Методы оптимизации.

Домашнее задание 2.

Дедлайн 2 ноября 23:59

Выпуклые функции.

1. Докажите, что функция $f(X) = \mathrm{Tr}(X^{-1})$, $X \in S_n^{++}$ выпуклая, а функция $g(X) = (\det(X))^{\frac{1}{n}}$ вогнутая.

2. Дивергенция Кульбака-Лейблера между $p, q \in \mathbb{R}_n^{++}$ определяется следующим образом:

$$D(p,q) = \sum_{i=1}^{n} \left(p_i \ln \frac{p_i}{q_i} - p_i + q_i \right).$$

Докажите, что $D(p,q) \geq 0 \; \forall p, q \in \mathbb{R}_n^{++}$ и $D(p,q) = 0$ тогда и только тогда, когда $p = q$.

Подсказка: (показать выполнение этого равенства)

$$D(p,q) = f(p) - f(q) - \nabla f(q)^{\mathrm{T}}(p-q), \qquad f(p) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i.$$

3. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ случайная величина с заданным распределнием вероятностей $\mathbb{P}(x_i = a_i) = p_i$, где $i = 1, \ldots, n$ и $a_1 < \cdots < a_n$. Говорят, что вектор вероятностей исходов $p \in \mathbb{R}^n$ принадлежит вероятностному симплексу, т.е.

$$P = \left\{ p | 1^T p = 1, p \succeq 0 \right\}.$$

Определите выпуклость и вогнутость следующих функций на вероятностном симплексе.

   (a) $\mathbb{E}x$

(b) $\mathbb{P}(x \geq \alpha)$

(c) $\mathbb{P}(\alpha \leq x \leq \beta)$

(d) $\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$

(e) $\mathbb{V}x \geq \alpha$

(f) $\text{quartile}(x) = \inf\{\beta | \mathbb{P}(x \leq \beta) \geq 0.25\}$

4. Являются ли следующие функции выпуклыми на $\mathbb{R}^n$:

- $f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$
- $g(x) = \prod_{i=1}^n (x_i)^{\frac{1}{n}}$

5. Докажите, что спектральная матричная норма выпуклая функция на множестве матриц

$$f(X) = \|X\|_2 = \sup_{y \neq 0} \frac{\|Xy\|_2}{\|y\|_2}$$

6. Является ли функция $f(x) = -x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)$ выпуклой на $\mathbb{R}$?

Условия оптимальности. Двойственность.

1. Найти решение задачи методом множителей Лагранжа

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \{x_1^2 + x_2^2\}$$
$$x_1 \leq 0,$$
$$x_1 + x_2 = 0$$

2. Найти решение задачи методом множителей Лагранжа

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \{(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2\}$$
$$x_1 + x_2 \leq 4,$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 9.$$

3. Найти решение задачи методом множителей Лагранжа

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{(1 - x_1)^2 + \alpha \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1})^2\}$$
$$\alpha \geq 0$$

4. Записать двойственную задачу к задаче

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} x^T W x$$
$$x_i^2 = 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

где $W \in S^n$.

5. Записать двойственную задачу к задаче

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$$
$$a^T x = b$$

где $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируемая и строго выпуклая.

6. Записать двойственную задачу к задаче

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^T P_0 x + q_0^T x + r_0$$
$$\frac{1}{2} x^T P_i x + q_i^T x + r_i \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

где $P_0 \in S^n_{++}$, $P_i \in S^n_{+}$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $q_i \in \mathbb{R}^n$, $r_i \in \mathbb{R}$. Выполняется ли условие сильной двойственности?

7. Записать двойственную задачу к задаче

$$\min_{X \in S^n_{++}} \ln\{\det X^{-1}\}$$
$$a_i^T X a_i \leq 1, \quad i = 1, \ldots, m$$

где $a_i \in \mathbb{R}^n$. Выполняется ли условие сильной двойственности?

8. Записать двойственную задачу к задаче

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} x^T A x + 2b^T x$$
$$x^T x \leq 1$$

где $A \in S^n_{++}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Выполняется ли условие сильной двойственности?