

Ausarbeitung Übung 7

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg

Datum: 20. Januar 2021

Darmstadt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Ausarbeitung Übung 7

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg

Datum: 20. Januar 2021

Darmstadt

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Dualer Divergenzoperator	3
1.2	Geister	6
1.3	Potentialformulierung und Eichung	8
2	Fazit	10
3	Anhang	11



1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Übungsblatt 7 des Faches „Einführung in die numerische Berechnung elektromagnetischer Felder“ AMK.

1.1 Dualer Divergenzoperator

Um das Berechnen von Potentialen und des elektrischen Feldes zu automatisieren und numerisch diese berechnen zu können, lassen sich Gebiete Ω in duale und primäre Gitter zerteilen. Die entstehenden Gitterpunkte lassen sich „kanonisch“ nummerieren. Jeder dieser Punkte bekommt drei Kanten, drei Flächen und ein Volumen zugewiesen. Dies führt zwangsweise zu Geisterelementen, auf die im Folgenden noch genauer eingegangen wird. Für jede dieser Kanten L_n gilt

$$\widehat{e}_n = \int_{L_n} -\nabla \Phi \cdot d\vec{s} = \Phi(P_i) - \Phi(P_{i+1}). \quad (1)$$

Diese Beziehung nutzt man aus, um einen primären Divergenzoperator \mathbf{G} zu erzeugen, der duale Divergenzoperator $\tilde{\mathbf{S}}$ lässt sich dann mit $\mathbf{G} = -\tilde{\mathbf{S}}^T$ berechnen. Die Einträge der Matrix \mathbf{G} und damit auch der Matrix $\tilde{\mathbf{S}}$ bestehen aus 0, 1 und -1. Die Einträge von \mathbf{G} lassen sich mit den partiellen Ableitungsoperatoren unter der Vorschrift

$$(\mathbf{P}_w)_{p,q} := \delta_{p+M_w,q} - \delta_{p,q} = \begin{cases} -1 & \text{für } q = p \\ +1 & \text{für } q = p + M_w, \text{ wobei } w = x, y, z \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2)$$

bestimmen.

Die im Anhang aufgeführte Methode `fit_dual_div` macht genau diesen Vorgang, jedoch nicht für \mathbf{G} , sondern für $\tilde{\mathbf{S}}$. Der Methode kann ein beliebiges kartesisches Gitter übergeben werden. Das Gitter wird durch die Parameter N_x , N_y , N_z bestimmt, wobei N_x die Anzahl an Unterteilungen in x -, N_y die Anzahl an Unterteilungen in y - und N_z die Anzahl an Unterteilungen in z -Richtung widerspiegeln.

Das elektrische Feld $\vec{E}(x, y, z)$ lässt sich durch die negativen partiellen Ableitung in x, y und z -Richtung des Potentials berechnen, $\vec{E}(x, y, z) = -\nabla \Phi$. In diesem Fall ist $\Phi(x, y, z) = x^2 \sin(2\pi z)$ gegeben, daraus folgt das Elektrische Feld

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -2x \sin(2\pi z) \\ 0 \\ -2\pi x^2 \cos(2\pi z) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Für $(\widehat{e}_{ana})_1$ und $(\widehat{e}_{ana})_{N_p+1}$ lassen sich mit (1) konkrete Werte berechnen. Es gilt $N_x = N_y = N_z = 2$ auf dem Gebiet $\Omega = \{-1, 1\}^3$, daraus ergibt sich $N_p = 8$. Beispielhaft werden die Kanten $L_{x(1)}$ und $L_{y(1)}$ berechnet, dazu werden die Punkte $P_1 = (-1, -1, -1)^T$, $P_2 = (1, -1, -1)^T$ und $P_3 = (-1, 1, -1)^T$ benötigt. Setzt man nun die Punkte entsprechend in (1) ein, so erhält man

$$(\widehat{e}_{ana})_1 = \Phi(P_1) - \Phi(P_2) = 1 \cdot \sin(-2\pi) - 1 \cdot (-2\pi) = 0$$

und

$$(\widehat{e}_{ana})_9 = \Phi(P_1) - \Phi(P_3) = 1 \cdot \sin(-2\pi) - 1 \cdot \sin(-2\pi) = 0.$$

Das Skript `SkriptAg7_1` berechnet die Potentiale auf dem gesamten Gebiet Ω und speichert diese in einem Vektor ϕ ab, danach wird mit der Funktion `fit_dual_div` $\tilde{\mathbf{S}}$ berechnet und $\widehat{\mathbf{e}}$ mit $\widehat{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{S}}^T \phi$.

Für die weiteren Rechnungen gilt $N_x = N_y = N_z = 21$ und folglich $Np = 9261$. Zum Berechnen von \widehat{e}_1 wird die erste Zeile von \tilde{S}^T mit dem Potentialvektor ϕ multipliziert, aus (2) folgert man, dass abgesehen von den ersten beiden Einträgen alle weiteren Einträge des Zeilenvektors gleich null sind. Da ein Zeilen- mit einem Spaltenvektor multipliziert wird ist das Ergebnis ein skalarer Wert \widehat{e}_1

$$\widehat{e}_1 = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} \phi(P_1) \\ \phi(P_2) \\ \phi(P_3) \\ \phi(P_4) \\ \vdots \\ \phi(P_{9261}) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &= \phi(P_1) - \phi(P_2) + 0 \cdot \phi(P_3) + \dots + 0 \cdot \phi(P_{9261}) \\ &= \phi(P_1) - \phi(P_2) = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Ähnlich dazu berechnet sich der Wert \widehat{e}_{N_x+1} . Nun wird die 22. Zeile der Matrix \tilde{S}^T gebraucht, auch diese wird dann mit dem Potentialvektor multipliziert, es ergibt sich

$$\widehat{e}_{22} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \dots \quad 0] \begin{bmatrix} \phi(P_1) \\ \vdots \\ \phi(P_{21}) \\ \phi(P_{22}) \\ \phi(P_{23}) \\ \phi(P_{24}) \\ \vdots \\ \phi(P_{9261}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &= 0 \cdot \phi(P_1) + \dots + 0 \cdot \phi(P_{21}) + \phi(P_{22}) - \phi(P_{23}) + 0 \cdot \phi(P_{24}) + \dots + 0 \cdot \phi(P_{9261}) \\ &= \phi(P_{22}) - \phi(P_{23}) = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Die Punkte P_1, P_2, P_{22}, P_{23} sind durch

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} -0,9 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, P_{22} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0,9 \\ -1 \end{pmatrix}, P_{23} = \begin{pmatrix} -0,9 \\ -0,9 \\ -1 \end{pmatrix},$$

gegeben. Aus diesen Beispielrechnungen wird ersichtlich, wie die Rechnung mit dem Divergenzoperator funktioniert, jede Multiplikation führt zurück zu (1). Die berechneten Daten für das gesamte Gebiet lassen sich mit der Simulationssoftware ParaView graphisch darstellen. In Abbildung 1.1 sind die entstehenden Potentiale ϕ zu sehen, wie erwartet ist das Potential $\phi = 0$, wenn entweder $x = 0$ gilt, oder $\sin(2\pi z) = 0$ gilt.

Visualisiert man das Ergebnis der Berechnung des elektrischen Feldes wie in Abbildung 1.2, so würde man erwarten, dass das elektrische Feld an den Rändern des Gebietes Ω gleich stark ist. Betrachtet man die

Abbildung 1.2, so wird deutlich, dass dies nicht der Fall ist. Auch eine Veränderung der Stärke des Feldes in y -Richtung würde man nicht erwarten. Die Visualisierung an den Gitterpunkten ist problematisch, da es zu Verzerrungen in der Graphik kommt und durch die im nächsten Abschnitt vorgestellten Geisterkanten zu Rechenfehlern kommt.

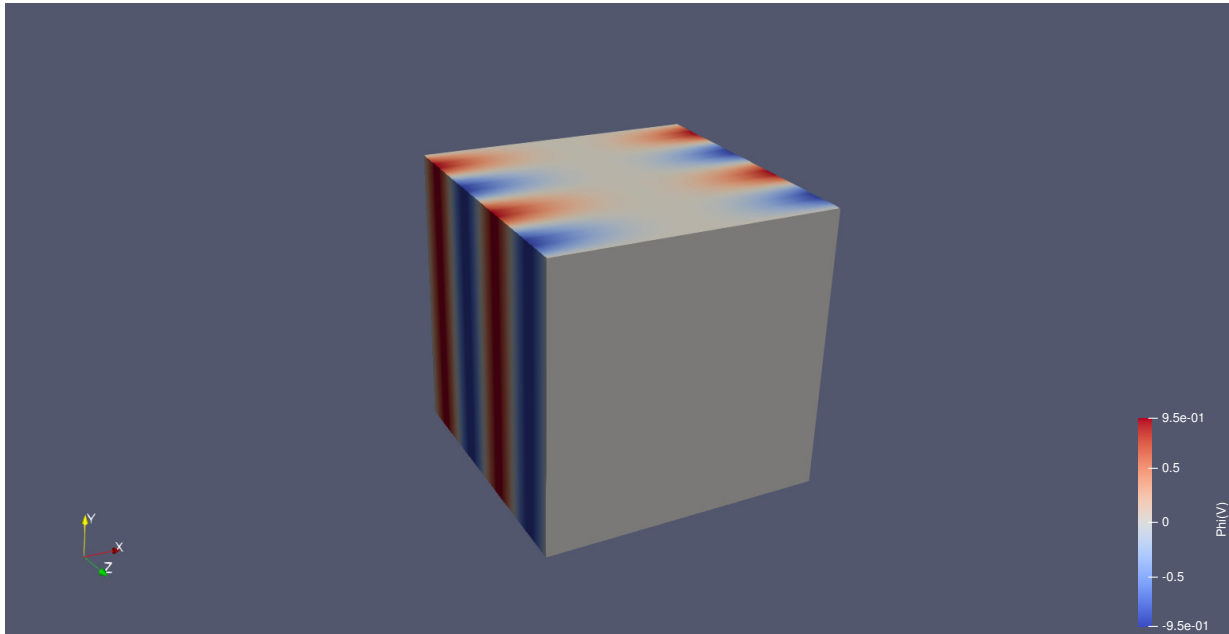


Abbildung 1.1: Das entstehende Potential mit der Funktion $\Phi(x, y, z) = x^2 \sin(2\pi z)$ auf dem Gebiet $\Omega = \{-1, 1\}^3$

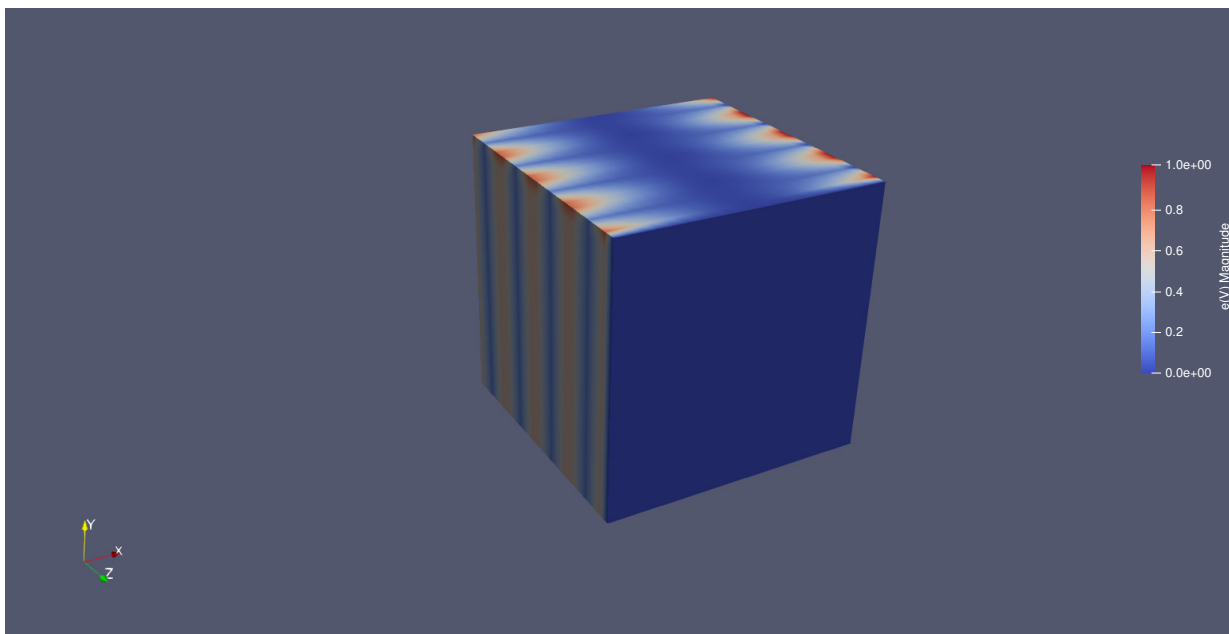


Abbildung 1.2: Das entstehende elektrische Feld zu der Funktion $\Phi(x, y, z) = x^2 \sin(2\pi z)$ auf dem Gebiet $\Omega = \{-1, 1\}^3$

1.2 Geister

Um das Rechengebiet Ω , in dessen Inneren die MAXWELLSchen Gleichungen zu lösen sind, räumlich zu diskretisieren, wird es in endlich viele Teilgebiete unterteilt. Eine der gebräuchlichsten Gitterformen ist die kartesische bei der das Rechengebiet in einzelne Quader zerlegt wird. Bei Indizierung der Kanten, Flächen und Volumen mit dem kanonischen Nummerierungsschema, gibt es zu jedem Punkt drei Kanten, drei Flächen und ein Volumen. Dabei werden auch Kanten außerhalb des Rechengebiets durchnummeriert die für die spätere Lösung nicht benötigt werden. Diese nennt man Geisterkanten und findet sie immer am positiven Ende des Bereichs. Anschaulich erkennen kann man dies in Abbildung 1.3, der schwarze Quader ist das Rechengebiet Ω , in Blau sind die Geisterkanten eingezeichnet.

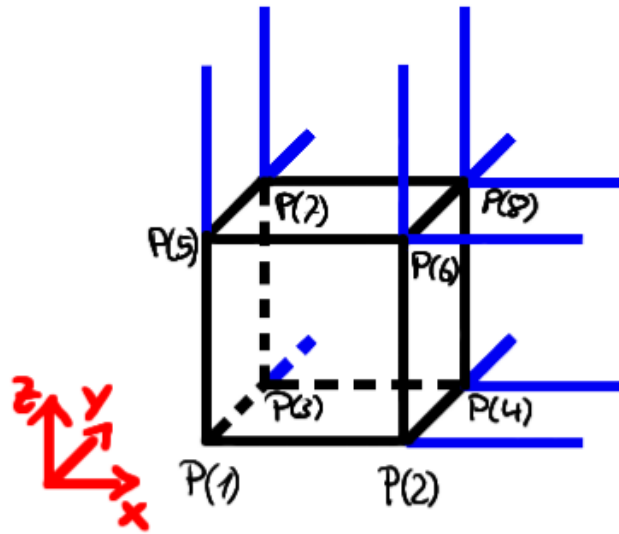


Abbildung 1.3: Einfaches Gitter mit Geisterkanten in Blau

Bei einem Gitter der Größe $N_x \times N_y \times N_z$ erhält man genau $N_x N_y + N_y N_z + N_x N_z$ Geisterkanten und -flächen, die Anzahl an Geistervolumen beträgt $N_x N_z + N_x(N_y - 1) + (N_y - 1)(N_z - 1)$. Setzt man die Geisterkanten und -flächen ins Verhältnis zu allen Kanten bzw. Flächen so skalieren sie zu

$$\frac{\text{Geisterkanten}}{\text{Alle Kanten}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{N_x} + \frac{1}{N_y} + \frac{1}{N_z} \right)$$

und alle Geistervolumen im Vergleich zu allen Volumen

$$\frac{\text{Geistervolumen}}{\text{Alle Volumen}} = \frac{N_x N_y + N_y N_z + N_x N_z - N_x - N_y - N_z + 1}{N_x N_y N_z}.$$

Da die Geisterkanten außerhalb des Rechengebiets liegen ist es nicht nötig für diese auch das Integral zu berechnen. Für die Skizze in Abbildung 1.3 ist es also sinnvoll nur für die schwarzen Kanten und nicht die blauen das Integral zu berechnen. Wendet man die weiter oben erwähnte Matlab-Implementierung des Gradientenoperators auf das Beispiel an so erhält man in der ersten Zeile die Potential-Differenz zwischen den Punkten $P(1)$ und $P(2)$. Zeile 2 hingegen ergibt die Potential-Differenz zwischen den Punkten $P(2)$ und

$P(3)$. Diese Berechnung ist nicht sinnvoll und kommt daher, dass die eigentlich von $P(2)$ ausgehende Kante in x -Richtung eine Geisterkante ist. Also sollten Zeile 2 und auch alle anderen die eine Potential-Differenz diagonal durch den Quader berechnen auf null gesetzt werden.

1.3 Potentialformulierung und Eichung

Die vier Maxwell'schen Gleichungen lauten:

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (6)$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \right) = \partial_t \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{J} \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (9)$$

Alle Feldgrößen sind von Ort \vec{r} und Zeit t abhängig. Alternativ lässt sich eine Formulierung mithilfe der Potentiale \vec{A} und Φ aufschreiben, welche implizit durch die Gleichungen

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \nabla \Phi, \quad (10)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (11)$$

gegeben sind.

In der Elektrostatik kann (10) durch $\vec{E} = -\nabla \Phi$ vereinfacht werden, da alle Vorgänge statisch sind, also zeitlich unveränderlich. Es gilt $\partial_t \vec{A} = \vec{0}$. Demnach spielen für die Elektrostatik nur Eichfelder \vec{A} , Φ eine Rolle, die zeitunabhängig sind.

Wir betrachten im folgenden nun jedoch den allgemeinen, zeitlich veränderlichen Fall und gehen nun näher auf die Beschreibung der Maxwell'schen Gleichungen durch die Eichfelder \vec{A} und Φ ein.

(11) impliziert (8), da man durch Skalarmultiplikation mit dem Nabla-Operator ∇

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

erhält. Die Schreibweise $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A})$ ist hierbei äquivalent zur Schreibweise $\text{div rot } \vec{A}$, und demnach immer Null.

Ebenso impliziert (10) die Gleichung (6). Hierzu bildet man das Vektorprodukt mit dem Nabla-Operator ∇ auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\partial_t \vec{A} - \nabla \Phi \\
\nabla \times \vec{E} &= \nabla \times (-\partial_t \vec{A} - \nabla \Phi) \\
\nabla \times \vec{E} &= \nabla \times (-\partial_t \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \Phi) \\
\nabla \times \vec{E} &= \nabla \times (-\partial_t \vec{A}) \\
\nabla \times \vec{E} &= -\partial_t (\nabla \times \vec{A}) \\
\nabla \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B}
\end{aligned}$$

Angewendet wurde die Rechenregel $\nabla \times (\nabla \Phi) = \text{rot grad } \Phi = \vec{0}$, ebenso wurde Gleichung (11) im letzten Schritt eingesetzt, um wieder auf \vec{B} zu kommen.



2 Fazit

fazit jo

3 Anhang

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Beispiel eines Divergenzoperators mit $N_x = N_y = N_z = 2$

```
1 function Ss = fit_dual_div(Nx ,Ny ,Nz )
2 Mx = 1;
3 My = Nx;
4 Mz = Ny * Nx;
5 Np = Nx * Ny * Nz;
6
7 Px = zeros(Np,Np);
8 Py = zeros(Np,Np);
9 Pz = zeros(Np,Np);
10
11
12 for p = 1 : Np
13     for q = 1 : Np
14         if (q==p)
15             Px(p,q) = 1;
```

```

16         Py(p,q) = 1;
17         Pz(p,q) = 1;
18     end
19     if (q==p-Mx)
20         Px(p,q) = -1;
21     end
22     if (q==p-My)
23         Py(p,q) = -1;
24     end
25     if (q==p-Mz)
26         Pz(p,q) = -1;
27     end
28 end
29 end
30
31 Ss = [Px,Py,Pz];

```

data/fit_dual_div.m

```

1 function step = calc_steps(Nw,length)
2 step = length/(Nw-1);

```

data/calc_steps.m

```

1 Nx = 21;
2 Ny = 21;
3 Nz = 21;
4 Np = Nx * Ny * Nz;
5 x = -1;
6 y = -1;
7 z = -1;
8 Phi = zeros(1,Nx*Ny*Nz);
9 Points = zeros(Nx*Ny*Nz,3);
10 length = 2;
11 n = 1;
12
13 for i = 1 : Nz
14     for j = 1 : Ny
15         for k = 1 : Nx
16             stepx = calc_steps(Nx,length);
17             stepy = calc_steps(Ny,length);
18             stepz = calc_steps(Nz,length);
19             Phi(1,n) = ((x+stepx*(k-1))^2*sin(2*pi*(z+stepz*(i-1))));
20
21             Points(n,1)=(x+stepx*(k-1));
22             Points(n,2)=(y+stepy*(j-1));
23             Points(n,3)=(z+stepz*(i-1));
24             n = n+1;
25         end
26     end
27 end
28
29 xmesh = [-1:0.1:1];
30 ymesh = [-1:0.1:1];
31 zmesh = [-1:0.1:1];
32
33 Ss = fit_dual_div(Nx,Ny,Nz);
34 e = Ss.'.*Phi;

```

```
35  
36 e = sum(e,2);  
37  
38 %spy(e)  
39 exyz = [ e(1:Np), e(Np+(1:Np)), e(2*Np+(1:Np)) ] ;  
40 fit_write_vtk(xmesh,ymesh,zmesh,'Uebung07.vtr',{ 'Phi(V)',Phi.''; 'e(V)',exyz});
```

data/SkriptAg7_1.m

Abbildungsverzeichnis

1.1	Das entstehende Potential mit der Funktion $\Phi(x, y, z) = x^2 \sin(2\pi z)$ auf dem Gebiet $\Omega = \{-1, 1\}^3$	5
1.2	Das entstehende elektrische Feld zu der Funktion $\Phi(x, y, z) = x^2 \sin(2\pi z)$ auf dem Gebiet $\Omega = \{-1, 1\}^3$	5
1.3	Einfaches Gitter mit Geisterkanten in Blau	6