# Ausarbeitung Übung 3

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg
Datum: 2. Dezember 2020

Darmstadt

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Ausarbeitung Übung 3

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg

Datum: 2. Dezember 2020

Darmstadt

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Übungsblatt 3 des Faches „Einführung in die numerische Berechnung elektromagnetischer Felder“. In der ersten der drei Aufgaben wird ein Koaxialkabel simuliert und die anliegende Spannung geplottet. Des Weiteren werden durch Anpassungen der Spannung und des Schaltbildes Veränderungen im Frequenzbereich simuliert und untersucht. In der zweiten Aufgabe wird eine Differentialgleichungen erst im Zeitbereich und dann im Frequenzbereich gelöst. Die gegebene Schaltung wird zunächst mit LTSpice simuliert und dann mit der Lösung der vorherigen Differentialgleichung analytisch gelöst. In der letzten Aufgabe wird das elektrische Feld innerhalb eines Plattenkondensator mit dem Betrachtungspunkt der Kapazität in FEMM simuliert. Das Ergebnis der Simulation wird mit der analytischen Lösung verglichen. Abschließend wird im Simulationsprogramm „OctaveFEMM“ ein Programm entwickelt, dass die Kapazität eines Plattenkondensators mit gegebenen Abmaßen automatisch ermittelt.

# 2 Bearbeitung der Aufgaben

## 2.1 Koaxialkabel Simulator

Das elektrische Verhalten eines Koaxialkabels lässt sich durch das Ersatzschaltbild 2.1 beschreiben. Hierbei stellt $R_1$ den ohmschen Längswiderstand dar, der von der Leitungslänge, dem Leitungsquerschnitt und dem Material abhängt.

Das induktive Verhalten des Kabels wird durch $L_1$ simuliert. Jeder stromdurchflossene Leiter baut ein Magnetfeld auf, die Änderung des Magnetfelds induziert eine Spannung, die dem Stromfluss entgegen wirkt und diesen abschwächt.

Durch den Isolationswert $R_2$ werden Verlustströme betrachtet, die zwischen dem inneren und äußeren Leiter des Koaxialkabels auftreten. Diese Leckströme entstehen, da es in der Realität keinen idealen Isolator gibt.

Zuletzt beinhaltet das Ersatzschaltbild noch die Leitungskapazität $C_1$. Ist am Ende der Leitung ein Verbraucher $R_f$ angeschlossen, so liegt an diesem eine Spannung an. In Folge dessen besteht auch zwischen Hin- und Rückleiter eine Potenzialgefälle. Beide Leiter verhalten sich, aufgrund der Ladungsdifferenz, somit wie die Platten eines Kondensators[1].

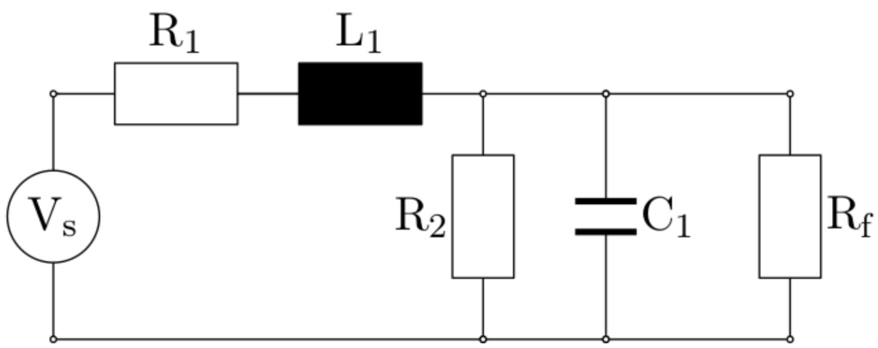



Abbildung 2.1: Ersatzschaltbild Koaxialkabel

Mit den Routinen, die in Aufgabe 2.3 entwickelt wurden lässt sich nun dieses Segment eines Koaxialkabels simulieren. Hierzu übergibt man der Methode `calculate_matrices` (siehe 4.2) die Netzliste 2.1.

[1]Quelle: Leitungstechnik, Dipl.-Ing.(FH) Christian Wolff, 2009

Listing 2.1: Netzliste Koaxialkabel

```
Vs  1  0  12
L1  2  3  0.00025
R1  1  2  0.001
C1  3  0  0.0000001
R2  0  3  1500
Rf  0  3  1500
```

Berechnet werden nun wieder die Matrizen $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$ und $\mathbf{r}$, die die Differenzialgleichung

$$\mathbf{M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{r} \tag{1}$$

parametrisieren. Zuletzt wird mit der Funktion `daspk` das Gleichungssystem numerisch gelöst und die Spannung an $R_f$ gezeichnet 2.2. Das dazu verwendete Skript befindet sich im Anhang 4.3.

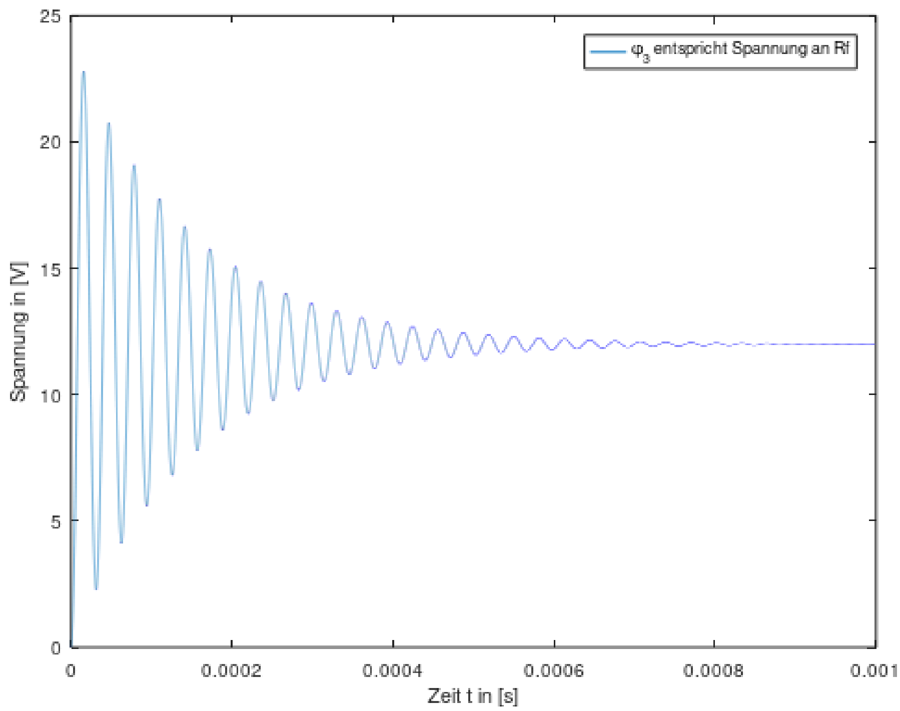



Abbildung 2.2: Spannungsverlauf an Last $R_f$ bei konstanter Spannungsquelle mit $12\mathrm{V}$

### Koaxialkabel mit n Gliedern

Nun wird das RLC-Segment in 2.1 $n = 10$ mal hintereinander in Reihe geschaltet (siehe 2.3).

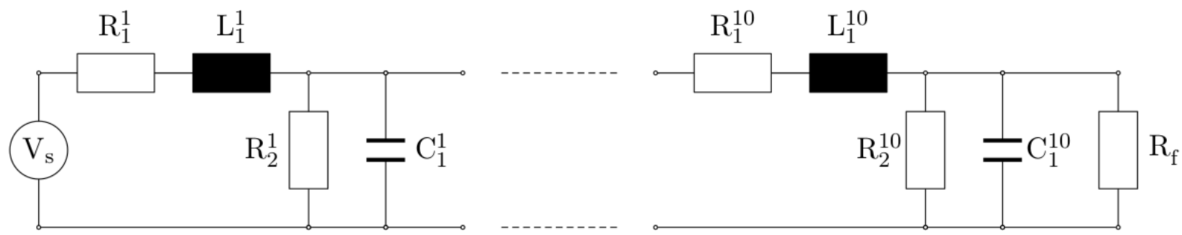



Abbildung 2.3: Ersatzschaltbild Koaxialkabel mit $n = 10$ Segmenten

Um zu untersuchen inwiefern diese Veränderung auf die Spannung an $R_f$ Einfluss hat, wurde ein neues Skript geschrieben, das die Unterschiede der Ausgangsspannung bei $n = 1$ und $n = 10$ sichtbar macht (siehe 4.5). Hierzu wurde die Netzliste für $n = 10$ Segmente erstellt (siehe 4.4), den Methoden übergeben und die Spannung an $R_f$ erneut berechnet. Beide Ausgangsspannungen für $n = 1$ und $n = 10$ wurden nun in das selbe Diagramm 2.4 eingezeichnet:

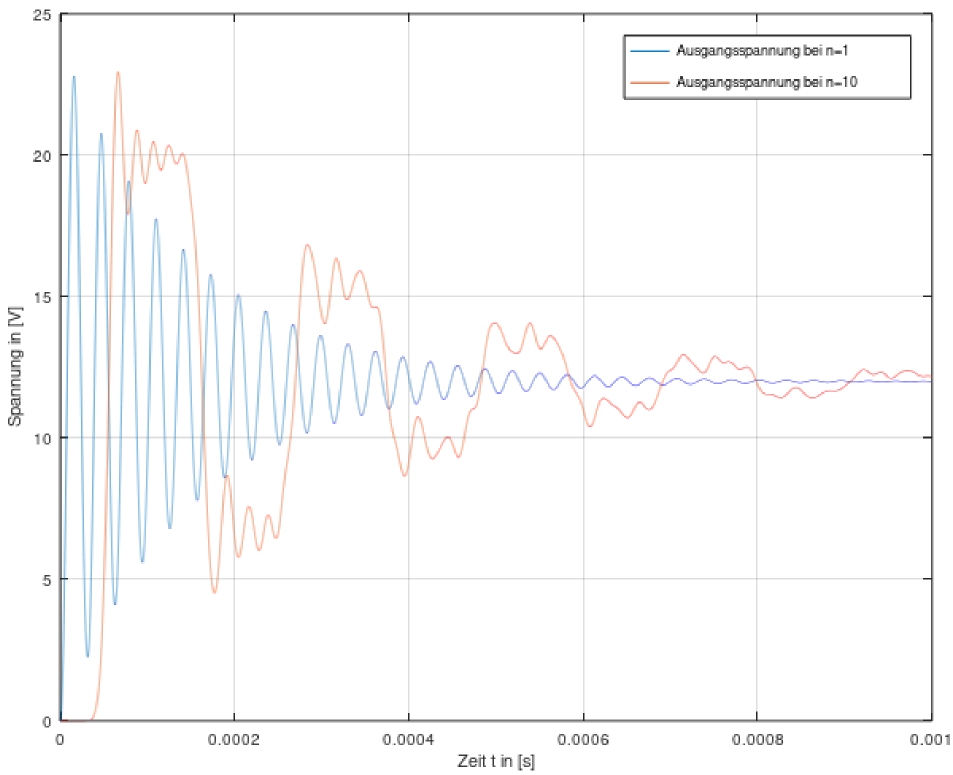



Abbildung 2.4: Spannungsverlauf an Last $R_f$ für $n = 1$ und $n = 10$

Auffällig ist zunächst einmal, dass im Fall $n = 10$ das Signal durch Oberschwingungen gestört wird. Jedoch lässt sich die eigentliche Hauptschwingung dennoch gut erkennen. Bei Betrachtung dieser im Vergleich zum Fall $n = 1$ wird ebenso deutlich, dass die Frequenz erheblich kleiner wurde. Ein weiterer Unterschied besteht in der Dämpfung, welche bei $n = 10$ nicht so stark ist . Es dauert länger, bis die Amplitude gegen $0$ geht. Zuletzt ist noch anzumerken, dass der maximal Betrag der Spannung an $R_f$ in beiden Fällen gleich ist. Die

Spannung liegt immer zwischen $0$ und $24\text{V}$.

Empirische Tests mit anderen Werten von $n$ ergaben, dass diese Aussagen für alle $n > 1, n \in \mathbb{N}$ gelten. Folglich gilt, je mehr Segmente hinzugefügt werden, umso mehr verkleinert sich die Frequenz. Der maximale Betrag der Spannung an der Last hängt jedoch nicht von $n$ ab. Der erste Ausschlag erreicht jedes mal das maximale Niveau von knapp unter $24\text{V}$ und nimmt dann mit der Zeit immer weiter ab, bis die Spannung gegen $12\text{V}$ konvergiert.

## 2.2 Frequenzbereich

«««< HEAD a)

$$
\begin{gathered}
\alpha(t) = -kx(t) + cos(\omega t) \\
x(t) = e^{-}k(t-t_0)(x_0) + \int_{t_0}^{t} e^{k(s-t_0)} cos(\omega s) ds \\
f' = e^{k(s-t_0)} \\
g = cos(\omega s)
\end{gathered}
$$

partiell integrieren

$$
\begin{gathered}
f = \frac{e^{k(s-t_0)}}{k} \\
g' = -\omega sind(\omega s) \\
(e^{-k(t-t_0)} x_0) + [\frac{e^{k(t-t_0)} cos(\omega s)}{k}]_{s=t_0}^{s=t} - \int_{t_0}^{t} -\frac{\omega sin(\omega s) e^{k(s-t_0)}}{k} ds
\end{gathered}
$$

partiell integrieren

$$
\begin{gathered}
f' = \frac{e^{k(s-t_0)}}{k} \\
g = -\omega sin(\omega s) \\
f = \frac{e^{k(s-t_0)}}{k^2} \\
g' = -\omega^2 sin(\omega s)
\end{gathered}
$$

$$(e^{-k(t-t_0)}x_0) + [\frac{e^{k(t-t_0)}cos(\omega s)}{k}]_{s=t_0}^{t} - (-[\frac{\omega^{k(s-t_0)}sin(\omega s)}{k^2}]_{s=t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} -\frac{\omega^2 e^{k(s-t_0)}cos(\omega s)}{k^2}ds)$$

$$(e^{-k(t-t_0)}x_0) + \int_{t_0}^{t} e^{k(s-t_0)}cos(\omega s)ds = [\frac{e^{k(t-t_0)}cos(\omega s)}{k}]_{s=t_0}^{t} + [\frac{\omega^{k(s-t_0)}sin(\omega s)}{k^2}]_{s=t_0}^{t} - \frac{\omega^2}{h^2}\int_{t}^{s=t_0} e^{k(s-t_0)}cos(\omega s)ds$$

$$\int_{t_0}^{t} e^{k(s-t_0)}cos(\omega s)ds + \frac{\omega^2}{k^2}\int_{t}^{t_0} e^{k(s-t_0)}cos(\omega s)ds = [\frac{e^{k(s-t_0)}cos(\omega s)}{k}]_{s=t_0}^{t} + [\frac{\omega e^{k(s-t_0)}sin(\omega s)}{k^2}]_{s=t_0}^{t}$$

$$\int_{t_0}^{t} e^{k(s-t_0)}cos(\omega s)ds + (1 + \frac{\omega^2}{h^2}) = [\frac{e^{k(t-t_0)}cos(\omega s)}{k}]_{s=t_0}^{t} + [\frac{\omega e^{k(s-t_0)}sin(\omega s)}{k^2}]_{s=t_0}^{t}$$

$$\int_{t_0}^{t} e^{k(s-t_0)}cos(\omega s)ds + (\frac{k^2+\omega^2}{h^2}) = [\frac{e^{k(t-t_0)}cos(\omega s)}{k}]_{s=t_0}^{t} + [\frac{\omega e^{k(s-t_0)}sin(\omega s)}{k^2}]_{s=t_0}^{t}$$

$$\int_{t_0}^{t} e^{k(s-t_0)}cos(\omega s)ds = ([\frac{e^{k(t-t_0)}cos(\omega s)}{k}]_{s=t_0}^{t} + [\frac{\omega e^{k(s-t_0)}sin(\omega s)}{k^2}]_{s=t_0}^{t}) * (\frac{k^2+\omega^2}{h^2})$$

$$= [\frac{ke^{k(t-t_0)}cos(\omega s) + \omega e^{k(s-t_0)}sin(\omega s)}{\omega^2+k^2}]_{s=t_0}^{t}$$

$$= \frac{[e^{k(t-t_0)}cos(\omega s) + \omega e^{k(s-t_0)}sin(\omega s)]_{s=t_0}^{t}}{\omega^2+k^2}$$

$$e^{-kt+kt_0} = \frac{e^{kt_0}}{e^{kt}}$$

$$= \frac{\omega e^{kt}sin(\omega t) + ke^{kt}cos(\omega t)}{e^{kt_0}(\omega^2+k^2)} - \frac{\omega sin(\omega t_0) + kcos(\omega t_0)}{(\omega^2+k^2)}$$

$$x(t) = e^{-k(t-t_0)}(x_0 + \frac{\omega e^{kt}sin(\omega t) + ke^{kt}cos(\omega t)}{e^{kt_0}(\omega^2+k^2)} - \frac{\omega sin(\omega t_0) + kcos(\omega t_0)}{(\omega^2+k^2)})$$

$$= \frac{\omega sin(\omega t) + kcos(\omega t)}{(\omega^2+k^2)} - e^{-k(t-t_0)}(\frac{\omega sin(\omega t_0) + kcos(\omega t_0)}{(\omega^2+k^2)} - x_0)$$

$$= e^{-k(t-7_0)}(x_0 - \frac{\omega sin(\omega t_0) + kcos(\omega t_0)}{(\omega^2+k^2)}) + \frac{\omega sin(\omega t) + kcos(\omega t)}{(\omega^2+k^2)}$$

b)

$$x_{freq}(t) = Re\{\underline{\alpha}e^{j\omega t}\}$$
$$x'_{freq}(t) = Re\{j\omega\underline{x}e^{j\omega t}\}$$
$$Re\{j\omega\underline{x}e^{j\omega t}\} = -kRe\{\underline{x}e^{j\omega t}\} - Re\{e^{j\omega t}\}$$
$$Re\{j\omega\underline{x}e^{j\omega t}\} + kRe\{\underline{x}e^{j\omega t}\} + Re\{e^{j\omega t}\} = 0$$
$$Re\{(j\omega\underline{x} + k\underline{x} - 1)e^{j\omega t}\} = 0$$
$$j\omega\underline{x} + k\underline{x} = 1 = 0$$
$$\underline{x} = \frac{1}{k + j\omega} = \frac{k - j\omega}{k^2 + \omega^2}$$
$$(e^{j\omega t} = cos(\omega t) + jsin(\omega t))$$
$$\Downarrow$$
$$x_{freq}(t) = Re\{\frac{k - j\omega}{k^2 + \omega^2}(cos(\omega t) + jsin(\omega t))\}$$
$$= \frac{kcos(\omega t) + \omega sin(\omega t)}{k^2 + \omega^2}$$

=======

In der Elektrotechnik arbeitet man oft an Problemen mit sinus-förmigen Schwingungen. Um die Rechnungen dafür zu vereinfachen bietet es sich an diese Probleme nur im Frequenzbereich zu betrachten. Im folgenden wird allerdings zuerst eine Lösung für die skalare lineare gewöhnliche Differentialgleichung im Zeitbereich

$$x'(t) = f(t, x) := -kx(t) + r(t) \tag{2}$$

mit Startwert $x(t_0) = x_0$ und $k > 0$ ermittelt. Die Anregung ist durch $r(t) = \cos(\omega t)$ als sinus-förmige Schwingung gegeben, wobei $\omega$ die Kreisfrequenz ist. Aus der vorgegebenen allgemeinen Lösung

$$x(t) = \mathrm{e}^{-k(t-t_0)}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{k(s-t_0)} r(s)ds\right) \tag{3}$$

betrachtet man vorerst nur das Integral und löst dieses.
Für die partielle Integrationsregel

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx$$

setzt man nun $f'(x) = \mathrm{e}^{k(s-t_0)}$ und $g(x) = \cos(\omega s)$. Daraus ergibt sich $f(x) = \frac{1}{k}\mathrm{e}^{k(s-t_0)}$ sowie $g'(x) = -\omega\sin(\omega s)$. Eingesetzt ergibt dies

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{k(s-t_0)}\cos(\omega s)ds = \left[\frac{\mathrm{e}^{k(s-t_0)}\cos(\omega s)}{k}\right]_{s=t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} -\frac{\omega\sin(\omega s)\mathrm{e}^{k(s-t_0)}}{k}ds.$$

Unter der Annahme $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{k(s-t_0)}}{k}$, $g(x) = -\omega\sin(\omega s)$ wird erneut partiell integriert, damit folgt $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{k(s-t_0)}}{k^2}$ und $g'(x) = -\omega^2\sin(\omega s)$. Setzt man die Annahmen in die vorherige Gleichung ein, folgt

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{k(s-t_0)}\cos(\omega s)ds = \left[\frac{\mathrm{e}^{k(s-t_0)}\cos(\omega s)}{k}\right]_{s=t_0}^{t} - \left(-\left[\frac{\omega\mathrm{e}^{k(s-t_0)}\sin(\omega s)}{k^2}\right]_{s=t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} -\frac{\omega^2\mathrm{e}^{k(s-t_0)}\cos(\omega s)}{k^2}ds\right)$$

dies weiter vereinfacht führt zu

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{k(s-t_0)}\cos(\omega s)ds = \left[\frac{\mathrm{e}^{k(s-t_0)}\cos(\omega s)}{k}\right]_{s=t_0}^{t} + \left[\frac{\omega\mathrm{e}^{k(s-t_0)}\sin(\omega s)}{k^2}\right]_{s=t_0}^{t} - \frac{\omega^2}{k^2}\int_{s=t_0}^{t} \mathrm{e}^{k(s-t_0)}\cos(\omega s)ds.$$

Das Ausgangsintegral findet sich nun sowohl auf der linken, als auch auf der rechten Seite der Gleichung wieder. Die Formel

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{k(s-t_0)}\cos(\omega s)ds \cdot \left(\frac{k^2+\omega^2}{k^2}\right) = \left[\frac{\mathrm{e}^{k(s-t_0)}\cos(\omega s)}{k}\right]_{s=t_0}^{t} + \left[\frac{\omega\mathrm{e}^{k(s-t_0)}\sin(\omega s)}{k^2}\right]_{s=t_0}^{t}$$

ergibt sich durch das Zusammenfassen der beiden gleichen Integrale auf einer Seite. Dividieren durch $\frac{k^2+\omega^2}{k^2}$ und das einsetzen der Integrationsgrenzen führt zu dem Ergebnis des Integrals

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{k(s-t_0)}\cos(\omega s)ds = \frac{\omega\mathrm{e}^{kt}\sin(\omega t) + k\mathrm{e}^{kt}\cos(\omega t)}{\mathrm{e}^{kt_0}(\omega^2+k^2)} - \frac{\omega\sin(\omega t_0) + k\cos(\omega t_0)}{\omega^2+k^2}.$$

Somit ist die Lösung für (3)

$$x(t) = \mathrm{e}^{-k(t-t_0)}\left(x_0 + \frac{\omega\mathrm{e}^{kt}\sin(\omega t) + k\mathrm{e}^{kt}\cos(\omega t)}{\mathrm{e}^{kt_0}(\omega^2+k^2)} - \frac{\omega\sin(\omega t_0) + k\cos(\omega t_0)}{\omega^2+k^2}\right),$$

durch das Ausmultiplizieren und Aufteilen in den gedämpften Anteil abhängig vom Startwert $x_0$ sowie sinus-förmige Schwingung, erfüllt

$$x(t) = \mathrm{e}^{-k(t-t_0)}\left(x_0 - \frac{\omega\sin(\omega t_0) + k\cos(\omega t_0)}{\omega^2+k^2}\right) + \frac{\omega\sin(\omega t) + k\cos(\omega t)}{\omega^2+k^2}. \tag{4}$$

die Differentialgleichung (2) im Zeitbereich.

Nach Berechnung der Differentialgleichung im Zeitbereich folgt nun die Betrachtung im Frequenzbereich. Hierbei wird die Lösung als Kosinus unbekannter Amplitude

$$x_{freq}(t) = \Re\left\{\underline{x}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}$$

angenommen, mit $\cos(\omega t) = \Re\left\{e^{j\omega t}\right\}$ wobei $\underline{x}$ der Phasor ist. Die zeitliche Ableitung

$$x'_{freq}(t) = \Re\left\{j\omega\underline{x}e^{j\omega t}\right\}$$

wird in (2) eingesetzt, dies liefert

$$\Re\left\{j\omega\underline{x}e^{j\omega t}\right\} = -k\Re\left\{\underline{x}e^{j\omega t}\right\} + \Re\left\{e^{j\omega t}\right\}.$$

Umstellen und Zusammenfassen der Terme ergeben die Gleichung

$$\Re\left\{(j\omega\underline{x} + k\underline{x} - 1)e^{j\omega t}\right\} = 0,$$

somit muss $j\omega\underline{x} + k\underline{x} - 1 = 0$ gelten. Nach $\underline{x}$ aufgelöst erhält man

$$\underline{x} = \frac{k - j\omega}{k^2 + \omega^2}.$$

Zur Berechnung der Lösung

$$x_{freq}(t) = \frac{k\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)}{k^2 + \omega^2}. \tag{5}$$

im Frequenzbereich (2) setzt man den berechneten Phasor $\underline{x}$ und die von der Eulerschen in die Polare Darstellung umgerechneten Werte $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$ in $x_{freq}$ ein.

Zwar wird mit dem Ansatz der Lösung im Frequenzbereich das transiente Anfangsverhalten vernachlässigt, jedoch ist die Lösung, verglichen mit dem Ansatz zum Ermitteln des Zeitbereichs, deutlich leichter und weniger zeitaufwändig, da man nur einmal eine sehr einfache Ableitung berechnen muss.

Zusätzlich wird eine Reihenschaltung aus einer Spule und einem Widerstand betrachtet ()LR-Schaltung). Diese wird in LT-Spice gebaut und simuliert. Bei der gegebenen Datei `Beispielschaltung2.asc` handelt es sich um eine AC-Simulation, aus der das Verhalten der Schaltung in Abhängigkeit von verschiedenen Frequenzen, in diesem Fall von $f = 100\,\text{Hz}$ bis $f = 1\,\text{MHz}$, abgelesen werden kann.

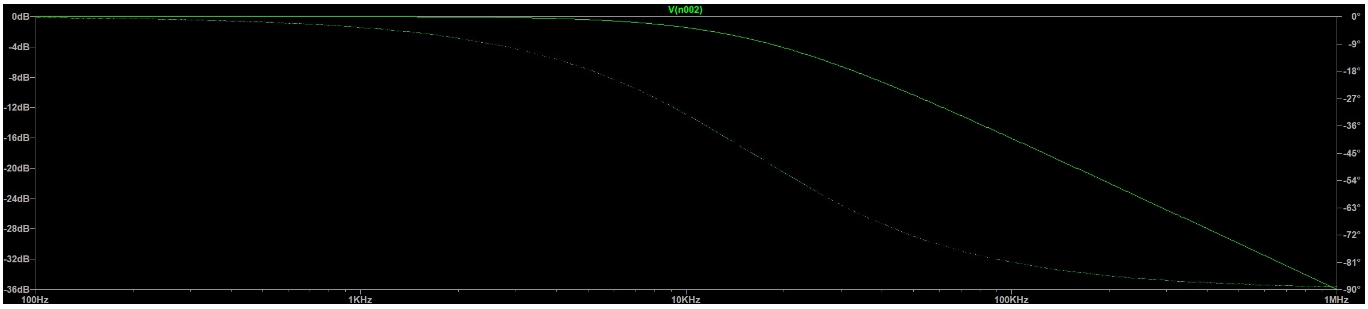



Abbildung 2.5: AC-Simulation aus LT-Spice

Die Schaltung lässt sich durch die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}u_i(t) \tag{6}$$

beschreiben wobei $R$ der Widerstand, $L$ die Induktivität, $i(t)$ der Strom und $u_i(t) = \cos(\omega t)$ die anregende Spannung ist. Die Lösung für diese Differentialgleichung im Zeitbereich lässt sich mit Hilfe von (4) ermitteln. Hierfür setzt man für $x(t) = i(t)$, $k = \frac{R}{L}$ und für $r(t) = \frac{1}{L}\cos(\omega t)$ ein. Erweitert man im selben Schritt auch noch die Brüche mit $\frac{L}{L}$ so folgt daraus als Lösung für (6)

$$i(t) = \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\left(x_0 - \frac{L\omega\sin(\omega t_0) + R\cos(\omega t_0)}{L^2\omega^2 + k^2}\right) + \frac{L\omega\sin(\omega t) + R\cos(\omega t)}{L^2\omega^2 + k^2}.$$

Analog ergibt sich die Lösung im Frequenzbereich durch einsetzen in (5) mit

$$i_{freq}(t) = \frac{R\cos(\omega t) + L\omega\sin(\omega t)}{R^2 + L^2\omega^2}.$$

Die Spannung über dem Widerstand lautet dann nach dem Ohm'schen Gesetz $U = R \cdot I$ und mit der Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$

$$u_R(t) = \frac{R\cos(2\pi f t) + 2\pi f L\sin(2\pi f t)}{R^2 + (2\pi f L)^2}R.$$

Das Schaubild für diese Funktion sieht man in Abbildung 2.6.

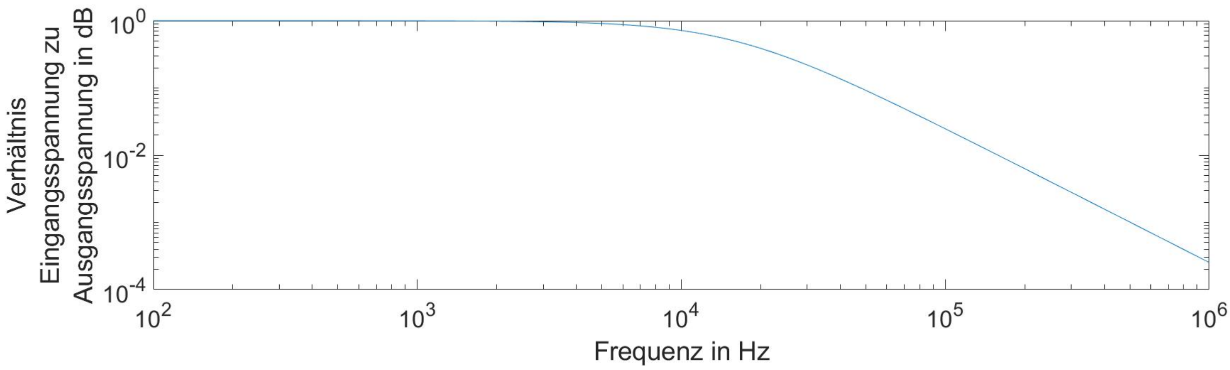



Abbildung 2.6: MATLAB-Plot der Spannung über dem Widerstand R

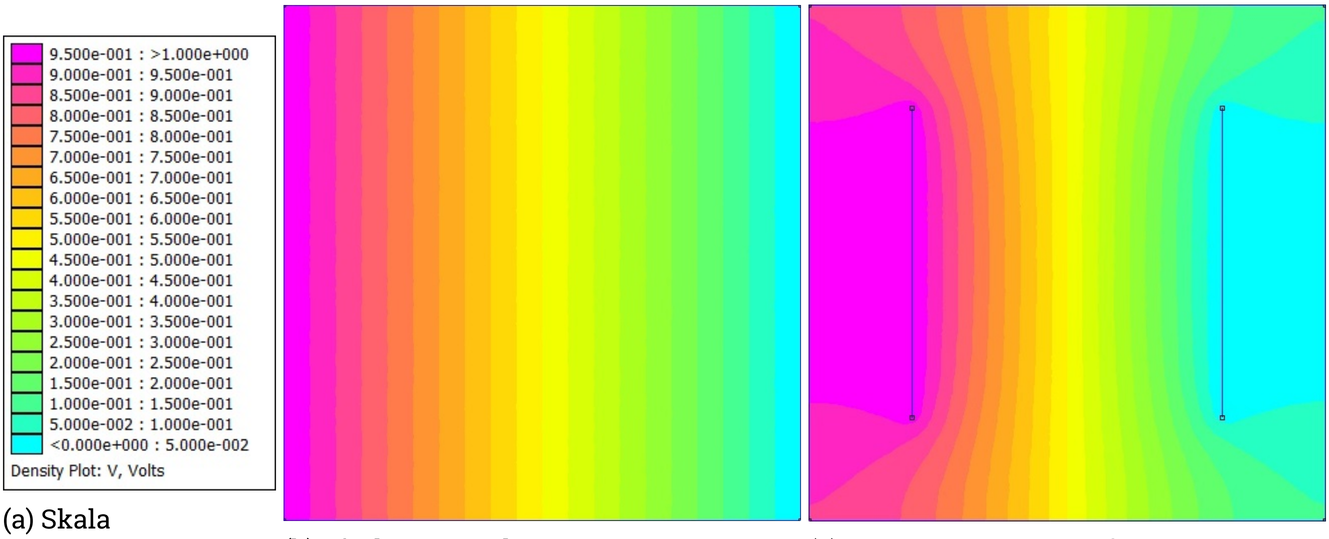
Anhand des Frequenzgangs fällt auf, dass es sich um eine Schaltung mit Tiefpass-Verhalten handelt, denn bei niedrigen Frequenzen bis ca. $10\,\mathrm{kHz}$ ist die Ausgangsspannung genauso groß wie die Eingangsspannung. Bei hohen Frequenzen nahe $1\,\mathrm{MHz}$ ist die Ausgangsspannung deutlich geringer als die Eingangsspannung.

»»»> main

## 2.3 Simulation homogener Plattenkondensator

In dieser Aufgabe wird ein harmonischer Plattenkondensator in dem Simulationsprogramm „FEMM “ nachgebaut. FEMM steht kostenfrei zur Verfügung und kann in Octave eingebunden werden.
Zunächst soll der Einfluss unterschiedlicher Randbedingungen auf das elektrische Feld eines Kondensators betrachtet werden.
Ein Kondensator ist eine Anordnung von zwei beliebigen Elektroden, die durch ein Dielektrikum von einander getrennt sind und die gleiche Ladung, aber mit unterschiedlicher Polarität in sich tragen, die Kapazität lässt sich mit $C = \epsilon_0\epsilon_r\frac{A}{d}$ berechnen, wobei $A$ die Fläche der Platten, $d$ den Abstand der Platten, $\epsilon_0$ die elektrische Feldkonstante und $\epsilon_r$ die relative Permittivität des Dielektrikums beschreibt. Außerdem kann die Formel $C = \frac{Q}{U}$ zur Berechnung der Kapazität benutzt werden, $Q$ ist die Ladung in F und $U$ die Spannung in V.

Zum Bau des Kondensators werden in FEMM vier Punkte gesetzt und diese zu Linien verbunden. Der Abstand der Punkte beträgt sowohl in x-, als auch in y-Richtung $30\,\mathrm{cm}$. Genau genommen wird ein Quader erstellt, da die Kondensatorplatten quadratisch sein sollen, hat der Quader eine Tiefe von $30\,\mathrm{cm}$, jedoch verfügt FEMM nur eine 2-Dimensionale graphische Darstellung.
Die linke und rechte Linie in Abbildung 2.7b stellen die beiden Kondensatorplatten dar, die obere und untere Linie dienen zur Berandung des elektrischen Felds. An der linken Platte des Kondensators liegt eine Spannung von $1\,\mathrm{V}$ an, an der rechten Seite eine Spannung von $0\,\mathrm{V}$. Des Weiteren wurde in Abbildung 2.7c ein Kondensator betrachtet, der nicht direkt, sondern durch einen äußeren Käfig berandet wird. Die inneren Linien markieren die beiden Kondensatorplatten, hier liegen die selben Spannungen wie im Vergleichsbild an.




(a) Skala

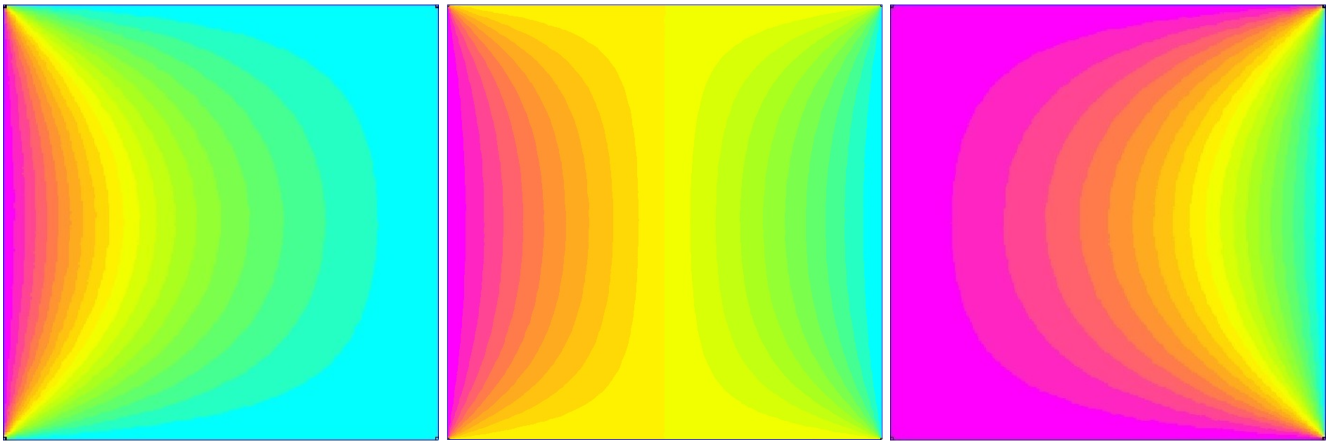
(b) Direkte Berandung

(c) Berandung durch Käfig

Abbildung 2.7: Aufbau und Feldlinien des Kondensators

Vergleich man nun den Plot 2.7b mit 2.7c, so wird eindeutig, dass die Feldlinien in Abbildung 2.7b senkrecht zu den beiden Flächen stehen. Berandet man den Kondensator durch einen Käfig, so werden auch die nicht senkrecht verlaufenden Feldlinien beachtet. In beiden Fällen entsteht ein homogenes Feld. Auch bei der Kapazität lassen sich unterschiedliche Werte ablesen. Während der Kondensator 2.7b eine Kapazität von $2{,}6562\,\mathrm{pF}$ hat, liegt die Kapazität von Kondensator 2.7c bei $3{,}9773\,\mathrm{pF}$

Zusätzlich soll verglichen werden, wie sich verschiedene Randbedingungen auf das entstehende elektrische Feld auswirken. Hierzu wurden dem Rand verschiedene Werte zugewiesen. Zunächst in Abbildung 2.8a eine Spannung von $0\,\mathrm{V}$, dann in Abbildung 2.8b $0{,}5\,\mathrm{V}$ und schließlich eine Spannung von $1\,\mathrm{V}$ in Abbildung 2.8c. Es gilt die Selbe Skala, die in 2.7a zu sehen ist.



(a) Rand mit 0V Spannung (b) Rand mit 0,5V Spannung (c) Rand mit 1V Spannung

Abbildung 2.8: Darstellung unterschiedlicher Randbedingungen

Da nun unterschiedliche Randbedingungen herrschen, entstehen auch Feldlinien zwischen den Kondensatorplatten und dem Rand. Es ergeben sich nicht nur unterschiedliche Feldlinien, sondern auch verschiedene Kapazitäten an den beiden Platten.

| Spannung am Rand | Kapazität linke Kondensatorplatte | Kapazität rechte Kondensatorplatte |
|---|---|---|
| $0\,\mathrm{V}$ | $22{,}1405\,\mathrm{pF}$ | $-0{,}5861\,\mathrm{pF}$ |
| $0{,}5\,\mathrm{V}$ | $11{,}3633\,\mathrm{pF}$ | $-11{,}3633\,\mathrm{pF}$ |
| $1\,\mathrm{V}$ | $0{,}5861\,\mathrm{pF}$ | $-22{,}1405\,\mathrm{pF}$ |

Die Feldlinien werden offensichtlich durch die anliegende Spannung am Rand beeinflusst und damit auch die Kapazität des Kondensators.

FEMM lässt sich nicht nur mit Hilfe von Octave starten, sondern es besteht auch die Möglichkeit eine OctaveFEMM Routine zu schreiben und damit ein Modell zu erstellen, sowie eine Simulation dieses Modells zu starten. In dem gegebenen Fall, soll eine Routine geschrieben werden, die zwei Parameter $a$ und $h$ entgegen nimmt, wobei $a$ die Kantenlänge und $h$ der Abstand der Platten ist. Aus diesen Informationen soll ein Kondensator erstellt und die berechnete Kapazität $C$ zurückgeliefert werden. Der Quellcode befindet sich im Anhang.

Zunächst wird in Zeile 7 bis 9 FEMM geöffnet und definiert um welche Art von Problem es sich handelt. Zusätzlich werden einige Einstellungen getroffen, wie die Einheit der Variablen, die Tiefe des Modells und die Rechengenauigkeit.
In Zeile 10 bis 13 werden die verschiedenen Properties erzeugt, also die Randbedingungen (falls gewünscht), die Kondensatorplatten und das Dielektrikum.
Durch den Befehl in Zeile 16 wird daraufhin ein Rechteck, mit Hilfe der an die Methode übergebenen Parameter, erstellt. Ein Blocklabel für das Dielektrikum wird in Zeile 19 erzeugt. Von Zeile 22 bis 38 werden nun die einzelnen Properties den richtigen Linien und Punkten zugewiesen.
Bevor die Simulation starten kann, muss das Projekt gespeichert werden. Danach wird die Analyse auf dieser Datei gestartet und die Lösung graphisch auf dem Bildschirm angezeigt.
Der zurückzuliefernde Parameter $C$ ergibt sich nun aus dem Ergebnis der Ladung geteilt durch die Spannung. Diese sind in einem liegenden Vektor mit zwei Spalten gespeichert. Die Ladung an zweiter und die Spannung an erster Stelle.

# 3 Fazit

Die erste Aufgabe ergab, dass sich die beiden Leiter des Koaxialkabels wie die Platten eines Plattenkondensators verhalten. Darüber hinaus ergibt sich, dass man durch Anfügen von weiteren Segmenten an die Schaltung eine Verkleinerung der Schwingfrequenz bewirkt. Differentialgleichungen können häufig, wie sich in Aufgabe zwei zeigt, leichter im Frequenzbereich als im Zeitbereich gelöst werden. Die durch Lösen der Differentialgleichung analytisch berechneten Ergebnisse für Zeit- und Frequenzverhalten stimmen dabei mit der numerischen Simulation durch LTSpice überein. Die Ergebnisse der dritten Aufgabe ergeben, dass sich die Feldlinien eines Kondensators in einem Simulationskäfig nicht nur senkrecht zu den Platten bewegen, sondern dass sich auch Randeffekte an den Enden der Kondensatorplatten ausbilden. Untersucht man unterschiedliche Randbedingungen zeigt sich, dass diese sowohl den Kapazitätswert des Kondensators, als auch die elektrischen Feldlinien beeinträchtigen. Die Wahl der Simulationsrandbedingungen kann also nicht willkürlich erfolgen.

# 4 Anhang

## Methode circuit_matrices

```
function [AC,AL,AR,AV,AI,C,L,R,V,I] = circuit_matrices(filename)

% PEMCE Uebung 2: Routine um Schaltunsmatrizen zu erzeugen:
%  [AC,AL,AR,AV,AI,C,L,R,V,I] = circuit_matrices(filename)
%
% Eingabe:
%  filename  - Dateiname der Netzliste
%
% Ausgaben:
%  AC,...,AI - reduzierte Inzidenzmatrizen fuer Kapazitaten, ..., Stromquellen
%  C,...,I   - Matrizen der Parameter (Kapazitaten, ..., Stromquellen)

%# lese Schaltung aus netzliste
 cirstruct = prs_spice (filename);

%# initialisiere variablen
n = cirstruct.totextvar;
AC=AL=AR=AV=AI=sparse(n,0);
C=L=R = zeros(0,0);
V=I= zeros(0,1);

% Durchlaufe alle Elementtypen (R,L,C,...)
 for i=1:size(cirstruct.LCR,2)
 typ=cirstruct.LCR(i).parnames{1,1};
 sz=size(cirstruct.LCR(i).pvmatrix,1);

% Durchlaufe alle Bauteile eines Typen
 for j=1:size(cirstruct.LCR(i).pvmatrix,1)
 val=cirstruct.LCR(i).pvmatrix(j,:);
 pins=cirstruct.LCR(i).vnmatrix(j,:);

 if typ == 'L'
 matrix = AL;
 diagonal = L;
 endif
 if typ == 'R'
 matrix = AR;
 diagonal = R;
 endif
 if typ == 'C'
 matrix = AC;
 diagonal = C;
 endif
 if typ == 'V'
```

```
matrix = AV;
diagonal = V;
endif
if typ == 'I'
matrix = AI;
diagonal = I;
endif

is_voltage_or_current = typ == 'V' || typ == 'I';

matrix = [matrix,sparse(n,1)]
%Diagonalmatrix Elemente einfuegen

if is_voltage_or_current == false
diagonal = [diagonal,zeros(sz,1)];

if typ == 'R'
val = 1/val;
endif

diagonal(j,j) = val;
endif

%Richtung des Stroms bestimmen
direction = pins(1) - pins(2);

%Strom fliesst von 1 nach 2
if direction < 0
%Nur hinzufuegen wenn es sich nicht um den Masseknoten handelt
if pins(1) != 0
matrix(pins(1),j)=1;
endif
matrix(pins(2),j)=-1;

if is_voltage_or_current == true
diagonal = [diagonal;val];
endif

%Strom fliesst von 2 nach 1
else
matrix(pins(1),j)=1;
%Nur hinzufuegen wenn es sich nicht um den Masseknoten handelt
if pins(2) != 0
matrix(pins(2),j)=-1;
endif

if is_voltage_or_current == true
diagonal = [diagonal;-val];
endif
endif

if typ == 'L'
AL = matrix;
L = diagonal;
endif
if typ == 'R'
AR = matrix;
R = diagonal;
```

```
endif
if typ == 'C'
AC = matrix;
C = diagonal;
endif
if typ == 'V'
AV = matrix;
V = diagonal;
endif
if typ == 'I'
AI = matrix;
I = diagonal;
endif

endfor
endfor
endfunction
```

Listing 4.1: Methode `circuit_matrices` in Octave

### Methode calculate_matrices

```
function [M,K,r] = calculate_matrices(filename)

%Berechnet die Matrizen M,K und r
[AC,AL,AR,AV,AI,C,L,R,V,I] = circuit_matrices(filename);
bl = size(L,1);
bv = size(V,1);
n = size(AR,1);

M = [AC*C*AC' zeros(n,bl) zeros(n,bv);
zeros(bl,n) L zeros(bl,bv);
zeros(bv,n) zeros(bv,bl) zeros(bv,bv)];

K = [AR*R*AR' AL AV;
-AL' zeros(bl,bl) zeros(bl,bv);
-AV' zeros(bv,bl) zeros(bv,bv)];

r = [-AI*I; zeros(bl,1); -V];
endfunction
```

Listing 4.2: Methode `calculate_matrices` in Octave

### Finales Skript zur Berechnen der Spannung an Rf (n=1)

```
t = [0:1e-8:1e-3];

% Bestimmung des Gleichungssystems:
[M,K,r] = calculate_matrices('koaxialKabel.net');

% r(5) (Spannungsquelle) wird wohl mit falschem Vorzeichen berechnet, diese Korrektur fuehrt
    nun zum richtigen Ergebnis
r(5) = -r(5);
```

```
%res = @(y, yd,t) (M*yd+K*y-r);
res =@(x,xdot,t)(M*xdot+K*x-r);

% Bestimmung der Anfangswerte:
U_q = 12;
L1 = 0.00025;
R1 = 0.001;
C1 = 0.0000001;
R2 = 1500;
Rf = 1500;

% x0:
% phi_1 = 12
% phi_2 = 12
% phi_3 = 0
% i_L   = 0
% i_V   = 0
x0 = zeros(size(r));
x0(1) = U_q;
x0(2) = U_q

% x0_Strich:
x0_Strich = zeros(size(r));

% Nummerische Berechnung des Gleichungssystems:
x = daspk(res,x0,x0_Strich,t);

% Erstellen des Plots:
plot(t,x(:,3:3));
xlabel('Zeit t in [s]', 'interpreter', 'tex')
ylabel('Spannung in [V]', 'interpreter', 'tex')
legend('\phi_3 entspricht Spannung an Rf')
```

Listing 4.3: `FinalesSkript` in Octave

### Netzliste für n=10

```
Vs A1N1 0 12
Ro1 A1N1 A1N2 0.001
L1 A1N2 A1N3 0.00025
Ru1 0 A1N3 1500
C1 A1N3 0 0.0000001

Ro2 A1N3 A2N2 0.001
L2 A2N2 A2N3 0.00025
Ru2 0 A2N3 1500
C2 A2N3 0 0.0000001

Ro3 A2N3 A3N2 0.001
L3 A3N2 A3N3 0.00025
Ru3 0 A3N3 1500
C3 A3N3 0 0.0000001

Ro4 A3N3 A4N2 0.001
L4 A4N2 A4N3 0.00025
```

```
Ru4 0 A4N3 1500
C4 A4N3 0 0.0000001

Ro5 A4N3 A5N2 0.001
L5 A5N2 A5N3 0.00025
Ru5 0 A5N3 1500
C5 A5N3 0 0.0000001

Ro6 A5N3 A6N2 0.001
L6 A6N2 A6N3 0.00025
Ru6 0 A6N3 1500
C6 A6N3 0 0.0000001

Ro7 A6N3 A7N2 0.001
L7 A7N2 A7N3 0.00025
Ru7 0 A7N3 1500
C7 A7N3 0 0.0000001

Ro8 A7N3 A8N2 0.001
L8 A8N2 A8N3 0.00025
Ru8 0 A8N3 1500
C8 A8N3 0 0.0000001

Ro9 A8N3 A9N2 0.001
L9 A9N2 A9N3 0.00025
Ru9 0 A9N3 1500
C9 A9N3 0 0.0000001

Ro10 A9N3 A10N2 0.001
L10 A10N2 A10N3 0.00025
Ru10 0 A10N3 1500
C10 A10N3 0 0.0000001

Rf 0 A10N3 1500
```

Listing 4.4: `Netzliste für Koaxialkabel mit 10 Segmenten` in Octave

### Finales Skript Vergleich n=1 und n=10

```
t = [0:1e-8:2e-3];

% Bestimmung des Gleichungssystems:
[M,K,r] = calculate_matrices('koaxialKabel.net');

%r(5) (Spannungsquelle) wird wohl mit falschem Vorzeichen berechnet
r(5) = -r(5);

%res = @(y, yd,t) (M*yd+K*y-r);
res =@(x,xdot,t)(M*xdot+K*x-r);

% Bestimmung der Anfangswerte:
U_q = 12;
L1 = 0.00025;
R1 = 0.001;
C1 = 0.0000001;
R2 = 1500;
```

```
Rf = 1500;

% x0:
% phi_1 = 12
% phi_2 = 12
% phi_3 = 0
% i_L   = 0
% i_V   = 0
x0 = zeros(size(r));
x0(1) = U_q;
x0(2) = U_q

% x0_Strich:
x0_Strich = zeros(size(r));

% Nummerische Berechnung des Gleichungssystems:
% x = dassl(res, transpose(x0), zeros(size(r)), t);
x1 = daspk(res,x0,x0_Strich,t);


%----------------------------------------------------------------
% Bestimmung des Gleichungssystems mit 10 Segmenten:
%----------------------------------------------------------------
[M10,K10,r10] = calculate_matrices('KK10.net');

%Spannungsquelle wird wohl mit falschem Vorzeichen berechnet
r10 = -r10;

%res = @(y, yd, t) (M*yd+K*y-r);
res10 =@(x,xdot,t)(M10*xdot+K10*x-r10);

% Bestimmung der Anfangswerte:
U_q = 12;
L1 = 0.00025;
R1 = 0.001;
C1 = 0.0000001;
R2 = 1500;
Rf = 1500;

% x0:
% phi_1 = 12
% phi_2 = 12
% phi_3 = 0
% i_L   = 0
% i_V   = 0
x0_10 = zeros(size(r10));
x0_10(1) = U_q;
x0_10(2) = U_q

% x0_Strich:
x0_10_Strich = zeros(size(r10))

% Nummerische Berechnung des Gleichungssystems:
% x = dassl(res, transpose(x0), zeros(size(r)), t);
x10 = daspk(res10,x0_10,x0_10_Strich,t);

%----------------------------------------------------------------------
% Erstellen des Plots:
```

```
plot(t,x1(:,3:3));
hold on;
plot(t,x10(:,21:21));
hold off;
xlabel('Zeit t in [s]', 'interpreter', 'tex')
ylabel('Spannung in [V]', 'interpreter', 'tex')
legend('Ausgangsspannung bei n=1', 'Ausgangsspannung bei n=10')
```

Listing 4.5: `SkriptSegmentVergleich1vs10` in Octave

```

## Author: D. Schiller, S. Arnold, T. Lingenberg, C. Kramer
## Created: 2020-11-25

function C = femmbuilder (a, h)

  openfemm;
  newdocument(1);
  ei_probdef('centimeters','planar',1.E-8,a,30);
  ei_addmaterial('Vakuum',1,1,0);
  %ei_addboundprop('Randbedingung','Vs',0,0,0,0);
  ei_addconductorprop('Linker Rand',1,0,1);
  ei_addconductorprop('Rechter Rand',0,0,1);

  %Randpunkte fuer den Kondensator erstellen
  ei_drawrectangle(0,0,h,a);

  %Punkt fuer Materialproperty setzen
  ei_addblocklabel(h/2,a/2);

  %Linken und rechten Rand setzen
  ei_selectsegment(0,a/2);
  ei_setsegmentprop('<None>',0,1,0,0,'Linker Rand');
  ei_clearselected;
  ei_selectsegment(h,a/2);
  ei_setsegmentprop('<None>',0,1,0,0,'Rechter Rand');
  ei_clearselected;

  %Oberen und unteren Rand setzen
  ei_selectsegment(h/2,0);
  ei_selectsegment(h/2,a);
  ei_setsegmentprop('<None>',0,1,0,0,'<None>');
  ei_clearselected;

  %Material setzen
  ei_selectlabel(h/2,a/2);
  ei_setblockprop('Vakuum',1,0,0);
  ei_clearselected;

  %Speichere die Datei ab
  ei_saveas('Aufgabe3_b.FEE');

  %Lade die gepeicherte Datei und erzeuge Simulation
  ei_analyze(0);
  ei_loadsolution;

  %Liegenden Vektor erstellen, Ladung / Spannung ergibt Kapazit\"at C
  G = [0,0];
```

```
  G = eo_getconductorproperties('Linker Rand');
  C = G(1,2)/G(1,1);

endfunction
```

data/femmbuilder.m

```
x = 100:1:1000000;
R = 100;
L = 0.001;
t = 1
y = R.*(R.*cos(2.*pi.*x.*t)+2.*pi.*L.*x.*sin(2.*pi.*x.*t))./(R^2+(L.*2.*pi.*x).^2);

figure;
loglog(x,y);
set(gca,'fontsize',20)
xlabel 'Frequenz in Hz';
ylabel ({'Verhaeltnis', 'Eingangsspannung zu' 'Ausgangsspannung in dB'});
```

data/A32d.m

# Abbildungsverzeichnis