

Ausarbeitung Übung 5

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg
Datum: 16. Dezember 2020

Darmstadt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Ausarbeitung Übung 5

Studienarbeit von Dominik Schiller, Constanze Kramer, Simon Arnold & Tobias Lingenberg

Datum: 16. Dezember 2020

Darmstadt

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Bearbeitung der Aufgaben	3
2.1	Geschichteter Plattenkondensator	3
2.2	Homogener Kugelkondensator	6
3	Fazit	10
4	Anhang	11

1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Übungsblatt 5 des Faches „Einführung in die numerische Berechnung elektromagnetischer Felder“. Untersucht wird das Verhalten von Kondensatoren in Hinsicht auf ihre Kapazität bei Veränderung bestimmter Parameter. Um Veränderungen feststellen zu können, werden die Kondensatoren in Octave simuliert. Zunächst wird ein geschichteter Plattenkondensator mit linearen Verlauf der Permittivität untersucht und dessen Kapazität numerisch approximiert. Anschließend wird ein Kugelkondensator betrachtet und auf sein kapazitives Verhalten untersucht.

2 Bearbeitung der Aufgaben

2.1 Geschichteter Plattenkondensator

Um numerisch die Kapazität eines Plattenkondensators mit quer geschichteten Dielektrika, die eine linear steigende relative Permittivität aufweisen, zu bestimmen, kann man den linearen Verlauf über mehrere Schichten mit jeweils konstanter Permittivität approximieren. Wie bei numerischen Verfahren üblich wird die Approximation besser, je dünner die einzelnen Schichten gewählt werden.

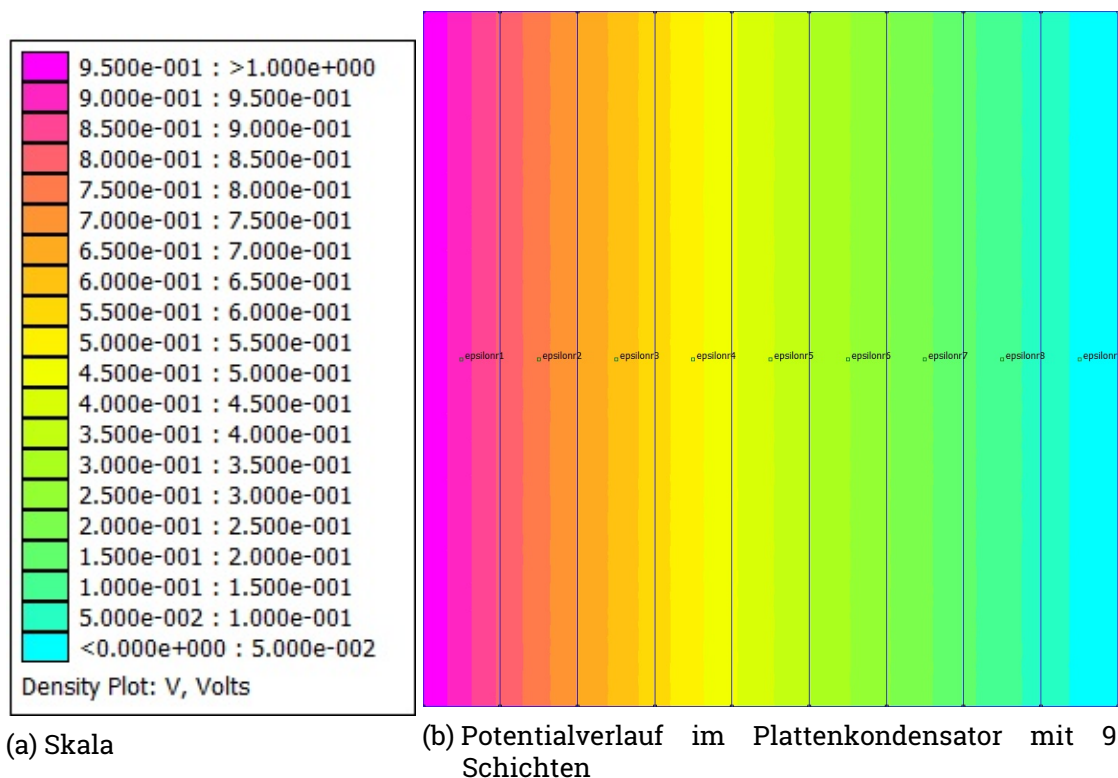


Abbildung 2.1: Potentialverlauf im Plattenkondensator mit 9 Schichten

Die Funktion `femmcapacity.m` bekommt als Parameter den Abstand h zwischen den beiden Platten des Kondensators, die Kantenlänge a der quadratischen Platten, $\epsilon_{r,1}$, $\epsilon_{r,2}$ und die Anzahl N an Schichten übergeben. Mit Hilfe dieser Parameter wird daraus ein Plot für den Potentialverlauf im Kondensator erzeugt und die Kapazität der Anordnung berechnet. Die relative Permittivität variiert hierbei linear zwischen $\epsilon_{r,1}$ am linken

Rand und $\varepsilon_{r,2}$ am rechten Rand. Die zugehörigen Werte der relativen Permittivitäten der einzelnen Schichten N_i lassen sich mit

$$\varepsilon_{r,i} = \varepsilon_{r,1} + \frac{i(\varepsilon_{r,2} - \varepsilon_{r,1})}{N - 1}$$

berechnen. Im Folgenden wird der Abstand zwischen den Platten und die Kantenlänge mit 30 cm angenommen. Wählt man 9 Schichten, $\varepsilon_{r,1} = 1$ und $\varepsilon_{r,2} = 2$ erhält man den in Abbildung 2.1b zu sehenden Potentialverlauf und eine Kapazität $C_1 = 3,793$ pF.

Wiederholt man die Simulation für $N = 1, 2, 3, \dots, 20$ Schichten und lässt sich in einem Konvergenz-Plot (Abbildung 2.2) die Kapazität in Abhängigkeit der Schichtanzahl anzeigen, wird deutlich, dass schon nach $N = 3$ Schichten die Kapazität annähernd exakt bestimmt wird und weitere Verfeinerungen nur noch marginale Verbesserungen der Approximation erzielen.

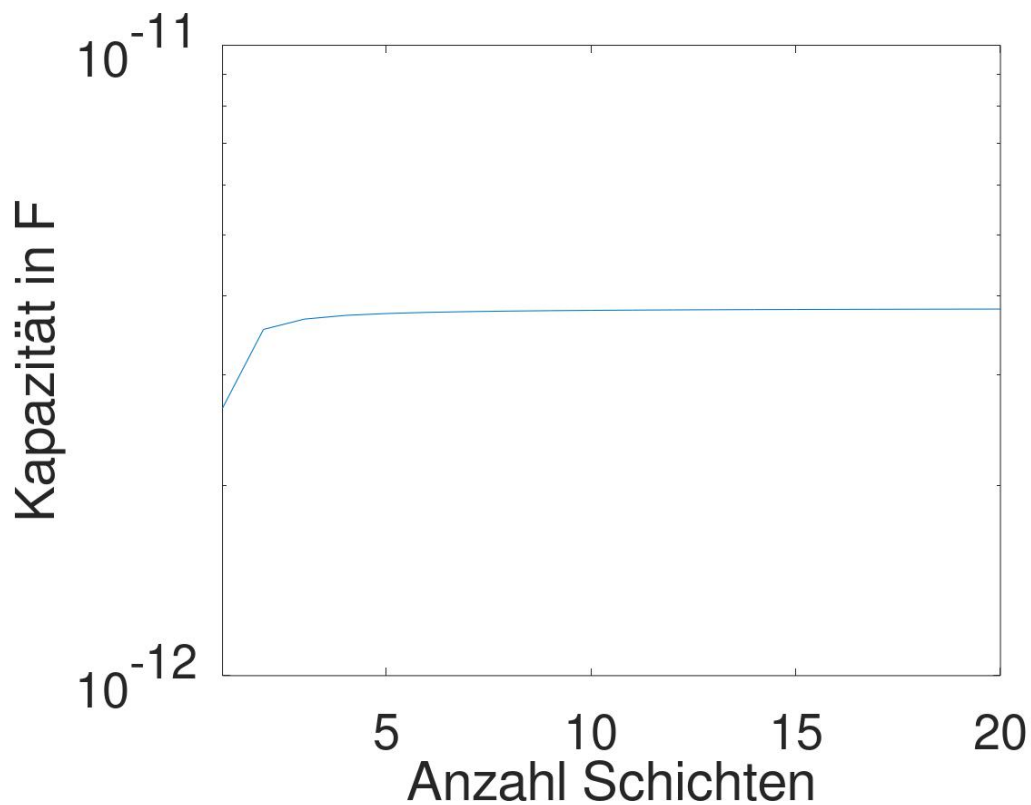


Abbildung 2.2: Änderung der Kapazität mit steigender Anzahl an Schichten im Plattenkondensator

Die Option 'Vector Plot' in FEMM ist nützlich, um den Verlauf des elektrischen Feldes besser darzustellen. Die Richtung der Pfeile zeigt an in welche Richtung das Feld an dieser Stelle zeigt und die Länge der Pfeile deutet die Stärke an dieser Stelle an.

In Abbildung 2.3b sieht man den Plot für den homogenen Plattenkondensator und in Abbildung 2.3c für den geschichteten Fall. Vergleicht man beide Abbildungen fällt auf, dass das elektrische Feld im homogenen Plattenkondensator homogen verteilt ist. Beim geschichteten Plattenkondensator hingegen ist das elektrische Feld deutlich stärker auf der Seite mit der geringeren relativen Permittivität und nimmt immer weiter ab, je höher die relative Permittivität ist.

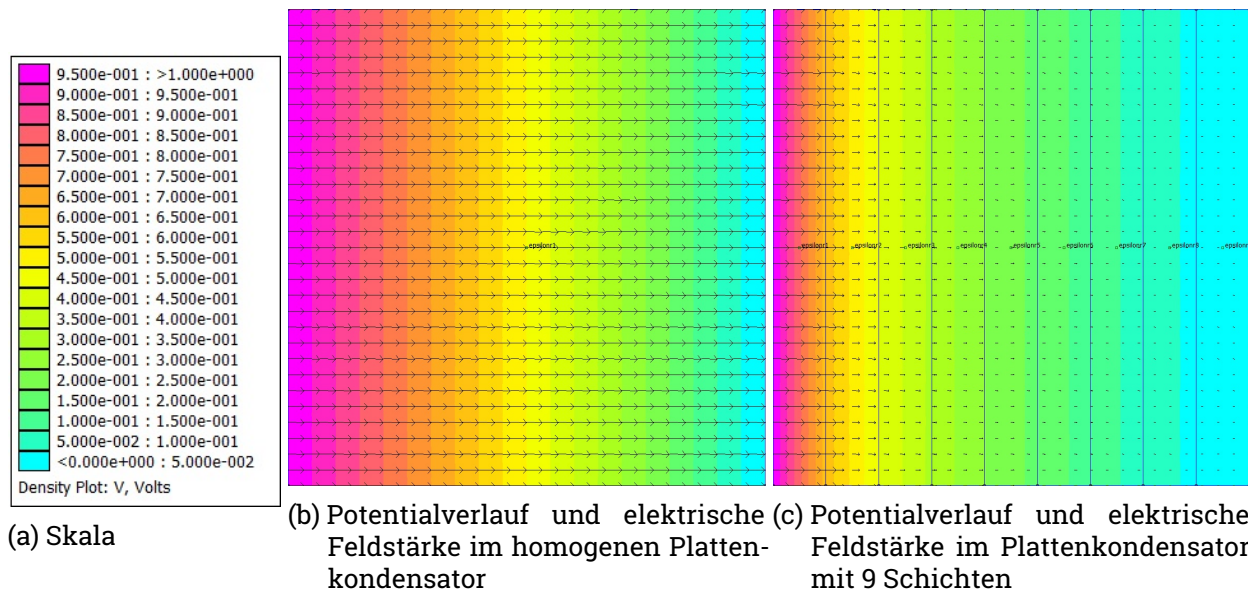


Abbildung 2.3: Potentialverlauf und elektrische Feldstärke im homogenen und im geschichteten Plattenkondensator

Bestimmt man die Kapazität für $\varepsilon_{r,1} = 1$ und $\varepsilon_{r,2} = 10$ und $N = 9$ und vergleicht diese mit der vorher bestimmten Kapazität C_1 stellt man fest, dass durch eine höhere relative Permittivität auch die Kapazität von 3,793 pF auf 8,916 pF steigt.

2.2 Homogener Kugelkondensator

Wie in den vorherigen Aufgaben und Ausarbeitungen gezeigt, lassen sich mit Hilfe von FEMM sehr gute Simulationen von Plattenkondensatoren erzeugen. Aber auch Kugelkondensatoren lassen sich mit FEMM simulieren und berechnen.

Die Methode `spherecapacity.m`, die im Anhang zu finden ist, nimmt die zwei Parameter R_1 , der den Innenradius beschreibt und ϵ_r , das die relative Permittivität des Dielektrikums darstellt, entgegen. Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass für den zweiten zur Berechnung der Kapazität benötigten Parameter $R_2 = R_1 + 7 \text{ cm}$ gilt. R_2 ist der Außenradius des Kugelkondensators. Optional könnte man die Methode auch so schreiben, dass R_2 übergeben werden kann.

Im Vergleich zu den bisherigen Simulationen in FEMM haben wir nun kein planares Problem mehr, sondern ein achsensymmetrisches. In der Problemdefinition (Zeile 6) wird deshalb ein `'axi'` übergeben. Damit wird bestimmt, dass sich die erzeugte Fläche in Abbildung 2.4 nicht in die Tiefe entwickelt, sondern um die z-Achse gedreht wird. Dadurch erhält man eine 3-Dimensionale Kugel, die FEMM zwar nicht darstellen, aber berechnen kann.

Zunächst werden zwei Halbkreise erzeugt (Zeile 12-26), zwischen diesen beiden Halbkreisen liegt eine Spannungsdifferenz von 1 V an. Des Weiteren werden zwei Blocklabel erstellt (Zeile 28 und 31), das erste Label liegt zwischen den beiden Halbkreisen und beinhalten die Informationen über die relative Permittivität des Dielektrikums. Mit dem zweiten Label wird sichergestellt, dass nur die von den beiden Halbkreisen und deren Verbindungslinien eingeschlossene Fläche bei der Berechnung berücksichtigt wird. Hierzu wird dem Label die Property `'<No Mesh>'` übergeben. Schließlich werden die Verbindungslinien zwischen den Halbkreisen erstellt (Zeile 38 und 39), um eine abgeschlossene Fläche zu erzeugen.

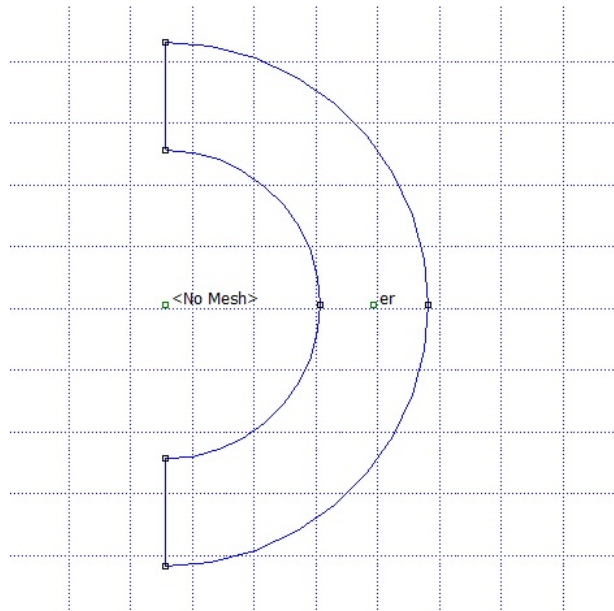


Abbildung 2.4: Ein mit Hilfe der Routine `spherecapacity.m` erzeugter Kugelkondensator mit $R_1 = 7 \text{ cm}$

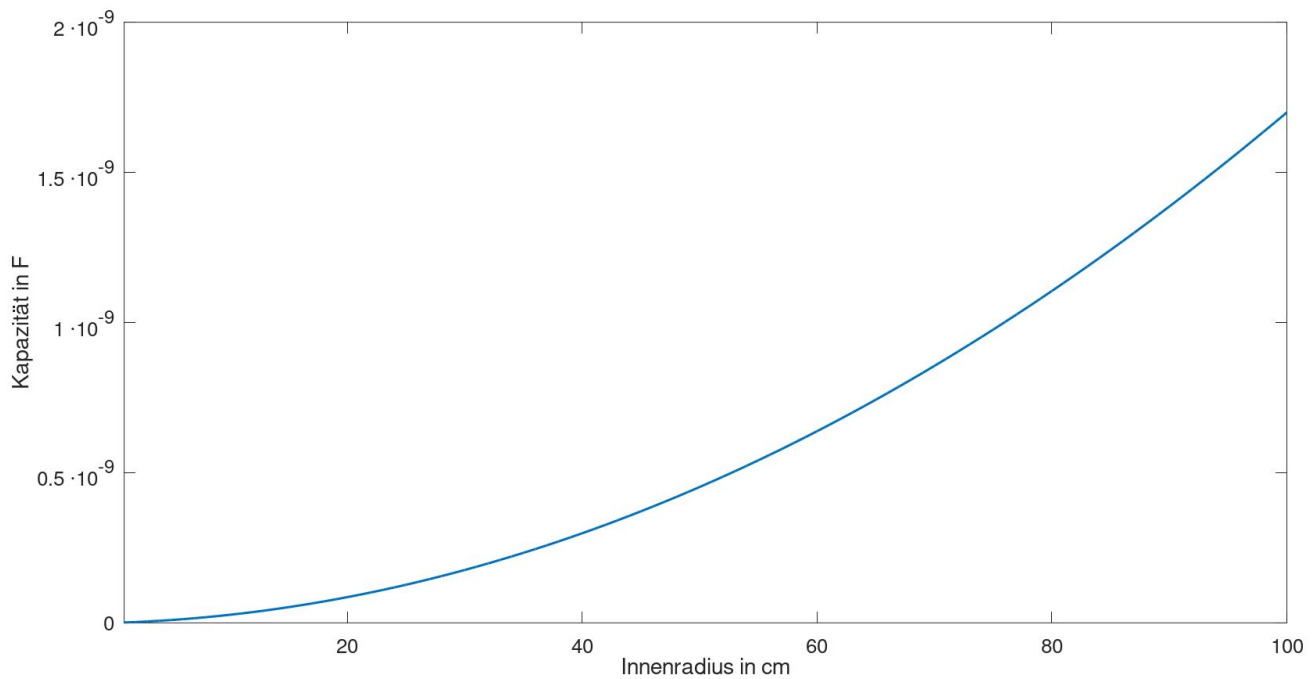


Abbildung 2.5: Verlauf der Kapazität mit steigendem Radius R_1 und $R_2 = R_1 + 7 \text{ cm}$

Mit

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \quad (1)$$

lässt sich die Kapazität eines homogenen Kugelkondensators berechnen. Um den Einfluss der Radien auf die Kapazität zu untersuchen, wurden der Methode `spherecapacity.m` 100 verschiedene Radien $R_1 \in \mathbb{N}$, $R_1 \in [1, 100]$, mit der Einheit `cm` übergeben. Für den Radius R_2 gilt weiterhin

$$R_2 = R_1 + 7 \text{ cm}. \quad (2)$$

Die berechneten Kapazitätswerte sind in Abbildung 2.5 graphisch dargestellt. Die Formel

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{(R_1 + 7 \text{ cm})R_1}{R_1 + 7 \text{ cm} - R_1} \quad (3)$$

ergibt sich indem man (2) in (1) einsetzt. Durch weiteres vereinfachen folgt, dass die Kapazität

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{R_1^2 + 7 \text{ cm}}{7 \text{ cm}} \quad (4)$$

quadratisch von R_1 abhängt, dies erklärt den quadratischen Verlauf der Kapazität (Abbildung 2.4) des Kugelkondensators mit steigendem Innenradius.

Unter der Voraussetzung, dass $(R_2 + R_1) = 15 \text{ cm}$ gilt, beträgt der Innenradius $R_1 = 4 \text{ cm}$ und der Außenradius $R_2 = 11 \text{ cm}$. Analytisch lässt sich mit (1) eine Kapazität $C_{\text{ana}} = 6,994 \text{ pF}$ berechnen, FEMM berechnet eine Kapazität $C_{\text{num}} = 6,986 \text{ pF}$.

Der relative Fehler

$$\text{err} := \frac{|C_{\text{ana}} - C_{\text{num}}|}{|C_{\text{ana}}|} \quad (5)$$

ergibt sich mit den vorher berechneten Werten C_{ana} und C_{num} zu $1.1 \cdot 10^{-3}$, liegt also im niedrigen Promillebereich. Die durch FEMM berechnete Annäherung ist sehr exakt.

Bestimmt werden soll nun, für welche Werte R_1 und R_2 die Kapazität den Wert $C = 5 \text{ pF}$ annimmt.

Analytische Betrachtung

Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$5 \text{ pF} = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}, \text{ sowie } R_2 = R_1 + 7 \text{ cm} \quad (6)$$

Einsetzen der zweiten Formel liefert eine quadratische Gleichung für R_1

$$5 \text{ pF} = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{R_1(R_1 + 7 \text{ cm})}{7 \text{ cm}} \quad (7)$$

Für die man Folgendes Ergebnis erhält:

$$R_1 = -7/2 \text{ cm} \pm \sqrt{(7/2 \text{ cm})^2 + \frac{7 \text{ cm} \cdot 5 \text{ pF}}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}} \quad (8)$$

Dabei ist nur das Ergebnis $R_1 = 3,1111 \text{ cm}$ positiv und in diesem Zusammenhang sinnvoll.

Numerische Betrachtung

Um das Problem numerisch zu untersuchen, wurde zunächst das Bisektionsverfahren (siehe Listing 4.1) in Octave implementiert. Dieses erlaubt durch wiederholte Intervallhalbierung Nullstellen komplizierter Funktionen näherungsweise zu bestimmen. Die Wahl der Startpunkte ist hierbei für die Konvergenz entscheidend. Voraussetzung ist, dass beide Funktionswerte zu den Startwerten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben und die gesuchte Nullstelle auch in diesem Intervall liegt. Durch vorherige Abschätzungen wurden die Startwerte $a = 1$ und $b = 10$ für den Methodenaufruf gewählt (siehe Listing 4.2).

Die numerische Berechnung ergab die Lösung $R_1 = 3,1130 \text{ cm}$. Das entspricht einer Abweichung von $19 \mu\text{m}$ zu dem zuvor berechneten Wert.

Fehlerbetrachtung

Die analytische Lösung ist exakt. Folglich entstehen auf numerischem Weg Ungenauigkeiten, die aus Rundungsfehlern resultieren. Besonders das Rechnen mit sehr großen und sehr kleinen Zahlen gleichzeitig kann unter Umständen am Computer zu Problemen führen, wenn Basisoperationen mit nicht ausreichender Stellenanzahl durchgeführt werden. Fehleranfällig kann jedoch auch schon die Simulation in FEMM sein. Da dort das Problem nur durch ein diskretes, also nicht exaktes, Modell simuliert wird.

Jedoch lässt sich auch in der Realität ein Versuchsaufbau nicht fehlerfrei gestalten. So können dort Störeffekte durch bspw. externe Magnetfelder oder geringfügig inhomogene Dielektrika auftreten. Zudem ist auch einfach die Messgenauigkeit der Instrumente beschränkt.



3 Fazit

Die Simulation des geschichteten Plattenkondensators ergibt, dass durch das Verfahren der numerischen Approximation ein ausreichend genaues Ergebnis über die Kapazität des Kondensators berechnet werden kann. Im betrachteten Fall eines Kugelkondensators ergibt sich, dass die durch OcatveFEMM numerisch berechnete Annäherung an die tatsächliche, analytisch berechnete Kapazität sehr exakt ist.

4 Anhang

```
1 function C = femmcapacity (h, a, e1, e2, N)
2
3 openfemm;
4 newdocument(1);
5 ei_probdef('centimeters','planar',1.E-8,a,30);
6 ei_addmaterial('Vakuum',1,1,0);
7 %ei_addmaterial('epsilonr1',e1,e1,0);
8 %ei_addmaterial('epsilonr2',e2,e2,0);
9 if (N==1)
10     ei_addmaterial(strcat('epsilonr',num2str(1)),e1,e1,0);
11 else
12     for i=0:N-1
13         ei_addmaterial(strcat('epsilonr',num2str(i+1)),e1+i*(e2-e1)/(N-1),e1+i*(e2-e1)/(N-1), 0)
14         ;
15     endfor
16 endif
17 %ei_addboundprop('Randbedingung','Vs',0,0,0,0);
18 ei_addconductorprop('Linker Rand',1,0,1);
19 ei_addconductorprop('Rechter Rand',0,0,1);
20
21 %Randpunkte fuer den Kondensator erstellen
22 ei_drawrectangle(0,0,h,a);
23
24 %Linken und rechten Rand setzen
25 ei_selectsegment(0,a/2);
26 ei_setsegmentprop('<None>',0,1,0,0,'Linker Rand');
27 ei_clearselected;
28 ei_selectsegment(h,a/2);
29 ei_setsegmentprop('<None>',0,1,0,0,'Rechter Rand');
30 ei_clearselected;
31
32 %Oberen und unteren Rand setzen
33 ei_selectsegment(h/2,0);
34 ei_selectsegment(h/2,a);
35 ei_setsegmentprop('<None>',0,1,0,0,'<None>');
36 ei_clearselected;
37
38 ei_addnode(h/N,0);
39 ei_addnode(h/N,a);
40 ei_addsegment(h/N,0,h/N,a);
41
42 ei_selectsegment(h/N,a/2);
43 ei_copytranslate2(h/N,0,N-2,1);
44 ei_clearselected;
45 ei_addblocklabel(h/(2*N),a/2);
46 ei_selectlabel(h/(2*N),a/2);
```

```

47 ei_copytranslate2(h/N,0,N-1,2);
48 ei_clearselected;
49
50 for i =1:2:2*N
51     ei_selectlabel(i*h/(2*N),a/2);
52     ei_setblockprop(strcat('epsilon_r',num2str(1+(i-1)/2)),1,0,0);
53     ei_clearselected;
54 endfor
55
56 %Speichere die Datei ab
57 ei_saveas('Aufgabe5_2.FEE');
58
59 %Lade die gespeicherte Datei und erzeuge Simulation
60 ei_analyze(0);
61 ei_loadsolution;
62
63 %Liegenden Vektor erstellen , Ladung / Spannung ergibt Kapazit\ "at C
64 G = [0,0];
65 G = eo_getconductorproperties('Linker Rand');
66 C = G(1,2)/G(1,1);
67
68 endfunction

```

data/femmcapacity.m

```

1
2 function C = spherecapacity (R1, er)
3     R2 = R1 + 7;
4     openfemm;
5     newdocument(1);
6     ei_probdef('centimeters','axi',1.E-8,0,30);
7     ei_addmaterial('er',er,er,0);
8     %Conductor Props erstellen
9     ei_addconductorprop('Rand1',1,0,1);
10    ei_addconductorprop('Rand2',0,0,1);
11
12    %Draw first arcs
13    ei_drawarc(0,-R1,R1,0,90,90);
14    ei_drawarc(0,-R2,R2,0,90,90);
15
16    %Set segment property and rotate arc once
17    ei_selectarcsegment(0,-R1);
18    ei_setarcsegmentprop(10,'<None>',0,0,'Rand1');
19    ei_copyrotate2(0,0,90,1,3);
20    ei_clearselected;
21
22    %Set segment property and rotate arc once
23    ei_selectarcsegment(0,-R2);
24    ei_setarcsegmentprop(10,'<None>',0,0,'Rand2');
25    ei_copyrotate2(0,0,90,1,3);
26    ei_clearselected;
27
28    ei_addblocklabel(R2-(R2-R1)/2,0);
29    ei_selectlabel(R2-(R2-R1)/2,0);
30    ei_setblockprop('er',1,0,0);
31    ei_clearselected;
32
33    ei_addblocklabel(0,0);

```

```

34 ei_selectlabel(0,0);
35 ei_setblockprop('<No Mesh>',1,0,0);
36 ei_clearselected;
37
38 ei_addsegment(0,R2,0,R1);
39 ei_addsegment(0,-R2,0,-R1);
40
41
42 %Speichere die Datei ab
43 ei_saveas('Aufgabe5_3.FEE');
44
45 %Lade die gespeicherte Datei und erzeuge Simulation
46 ei_analyze(0);
47 ei_loadsolution;
48
49 %Liegenden Vektor erstellen , Ladung / Spannung ergibt Kapazit\"at C
50 G = [0,0];
51 G = eo_getconductorproperties('Rand1');
52 C = G(1,2)/G(1,1);
53
54 endfunction

```

data/spherecapacity.m

```

1 %C = zeros(1,20);
2
3 %for i=1:20
4 % C(1,i)= femmcapacity(30, 30, 1, 2, i);
5 %endfor
6
7 N = 1:1:20;
8
9 semilogy(N,C,'linewidth',3);
10
11 xlabel('Anzahl Schichten','fontsize',26);
12 ylabel('Kapazitaet in F','fontsize',26);
13 set(gca,'FontSize',26);
14 axis([1 20]);

```

data/Ag5_2b.m

```

1 R = 1:1:100;
2 %C = zeros(1,100);
3 ##for i = 1 : 100
4 ## C(1,i) = spherecapacity(R(1,i),1);
5 ##endfor
6 plot(R,C,'linewidth',3);
7 axis([1 100]);
8 xlabel('Innenradius in cm','FontSize',26);
9 ylabel('Kapazitaet in F','FontSize',26);
10 set(gca,'FontSize',26);
11
12 ##Yticks = get(gca,'Ytick');
13 ##YTickLabels = cellstr(num2str(round(log10(Yticks(:))), '10^%d'));
14 ##set(gca,'YTickLabel',YTickLabels);
15
16 ytick=get(gca,'ytick');
17 yticklab = [

```

```

18 "0";
19 strcat('0.5 \cdot ', num2str(9, '10^-%d'));
20 strcat('1 \cdot ', (num2str(9, '10^-%d')));
21 strcat('1.5 \cdot ', (num2str(9, '10^-%d')));
22 strcat('2 \cdot ', (num2str(9, '10^-%d'))];
23 yticklab = cellstr(yticklab);
24 %yticklab = cellstr(num2str(round(-log10(ytick(:))), '10^-%d'));
25 set(gca, 'YTick', ytick, 'YTickLabel', yticklab, 'TickLabelInterpreter', 'tex');
26
27 print -deps testplot.eps;

```

data/Ag5_3b.m

Methode bisektion

```

1 function x = bisektion(f, a, b, maxn)
2     if (sign(f(a))*sign(f(b)) != -1)
3         % Error case (ungueltige Eingabe von a und b)
4         x = -777;
5         return;
6     else
7         c = (a+b)/2;
8         for n = 1:maxn
9             c = (a+b)/2;
10            if (f(c) == 0)
11                x = c;
12                return;
13            end
14            if (sign(f(a))*sign(f(c)) == -1)
15                b = c;
16            else
17                a = c;
18            end
19        end
20        x = c;
21    end
22 end

```

Listing 4.1: Methode bisektion in Octave. Falls a und b unterschiedliche Vorzeichen haben, konvergiert die Methode gegen eine der Nullstellen aus diesem Intervall. Durch maxn wird die Anzahl der Iterationsschritte und somit auch die Abbruchbedingung definiert

Numerische Lösung Aufgabe 5.3d

```

1 C = 5*10^(-12);
2 f = @(R1) ((spherecapacity(R1, 1) - C));
3 a=1;
4 b=10;
5 maxn = 20;
6 x = bisektion(f, a, b, maxn)
7 fehler = f(x)

```

Listing 4.2: Numerische Lösung der Aufgabe 5.3d, durch Umwandlung in ein Nullstellen-Problem

Abbildungsverzeichnis

2.1	Potentialverlauf im Plattenkondensator mit 9 Schichten	3
2.2	Änderung der Kapazität mit steigender Anzahl an Schichten im Plattenkondensator	4
2.3	Potentialverlauf und elektrische Feldstärke im homogenen und im geschichteten Plattenkondensator	5
2.4	Ein mit Hilfe der Routine <code>spherecapacity.m</code> erzeugter Kugelkondensator mit $R_1 = 7 \text{ cm}$.	6
2.5	Verlauf der Kapazität mit steigendem Radius R_1 und $R_2 = R_1 + 7 \text{ cm}$	7