Übung 3: Schaltungssimulator (Koaxialkabel), Frequenzbereich und Homogener Plattenkondensator

Einführung in die numerische Berechnung elektromagnetischer Felder

Merle Backmeyer, Marc Bodem, Laura D'Angelo, Melina Merkel, Sebastian Schöps

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

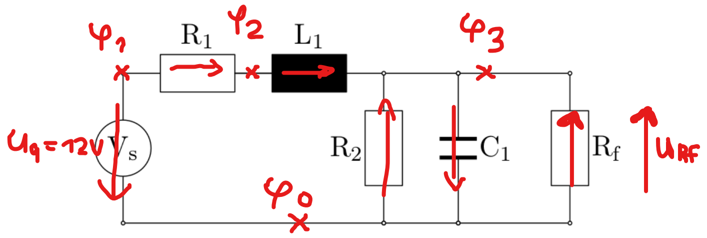
Wintersemester 2020/21
19. November 2020
Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1: Koaxialkabel Simulator

Verwenden Sie die in Aufgabe 2.3 entwickelte Routine, um ein Koaxialkabel zu simulieren.

a) Implementieren Sie zunächst die passenden Matrizen $\mathbf{M}$, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{(N+N_L+N_V)\times(N+N_L+N_V)}$ für ein Segment des Koaxialkabels (siehe Abbildung 1).

$u_q = \varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_1$



$u_{RF} = \varphi_0 - \varphi_3 = -\varphi_3$

Abbildung 1: Ersatzschaltbild eines Koaxialkabelsegments.

Die Bauteilwerte sind durch die Netzliste

```
Vs 1 0 12
L1 2 3 0.00025
R1 1 2 0.001
C1 3 0 0.0000001
R2 0 3 1500
Rf 0 3 1500
```

$$M\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\\ i_L\\ i_V\end{bmatrix} + K\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\\ i_L\\ i_V\end{bmatrix} = \vec{r}$$

gegeben. Plotten Sie die Spannung, die am Widerstand `Rf` anliegt. Benutzen Sie folgenden Code, um die Zeitbereichslösung zu berechnen:

```
n      = 1;
x0     = zeros(3*n+2,1);
x0(1)  = 12;
x0(2)  = 12;
if exist('OCTAVE_VERSION')
   % time integration by DASPK (BDF)
   % works in plain Octave
   t   = [0:1e-8:1e-3];
   res = {@(x,xdot,t) (M*xdot+K*x-r), @(x,xdot,t,c) (K+c*M)};
   x   = daspk(res, x0', x0', t);
else
   % trapezoidal rule, works in plain Matlab
   T      = [0 1e-3];
```

```
    opt   = odeset('Mass',M,'Jacobian',-K);
    f     = @(t, y) (r-K*y);
    [t,x] = ode15s(f, T, x0',opt);
end
```

b) Simulieren Sie ein Schaltungsmodell eines Koaxialkabels, indem Sie $n = 10$ der oben entwickelten RLC-Glieder gemäß dem Ersatzschaltbild in Abbildung 2 hintereinanderschalten. Was hat sich im Frequenzbereich verändert und was geschieht mit der Spannung, die an `Rf` anliegt?

c) Variieren Sie nun die Anzahl n der hintereinander geschalteten RLC-Segmente. Was geschieht im Frequenzbereich und mit der Spannung, die an `Rf` anliegt, je mehr Segmente hinzugefügt werden?

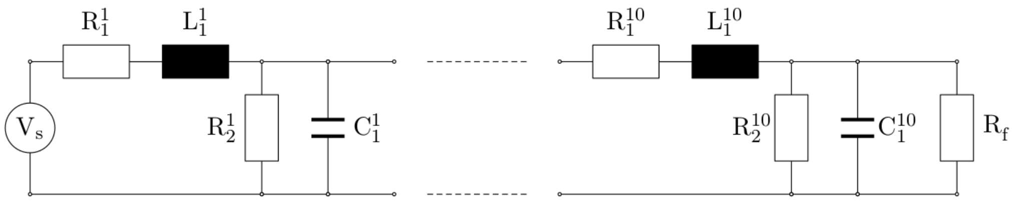


Abbildung 2: Ersatzschaltbild eines Koaxialkabels.

Aufgabe 3.2: Frequenzbereich

In der Elektrotechnik werden oft Probleme behandelt, die sinus-förmig schwingen. Um die Rechnung zu vereinfachen, lassen sich solche Probleme im Frequenzbereich betrachten. Betrachten Sie zunächst die skalare lineare gewöhnliche Differentialgleichung im Zeitbereich

$$x'(t) = f(t, x) := -kx(t) + r(t) \tag{1}$$

mit Startwert $x(t_0) = x_0$, wobei $k > 0$ sein soll. Die Anregung sei durch $r(t) = \cos(\omega t)$ gegeben, wobei ω als Kreisfrequenz bezeichnet wird.

a) Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung im Zeitbereich mithilfe der im Skript angegebenen Formel

$$x(t) = e^{-k(t-t_0)} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{k(s-t_0)} r(s)\, \mathrm{d}s \right).$$

b) Berechnen Sie nun die Lösung der Differentialgleichung im Frequenzbereich, indem Sie die Lösung als Kosinus unbekannter Amplitude ansetzen

$$x_{\mathrm{freq}}(t) = \mathrm{Re}\left\{ \underline{x} \mathrm{e}^{j\omega t} \right\}, \tag{2}$$

wobei $\underline{x}$ als Phasor bezeichnet wird. Berechnen Sie die Ableitung $x'_{\mathrm{freq}}(t)$ und setzen Sie alles in die Differentialgleichung (1) ein. Ersetzen Sie auch die Anregung durch den Realteil einer komplexen Größe. Aus der enstandenen Gleichung lässt sich der komplexe Phasor $\underline{x}$ bestimmen. Nach Bestimmung des Phasors lässt sich aus (2) wiederrum die Lösung als zeitabhängige Funktion berechnen.

c) Was wurde im Ansatz aus **b)** vernachlässigt im Vergleich zu dem Ansatz aus **a)**? Was könnte der Vorteil vom Ansatz **b)** sein?

d) Laden Sie sich die LTSpice-Datei `Beispielschaltung2.asc` über Moodle herunter. Starten Sie die Simulation mit den voreingestellten Parametern. Um was für einen Typ Simulation handelt es sich? Was lässt sich aus den Resultaten ablesen?

Die Schaltung lässt sich durch die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) = -\frac{R}{L} i(t) + \frac{1}{L} u_{\mathrm{i}}(t) \tag{3}$$

beschreiben, wobei R der Widerstand, L die Induktivität, $i(t)$ der Strom und $u_{\mathrm{i}}(t) = \cos(\omega t)$ die anregende Spannung ist.

1. Stellen Sie die Lösung der Differentialgleichung im Zeitbereich dar, indem Sie das Resultat aus **a)** verwenden.
2. Stellen Sie die Lösung nun im Frequenzbereich dar, indem Sie die Differentialgleichung analog zu **b)** als Realteil einer komplexen Gleichung schreiben und nach dem komplexen Phasor des Stroms auflösen.
3. Berechnen Sie den Betrag der Spannung, die über dem Widerstand abfällt in Abhängigkeit der Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$.
4. Plotten Sie ihr Ergebnis im selben Frequenzbereich, den die LTSpice Simulation auch verwendet hat. Was fällt am Frequenzgang auf?

Aufgabe 3.3: Homogener Plattenkondensator

In dieser Aufgabe wird die Kapazität eines homogenen Plattenkondensators diskutiert. Die Formel für die Kapazität C eines homogenen Plattenkondensators lautet

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}} \frac{A}{d} \ .$$

Dabei bezeichnet d den Abstand der beiden Platten, A die Fläche der Platten, $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm die Permittivität des Vakuums sowie ε_{r} die relative Permittivität des Dielektrikums.

a) Erstellen Sie mithilfe der grafischen Benutzeroberfläche von FEMM ein Modell eines mit Vakuum gefüllten homogenen Plattenkondensators. Die Kantenlänge der quadratischen Platten soll bei $a = 30$ cm liegen. Der Abstand der Platten beträgt $d = 30$ cm. Die Art der Randbedingungen soll so gewählt werden, dass keine Randeffekte auftreten. Experimentieren Sie dazu mit Rändern ohne Randbedingung und mit Rändern mit einem fixen Spannungswert von 0 V und 1 V (`Fixed Voltage`). Bestimmen Sie die Kapazität der Anordnung und vergleichen Sie diese mit der analytischen Lösung.

b) Erstellen Sie nun eine OctaveFEMM[1] Routine, die als Parameter die Kantenlänge a und den Abstand h der Platten entgegennimmt, ein Modell in FEMM erstellt, und die Kapazität C ausgibt. Testen Sie Ihre Routine für die Parameter $a = 10$ cm, $h = 5$ cm und $a = 30$ cm, $h = 40$ cm.

Ausarbeitung der Aufgaben 3.1, 3.2 und 3.3 und Abgabe der Übung via Moodle bis spätestens 2. Dezember 2020 um 23:59 Uhr. Diskussion etwaiger Probleme in der Übung am 26. November 2020.

[1] `http://www.femm.info/Archives/doc/octavefemm.pdf`