

# Ausarbeitung Übung 3

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg  
Datum: 2. Dezember 2020

Darmstadt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Ausarbeitung Übung 3

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg

Datum: 2. Dezember 2020

Darmstadt

---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Frequenzbereich . . . . .	3
1.2	Simulation homogener Plattenkondensator . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Fazit</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Anhang</b>	<b>11</b>



---

# 1 Einleitung

---

Dies ist die Einleitung.

---

## 1.1 Frequenzbereich

---

In der Elektrotechnik arbeitet man oft an Problemen mit sinus-förmigen Schwingungen. Um die Rechnungen dafür zu vereinfachen bietet es sich an diese Probleme nur im Frequenzbereich zu betrachten. Im folgenden wird allerdings zuerst eine Lösung für die skalare lineare gewöhnliche Differentialgleichung im Zeitbereich

$$x'(t) = f(t, x) := -kx(t) + r(t) \quad (1)$$

mit Startwert  $x(t_0) = x_0$  und  $k > 0$  ermittelt. Die Anregung ist durch  $r(t) = \cos(\omega t)$  als sinus-förmige Schwingung gegeben, wobei  $\omega$  die Kreisfrequenz ist. Aus der vorgegebenen allgemeinen Lösung

$$x(t) = e^{-k(t-t_0)} \left( x_0 + \int_{t_0}^t e^{k(s-t_0)} r(s) ds \right) \quad (2)$$

betrachtet man vorerst nur das Integral und löst dieses.

Für die partielle Integrationsregel

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

setzt man nun  $f'(x) = e^{k(s-t_0)}$  und  $g(x) = \cos(\omega s)$ . Daraus ergibt sich  $f(x) = \frac{1}{k} e^{k(s-t_0)}$  sowie  $g'(x) = -\omega \sin(\omega s)$ . Eingesetzt ergibt dies

$$\int_{t_0}^t e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s) ds = \left[ \frac{e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s)}{k} \right]_{s=t_0}^t - \int_{t_0}^t -\frac{\omega \sin(\omega s) e^{k(s-t_0)}}{k} ds.$$

Unter der Annahme  $f'(x) = \frac{e^{k(s-t_0)}}{k}$ ,  $g(x) = -\omega \sin(\omega s)$  wird erneut partiell integriert, damit folgt  $f(x) = \frac{e^{k(s-t_0)}}{k^2}$  und  $g'(x) = -\omega^2 \sin(\omega s)$ . Setzt man die Annahmen in die vorherige Gleichung ein, folgt

$$\int_{t_0}^t e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s) ds = \left[ \frac{e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s)}{k} \right]_{s=t_0}^t - \left( - \left[ \frac{\omega e^{k(s-t_0)} \sin(\omega s)}{k^2} \right]_{s=t_0}^t - \int_{t_0}^t -\frac{\omega^2 e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s)}{k^2} ds \right)$$

dies weiter vereinfacht führt zu

$$\int_{t_0}^t e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s) ds = \left[ \frac{e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s)}{k} \right]_{s=t_0}^t + \left[ \frac{\omega e^{k(s-t_0)} \sin(\omega s)}{k^2} \right]_{s=t_0}^t - \frac{\omega^2}{k^2} \int_{s=t_0}^t e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s) ds.$$

Das Ausgangsintegral findet sich nun sowohl auf der linken, als auch auf der rechten Seite der Gleichung wieder. Die Formel

$$\int_{t_0}^t e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s) ds \cdot \left( \frac{k^2 + \omega^2}{k^2} \right) = \left[ \frac{e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s)}{k} \right]_{s=t_0}^t + \left[ \frac{\omega e^{k(s-t_0)} \sin(\omega s)}{k^2} \right]_{s=t_0}^t$$

ergibt sich durch das Zusammenfassen der beiden gleichen Integrale auf einer Seite. Dividieren durch  $\frac{k^2 + \omega^2}{k^2}$  und das einsetzen der Integrationsgrenzen führt zu dem Ergebnis des Integrals

$$\int_{t_0}^t e^{k(s-t_0)} \cos(\omega s) ds = \frac{\omega e^{kt} \sin(\omega t) + k e^{kt} \cos(\omega t)}{e^{kt_0} (\omega^2 + k^2)} - \frac{\omega \sin(\omega t_0) + k \cos(\omega t_0)}{\omega^2 + k^2}.$$

Somit ist die Lösung für (2)

$$x(t) = e^{-k(t-t_0)} \left( x_0 + \frac{\omega e^{kt} \sin(\omega t) + k e^{kt} \cos(\omega t)}{e^{kt_0} (\omega^2 + k^2)} - \frac{\omega \sin(\omega t_0) + k \cos(\omega t_0)}{\omega^2 + k^2} \right),$$

durch das Ausmultiplizieren und Aufteilen in den gedämpften Anteil abhängig vom Startwert  $x_0$  sowie sinus-förmige Schwingung, erfüllt

$$x(t) = e^{-k(t-t_0)} \left( x_0 - \frac{\omega \sin(\omega t_0) + k \cos(\omega t_0)}{\omega^2 + k^2} \right) + \frac{\omega \sin(\omega t) + k \cos(\omega t)}{\omega^2 + k^2}. \quad (3)$$

die Differentialgleichung (1) im Zeitbereich.

Nach Berechnung der Differentialgleichung im Zeitbereich folgt nun die Betrachtung im Frequenzbereich. Hierbei wird die Lösung als Kosinus unbekannter Amplitude

$$x_{freq}(t) = \Re \{ \underline{x} e^{j\omega t} \}$$

angenommen, mit  $\cos(\omega t) = \Re \{ e^{j\omega t} \}$  wobei  $\underline{x}$  der Phasor ist. Die zeitliche Ableitung

$$x'_{freq}(t) = \Re \{ j\omega \underline{x} e^{j\omega t} \}$$

wird in (1) eingesetzt, dies liefert

$$\Re \{ j\omega \underline{x} e^{j\omega t} \} = -k \Re \{ \underline{x} e^{j\omega t} \} + \Re \{ e^{j\omega t} \}.$$

Umstellen und Zusammenfassen der Terme ergeben die Gleichung

$$\Re \{ (j\omega \underline{x} + k \underline{x} - 1) e^{j\omega t} \} = 0,$$

somit muss  $j\omega \underline{x} + k \underline{x} - 1 = 0$  gelten. Nach  $\underline{x}$  aufgelöst erhält man

$$\underline{x} = \frac{k - j\omega}{k^2 + \omega^2}.$$

Zur Berechnung der Lösung

$$x_{freq}(t) = \frac{k \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)}{k^2 + \omega^2}. \quad (4)$$

im Frequenzbereich (1) setzt man den berechneten Phasor  $\underline{x}$  und die von der Eulerschen in die Polare Darstellung umgerechneten Werte  $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$  in  $x_{freq}$  ein.

Zwar wird mit dem Ansatz der Lösung im Frequenzbereich das transiente Anfangsverhalten vernachlässigt, jedoch ist die Lösung, verglichen mit dem Ansatz zum Ermitteln des Zeitbereichs, deutlich leichter und weniger zeitaufwändig, da man nur einmal eine sehr einfache Ableitung berechnen muss.

Zusätzlich wird eine Reihenschaltung aus einer Spule und einem Widerstand betrachtet (RL-Schaltung). Diese wird in LT-Spice gebaut und simuliert. Bei der gegebenen Datei `Beispielschaltung2.asc` handelt es sich um eine AC-Simulation, aus der das Verhalten der Schaltung in Abhängigkeit von verschiedenen Frequenzen, in diesem Fall von  $f = 100 \text{ Hz}$  bis  $f = 1 \text{ MHz}$ , abgelesen werden kann.

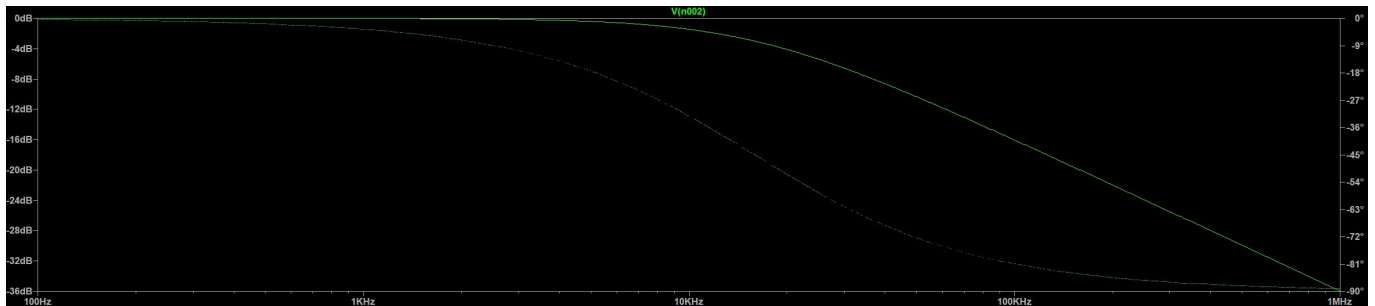


Abbildung 1.1: AC-Simulation aus LT-Spice

Die Schaltung lässt sich durch die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}i(t) = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}u_i(t) \quad (5)$$

beschreiben wobei  $R$  der Widerstand,  $L$  die Induktivität,  $i(t)$  der Strom und  $u_i(t) = \cos(\omega t)$  die anregende Spannung ist. Die Lösung für diese Differentialgleichung im Zeitbereich lässt sich mit Hilfe von (3) ermitteln. Hierfür setzt man für  $x(t) = i(t)$ ,  $k = \frac{R}{L}$  und für  $r(t) = \frac{1}{L}\cos(\omega t)$  ein. Erweitert man im selben Schritt auch noch die Brüche mit  $\frac{L}{L}$  so folgt daraus als Lösung für (5)

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} \left( x_0 - \frac{L\omega \sin(\omega t_0) + R\cos(\omega t_0)}{L^2\omega^2 + k^2} \right) + \frac{L\omega \sin(\omega t) + R\cos(\omega t)}{L^2\omega^2 + k^2}.$$

Analog ergibt sich die Lösung im Frequenzbereich durch einsetzen in (4) mit

$$i_{freq}(t) = \frac{R\cos(\omega t) + L\omega \sin(\omega t)}{R^2 + L^2\omega^2}.$$

Die Spannung über dem Widerstand lautet dann nach dem Ohm'schen Gesetz  $U = R \cdot I$  und mit der Frequenz  $f = \frac{\omega}{2\pi}$

$$u_R(t) = \frac{R \cos(2\pi ft) + 2\pi f L \sin(2\pi ft)}{R^2 + (2\pi f L)^2} R.$$

Das Schaubild für diese Funktion sieht man in Abbildung 1.2.

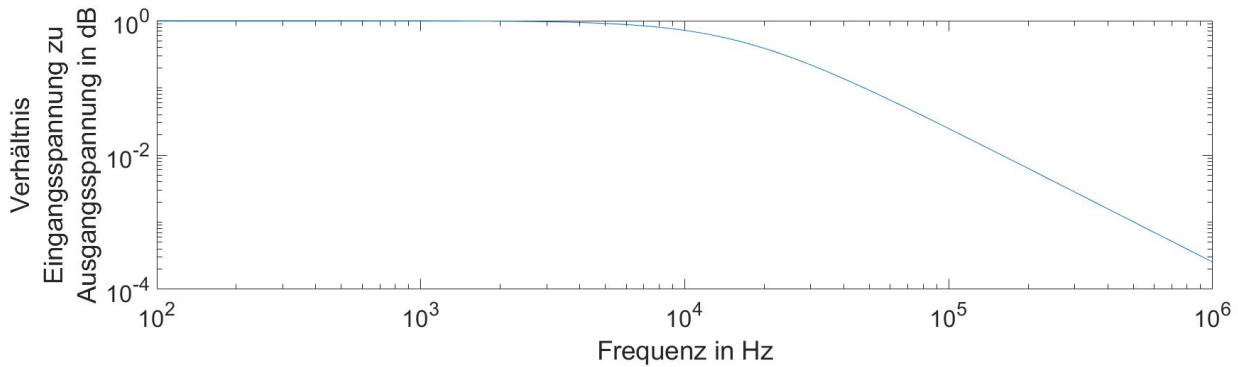


Abbildung 1.2: MATLAB-Plot der Spannung über dem Widerstand R

Anhand des Frequenzgangs fällt auf, dass es sich um eine Schaltung mit Tiefpass-Verhalten handelt, denn bei niedrigen Frequenzen bis ca. 10 kHz ist die Ausgangsspannung genauso groß wie die Eingangsspannung. Bei hohen Frequenzen nahe 1 MHz ist die Ausgangsspannung deutlich geringer als die Eingangsspannung.



## 1.2 Simulation homogener Plattenkondensator

In dieser Aufgabe wird ein harmonischer Plattenkondensator in dem Simulationsprogramm „FEMM“ nachgebaut. FEMM steht kostenfrei zur Verfügung und kann in Octave eingebunden werden.

Zunächst soll der Einfluss unterschiedlicher Randbedingungen auf das elektrische Feld eines Kondensators betrachtet werden.

Ein Kondensator ist eine Anordnung von zwei beliebigen Elektroden, die durch ein Dielektrikum von einander getrennt sind und die gleiche Ladung, aber mit unterschiedlicher Polarität in sich tragen, die Kapazität lässt sich mit  $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$  berechnen, wobei  $A$  die Fläche der Platten,  $d$  den Abstand der Platten,  $\epsilon_0$  die elektrische Feldkonstante und  $\epsilon_r$  die relative Permittivität des Dielektrikums beschreibt. Außerdem kann die Formel  $C = \frac{Q}{U}$  zur Berechnung der Kapazität benutzt werden,  $Q$  ist die Ladung in C und  $U$  die Spannung in V.

Zum Bau des Kondensators werden in FEMM vier Punkte gesetzt und diese zu Linien verbunden. Der Abstand der Punkte beträgt sowohl in x-, als auch in y-Richtung 30 cm. Genau genommen wird ein Quader erstellt, da die Kondensatorplatten quadratisch sein sollen, hat der Quader eine Tiefe von 30 cm, jedoch verfügt FEMM nur eine 2-Dimensionale graphische Darstellung.

Die linke und rechte Linie in Abbildung 1.3b stellen die beiden Kondensatorplatten dar, die obere und untere Linie dienen zur Berandung des elektrischen Felds. An der linken Platte des Kondensators liegt eine Spannung von 1 V an, an der rechten Seite eine Spannung von 0 V. Des Weiteren wurde in Abbildung 1.3c ein Kondensator betrachtet, der nicht direkt, sondern durch einen äußeren Käfig berandet wird. Die inneren Linien markieren die beiden Kondensatorplatten, hier liegen die selben Spannungen wie im Vergleichsbild an.

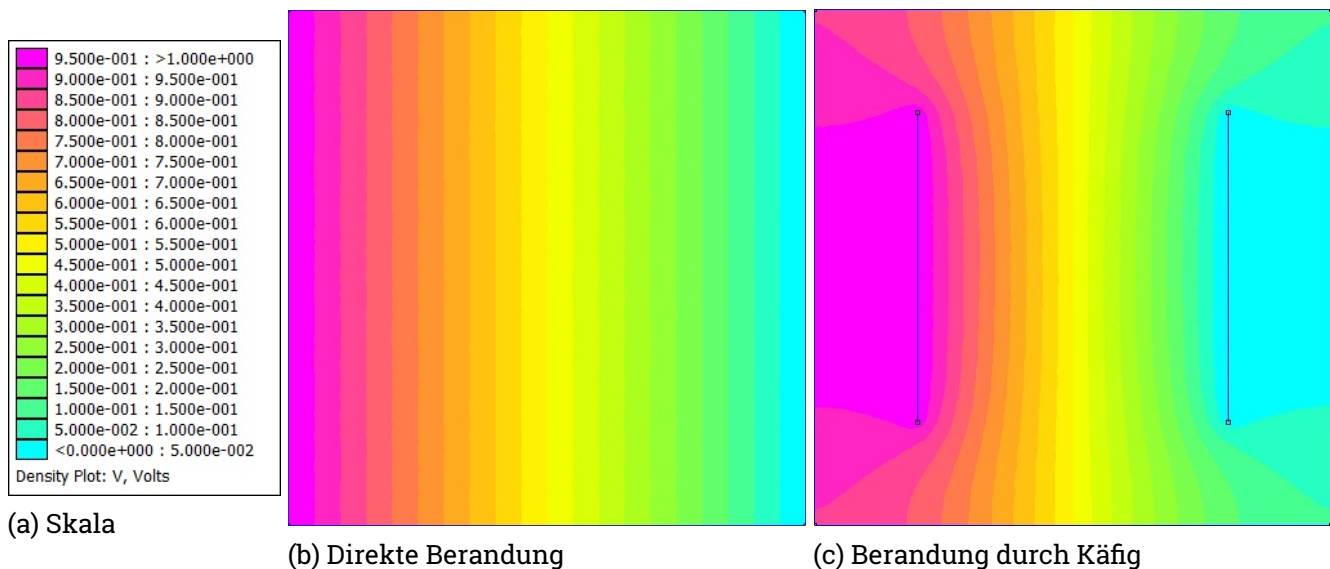
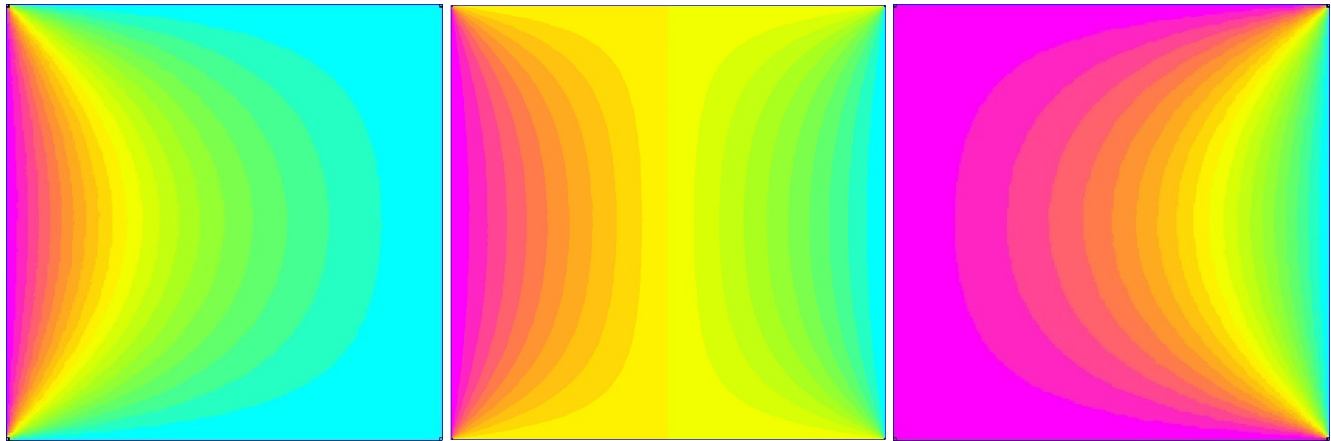


Abbildung 1.3: Aufbau und Feldlinien des Kondensators

Vergleich man nun den Plot 1.3b mit 1.3c, so wird eindeutig, dass die Feldlinien in Abbildung 1.3b senkrecht zu den beiden Flächen stehen. Berandet man den Kondensator durch einen Käfig, so werden auch die nicht senkrecht verlaufenden Feldlinien beachtet. In beiden Fällen entsteht ein homogenes Feld. Auch bei der Kapazität lassen sich unterschiedliche Werte ablesen. Während der Kondensator 1.3b eine Kapazität von 2,6562 pC hat, liegt die Kapazität von Kondensator 1.3c bei 3,9773 pC

Zusätzlich soll verglichen werden, wie sich verschiedene Randbedingungen auf das entstehende elektrische Feld auswirken. Hierzu wurden dem Rand verschiedene Werte zugewiesen. Zunächst in Abbildung 1.4a eine Spannung von 0 V, dann in Abbildung 1.4b 0,5 V und schließlich eine Spannung von 1 V in Abbildung 1.4c. Es gilt die Selbe Skala, die in 1.3a zu sehen ist.



(a) Rand mit 0V Spannung

(b) Rand mit 0,5V Spannung

(c) Rand mit 1V Spannung

Abbildung 1.4: Darstellung unterschiedlicher Randbedingungen

Da nun unterschiedliche Randbedingungen herrschen, entstehen auch Feldlinien zwischen den Kondensatorplatten und dem Rand. Es ergeben sich nicht nur unterschiedliche Feldlinien, sondern auch verschiedene Kapazitäten an den beiden Platten.

Spannung am Rand	Kapazität linke Kondensatorplatte	Kapazität rechte Kondensatorplatte
0 V	22,1405 pC	−0,5861 pC
0,5 V	11,3633 pC	−11,3633 pC
1 V	0,5861 pC	−22,1405 pC

Die Feldlinien werden offensichtlich durch die anliegende Spannung am Rand beeinflusst und damit auch die Kapazität des Kondensators.

FEMM lässt sich nicht nur mit Hilfe von Octave starten, sondern es besteht auch die Möglichkeit eine OctaveFEMM Routine zu schreiben und damit ein Modell zu erstellen, sowie eine Simulation dieses Modells zu starten. In dem gegebenen Fall, soll eine Routine geschrieben werden, die zwei Parameter  $a$  und  $h$  entgegen nimmt, wobei  $a$  die Kantenlänge und  $h$  der Abstand der Platten ist. Aus diesen Informationen soll ein Kondensator erstellt und die berechnete Kapazität  $C$  zurückgeliefert werden. Der Quellcode befindet sich im Anhang.

---

Zunächst wird in Zeile 7 bis 9 FEMM geöffnet und definiert um welche Art von Problem es sich handelt. Zusätzlich werden einige Einstellungen getroffen, wie die Einheit der Variablen, die Tiefe des Modells und die Rechengenauigkeit.

In Zeile 10 bis 13 werden die verschiedenen Properties erzeugt, also die Randbedingungen (falls gewünscht), die Kondensatorplatten und das Dielektrikum.

Durch den Befehl in Zeile 16 wird daraufhin ein Rechteck, mit Hilfe der an die Methode übergebenen Parameter, erstellt. Ein Blocklabel für das Dielektrikum wird in Zeile 19 erzeugt. Von Zeile 22 bis 38 werden nun die einzelnen Properties den richtigen Linien und Punkten zugewiesen.

Bevor die Simulation starten kann, muss das Projekt gespeichert werden. Danach wird die Analyse auf dieser Datei gestartet und die Lösung graphisch auf dem Bildschirm angezeigt.

Der zurückzuliefernde Parameter  $C$  ergibt sich nun aus dem Ergebnis der Ladung geteilt durch die Spannung. Diese sind in einem liegenden Vektor mit zwei Spalten gespeichert. Die Ladung an zweiter und die Spannung an erster Stelle.



---

## 2 Fazit

---

Dies ist das Fazit.

## 3 Anhang

```
1
2 ## Author: D. Schiller, S. Arnold, T. Lingenberg, C. Kramer
3 ## Created: 2020-11-25
4
5 function C = femmbuilder (a, h)
6
7     openfemm;
8     newdocument(1);
9     ei_probdef('centimeters','planar',1.E-8,a,30);
10    ei_addmaterial('Vakuum',1,1,0);
11    %ei_addboundprop('Randbedingung','Vs',0,0,0,0);
12    ei_addconductorprop('Linker Rand',1,0,1);
13    ei_addconductorprop('Rechter Rand',0,0,1);
14
15    %Randpunkte fuer den Kondensator erstellen
16    ei_drawrectangle(0,0,h,a);
17
18    %Punkt fuer Materialproperty setzen
19    ei_addblocklabel(h/2,a/2);
20
21    %Linken und rechten Rand setzen
22    ei_selectsegment(0,a/2);
23    ei_setsegmentprop('<None>',0,1,0,0,'Linker Rand');
24    ei_clearselected;
25    ei_selectsegment(h,a/2);
26    ei_setsegmentprop('<None>',0,1,0,0,'Rechter Rand');
27    ei_clearselected;
28
29    %Oberen und unteren Rand setzen
30    ei_selectsegment(h/2,0);
31    ei_selectsegment(h/2,a);
32    ei_setsegmentprop('<None>',0,1,0,0,'<None>');
33    ei_clearselected;
34
35    %Material setzen
36    ei_selectlabel(h/2,a/2);
37    ei_setblockprop('Vakuum',1,0,0);
38    ei_clearselected;
39
40    %Speichere die Datei ab
41    ei_saveas('Aufgabe3_b.FEE');
42
43    %Lade die gespeicherte Datei und erzeuge Simulation
44    ei_analyze(0);
45    ei_loadsolution;
46
47    %Liegenden Vektor erstellen, Ladung / Spannung ergibt Kapazit\"at C
```

---

```
48 | G = [0,0];  
49 | G = eo_getconductorproperties('Linker Rand');  
50 | C = G(1,2)/G(1,1);  
51 |  
52 | endfunction
```

data/femmbuilder.m

---

# Abbildungsverzeichnis

---

1.1	AC-Simulation aus LT-Spice . . . . .	5
1.2	MATLAB-Plot der Spannung über dem Widerstand R . . . . .	6
1.3	Aufbau und Feldlinien des Kondensators . . . . .	7
1.4	Darstellung unterschiedlicher Randbedingungen . . . . .	8



---

## Tabellenverzeichnis

---