Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра дискретной математики

Направление подготовки / специальность: 01.03.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль) подготовки: Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия

Вариации теоремы Барань и Гринберга о суммах векторов

бакалаврская работа

Студент:
Арутюнян Саро Артурович

Научный руководитель:
кандидат ф.м. наук
Полянский Александр Андреевич

Москва 2023

Содержание

Введение

Сначала введем некоторые определения. *Несимметричной полунормой* называется отображение $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее

(i) $h(x+y) \le h(x) + h(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$;

(ii) $h(\alpha x) = \alpha h(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^d, \alpha \ge 0$.

Симметричная полунорма удовлетворяет (i) и

(iii) $h(\alpha x) = |\alpha| h(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^d, \alpha \in \mathbb{R}$.

Единичным шаром полунормы $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ назовем

$$B^d_{\|\cdot\|} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \le 1\}.$$

Евклидову норму обозначим через $\|\cdot\|_2$, а d-мерный евклидов шар – через B^d_2.

Определим $[n] := \{1, \dots, n\}$ для $n \in \mathbb{N}$. Назовем *трансверсалью* семейства множеств $V_1, \dots, V_n$ любое множество T вида $\{v_1, \dots, v_n\}$, где $v_i \in V_i$ для всех $i \in [n]$. Для подмножества $I \subseteq [n]$ положим $T_I = \{v_i \in T : i \in I\}$. Если множества V_i конечны, причем их мощности равны $|V_1| = \dots = |V_n| = m$, то будем говорить, что *семейство* $\{V_1, \dots, V_n\}$ *разбита на* m *трансверсалей*, если указаны непересекающиеся m трансверсали, объединение которых совпадает с $V_1 \cup \dots \cup V_n$. Для конечного подмножества V некоторого линейного пространства определим $s(V) := \sum_{v \in V} v$.

Пусть дана полунорма $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Семейство множеств $V_i \subset B^d_{\|\cdot\|}, i \in [n]$ назовем *сбалансированной*, если $0 \in \mathrm{conv} V_i$ для всех $i \in [n]$.

Для числа $d \in \mathbb{N}$ и (полу)нормы $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ рассмотрим наименьшую константу $TC(B^d_{\|\cdot\|})$ со следующим свойством: для любого сбалансированного семейства множеств в $B^d_{\|\cdot\|}$ существует трансверсаль T, для которой $\|s(T)\| \le TC(B^d_{\|\cdot\|})$.

В 1981 году Барань и Гринберг [1] рассматривали сбалансированные семейства и число TC. В частности они доказали следующую теорему:

Теорема 1. *Для всякой несимметричной полунормы* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *имеет место неравенство*

$$TC\left(B^d_{\|\cdot\|}\right) \le d.$$

Эта оценка неулучшаема в общем случае, но ее можно уточнить для определенных норм и множеств V_i с дополнительными условиями. В этой статье мы будем исследовать такие сбалансированные семейства в евклидовых пространствах, а также посмотрим на некоторые связанные сюжеты.

На самом деле сбалансированные множества были исследованы еще раньше. В 1963 году Дворецкий [6] интересовался чему может равняться величина

$$\max_{\|x_i\|=1} \min_{\pm} \| \pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n\|,$$

где максимум берется по всем точкам x_i единичной сферы пространства Минковсково, а минимум – по всевозможным 2^n знакам $\pm$. Пологая $V_i = \{x_i, -x_i\}$ для $i \in [n]$ получим частный случай сбалансированного семейства. В 1980 эту задачу решил Спенсер [5] – вероятностным методом, а в 2008 и Барань [2] – геометрическим и линейно-алгебраическим подходом:

Теорема 2. *Пусть даны векторы $v_1, \dots, v_n \in B_2^d$. Тогда существуют знаки $\varepsilon_i = \pm 1, i \in [n]$ со свойством*

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\|_2 \leq \sqrt{d}.$$

Эта оценка достигается, когда $n = d$ и $v_i = e_i, i \in [n]$, где $\{e_1, \dots, e_d\} = \Delta^d$ – d-мерный базис. Нетрудно заметить, что тогда сумма элементов любой трансверсали семейства $V_i = \{v_i, -v_i\}, i \in [n]$ есть вершина прямоугольного параллелепипеда с нормой $\sqrt{d}$.

Более того, верен свежий результат Амбруш и Боззаи [3] 2023 года, обобщающий теорему 2:

Теорема 3. $TC\left(B_2^d\right) \leq \sqrt{d}$.

Этот результат также был получен независимо, в процессе написания этой работы, поэтому приведем его доказательство и здесь, в разделе 2.

Амбруш и Боззаи, как и мы, основываются на лемму 11 о том, что для точки внутри политопа, являющейся суммой k политопов из евклидова единичного шара, существует вершина, на расстоянии не более $\sqrt{k}$. Для этого утверждения они приводят два доказательства, одно линейно алгебраического характера, а другое – вероятностное. В разделе 1 мы сформулируем эту лемму без доказательства.

Также, Амбруш и Боззаи предоставляют оценку в max-норме (с единичным шаром B^d_∞), используя свойства гауссовского случайного блуждания:

Теорема 4. *$TC(B^d_\infty) \leq 40\sqrt{d}$.*

Кроме задачи выделения трансверсали с короткой суммой мы также изучим вопрос разбиения системы множеств V_i на трансверсали с короткими суммами, если, конечно, мощности множеств V_i равны между собой. Уместно ввести еще один термин: семейство множеств $V_i, i \in [n]$ назовем *m-семейством*, если $|V_i| = m$ для всех $i \in [n]$.

Определим число $TTC(B^d_{\|\cdot\|}, m)$ для данных чисел $m, d \in \mathbb{N}$ и данной (полу)нормы $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ как наименьшее число с тем свойством, что любое сбалансированное m-семейство множеств в $B^d_{\|\cdot\|}$ можно разбить на m трансверсалей $T_1, \ldots, T_m$, длины сумм которых не превосходят его: $\|s(T_i)\| \leq TTC(B^d_{\|\cdot\|}, m)$ для всех $i \in [n]$. Очевидно, что $TC(B^d_{\|\cdot\|}) \leq TTC(B^d_{\|\cdot\|}, m)$.

В разделе 3 мы докажем, что на самом деле для всех $m \geq 2$ и евклидова шара константа TTC существует и имеет порядок $O(\sqrt{d})$:

Теорема 5. *$TTC\left(B^d_2, m\right) \leq m\sqrt{d}$.*

Как видно, теорема 5 обобщает теорему 2 за счет ухудшения константы, ограничивающей длины сумм трансверсалей разбиения.

Помимо TC и TTC определим также величину $PTC(B^d_{\|\cdot\|})$, как наименьшее число с тем свойством, что для любого сбалансированного семейства n множеств $V_i \subset B^d$ существует трансверсаль $\{v_i \in V_i : i \in [n]\}$, все частичные суммы которой не превосходят его по длине: для всех $j \in [n]$

$$\left\|s\left(T_{[j]}\right)\right\| \leq PTC\left(B^d_{\|\cdot\|}\right).$$

Очевидно, $TC(B^d_{\|\cdot\|}) \leq PTC(B^d_{\|\cdot\|})$.

Барань [2] дает следующую оценку:

Теорема 6. *Для симметричной полунормы $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ имеет место неравенство*

$$PTC\left(B^d_{\|\cdot\|}\right) \leq 2d - 1.$$

Эта оценка улучшает предыдущий результат Барань и Гринберга [1] с константой $2d$.

На евклидовой плоскости для двухэлементных множеств V_i вида $\{v_i, -v_i\}$ есть точный результат Лунда и Магазинова [4]:

Теорема 7. *Пусть даны векторы $v_1, \ldots, v_n \in B_2^2$. Тогда существуют знаки $\varepsilon_i = \pm 1, i \in [n]$ со свойством*

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_j v_j\|_2 \leq \sqrt{3} \quad \textit{для всех } j \in [n],$$

причем $\sqrt{3}$ – наименьшее число, которое может стоять справа.

В разделе 4 мы дальше улучшим оценку Барань в теореме 6 в евклидовых пространствах:

Теорема 8. $PTC\left(B_2^d\right) \leq d.$

Стоит подчеркнуть, что числа TC и PTC зависят исключительно от размерности d и нормы пространства, а TTC еще от мощности множеств m, но не зависят от количества множеств n.

1 Вспомогательные утверждения

Написав M_i для $i \in [n]$ далее везде будем иметь в виду матрицу $d \times |V_i|$, столбцами которой являются векторы множества V_i. Обозначим через Δ^m множество m-мерных базисных векторов $e_1, \dots, e_m$.

Нам пригодится *скалярное произведение Фробениуса* для матриц $A = \{a_{ij}\}, B = \{b_{ij}\} \in \mathbb{R}^{p\times q}$, определенная как

$$\langle A, B\rangle_F = \sum_{i\in[p]}\sum_{j\in[q]} a_{ij}b_{ij},$$

а также *норма Фробениуса*

$$\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\sum_{i\in[p]}\sum_{j\in[q]} a_{ij}^2}.$$

Сначала докажем леммы, которые нам еще не раз понадобятся.

Лемма 9. *Пусть даны натуральные числа k, p, r. Пусть для каждого $i \in [k]$ даны числа q_i, l_i и матрица $M_i \in \mathbb{R}^{p\times q_i}$, а также l_i матриц $B_i^j \in \mathbb{R}^{q_i\times r}$, $j \in [l_i]$. Тогда, если $Qr > pr + L$, где $Q = q_1 + \dots + q_k$ и $L = l_1 + \dots + l_k$, то существуют матрицы $A_i \in \mathbb{R}^{q_i\times r}, i \in [k]$, среди которых есть ненулевая, удовлетворящие линейным однородным ограничениям*

$$\langle A_i, B_i^j\rangle_F = 0 \tag{1}$$

для всех $i \in [k]$ и $j \in [l_i]$, а также линейной системе

$$\sum_{i\in[k]} M_iA_i = O \in \mathbb{R}^{p\times r}, \tag{2}$$

где O – нулевая матрица.

Доказательство. Посчитаем и сравним количество переменных и уравнений. А именно, каждая матрица A_i дает q_ir переменных, всего Qr штук. С другой стороны, возникает L уравнений, задаваемых (1), и pq уравнений, задаваемых (2). Значит система имеет решение, если $Qr > pr + L$. $\square$

Лемма 10. *Пусть $V \subseteq B_2^d$ и $u \in \mathrm{conv}V$. Тогда существует $v \in V$ со свойством*

$$\|u - v\|_2 \le 1.$$

Доказательство. Проведем плоскость через точку u, перпендикулярную вектору u. Эта плоскость отрезает от шара B_2^d шапку, любая точка которой находится от точки u на расстоянии не более 1. Достаточно выбрать $v \in V$ из этой шапки (если все точки множества V лежали строго по одной стороне плоскости, проходящей через u, то точка u не мог быть из $\mathrm{conv} V$). $\square$

Как обещалось во введении, приведем лемму, лежавшей в ядре доказательства грядущих теорем. Ее доказательство можно найти в [3, Proposition 3.1].

Лемма 11. *Пусть дано сбалансированное семейство множеств $V_i \subset B_2^d, i \in [k]$. Пусть для каждого $i \in [k]$ дана точка $u_i \in \mathrm{conv} V_i$. Положим $u = u_1 + \cdots + u_k$. Тогда существует трансверсаль T семейства $\{V_i : i \in [k]\}$ со следующим свойством:*

$$\|s(T) - u\|_2 \leq \sqrt{k}.$$

2 Извлечение одной трансверсали с короткой суммой

Теорема 12. *Пусть дано сбалансированное семейство множеств $V_i \subset B_2^d, i \in [n]$. Тогда существует трансверсаль T семейства $V_1, \dots, V_n$ со свойством*

$$\|s(T)\|_2 \leq \sqrt{d}.$$

Доказательство. Обозначим $m_i := |V_i|$ для $i \in [n]$. Рассмотрим линейные зависимости

$$\sum_{i \in [n]} M_i a_i = 0 \in \mathbb{R}^d,$$

где $a_i \in \mathrm{conv}\Delta^{m_i}$ для всех $i \in [n]$. Множество этих линейных зависимостей непусто, поскольку $0 \in \mathrm{conv} V_i$ для $i \in [n]$. Среди всех таких линейных зависимостей рассмотрим ту, в которой максимальное суммарное количество нулей среди всех элементов векторов $a_1, \dots, a_n$.

Без ограничения общности можно считать, что только первые k векторы a_i содержат хотя бы два ненулевых элемента. Докажем тогда, что k не очень велико, а именно, не превосходит d. Пусть это не так и $k > d$. Заметим, что тогда система

$$\sum_{i \in [k]} M_i a_i' = 0 \tag{3}$$

совместна относительно $a_i' \in \mathbb{R}^{m_i}$, где

1. сумма элементов вектора a_i' равна нулю;
2. если j-я координата вектора a_i ноль, то j-я координата a_i' тоже ноль;
3. не все векторы a_i' равны нулевому вектору.

Действительно, $k > d$, $M_i \in \mathbb{R}^{d \times m_i}$, $a_i' \in \mathbb{R}^{m_i \times 1}$, а количество условий l_i, ограничивающих a_i', не превосходит $m_i - 1$, следовательно

$$\sum_{i \in [k]} m_i > \sum_{i \in [k]} m_i - k + d \geq \sum_{i \in [k]} l_i + d,$$

и по лемме 9 система (3) и условия 1-3 совместимы.

При малых t все векторы $a_i + ta'_i$ все еще из симплекса convΔ^{m_i}. Значит, при некотором t все еще эти векторы будут в convΔ^{m_i}, но какой-то из них приобретет лишний ноль, увеличив таким образом суммарное количество нулевых элементов среди векторов $a_1, \ldots, a_n$. Значит, вопреки нашему предположению, $k \leq d$.

Очевидно, для каждого $i \in [n] \setminus [k]$ вектор $a_i \in$ convΔ^{m_i} является базисным, т.е. $a_i \in \Delta^{m_i}$, поскольку у него уже заданы $m_i - 1$ нулей.

Определим теперь точки $u_i := M_i a_i \in$ convV_i для $i \in [k]$. Тогда по лемме 11 существует трансверсаль T_k семейства $V_i, i \in [k]$, для которой

$$\left\| u_{[k]} - s(T_k) \right\|_2 \leq \sqrt{k}.$$

Для дополненной трансверсали $T = T_k \cup \{M_i a_i \in V_i : i \in [n] \setminus [k]\}$ получим

$$\left\| s\left(T_{[n]}\right) \right\|_2 = \left\| s(T_{[n]}) - \sum_{i \in [n]} M_i a_i \right\|_2 = \left\| s(T_k) - u_{[k]} \right\|_2 \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{d},$$

как и требовалось.

□

Из доказанного следует, что $TC(B_2^d) \leq \sqrt{d}$.

Чтобы видеть точность оценки рассмотрим (мульти)множества $V_i \subseteq B_2^d, i \in [d]$, каждое из которых содержит один вектор v_i и $m_i - 1$ векторов $-v_i$, где $\{v_1, \ldots, v_d\} = \Delta^d$. Тогда, для любой трансверсали T этого семейства $s(T)$ есть вершина единичного куба и $\|s(T)\|_2 = \sqrt{d}$. Таким образом $TC(B_2^d) = \sqrt{d}$.

3 Разбиение на трансверсалей с короткими суммами

Теорема 13. *Пусть дано сбалансированное m-семейство множеств $V_i \subset B_2^d, i \in [n]$. Тогда это семейство $V_1, \ldots, V_n$ можно разбить на m трансверсалей $T_1, \ldots, T_m$ так, чтобы для всех $i \in [m]$*

$$\|s(T_i)\|_2 \le m\sqrt{d}.$$

Чтобы пойти дальше к доказательству теоремы, нам нужно озаботиться кое о чем. Вспомним, что *перестановочной* называется матрица, которая получается перемешиванием строк единичной матрицы тех же размеров. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех $m!$ перестановочных матриц размеров $m \times m$. Также вспомним, что *бистохастической* называется квадратная матрица, все элементы которой неотрицательны, причем строки и столбцы суммируются в единицу. Биркгов доказал, что множество бистохастических матриц размеров $m \times m$ совпадает с выпуклой оболочкой всех $m \times m$ перестановочных матриц, т.е. с $\mathrm{conv}\mathcal{P}$.

Доказательство. Рассмотрим множество линейных зависимостей

$$\sum_{i \in [n]} M_i A_i = O,$$

где $A_i \in \mathrm{conv}\mathcal{P}$ для всех $i \in [n]$, а $O \in \mathbb{R}^{d \times m}$ – нулевая матрица. Это множество непусто, поскольку $0 \in \mathrm{conv}V_i, i \in [n]$.

j-й столбец матрицы A_i соответствует набору коэффициентов выпуклой комбинации векторов множества V_i, который мы хотим отогнать в какой-то базисный вектор, и полученный вектор класть в j-ю трансверсаль. Условие, что столбцы A_i суммируются в единицу является релаксацией того, что в разные трансверсали мы кладем разные векторы из V_i. Наша цель – найти линейную зависимость, в которой как можно больше коэффициентов-матриц A_i являются перестановочными матрицами.

Из всех таких линейных зависимостей рассмотрим ту, в которой присутствует максимальное суммарное количество нулевых элементов среди матриц $A_1, \ldots, A_n$. Без ограничения общности можно считать, что $m^2 - m - 1$ нулей не содержат только первые k матрицы A_i. Докажем тогда, что k не очень велико, а именно, не превосходит dm. Пусть это не так и $k > dm$. Заметим, что тогда система

$$\sum_{i \in [k]} M_i A'_i = O \tag{4}$$

совместна, где матрицы $A'_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ удовлетворяют следующим условиям для всех $i \in [k]$:

4. сумма элементов каждой строки и каждого столбца матрицы A'_i равна нулю;

5. если элемент (j, l) матрицы A_i ноль, то элемент (j, l) матрицы A'_i тоже ноль;

6. не все матрицы A'_i равны нулевой матрице.

Чтобы это понять сначала заметим, что количество условий l_i для задания матрицы A'_i не превисходит $m^2 - 1$ для всех $i \in [k]$. Действительно, если требовать, чтобы какой-то дополнительный элемент матрицы A'_i был нулевым, то количество задающих матрицу A'_i линейных условий не уменьшится. Знаем, что среди заданных не более, чем $m^2 - m - 2$ нулей матрицы A'_i никакие m не лежат в одной строке или в одном столбце, так как иначе в одной строке или в одоном столбце лежали бы m соответствующие нули в A_i, что невозможно. Дополнительно потребуем, чтобы некоторые элементы A'_i (не из числа заданных нулей) тоже были нулями так, чтобы в итоге оказались заданы $m^2 - m$ нулей, причем никакие m из них не лежали в одной строке или в одном столбце. Тогда для сохранения свойства матрицы достаточно будет требовать еще равенство нулю суммы элементов каждой строки, ведь из этих условий будет следовать, что и оставшийся элемент каждой строки тоже ноль, а значит и суммы столбцов тоже нули. Учитывая то, что не все элементы A'_i нули, можем на единицу улучшить оценку: $l_i \leq (m^2 - m) + m - 1 = m^2 - 1$.

Поскольку $k > dm$, $M_i \in \mathbb{R}^{d \times m}$, $A'_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и

$$\sum_{i \in [k]} m^2 = km^2 > dm + k(m^2 - 1) \geq dm + \sum_{i \in [k]} l_i,$$

то по лемме 9 система (4) и условия 4-6 совместимы.

Умножим линейную комбинацию из (4) на действительное число t и добавим к $\sum_{i\in[n]} M_i A_i = O$. Получим, что для всех $t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i\in[k]} M_i(A_i + tA_i') + \sum_{i\notin[k]} M_i A_i = O.$$

При достаточно маленьких t матрицы $A_i + tA_i'$, как легко видеть, все еще бистохастические. Следовательно при некотором t все матрицы $A_i + tA_i'$ будут бистохастичаскими, но некоторая из них приобретет лишний ноль, увеличив таким образом суммарное количество нулевых элементов среди матриц $A_1, \dots, A_n$. Значит, вопреки нашему предположению, $k \le dm$.

Нетрудно видеть, что все остальные матрицы $A_i, i \in [n] \setminus [k]$ являются перестановочными. Действительно, если у бистохастической матрицы размеров $m \times m$ хотя бы $m^2 - m - 1$ нулей, то в $m - 1$ строках ровно $m - 1$ нулей. Значит в этих строках все числа определены, а следовательно определена и оставшаяся строка. Очевидно, тогда все элементы матрицы либо нули, либо единицы, т.е. она перестановочная.

Определим для всех $i \in [n]$ и $I \subseteq [n]$

$$u_i = M_i A_i, \qquad u_I = \sum_{j\in I} u_j$$

$$\mathcal{V}_i = \{M_i P : P \in \mathcal{P}\}.$$

Тогда, как доказал Биркгоф,

$$\operatorname{conv}\mathcal{V}_i = \{M_i A : A \in \operatorname{conv}\mathcal{P}\}.$$

Теперь вспомним матричную норму $\|\cdot\|_F$ – норму Фробениуса. Ясно, что норма Фробениуса матрицы $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ есть ни что иное, как евклидова норма вектора размера pq, полученной стягиванием матрицы A.

Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{m}}\mathcal{V}_i \subseteq B_2^{d\times m}$, т.е. для любых $i \in [n]$ и $A \in \operatorname{conv}\mathcal{P}$ имеет место неравенство

$$\|M_i A\|_F \le \sqrt{m}.$$

Действительно, каждый столбец матрицы $M_i A$ есть вектор вида $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m$, где $b_1, \dots, b_m$ – столбцы M_i, а $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \dots & \alpha_m\end{pmatrix}^T$ – столбец A.

Значит, длина каждого столбца матрицы M_iA не превосходит 1:

$$\left\|\sum_{i\in[m]}\alpha_i b_i\right\|_2 \le \sum_{i\in[m]}\alpha_i\|b_i\|_2 \le \sum_{i\in[m]}\alpha_i = 1.$$

Следовательно, квадрат нормы Фробениуса $\|M_iA\|_F^2$ – сумма квадратов длин столбцов M_iA, не превосходит m, как и хотелось.

Пространство матриц $\mathbb{R}^{d\times m}$, снабженное нормой Фробениуса, можно рассматривать как пространство векторов $\mathbb{R}^{dm}$ с евклидовой нормой. Значит, применив лемму 11 для множеств $\frac{1}{\sqrt{m}}\mathcal{V}_i \subseteq B_2^{dm},\ i\in[k]$ найдем трансверсаль $T_k = \{v_i \in \mathcal{V}_i : i\in[k]\}$ со свойством

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\left\|u_{[k]} - s(T_k)\right\|_F \le \sqrt{k}$$

Для дополненной трансверсали $T = T_k \cup \{v_i := M_iA_i \in \mathcal{V}_i : i\in[n]\setminus[k]\}$ получим

$$\|s(T)\|_F = \left\|s(T) - u_{[n]}\right\|_F = \left\|s(T_k) - u_{[k]}\right\|_F \le \sqrt{mk} \le m\sqrt{d}.$$

Это означает, что если определить трансверсаль $T_j, j\in[m]$ как набор j-х столбцов матриц $v_i = M_iP_i,\ P_i\in\mathcal{P},\ i\in[n]$, то

$$\|s(T_j)\|_2 \le \|s(T)\|_F \le m\sqrt{d},$$

что и требовалось доказать.

□

4 Извлечение трансверсали с короткими частичными суммами

Теорема 14. *Пусть дано сбалансированное семейство множеств* $V_i \subset \mathbb{R}^d, i \in [n]$. *Тогда существует ее трансверсаль* $T = \{v_i \in V_i : i \in [n]\}$, *суммы всех частичных трансверсалей* $T_{[j]}$ *которой коротки, а именно, для всех* $j \in [n]$

$$\left\| s\left(T_{[j]}\right) \right\|_2 \le d.$$

Доказательство. Положим $m_i := |V_i|$ для $i \in [n]$ и

$$\Delta := \mathrm{conv}\Delta^{m_1} \cup \cdots \cup \mathrm{conv}\Delta^{m_n}.$$

Для $k \in \{0, 1, \ldots, n-d\}$ определим множества

$$\mathcal{M}_k = \{M_1, M_2, \ldots, M_{k+d}\}.$$

Для $k \in \{0, 1, \ldots, n-d\}$ индуктивно (по k) построим отображения

$$\begin{aligned} \alpha_k : \mathcal{M}_k &\to \Delta \\ M_i &\mapsto \alpha_k(M_i) \in \mathrm{conv}\Delta^{m_i} \qquad \text{для всех } i \in [k+d] \end{aligned}$$

и подмножества $\mathcal{M}'_k \subset \mathcal{M}_k$, удовлетворяющие следующим условиям:

- $\sum_{M \in \mathcal{M}_k} M\alpha_k(M) = 0$;
- $\alpha_k(M_i) \in \Delta^{m_i}$, если $M_i \in \mathcal{M}'_k$;
- $|\mathcal{M}'_k| = k$ и $\mathcal{M}'_k \subset \mathcal{M}'_{k+1}$ и $\alpha_{k+1}(M) = \alpha_k(M)$, если $M \in \mathcal{M}'_k$.

Для базы $k = 0$ достаточно положить $\mathcal{M}'_k = \varnothing$ и

$$\alpha_k(M_i) = \frac{1}{m_i} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}^T}_{m_i \text{ единиц}} \qquad \text{для всех } i \in [k+d].$$

Совершим переход $k \to (k+1)$. Пусть α_k и $\mathcal{M}'_k$ определены. Рассмотрим множество линейных зависимостей

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{M}_{k+1} &\to \Delta \\ M_i &\mapsto \alpha(M_i) \in \mathrm{conv}\Delta^{m_i} \qquad \text{для всех } i \in [k+d+1], \\ \sum_{i \in [k+d+1]} & M_i \alpha(M_i) = 0, \end{aligned}$$

для которых из $M \in \mathcal{M}'_k$ вытекает $\alpha(M) = \alpha_k(M)$. Это множество непусто, так как оно содержит по крайней мере α_k, доопределенная при M_{k+d+1} значением

$$\alpha_k(M_{k+d+1}) = \frac{1}{m_{k+d+1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^T}_{m_{k+d+1} \text{ единиц}}.$$

Из всех таких линейных зависимостей α рассмотрим ту, для которой среди векторов множества $\alpha(\mathcal{M}_{k+1})$ присутствует максимальное суммарное количество нулевых элементов.

Обозначим

$$I := \{i \in [k+d+1] : M_i \in \mathcal{M}_{k+1} \setminus \mathcal{M}'_k\}.$$

Заметим, что тогда существует отображение $\alpha' : \mathcal{M}_{k+1} \setminus \mathcal{M}'_k \to \Delta$, для которого совместна система

$$\sum_{i \in I} M_i \alpha'(M_i) = 0, \tag{5}$$

где для каждого $i \in I$

7. сумма элементов вектора $\alpha'(M_i)$ равна нулю;
8. j-я координата $\alpha'(M_i)$ ноль, если j-я координата $\alpha(M_i)$ ноль;
9. не все векторы $\alpha'(M_i)$ равны нулевому вектору.

Действительно, $|I| = d+1$, $M_i \in \mathbb{R}^{d \times m_i}$, $\alpha'(M_i) \in \mathbb{R}^{m_i \times 1}$, количество условий l_i, ограничивающих $\alpha'(M_i)$, не превосходит $m_i - 1$ и

$$\sum_{i \in I} m_i > \sum_{i \in I} m_i - |I| + d \geq \sum_{i \in I} l_i + d,$$

следовательно, по лемме 9 получим, что система (5) и условия 7-9 совместимы.

Умножая линейную комбинацию из (5) на действительное t и просуммировав с нулевой линейной комбинацией для α получим, что для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i \in I} M(\alpha(M_i) + t\alpha'(M_i)) + \sum_{i \notin I} M_i \alpha(M_i) = 0.$$

Если $\alpha(M_i) \notin \Delta^{m_i}$ для всех $i \in I$, то при некотором значении t все векторы $\alpha(M_i) + t\alpha'(M_i)$ все еще будут из $\mathrm{conv}\Delta^{m_i}$, но некоторый из них приобретет лишний ноль, нарушая таким образом условие максимальности количества нулевых элементов среди векторов $\alpha(M_i), i \in [k+d+1]$. Значит, $\alpha(M_i) \in \Delta^{m_i}$ для некоторого $i \in I$, и можно взять $\alpha_{k+1} = \alpha$.

Далее, пусть $\mathcal{M}_{n-d} \setminus \mathcal{M}'_{n-d} = \{M_{i_1}, \ldots, M_{i_d}\}, i_1 < i_2 < \cdots < i_d$. Обозначим $u_i := M_i \alpha_{n-d}(M_i)$ для $i \in [n]$.

Применяя лемму 10 для каждой $u_{i_j} \in \mathrm{conv}V_{i_j}, j \in [d]$ найдем точки $v_{i_j} \in V_{i_j}, j \in [d]$ со свойством

$$\|u_{i_j} - v_{i_j}\|_2 \leq 1 \qquad \text{для всех } j \in [d].$$

Положим $T^0 = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_d}\}$ и

$$T = T^0 \cup \{u_i \in V_i : i \in [n] \setminus \{i_1, \ldots, i_d\}\}.$$

Тогда для всех $k \in [n] \setminus [d]$

$$\begin{aligned}\left\|s(T_{[k]})\right\|_2 = \left\|s(T_{[k]}) - \sum_{i \in [k]} u_i\right\|_2 &= \left\|s\left(T^0_{\{i_j \leq k\}}\right) - \sum_{i_j \leq k} u_{i_j}\right\|_2 \\ &\leq \sum_{i_j \leq k} \left\|v_{i_j} - u_{i_j}\right\|_2 \leq d,\end{aligned}$$

а для всех $k \in [d]$

$$\|s(T_{[k]})\|_2 \leq k \leq d.$$

□

Список литературы

[1] Imre Bárány, Victor S. Grinberg, On Some Combinatorial Questions in Finite-Dimesnional Spaces, *Linear Alg. Appl.*, 41 (1981), 1-9.

[2] Imre Bárány, On the Power of Linear Dependencies, *Building Bridges*, 19 (2008), 31-45.

[3] Gergely Ambrus, Rainie Bozzai, Colorful Vector Balancing, arXiv:2302.10865 (2023).

[4] Ben Lund, Alexander Magazinov, The sign-sequence constant of the plane, *Acta Math. Hungar.*, 151 (1) (2017), 117–123.

[5] Joel Spencer, Balancing unit vectors, *Journal of Combinatorial Theory*, 30 (1981), 349–350.

[6] Aryeh Dvoretzky, Problem, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 7, Convexity*, (1963), 496