Übung 6: Stetigkeitsbedingungen, Überspannungsableiter und kanonische Nummerierung

Einführung in die numerische Berechnung elektromagnetischer Felder

Merle Backmeyer, Marc Bodem, Laura D'Angelo, Melina Merkel, Sebastian Schöps

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2020/21
10. Dezember 2020
Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1: Stetigkeitsbedingung des Stromes

a) Betrachten Sie die für die elektrischen Felder relevanten Gleichungen (GAUSS und AMPÈRE). Leiten Sie durch geschickte Kombination der beiden Gleichungen die sogenannte Kontinuitätsgleichung her

$$\mathrm{div}\vec{J}(\vec{r},t) + \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0,$$

wobei $\vec{J}(\vec{r},t)$ die elektrische Stromdichte ist und $\rho(t)$ die Ladungsdichte im betrachteten Gebiet.

b) Bestimmen Sie nun aus der Kontinuitätsgleichung die Stetigkeitsbedingung für die Stromdichte.

Aufgabe 6.2: Überspannungsableiter mit Octave FEMM

Modellieren Sie den in Abbildung 1 dargestellten Überspannungsableiter. Es handelt sich um eine Querschnittszeichnung einer zylindrischen Struktur. Die Maße sind in mm angegeben.

a) Erstellen Sie ein *axisymmetrisches* Modell, d.h. im 2-dimensionalen r, z-Koordinatensystem, des Überspannungsableiters (siehe Abb. 1) in FEMM:

- Materialien sind ZnO (schwarz: $\varepsilon_r = 800$), Vakuum (Außenraum und die Schicht zwischen ZnO und Porzellan: $\varepsilon_r = 1$), PEC (weiße Blöcke: $\varepsilon_r = 10^5$) und Porzellan (grau: $\varepsilon_r = 6$).
- Oberhalb des Ableiters soll eine Vakuumschicht aus 3000mm Dicke hinzugefügt werden.
- Modellieren Sie nicht die diagonalen Halterungen, sondern nur den feldsteuernden Ring (Außendurchmesser $d_\mathrm{a} = 1200\mathrm{mm}$).
- Hochspannung (Potential $471000\mathrm{V}$) liegt am oberen Mast (Bereich mit Durchmesser $40\mathrm{mm}$), allen damit leitend verbunden PEC Gebieten und am feldsteuernden Ring an.
- Der Untergrund und der untere Teil des Masts (Bereich mit Durchmesser $280\mathrm{mm}$) sind geerdet, d.h. auf $V = 0$ gesetzt. Diese Gebiete brauchen Sie im Gitter nicht zu berücksichtigen, wenn Sie geeignete Randbedingungen setzen („no mesh" Einstellung in FEMM).

b) Probieren Sie verschiedene Randbedingungen aus: Was passiert, wenn Sie keine Randbedingung explizit setzen bzw. wenn Sie $\phi = 0$ vorgeben? Berechnen Sie in beiden Fällen das elektrostatische Feld der gegebenen Anordnung.

Welche Randbedingungen erscheinen Ihnen sinnvoll? Diskutieren Sie dies in der Ausarbeitung anhand der numerischen Ergebnisse, z.B. Visualisierung des Potentials $\phi(r, z)$ mit FEMM. Werten Sie die Tangentialkomponente der elektrischen

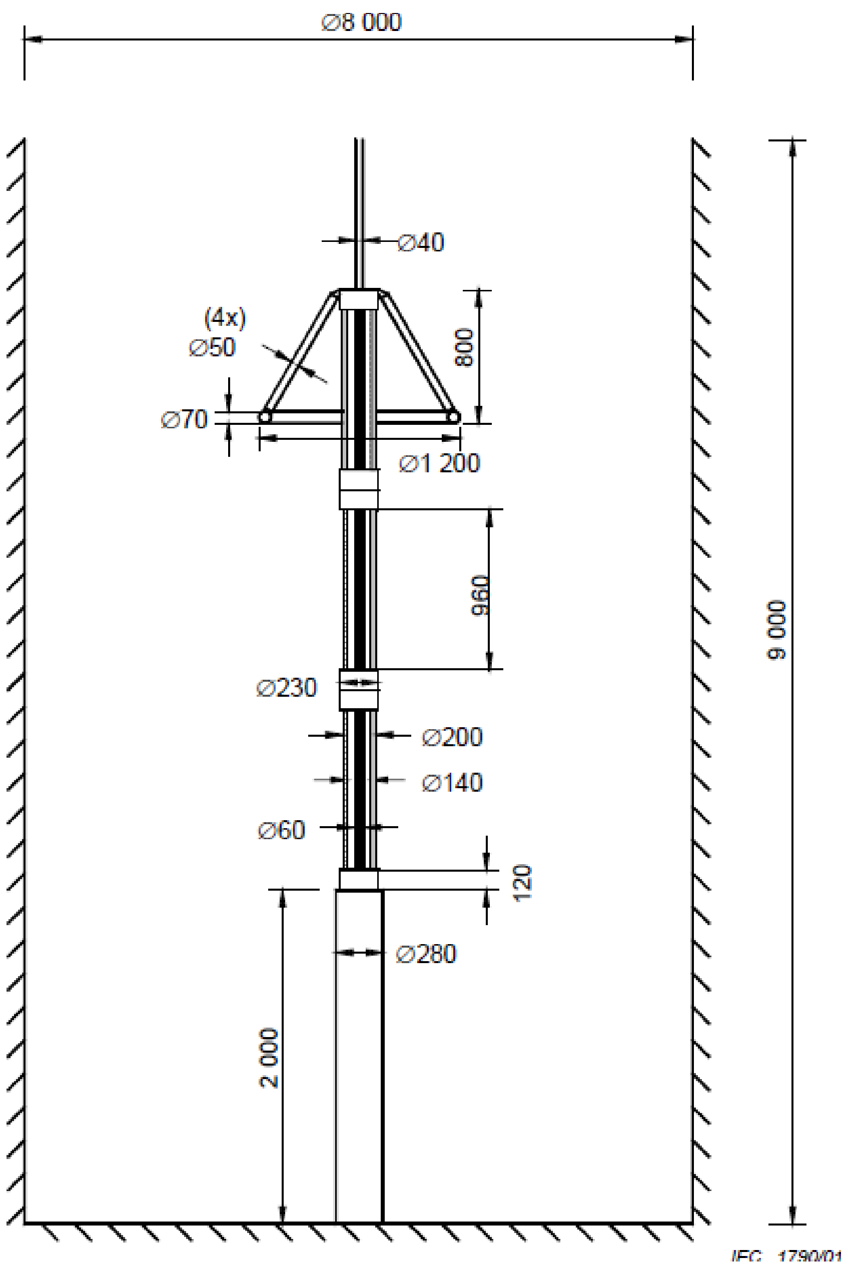

Abbildung 1: Überspannungsableiter, Maße in mm (Quelle: IEC 60099-4 Abb. L.3a).

Feldstärke $E_t(r, z)$ entlang einer vertikalen Linie auf der Symmetrieachse, d.h. entlang $r = 0$ aus (OctaveFEMM-Befehl „`eo_gete`"); verfeinern Sie das Gitter bis sich das Ergebnis nicht mehr ändert.
Hinweis: Beachten Sie, dass das hohe Potential am Mast Ihre Visualisierung innerhalb der Ableitersegmente verfälschen könnte. Skalieren Sie dementsprechend Ihren Plot oder visualisieren Sie ausschließlich im Bereich der Segmente.

c) Untersuchen Sie das Verhalten des Ableiters bei Variation des Radius des feldsteuernden Rings. Verändern Sie dazu den Außendurchmesser d_a des Rings im Bereich 600 bis 2000 mm. Erstellen Sie einen Surface-Plot (Octave-Kommando `surf`), der die tangentiale Feldstärke E_t (bei $r = 0$) in Abhängigkeit des Abstands zur Erde z und des Ringaußendurchmessers d_a zeigt. Betrachten Sie dabei insbesondere das Verhalten in den Ableitersegmenten.

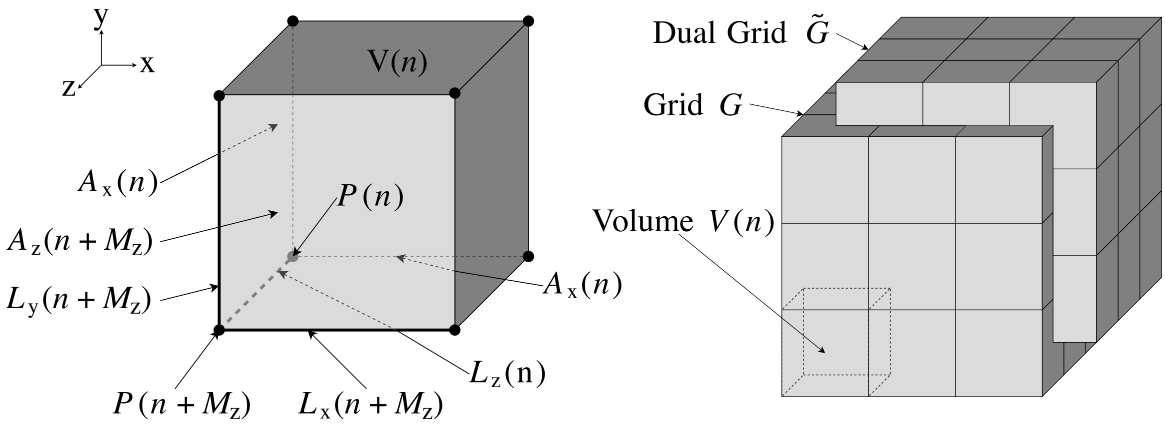

Abbildung 2: Kanonische Nummerierung.

Aufgabe 6.3: Kanonische Nummerierung, FIT

Für numerische Berechnungen wird in der Finiten Integrationstechnik eine Diskretisierung der Differentialoperatoren mittels eines Gitterpaares vorgenommen.

Ein kartesisches Gitter ist gegeben durch folgende Punktmenge

$$\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_{N_x}\} \times \{y_1, \dots, y_j, \dots, y_{N_y}\} \times \{z_1, \dots, z_k, \dots, z_{N_z}\},$$

wobei $1 \leq i \leq N_x$, $1 \leq j \leq N_y$ und $1 \leq k \leq N_z$. Jeder der Gitterpunkte $P(i, j, k)$ kann nun nicht nur durch drei (i, j, k), sondern auch durch einen Nummerierungsparameter („kanonische Nummerierung”) beschrieben werden:

$$n = 1 + (i - 1)M_x + (j - 1)M_y + (k - 1)M_z$$

mit $M_x = 1$, $M_y = N_x$, $M_z = N_x N_y$, wobei $1 \leq n \leq N_p := N_x N_y N_z$. Bei dieser Nummerierung werden die Punkte $P(n)$ also zunächst in x–, dann in y– und schließlich in z–Richtung durchlaufen. Die Gitterkante $L_w(n)$ liegt zwischen den Punkten $P(n)$ und $P(n + M_w)$, wobei w eine Raumrichtung bezeichnet, also x, y oder z. Die Gitterfläche $A_w(n)$ wird von den Strecken $L_u(n)$ und $L_v(n)$ aufgespannt, wobei $u \neq v$ und $v, u \neq w$. Das Volumen $V(n)$ wird schließlich von $L_u(n)$, $L_v(n)$ und $L_w(n)$ aufgespannt, vgl. Abb. 2. Zeichnen Sie ein Beispielgitter mit mindestens zwei primalen Volumen und den dazugehörigen dualen Objekten und vollziehen Sie die Nummerierung nach. Was fällt Ihnen bei der Nummerierung des dualen Gitters auf?

Ausarbeitung der Aufgaben 6.1, 6.2 und 6.3 und Abgabe der Übung via Moodle bis spätestens 13. Januar 2021 um 23:59 Uhr. Diskussion etwaiger Probleme in der Übung am 17. Dezember 2020.