1 Harmonischer Oszillator, analytisch

Für die vorliegende Schaltung wird angenommen, dass am Kondensator zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Spannung $u_\mathrm{C}(0) = 12\,\mathrm{V}$ anliegt und der Strom durch den Reihenschwingkreis $i(0) = 0\,\mathrm{A}$ beträgt. Nach dem KIRCHHOFF'schen Gesetz ergibt sich die Maschengleichung für den Schwingkreis zu $u_\mathrm{C}(t)+u_\mathrm{R}(t)+u_\mathrm{L}(t) = 0$. Aus den Spannungen für den Widerstand $u_\mathrm{R}(t) = R\, i_\mathrm{R}(t)$, die Spule $u_\mathrm{L}(t) = L\,\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}}{\mathrm{d}t}(t)$ und den Kondensator $u_\mathrm{C}(t) = \frac{1}{C}\int i_\mathrm{C}(t)dt$ ergibt sich daraus die Maschengleichung in Abhängigkeit des Stromes zu

$$R\,i(t) + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{C}\int i_\mathrm{C}(t)dt = 0.$$

Nach einmaligem Differenzieren nach der Zeit t folgt daraus die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{\mathrm{C}}i(t) + L\,\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0. \tag{1}$$

Die Lösung der Differentialgleichung im Falle einer gedämpften Schwingung lässt sich aus dem allgemeinen Ansatz

$$i(t) = a\mathrm{e}^{(-\delta+j\omega_e)t} + b\mathrm{e}^{(-\delta-j\omega_e)t} \tag{2}$$

ermitteln. Hierbei bezeichnet $\delta = \frac{R}{2L}$ die Dämpfung, $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ die Resonanzkreisfrequenz und $\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ die gedämpfte Resonanzkreisfrequenz. Die Konstanten a und b werden bestimmt durch einsetzen des Anfangswertes $i(0) = 0\,\mathrm{A}$ folgt $a + b = 0$ und somit $a = -b$.
Da zum Zeitpunkt $t = 0$ noch kein Strom fließt liegt noch keine Spannung u_R an dem Ohmschen Widerstand R an und somit vereinfacht sich (1) zu $u_\mathrm{C}(0) + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ und durch einsetzen von $u_\mathrm{C}(0) = 12\,\mathrm{V}$ folgt daraus $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0) = -12\,\mathrm{V}$. Einmaliges differenzieren von (2) sowie einsetzen von $i(0) = 0$ und $a = -b$ ergibt $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0) = -j2\omega_e b$. Gleichsetzen und nach b auflösen und man erhält $b = -j\frac{u_\mathrm{C}(0)}{2L\omega_e}$ und somit $a = j\frac{u_\mathrm{C}(0)}{2L\omega_e}$. Der Strom ergibt sich damit nun zu

$$i(t) = j\frac{u_\mathrm{C}(0)}{2L\omega_e}\mathrm{e}^{(-\delta+j\omega_e)t} - j\frac{u_\mathrm{C}(0)}{2L\omega_e}\mathrm{e}^{(-\delta-j\omega_e)t}. \tag{3}$$

Durch einfaches ausmultiplizieren und nutzen der EULER'schen Formel

$$\sin(x) = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}$$

vereinfacht sich (3) noch weiter zu

$$i(t) = -\frac{u_\mathrm{C}}{L\omega_e}\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega_e t)$$

Mit den eingebauten Bauelementen $L = 1.73007\mathrm{mH}$, $R = 2\Omega$ und $C = 10\mu\mathrm{F}$ kommt man auf eine gedämpfte Resonanzkreisfrequenz von $\omega_e = 7580.701\,\mathrm{s}^{-1}$

und eine Dämpfung von $\delta = 578.011\,\mathrm{s}^{-1}$.

Um eine eindeutige Lösung für eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung zu ermitteln sind auch n Anfangsbedingungen nötig da auch n Integrationen nötig sind um die Differentialgleichung zu lösen und somit auch n Integrationskonstanten bestimmt werden müssen.