Ausarbeitung Übung 7

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg
Datum: 19. Januar 2021

Darmstadt

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Ausarbeitung Übung 7

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg

Datum: 19. Januar 2021

Darmstadt

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Übungsblatt 7 des Faches „Einführung in die numerische Berechnung elektromagnetischer Felder“ AMK.

2 Bearbeitung der Übungsaufgaben

2.1 AG1

2.2 Geister

Um das Rechengebiet Ω, in dessen Inneren die MAXWELLschen Gleichungen zu lösen sind, räumlich zu diskretisieren, wird es in endlich viele Teilgebiete unterteilt. Eine der gebräuchlichsten Gitterformen ist die kartesische bei der das Rechengebiet in einzelne Quader zerlegt wird. Bei Indizierung der Kanten, Flächen und Volumen mit dem kanonischen Nummerierungsschema, gibt es zu jedem Punkt drei Kanten, drei Flächen und ein Volumen. Dabei werden auch Kanten außerhalb des Rechengebiets durchnummeriert die für die spätere Lösung nicht benötigt werden. Diese nennt man Geisterkanten und findet sie immer am positiven Ende des Bereichs. Anschaulich erkennen kann man dies in Abbildung 2.1, der schwarze Quader ist das Rechengebiet Ω, in Blau sind die Geisterkanten eingezeichnet.

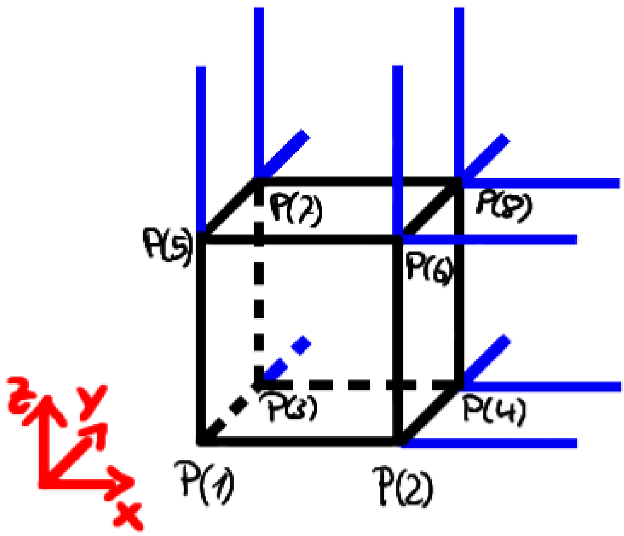

Abbildung 2.1: Einfaches Gitter mit Geisterkanten in Blau

Bei einem Gitter der Größe $N_x \times N_y \times N_z$ erhält man genau $N_xN_y + N_yN_z + N_xN_z$ Geisterkanten und -flächen, die Anzahl an Geistervolumen beträgt $N_xN_z + N_x(N_y - 1) + (N_y - 1)(N_z - 1)$. Setzt man die Geisterkanten bzw -flächen ins Verhältnis zu allen Kanten bzw Flächen so skalieren sie zu

$$\frac{\text{Geisterkanten}}{\text{Alle Kanten}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{N_x} + \frac{1}{N_y} + \frac{1}{N_z}\right)$$

und alle Geistervolumen im Vergleich zu allen Volumen

$$\frac{\text{Geistervolumen}}{\text{Alle Volumen}} = \frac{N_xN_y + N_yN_z + N_xN_z - N_x - N_y - N_z + 1}{N_xN_yN_z}.$$

Da die Geisterkanten außerhalb des Rechengebiets liegen ist es nicht nötig für diese auch das Integral zu berechnen. Für die Skizze in Abbildung 2.1 ist es also sinnvoll nur für die schwarzen Kanten und nicht die blauen das Integral zu berechnen. Wendet man die weiter oben erwähnte Matlab-Implementierung des Gradientenoperators auf das Beispiel an so erhält man in der ersten Zeile die Potential-Differenz zwischen den Punkten $P(1)$ und $P(2)$. Zeile 2 hingegen ergibt die Potential-Differenz zwischen den Punkten $P(2)$ und

$P(3)$. Diese Berechnung ist nicht sinnvoll und kommt daher, dass die eigentlich von $P(2)$ ausgehende Kante in x-Richtung eine Geisterkante ist. Also sollten Zeile 2 und auch alle anderen die eine Potential-Differenz diagonal durch den Quader berechnen auf null gesetzt werden.

2.3 Potentialformulierung und Eichung

Die vier Maxwell'schen Gleichungen lauten:

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \tag{1}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \right) = \partial_t \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{J} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4}$$

Alle Feldgrößen sind von Ort $\vec{r}$ und Zeit t abhängig. Alternativ lässt sich eine Formulierung mithilfe der Potenziale $\vec{A}$ und Φ aufschreiben, welche implizit durch die Gleichungen

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \nabla \Phi, \tag{5}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{6}$$

gegeben sind.

In der Elektrostatik kann (5) durch $\vec{E} = -\nabla \Phi$ vereinfacht werden, da alle Vorgänge statisch sind, also zeitlich unveränderlich. Es gilt $\partial_t \vec{A} = \vec{0}$. Demnach spielen für die Elektrostatik nur Eichfelder $\vec{A}$, Φ eine Rolle, die zeitunabhängig sind.

Wir betrachten im folgenden nun jedoch den allgemeinen, zeitlich veränderlichen Fall und gehen nun näher auf die Beschreibung der Maxwell'schen Gleichungen durch die Eichfelder $\vec{A}$ und Φ ein.

(6) impliziert (3), da man durch Skalarmultiplikation mit dem Nabla-Operator ∇

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

erhält. Die Schreibweise $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A})$ ist hierbei äquivalent zur Schreibweise $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A}$, und demnach immer Null.

Ebenso impliziert (5) die Gleichung (1). Hierzu bildet man das Vektorprodukt mit dem Nabla-Operator ∇ auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \nabla \times (-\partial_t \vec{A} - \nabla \Phi) \\ &= \nabla \times (-\partial_t \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \Phi) \\ &= \nabla \times (-\partial_t \vec{A}) \\ &= -\partial_t (\nabla \times \vec{A}) \\ &= -\partial_t \vec{B} \end{aligned}$$

Angewendet wurde die Rechenregel $\nabla \times (\nabla\Phi) = \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\Phi = \vec{0}$, ebenso wurde die (6) im letzten Schritt eingesetzt, um wieder auf $\vec{B}$ zu kommen.

3 Fazit

fazit jo

4 Anhang

Abbildungsverzeichnis