(4) Para un oscilador amortiguado forzado de masa m, con frecuencia natural w_0 cuya magnitud de fuerza de forzamiento es F_0 y su coeficiente de amortiguamiento es β se tiene que la amplitud de elongación es:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + \beta^2 w^2}} \quad \text{con} \quad w_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = w_n$$

Dividiendo y multiplicando por w_0^2:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{w_0^4\left(1-(w/w_0)^2\right)^2 + \beta^2 w^2}} \cdot \frac{\frac{1}{w_0^2}}{\frac{1}{w_0^2}}$$

Factorizando:

$$A = \frac{F_0/K}{\sqrt{\left(1-(w/w_0)^2\right)^2 + (\beta/w_0)^2 (w/w_0)^2}}$$

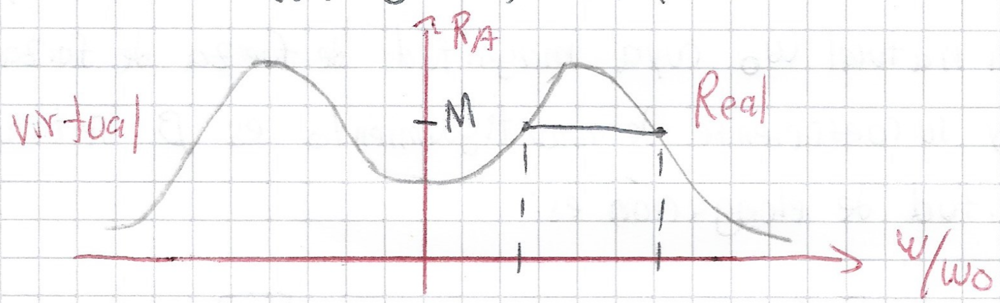
Expresando la relación de amortiguación (R_A):

$$\boxed{R_A = \frac{A}{(F_0/K)} = \left[\left(1-(w/w_0)^2\right)^2 + (\beta/w_0)^2 (w/w_0)^2\right]^{-1/2}}$$

Entonces a partir de la amplitud de elongación es posible hallar la relación de amortiguación en función del cociente de frecuencias w/w_0.

Aclaración: El cociente β/w_0 es un valor constante.

La gráfica de R_A, en general, tiene la forma:



Sin embargo recordemos que no hay frecuencias negativas, entonces solo se tiene en cuenta el primer cuadrante. Ahora, hallando las frecuencias que corresponden a un mismo factor de magnificación (M), usando la relación hallada y suponiendo un valor M:

$$M = \left[(1-(w/w_0)^2)^2 + (\beta/w_0)^2 (w/w_0)^2 \right]^{-1/2}$$

Despejando w/w_0:

$$\frac{1}{M^2} = (1-(w/w_0)^2)^2 + (\beta/w_0)^2 (w/w_0)^2$$

$$1/M^2 = 1 - 2(w/w_0)^2 + (w/w_0)^4 + (\beta/w_0)^2 (w/w_0)^2$$

$$(w/w_0)^4 + ((\beta/w_0)^2 - 2)(w/w_0)^2 + 1 - 1/M^2 = 0$$

Donde se obtiene una ecuación de grado 4, es decir que hay 4 valores de w/w_0 donde hay un mismo factor de magnificación M. Pero recordando que no hay frecuencias negativas y la simetría de la función se tendrá entonces que las frecuencias que corresponden a un mismo factor M, van de a pares y tienen la forma:

$$(w/w_0)^2 + [(\beta/w_0) - 2](w/w_0) + 1 - 1/M^2 = 0$$

Es decir:

$$\boxed{\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{2-(\beta/\omega_0) \pm \sqrt{[(\beta/\omega_0)-2]^2 - 4(1-1/M^2)}}{2}}$$

Adicionalmente se aclara que la principal contribución a que la gráfica de R_A tenga dos valores de ω/ω_0 para un mismo factor de magnificación se debe al termino:

$$(1-(\omega/\omega_0)^2)^2$$

Que está presente en R_A. El caso donde lo anterior deja de cumplirse es en caso límite de altas frecuencias ya que cuando $\omega \to \infty$ ocurre que $R_A \to 0$.