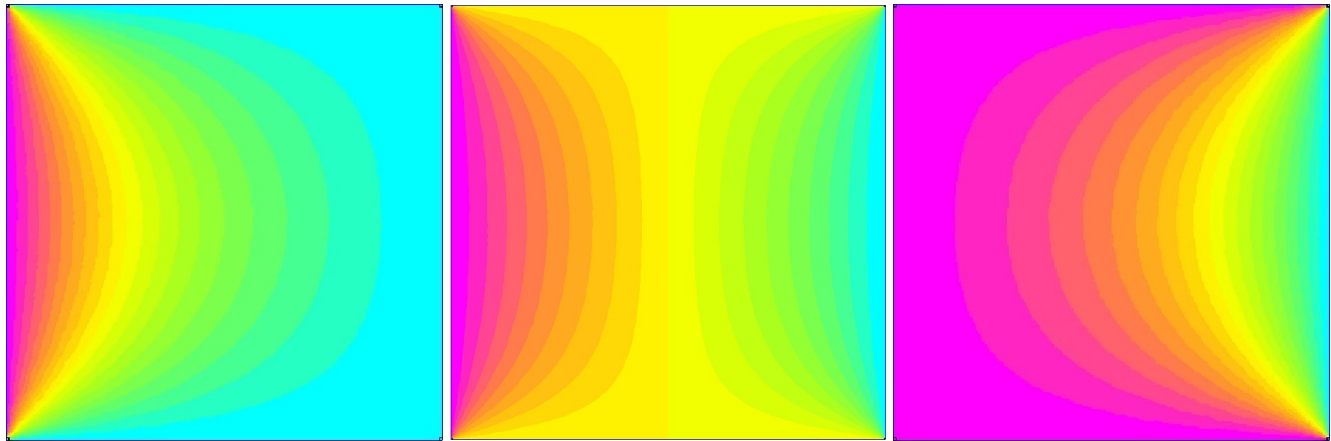
Zum Bau des Kondensators werden in FEMM vier Punkte gesetzt und diese zu Linien verbunden. Der Abstand der Punkte beträgt sowohl in x-, als auch in y-Richtung 30 cm. Genau genommen wird ein Quader erstellt, da die Kondensatorplatten quadratisch sein sollen, hat der Quader eine Tiefe von 30 cm, jedoch verfügt Femm nur eine 2-Dimensionale graphische Darstellung.

Die linke und rechte Linie in Abbildung 1.1b stellen die beiden Kondensatorplatten dar, die obere und untere Linie dienen zur Berandung des elektrischen Felds. An der linken Platte des Kondensators liegt eine Spannung von 1 V an, an der rechten Seite eine Spannung von 0 V. Des Weiteren wurde in Abbildung 1.1c ein Kondensator betrachtet, der nicht direkt, sondern durch einen äußeren Käfig berandet wird. Die inneren Linien markieren die beiden Kondensatorplatten, hier liegen die selben Spannungen wie im Vergleichsbild an.



Vergleich man nun den Plot 1.1b mit 1.1c, so wird eindeutig, dass die Feldlinien in Abbildung 1.1b senkrecht zu den beiden Flächen stehen. Berandet man den Kondensator durch einen Käfig, so werden auch die nicht senkrecht verlaufenden Feldlinien beachtet. In beiden Fällen entsteht ein homogenes Feld. Auch bei der Kapazität lassen sich unterschiedliche Werte ablesen. Während der Kondensator 1.1b eine Kapazität von 2,6562 pC hat, liegt die Kapazität von Kondensator 1.1c bei 3,9773 pC

Zusätzlich soll verglichen werden, wie sich verschiedene Randbedingungen auf das entstehende elektrische Feld auswirken. Hierzu wurden dem Rand verschiedene Werte zugewiesen. Zunächst in Abbildung 1.2a eine Spannung von 0 V, dann in Abbildung 1.2b 0,5 V und schließlich eine Spannung von 1 V in Abbildung 1.2c. Es gilt die Selbe Skala, die in 1.1a zu sehen ist.



(a) Rand mit 0V Spannung

(b) Rand mit 0,5V Spannung

(c) Rand mit 1V Spannung

Da nun unterschiedliche Randbedingungen herrschen, entstehen auch Feldlinien zwischen den Kondensatorplatten und dem Rand. Es ergeben sich nicht nur unterschiedliche Feldlinien, sondern auch verschiedene Kapazitäten an den beiden Platten.

Spannung am Rand	Kapazität linke Kondensatorplatte	Kapazität rechte Kondensatorplatte
0 V	22,1405 pC	−0,5861 pC
0,5 V	11,3633 pC	−11,3633 pC
1 V	0,5861 pC	−22,1405 pC

Die Feldlinien werden offensichtlich durch die anliegende Spannung am Rand beeinflusst und damit auch die Kapazität des Kondensators.

FEMM lässt sich nicht nur mit Hilfe von Octave starten, sondern es besteht auch die Möglichkeit eine OctaveFEMM Routine zu schreiben und damit ein Modell zu erstellen, sowie eine Simulation dieses Modells zu starten. In dem gegebenen Fall, soll eine Routine geschrieben werden, die zwei Parameter a und h entgegen nimmt, wobei a die Kantenlänge und h der Abstand der Platten ist. Aus diesen Informationen soll ein Kondensator erstellt und die berechnete Kapazität C zurückgeliefert werden. Der Quellcode befindet sich im Anhang

Zunächst wird in Zeile 7 bis 9 FEMM geöffnet und definiert um welche Art von Problem es sich handelt. Zusätzlich werden einige Einstellungen getroffen, wie die Einheit der Variablen, die Tiefe des Modells und die Rechengenauigkeit.

In Zeile 10 bis 13 werden die verschiedenen Properties erzeugt, also die Randbedingungen (falls gewünscht), die Kondensatorplatten und das Dielektrikum.

Durch den Befehl in Zeile 16 wird daraufhin ein Rechteck, mit Hilfe der an die Methode übergebenen Parameter, erstellt. Ein Blocklabel für das Dielektrikum wird in Zeile 19 erzeugt. Von Zeile 22 bis 38 werden nun die einzelnen Properties den richtigen Linien und Punkten zugewiesen.

Bevor die Simulation starten kann, muss das Projekt gespeichert werden. Danach wird die Analyse auf dieser Datei gestartet und die Lösung graphisch auf dem Bildschirm angezeigt.

Der zurückzuliefernde Parameter C ergibt sich nun aus dem Ergebnis der Ladung geteilt durch die Spannung. Diese sind in einem liegenden Vektor mit zwei Spalten gespeichert. Die Ladung an zweiter und die Spannung an erster Stelle.



2 Fazit

Dies ist das Fazit.



3 Anhang

Dies ist der Anhang.



Abbildungsverzeichnis



Tabellenverzeichnis
