

# Методы оптимизации.

Домашнее задание 1.

Дедлайн 4 октября 23:59

## Выпуклые множества.

1. Является ли выпуклым множество дискретных случайных величин с ограниченной дисперсией ( $\forall x \leq \alpha$ )?
2. Докажите, что если множество выпуклое, то его внутренность тоже выпуклое множество. Верно ли обратное утверждение?
3. Докажите, что гиперболическое множество  $\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \prod_{i=1}^n x_i \geq 1\right\}$  выпуклое.

*Подсказка:* для  $\theta \in [0, 1]$  верно, что  $a^\theta b^{1-\theta} \leq \theta a + (1 - \theta)b$ , где  $a, b \geq 0$ .

4. Докажите, что множество  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  выпуклое тогда и только тогда, когда

$$(\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S, \quad \forall \alpha, \beta \geq 0$$

5. Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$  случайная величина с заданным распределением вероятностей  $\mathbb{P}(x_i = a_i) = p_i$ , где  $i = 1, \dots, n$  и  $a_1 < \dots < a_n$ . Говорят, что вектор вероятностей исходов  $p \in \mathbb{R}^n$  принадлежит вероятностному симплексу, т.е.

$$P = \{p \mid 1^T p = 1, p \succeq 0\}.$$

Являются ли следующие множества выпуклыми?

(a)  $\mathbb{P}(x > \alpha) \leq \beta$

(b)  $\mathbb{E}(|x|^{2021}) \leq \alpha \mathbb{E}|x|$

(c)  $\mathbb{E}x^2 \geq \alpha$

(d)  $\forall x \geq \alpha$

*Замечание.* В отличие от задачи с семинара, здесь уже фиксированы  $a_1, \dots, a_n$ . То есть мы рассматриваем только те случайные величины, которые принимают значения  $a_1, \dots, a_n$ .

### Матрично-векторное дифференцирование.

1. Вычислить  $\nabla \|Ax\|_2$ .
2. Вычислить  $\nabla^2 f(x)$ , где  $f(x) = \log \det X$ .
3. Вычислить  $\frac{\partial}{\partial X} \|X\|_F^2$ ,  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\|X\|_F = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\text{tr} X^T X} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |x_{ij}|^2}.$$

4. В машинном обучении очень часто используют следующую функцию потерь  $L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|y_i - \hat{y}\|_2^2$ , где  $\hat{y} = Wx_i + b$ .

- $n$  - количество  $x_i \in \mathbb{R}^l$  - данные обучающей выборки;
- $y_i \in \mathbb{R}^m$  - истинное предсказание на векторе  $x_i$ ;
- $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$  - предсказание модели на векторе  $x_i$ ;
- В данном случае у нас линейная модель, где  $W \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

Вычислить  $\frac{\partial L}{\partial W}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial b}$  для  $n = 1$ .