

# Ausarbeitung Übung 6

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg

Datum: 12. Januar 2021

Darmstadt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

## Ausarbeitung Übung 6

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg

Datum: 12. Januar 2021

Darmstadt

---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Bearbeitung der Übungsaufgaben</b>	<b>3</b>
2.1	Stetigkeitsbedingung des Stromes . . . . .	3
2.2	Überspannungsableiter . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Fazit</b>	<b>12</b>



---

# 1 Einleitung

---

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Übungsblatt 6 des Faches „Einführung in die numerische Berechnung elektromagnetischer Felder“.

---

## 2 Bearbeitung der Übungsaufgaben

---

### 2.1 Stetigkeitsbedingung des Stromes

---

Mithilfe des Ampereschen Gesetzes

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{J}(\vec{r}, t) \quad (1)$$

und des Gaußschen Gesetzes

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) = \varrho(\vec{r}, t), \quad (2)$$

lässt sich die Kontinuitätsgleichung (siehe Gleichung 3) herleiten. Bildet man auf beiden Seiten der Gleichung 1 die Divergenz der Vektorfelder erhält man

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{J}(\vec{r}, t) \right),$$

wobei  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$  und  $\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b}$  gilt. Es ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) + \operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}, t) = 0.$$

Setzt man zuletzt nun Gleichung 2 ein erhält man die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}, t) = 0. \quad (3)$$

Aus Gleichung 3 soll nun die Stetigkeitsbedingung für die Stromdichte bestimmt werden. Hierzu werden Überlegungen an einer Grenzfläche unternommen. Gleichung 3 wird auf beiden Seiten über ein quaderförmiges Volumen  $V$  integriert, durch das die Grenzfläche verläuft (siehe Abbildung 2.1).

Durch dieses Vorgehen erhält man die Gleichung

$$\int_V \operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}, t) dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho(\vec{r}, t) dV.$$

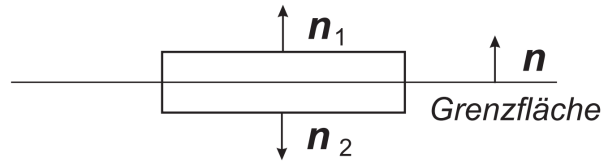


Abbildung 2.1: Grenzfläche zwischen zwei Vektorfeldern  $\vec{J}_1$  und  $\vec{J}_2$  mit eingeführtem Quadervolumen  $V$

Mithilfe des Integralsatz von Gauss (siehe Gleichung 4)

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \int_{\partial V} \vec{F} d\vec{A} \quad (4)$$

Ergibt sich der erste Teil der Gleichung zu

$$\int_{\partial V} \vec{J}(\vec{r}, t) d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho(\vec{r}, t) dV.$$

Hierbei beschreibt  $\partial V$  den Rand des Volumens. Es handelt sich nun um ein Oberflächenintegral, die Dimension wurde um eins verringert.

Das Volumenintegral über die Raumladungsdichte  $\varrho$  im zweiten Teil der Gleichung lässt sich durch die Gesamtladung  $Q_V$  innerhalb des gedachten Volumens  $V$  ersetzen.

$$\int_{\partial V} \vec{J}(\vec{r}, t) d\vec{A} = -\frac{\partial Q_V(t)}{\partial t}.$$

Die Seitenflächen des Quaders, die senkrecht zu der Grenzfläche liegen, werden nun als vernachlässigbar klein angenommen. Demnach müssen für das Oberflächenintegral nur noch die zwei Stirnflächen  $A$  mit Normalenvektor  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$  betrachtet werden, die fast auf der Grenzfläche liegen. Oberhalb der Grenzfläche liegt das Vektorfeld  $\vec{J}_1$ , unterhalb  $\vec{J}_2$  vor. Da die Normalenvektoren in unterschiedliche Richtung zeigen ergibt sich die Gleichung

$$\int_A \vec{J}_1(\vec{r}, t) d\vec{A} - \int_A \vec{J}_2(\vec{r}, t) d\vec{A} = -\frac{\partial Q_A(t)}{\partial t}.$$

Ist Fläche  $A$  nun selbst infinitesimal klein, so kann  $\vec{J}_1$  und  $\vec{J}_2$  auf der gesamten Fläche als konstant angenommen werden. Die Integrale lassen sich zu

$$A(\vec{J}_1 - \vec{J}_2) \cdot \vec{n}$$

vereinfachen. Auch die Flächenladung  $Q_A$  kann bei einer unendlich kleinen Fläche wieder durch die Flächenladungsdichte  $\varrho_A$  beschreiben werden mit  $Q_A = \varrho_A \cdot A$ . Abschließend ergibt sich

$$A(\vec{J}_1(t) - \vec{J}_2(t)) \cdot \vec{n} = \frac{\partial \varrho_A(t) \cdot A}{\partial t}$$

und nach kürzen von  $A$

$$(\vec{J}_1(t) - \vec{J}_2(t)) \cdot \vec{n} = \frac{\partial \varrho_A(t)}{\partial t} \quad (5)$$

---

Formel 5 trifft nun Aussagen über die Stetigkeit der Stromdichte  $\vec{J}$  an einer Grenzfläche.  $\vec{J}_1$  und  $\vec{J}_2$  sind stetig in normaler Richtung, wenn  $\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = 0$  gilt, also sich die Ladungsdichte an der Grenzfläche nicht zeitlich verändert.

---

## 2.2 Überspannungsableiter

---

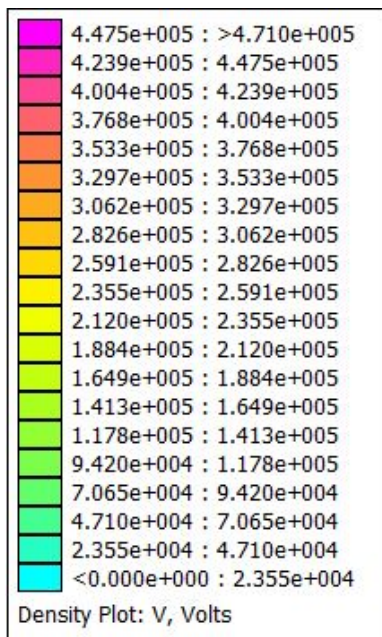
Im Folgenden wird mit Hilfe des Simulationsprogramms FEMM das Modell eines Überspannungsableiters erstellt und das tangential elektrische Feld  $E_t$  entlang der Mittelachse des Ableiters unter verschiedenen Bedingungen ermittelt.

Um das Modell zu erzeugen wurde eine OctaveFEMM Routine geschrieben, diese ist unter dem Namen `Aufgabe6_2a.m` im Anhang zu finden. Als Parameter nimmt sie den Außendurchmesser  $d$  des Rings entgegen und dessen Höhe  $z$ . Der Parameter `meshnet` bestimmt die Größe der zum Meshen benutzten Dreiecke.

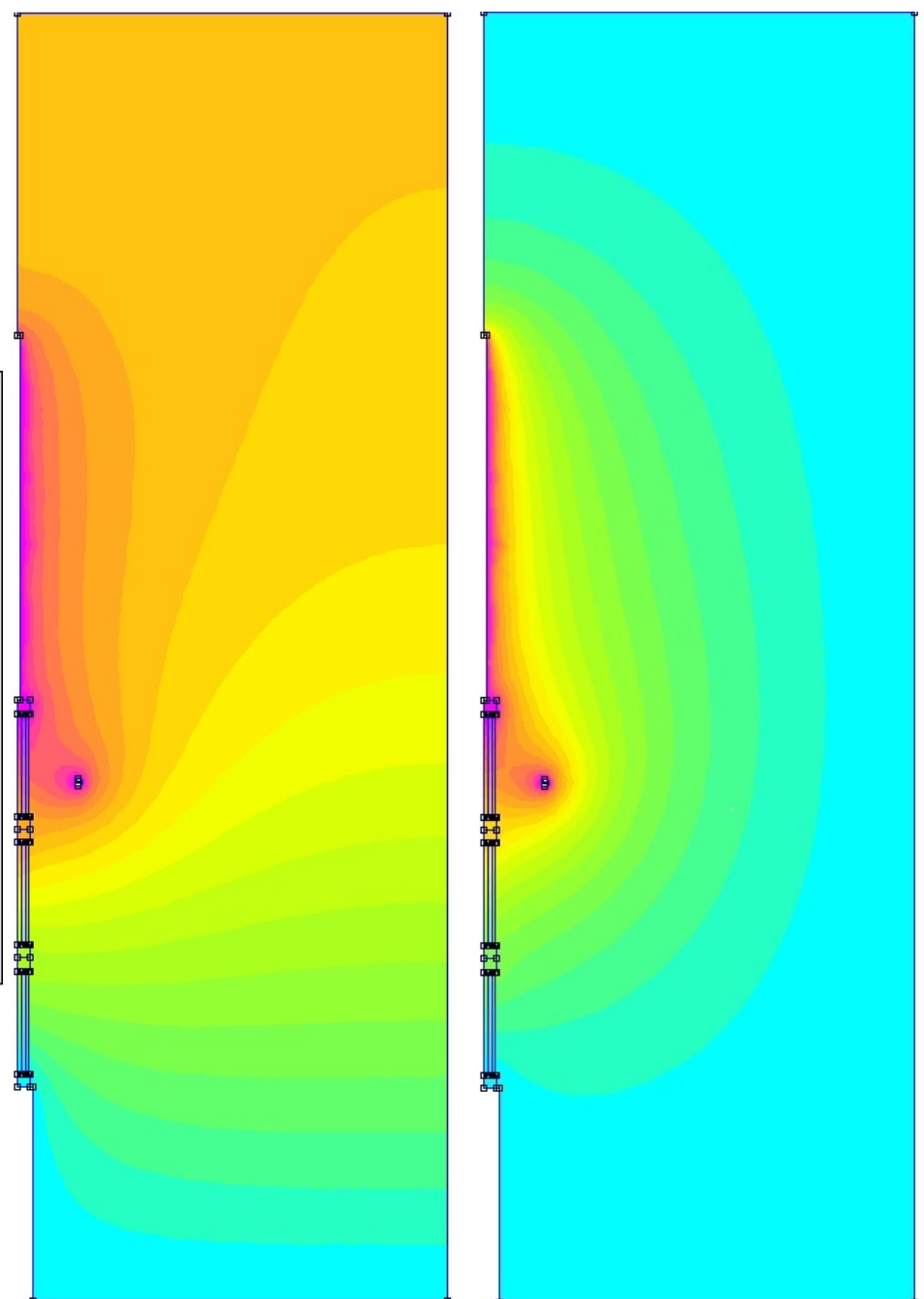
In Abbildung 2.2 ist der Überspannungsableiter sowie das entstehende Potenzial im Raum zu sehen. Die Randbedingungen werden für die rechte und die obere Begrenzung des Spannungsableiters gesetzt. Abb. 2.2b zeigt die Entwicklung des Potenzial, wenn keine Randbedingungen gesetzt wurden. Abb. 2.2c hingegen zeigt das Potenzial, wenn am Rand die Bedingung von 0 V gesetzt wird. Am oberen Mast, sowie an allen damit verbundenen leitenden PEC-Gebieten und am feldsteuernden Ring liegt ein Potenzial von 471 000 V an. Am Boden und am unteren Mast liegt das Potenzial 0 V an.

Da der Überspannungsableiter in der Realität nicht in einem geerdeten Kasten steht, ist es sinnvoller die Berechnung ohne explizite Randbedingungen durchzuführen.





(a) Skala



(b) Entwicklung des Potentials ohne explizite Randbedingung

(c) Entwicklung des Potentials mit Randbedingung 0 V

Abbildung 2.2: Überspannungsableiter mit unterschiedlichen Randbedingungen

Darüber hinaus wurde untersucht, wie sich das tangential elektrische Feld entlang der Symmetrieachse entwickelt. Das Feld wurde nur in den Ableitersegmenten in der Höhe zwischen 2000 mm und 5480 mm berechnet. In Abbildung 2.3 sind die Stärken der tangentialen Elektrischen Felder zu sehen. Der blaue Graph entsteht, wenn keine Randbedingungen vorgegeben werden, der rote bei der Randbedingung 0 V. Es ist zu erkennen, dass das elektrische Feld bei der Randbedingung 0 V mit zunehmender Höhe deutlich stärker wird, als das Feld ohne Randbedingungen.

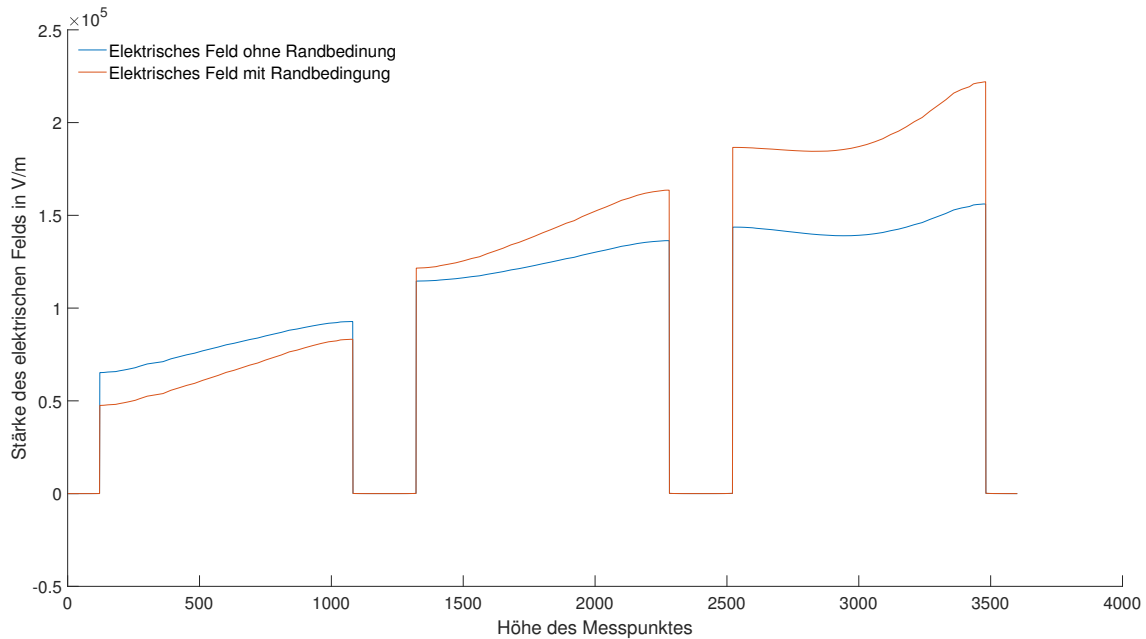
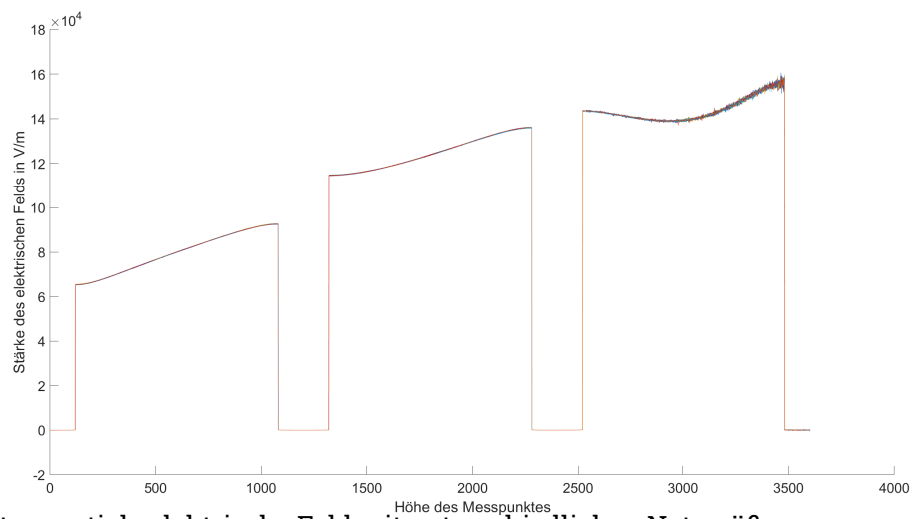
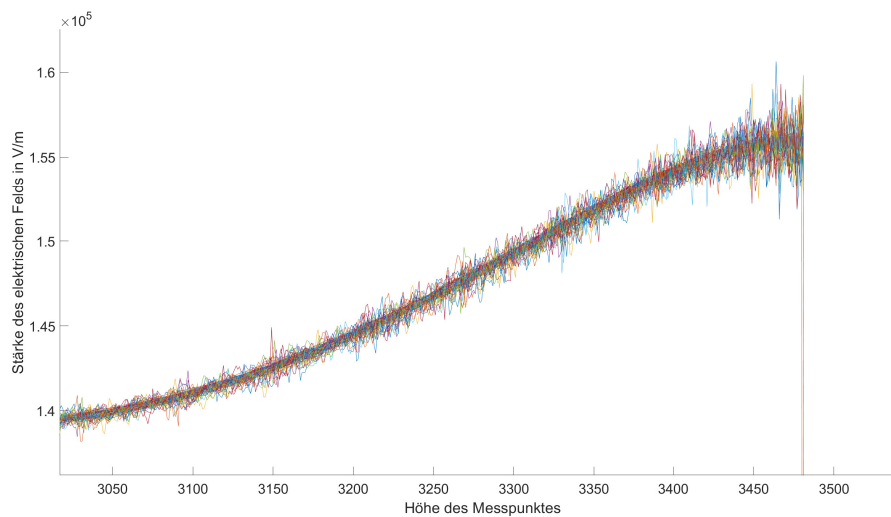


Abbildung 2.3: Vergleich des tangentialen elektrischen Feldes bei unterschiedlichen Randbedingungen

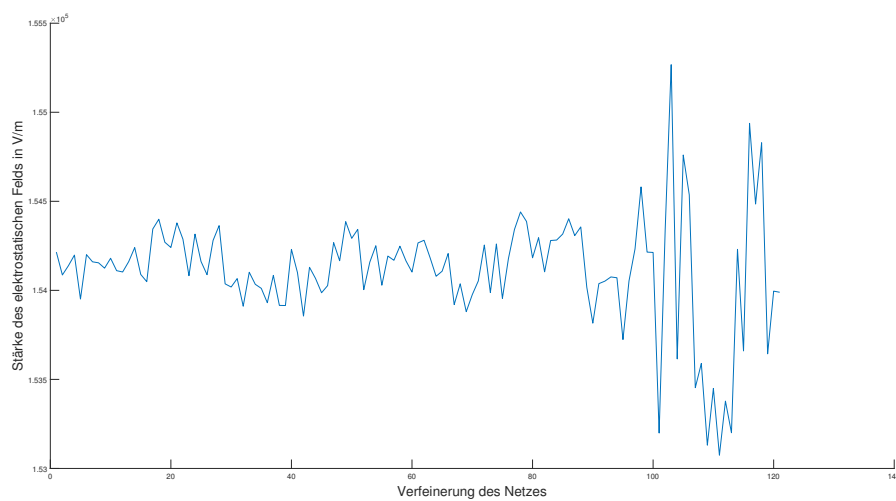
Zusätzlich gibt es bei FEMM die Möglichkeit das Gitter, das zum Meshen benutzt wird manuell einzustellen bzw. zu beeinflussen. Der Routine `Aufgabe6_2` wurden 120 unterschiedliche Netzgrößen von 10, bis minimal 0.8 übergeben und anschließend das tangential elektrische Feld berechnet. In Abbildung 2.4a sind diese Felder zu sehen. Bei der Verfeinerung des Gitters ließ sich kein Wert ermitteln, ab dem sich das Feld nicht mehr verändert. Beobachtet werden konnte, dass die maximale Netzgröße mit der FEMM arbeitet 10 und die minimale 0.8 beträgt. Der zum Vergleichen gewählte Messpunkt hat die Höhe 4600 mm, auffällig ist, dass ab einer Netzgröße kleiner als eins (Messpunkt 100) die Rechenergebnis sehr stark variieren, wie in Abb. 2.4c deutlich wird.



(a) Das tangentielle elektrische Feld mit unterschiedlichen Netzgrößen



(b) Detailausschnitt von 2.4a



(c) Stärke des elektrischen Feldes, abhängig von der gewählten Netzgröße

**Abbildung 2.4: Auswirkung der Verfeinerung des Gitters, das FEMM zum Meshen benutzt**

---

Des Weiteren wurde die Auswirkung des feldsteuernden Rings auf das tangential elektrische Feld betrachtet. Zur Visualisierung des elektrischen Felds wurde der Octave Befehl `surf` benutzt. Dadurch ist es möglich einen dreidimensionalen Plot zu erzeugen. Das elektrische Feld hängt dabei von der Höhe des Messpunktes und dem Außendurchmesser  $d_a$  des Rings ab, dieser variiert zwischen 600 und 2000 mm. Dem Modell wurden keine Randbedingungen vorgegeben.

Die tangentialen elektrischen Felder sind in der Abbildung 2.5 zu sehen. Auffällig ist, dass bei steigendem Abstand zwischen dem Ring und dem Mast sich die elektrischen Felder unterschiedlich verändern. Das elektrische Feld in dem oberen und mittleren Ableitersegment nimmt ab, während es im untersten Segment ein stärkeres Feld entsteht.

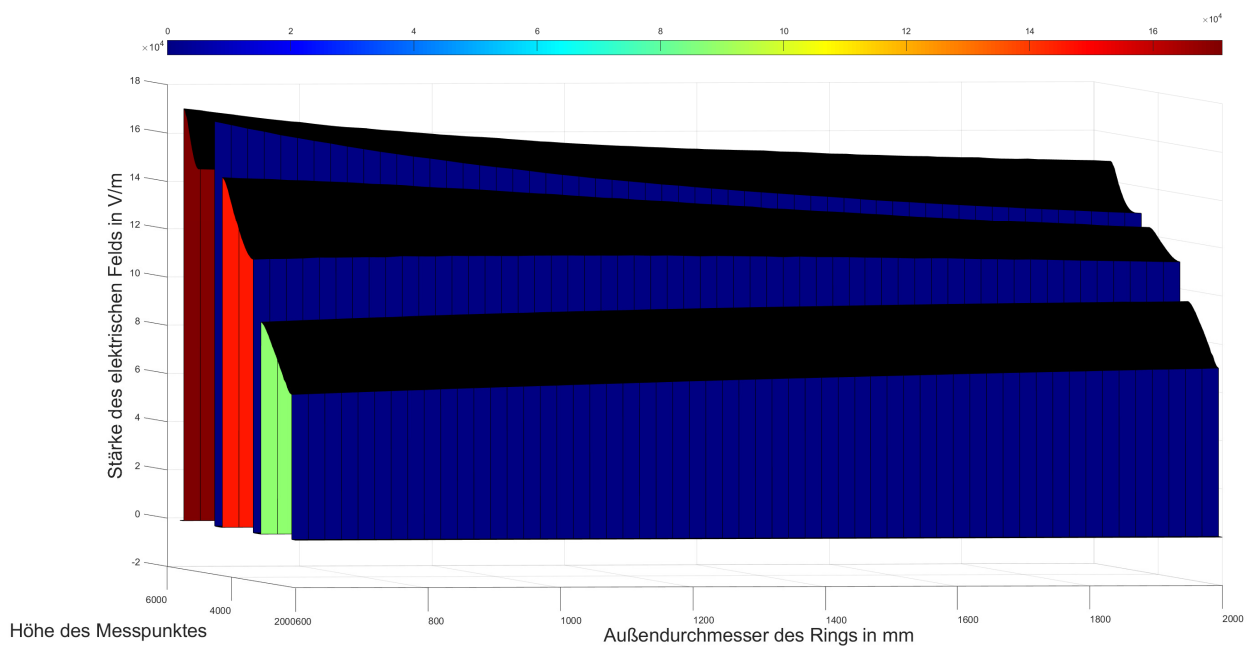
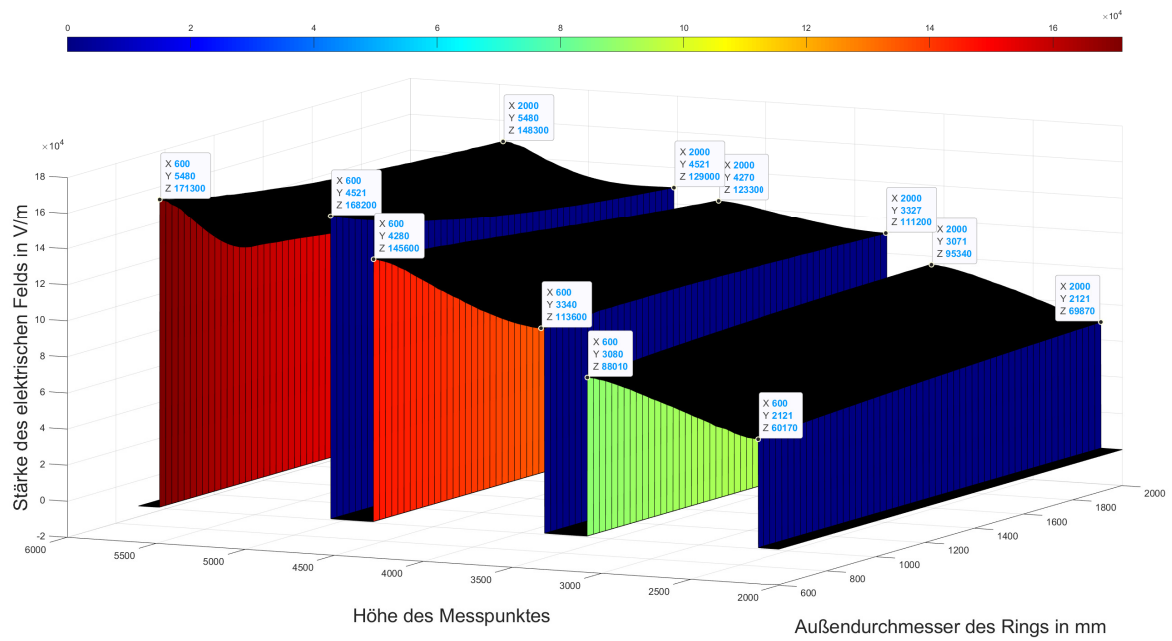


Abbildung 2.5: Das tangentielle elektrische Feld in Abhängigkeit des Außendurchmesser des Rings und der Höhe des Messpunktes



---

## 3 Fazit

---

Hier könnte Ihr Fazit stehen.

---

# Abbildungsverzeichnis

---

2.1	Grenzfläche zwischen zwei Vektorfeldern $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_1$ mit eingeführtem Quadvolumen $V$ . . .	4
2.2	Überspannungsableiter mit unterschiedlichen Randbedingungen . . . . .	7
2.3	Vergleich des tangentialen elektrischen Feldes bei unterschiedlichen Randbedingungen . . . .	8
2.4	Auswirkung der Verfeinerung des Gitters, das FEMM zum Meshen benutzt . . . . .	9
2.5	Das tangentiale elektrische Feld in Abhängigkeit des Außendurchmesser des Rings und der Höhe des Messpunktes . . . . .	11