Вариации теоремы Барань и Гринберга о суммах векторов

бакалаврская работа

Студент: Арутюнян Саро Артурович
Научный руководитель: Полянский Александр Андреевич

Московский физико-технический институт

Июнь 2023

Определения и обозначения

$B^d_{\|\cdot\|}$ – шар нормы $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

B^d_2 – евклидов шар, $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма

$[n] := \{1, \ldots, n\}$ для $n \in \mathbb{N}$

Трансверсаль семейства множеств $\mathcal{V} = \{V_i \subseteq \mathbb{R}^d : i \in [n]\}$ – любое множество T вида $\{v_1, \ldots, v_n\}$, где $v_i \in V_i$ для всех $i \in [n]$

$\mathcal{T}(\mathcal{V})$ – множество трансверсалей семейства $\mathcal{V} = \{V_i : i \in [n]\}$

$s(V) := \sum_{v \in V} v$ для конечного $V \subseteq \mathbb{R}^d$

Число TC

Пусть дана норма $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Семейство множеств $V_i \subset B^d_{\|\cdot\|}, i \in [n]$ назовем *сбалансированной*, если $0 \in \mathrm{conv} V_i$ для всех $i \in [n]$.

Пусть $\mathcal{B}(B^d_{\|\cdot\|})$ – множество сбалансированных семейств в $B^d_{\|\cdot\|}$.

Для $d \in \mathbb{N}$ и $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ определим

$$TC(B^d_{\|\cdot\|}) = \max_{\mathcal{V} \in \mathcal{B}(B^d_{\|\cdot\|})} \min_{T \in \mathcal{T}(\mathcal{V})} \|s(T)\|.$$

Theorem 1 (Барань, Гринберг, 1981)

Для всякой нормы $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *имеет место неравенство*

$$TC(B^d_{\|\cdot\|}) \leq d.$$

Число TC

Пологая $V_i = \{v_i, -v_i\}$ для $i \in [n]$ получим частный случай сбалансированного семейства, для которого верна следующая теорема.

Theorem 2 (Спенсер, 1980)

Пусть даны векторы $v_1, \dots, v_n \in B_2^d$. Тогда существуют знаки $\varepsilon_i = \pm 1, i \in [n]$ со свойством

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\|_2 \leq \sqrt{d}.$$

Theorem 3 (Амбруш, Боззаи, 2023)

$$TC(B_2^d) \leq \sqrt{d}, \qquad TC(B_\infty^d) \leq 40\sqrt{d}.$$

Первый результат Амбруша и Боззаи также был получен независимо нами, в процессе написания этой работы.

Число TTC

$V_1, \ldots, V_n$ – *m-семейство*, если $|V_1| = \cdots = |V_n| = m$

$\{T_1, \ldots, T_m\}$ – *разбиение m-семейства $\mathcal{V}$ на трансверсалей*, если $T_j \in \mathcal{T}(\mathcal{V})$ для $j \in [m]$ и $T_1 \cup \cdots \cup T_m = V_1 \cup \cdots \cup V_n$.

$\mathcal{P}(\mathcal{V})$ – множество разбиений m-семейства $\mathcal{V}$ на трансверсали

$\mathcal{B}(B^d_{\|\cdot\|}, m)$ – множество сбалансированных m-семейств в $B^d_{\|\cdot\|}$

$$TTC(B^d_{\|\cdot\|}, m) = \max_{\mathcal{V} \in \mathcal{B}(B^d_{\|\cdot\|}, m)} \ \min_{\{T_1, \ldots, T_m\} \in \mathcal{P}(\mathcal{V})} \ \max_{j \in [m]} \|s(T_j)\|$$

Очевидно, что $TC(B^d_{\|\cdot\|}) \leq TTC(B^d_{\|\cdot\|}, m)$.

Theorem 4

$TTC(B^d_2, m) \leq m\sqrt{d}$.

Как видно, теорема 4 обобщает теорему 2 за счет ухудшения константы, ограничивающей длины сумм трансверсалей разбиения.

Число PTC

Пусть $T_I := \{v_i \in T : i \in I\}$ для $I \subseteq [n]$. Определим

$$PTC(B^d_{\|\cdot\|}) = \max_{\mathcal{V} \in \mathcal{B}(B^d_{\|\cdot\|})} \min_{T \in \mathcal{T}(\mathcal{V})} \max_{j \in [n]} \|s(T_{[j]})\|.$$

Очевидно, $TC(B^d_{\|\cdot\|}) \leq PTC(B^d_{\|\cdot\|})$.
Барань дает следующую оценку, улучшая предыдущий результат Барань и Гринберга с константой $2d$.

Theorem 5 (Барань, 2008)

Для нормы $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *имеет место неравенство*

$$PTC(B^d_{\|\cdot\|}) \leq 2d - 1.$$

Число PTC

На евклидовой плоскости для двухэлементных множеств V_i вида $\{v_i, -v_i\}$ есть точный результат Лунда и Магазинова:

Theorem 6 (Лунд, Магазинов, 2017)

Пусть даны векторы $v_1, \dots, v_n \in B_2^2$. Тогда существуют знаки $\varepsilon_i = \pm 1, i \in [n]$ со свойством

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_j v_j\|_2 \leq \sqrt{3} \quad \text{для всех } j \in [n],$$

причем $\sqrt{3}$ – наименьшее число, которое может стоять справа.

Мы дальше улучшим оценку Барань в теореме 5 в евклидовых пространствах:

Theorem 7

$$PTC(B_2^d) \leq d.$$

Вспомогательные утверждения

$M_i \in \mathbb{R}^{d \times |V_i|}$ для $i \in [n]$ – матрица, столбцами которой являются векторы множества V_i

Δ^m – множество m-мерных базисных векторов $e_1, \ldots, e_m$.

Скалярное произведение и норма Фробениуса для матриц $A = \{a_{ij}\}, B = \{b_{ij}\} \in \mathbb{R}^{p \times q}$

$$\langle A, B \rangle_F = \sum_{i \in [p]} \sum_{j \in [q]} a_{ij} b_{ij},$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\sum_{i \in [p]} \sum_{j \in [q]} a_{ij}^2}.$$

Вспомогательные утверждения

Lemma 8

Пусть даны натуральные числа k, p, r. Пусть для каждого $i \in [k]$ даны числа q_i, l_i и матрица $M_i \in \mathbb{R}^{p \times q_i}$, а также l_i матриц $B_i^j \in \mathbb{R}^{q_i \times r}$, $j \in [l_i]$. Тогда, если $Qr > pr + L$, где $Q = q_1 + \cdots + q_k$ и $L = l_1 + \cdots + l_k$, то существуют матрицы $A_i \in \mathbb{R}^{q_i \times r}, i \in [k]$, среди которых есть ненулевая, удовлетворящие линейным однородным ограничениям

$$\langle A_i, B_i^j \rangle_F = 0 \tag{1}$$

для всех $i \in [k]$ и $j \in [l_i]$, а также линейной системе

$$\sum_{i \in [k]} M_i A_i = O \in \mathbb{R}^{p \times r}, \tag{2}$$

где O – нулевая матрица.

Вспомогательные утверждения

Lemma 9

Пусть $V \subseteq B_2^d$ *и* $u \in \mathrm{conv}V$. *Тогда существует* $v \in V$ *со свойством*

$$\|u - v\|_2 \leq 1.$$

Lemma 10

Пусть дано сбалансированное семейство множеств $V_i \subset B_2^d, i \in [k]$. *Пусть для каждого* $i \in [k]$ *дана точка* $u_i \in \mathrm{conv}V_i$. *Положим* $u = u_1 + \cdots + u_k$. *Тогда существует трансверсаль* T *семейства* $\{V_i : i \in [k]\}$ *со следующим свойством:*

$$\|s(T) - u\|_2 \leq \sqrt{k}.$$

Извлечение одной трансверсали с короткой суммой

Theorem 11

Пусть дано сбалансированное семейство множеств $V_i \subset B_2^d, i \in [n]$. Тогда существует трансверсаль T семейства $V_1, \ldots, V_n$ со свойством

$$\|s(T)\|_2 \leq \sqrt{d}.$$

Доказательство.

С помощью леммы 8 находим линейную комбинацию

$$\sum_{i \in [n]} M_i a_i = 0 \in \mathbb{R}^d, \qquad a_i \in \mathrm{conv}\Delta^{|V_i|},$$

где максимум $k \leq d$ коэффициенты-векторы a_i не являются базисными векторами.

Для этих k векторов с помощью леммы 10 находим близкие к соответствующим $M_i a_i$ векторы из V_i. Найденные векторы кладем в трансверсаль T, дополнив остальными $n - k$ векторами $M_i a_i$. □

Разбиение на трансверсалей с короткими суммами

Theorem 12

Пусть дано сбалансированное m-семейство множеств $V_i \subset B_2^d, i \in [n]$. Тогда это семейство $V_1, \ldots, V_n$ можно разбить на m трансверсалей $T_1, \ldots, T_m$ так, чтобы для всех $i \in [m]$

$$\|s(T_i)\|_2 \leq m\sqrt{d}.$$

Перестановочная матрица – матрица, полученная перемешиванием строк единичной матрицы тех же размеров

$\mathcal{P}$ – множество всех $m!$ перестановочных матриц размеров $m \times m$

Бистохастическая матрица – матрица, все элементы которой неотрицательны, причем строки и столбцы суммируются в единицу.

Разбиение на трансверсалей с короткими суммами

Доказательство.

С помощью леммы 8 находим линейную комбинацию

$$\sum_{i\in[n]} M_i A_i = O \in \mathbb{R}^{d\times m}, \qquad A_i \in \mathrm{conv}\mathcal{P},$$

где максимум $k \leq md$ коэффициенты-матрицы A_i не являются перестановочными матрицами.
Для этих k матриц с помощью леммы 10 находим близкие (в смысле нормы Фробениуса) к соответствующим $M_i A_i$ матрицы $M_i P_i, P_i \in \mathcal{P}$.
Найденные матрицы кладем в трансверсаль T, дополнив остальными $n-k$ матрицами $M_i A_i$.
Трансверсаль $T_j, j \in [m]$ определяем как набор j-х столбцов матриц из T. □

Трансверсаль с короткими частичными суммами

Theorem 13

Пусть дано сбалансированное семейство множеств $V_i \subset B_2^d, i \in [n]$*. Тогда существует ее трансверсаль* $T = \{v_i \in V_i : i \in [n]\}$*, суммы всех частичных трансверсалей* $T_{[j]}$ *которой коротки, а именно,*

$$\left\| s\left(T_{[j]}\right) \right\|_2 \leq d \qquad \text{для всех } j \in [n].$$

Доказательство.

С помощью леммы 8 находим линейные комбинации

$$\sum_{i \in [j]} M_i a_i = 0 \in \mathbb{R}^d, \qquad a_i \in \mathrm{conv}\Delta^{|V_i|},$$

для всех $j \in [n] \setminus [d]$ где максимум $k \leq d$ коэффициенты-векторы a_i не являются базисными векторами. Остальное аналогично доказательстве теоремы 11 – с помощью леммы 9. □

Спасибо за внимание