Suite du TD 2 d'algèbre

MPI

Exercise 1 On définit sur $\mathbb{Z}^2$ deux lois de composition internes notées $+$ et $*$ par :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (1)$$

$$(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc) \quad (2)$$

1. Montrer que $(\mathbb{Z}^2, +, *)$ est un anneau commutatif.
2. Montrer que $A = \{(a, 0), a \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Z}^2, +, *)$.

Exercise 2
1. Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, résoudre l'équation $x^2 = x$.
2. Trouver les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Exercise 3 Soit $(A, +, .)$ un anneau tel que $\forall x \in A$, on a $x^2 = x$
1. Montrer que $\forall x \in A$, $x + x = 0$ et que A est commutatif.
2. Montrer que la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur A par :

$$x\mathcal{R}y \;\; ssi \;\; x.y = x$$

   est une relation d'ordre sur A.
3. On suppose que A est intègre. Montrer que A contient au plus deux éléments.

Exercise 4 Soit A un anneau. On appelle centre de A l'ensemble

$$C = \{a \in A, \forall x \in A, ax = xa\}$$

1. Montrer que C est un sous anneau de A.
2. On désigne par U le groupe des éléments inversibles de A.

   A tout $a \in U$, on associe $f_a : A \longrightarrow A$ tel que $f_a(x) = axa^{-1}$

   Montrer que f_a est un automorphisme de l'anneau A.

Exercise 5 On dit qu'un élément a d'un anneau A est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ telque $a^n = 0$.
1. Montrer que si a est nilpotent alors $1 - a$ est inversible. Trouver $(1 - a)^{-1}$.
2. Montrer que si ab est nilpotent alors ba l'est aussi.

Exercise 6 On munit $\mathbb{R}$ des opérateurs $\oplus$ et $\otimes$ définies par :
$x \oplus y = x + y - 1$ et $x \otimes y = x + y - xy$.

Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ est un corps.

Exercise 7 Soient $E_{\sqrt{5}} = \{a + b\sqrt{5}; a \text{ et } b \in \mathbb{Q}\}$ et $E_{\sqrt{7}} = \{a + b\sqrt{7}; a \text{ et } b \in \mathbb{Q}\}$
$f : E_{\sqrt{5}} \longrightarrow E_{\sqrt{7}}$ tel que $f(a + b\sqrt{5}) = a + b\sqrt{7}$.

Montrer que $E_{\sqrt{5}}$ et $E_{\sqrt{7}}$ sont des corps.

L'application f est-elle un isomorphisme de corps ?

Exercise 8 Soit $(A, +, .)$ et $(B, +, .)$ deux anneaux.

On munit l'ensemble $A \times B$ des lois de composition internes suivantes :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$
$$(a, b).(a', b') = (aa', bb')$$

1. Vérifier que $(A \times B, +, .)$ est un anneau.
2. Si A et B sont des corps en est-il de même pour $A \times B$?

Exercise 9 Soient $\mathbb{Z}[i] = \{m + in;\ (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$
et $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib;\ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau intègre qui n'est pas un corps.
2. Montrer que $\mathbb{Q}[i]$ est le corps des fractions de $\mathbb{Z}[i]$ (c-à-d $\forall z \in \mathbb{Q}[i]$, $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}[i] \times (\mathbb{Z}[i] - 0)$ tel que $z = \frac{\alpha}{\beta}$)

Algèbre Suite Serie 2

Exercice 1:

1°) $(\mathbb{Z}^2, +, *)$

$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

$(a,b) * (c,d) = (ac, ad+bc)$

$(\mathbb{Z}^2, +)$ grp abelien → + : lci sur $\mathbb{Z}^2$ car $a, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+c \in \mathbb{Z}$

→ associativité : $[(a,b)+(c,d)]+(e,f) = (a,b)+[(c,d)+(e,f)]$

→ Comm: car le + des réels comm.

→ $(a,b)+(0,0) = (a+0, b+0) = (0,0)$: élément neutre

→ $(a,b)+(-a,-b) = (0,0)$

$*$ associative : $[(a,b)*(c,d)]*(e,f) = ((ac)e, (ac)f + (ad+bc)e)$

$(a,b)*[(c,d)*(e,f)] = (a(ce), a(cf+de)+b(ce))$

$[(a,b)*(c,d)] + [(a,b)*(e,f)]$?

$(a,b)*[(c,d)+(e,f)] = (a(c+e), a(d+f)+b(c+e))$

$[(a,b)*(c,d)] + [(a,b)*(e,f)] = (ac, ad+bc) + (ae, af+be)$

$= (ac+ae, ad+bc+af+be)$

$= (a(c+e), a(d+f)+b(c+e))$

2°) Comm: $(a,b)*(c,d) = (ac, ad+bc)$

$(c,d)*(a,b) = (ca, cb+da)$) =

2°) $A = \{(a,0) ; a \in \mathbb{Z}\}$

$(A,+)$ sg $(\mathbb{Z}^2,+) \Rightarrow (a,0) + [-(a',0)] = (a,0)+(-a',0)$

$= (a-a', 0) \in A$

$(a,0)*(a',0) = (aa', a0+0a') = (aa', 0) \in A$

Exercice 2°

1°) $\left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times\right)$ Anneau commutatif unitaire

$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = \bar{0}$

$\Rightarrow x \times (x - \bar{1}) = \bar{0}$

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

Conclusion: $x^2 = x$ ds $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$

2°) $f : \underset{\langle 1 \rangle}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{Z}}} \longrightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Supp que : $f(1) = \bar{k_0}$

$\Rightarrow f(n) = f(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{ fois}})$

$= \underbrace{f(1) + f(1) + \dots + f(1)}_{n\text{ fois}}$

$= n f(1)$

$= n\, \bar{k_0}$

$= \overline{nk_0}$

$f(1) = f(1 \times 1) = f(1) \times f(1) = f(1)^2 \Rightarrow f(1) \in \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$

$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
$1 \mapsto \bar{0}$
$n \mapsto \bar{0}$

$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
$1 \mapsto \bar{1}$
$n \mapsto \bar{n}$

$f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
$1 \to 3$
$n \to \overline{3n}$ $\begin{cases} n = 2p : \bar{3} \\ n = 2p : \bar{3} \end{cases}$

$f_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
$1 \mapsto \bar{4}$
$n \mapsto \overline{4n}$

Algèbre Suite Serie 2(2)

Exercice 3:

$(A, +, \circ)$ anneau

1°) Mq $\forall x \in A$, $x + x = 0_A$

$(x+x)^2 = x + x$

$(x+x)\circ(x+x) = x+x$

$x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = x + x$

$x + x + x + x = x + x$

$x + x = 0_A$

$x = -x$

$(-x)^2 = x^2$

$\Rightarrow -x = x$

$\forall x, y$, $x \circ y = y \circ x$?

$(A, +, \circ)$ anneau unitaire / $\forall x \in A$, ~~$x+x=0_A$~~ $x^2 = x$

$(x+y)^2 = x^2 + x \circ y + y \circ x + y^2$

$\Rightarrow x + y = x + y + x . y + y . x$

$\Rightarrow 0_A = x \circ y + y \circ x$

$\Rightarrow y \circ x = -(x \circ y)$

$\Rightarrow x . y = y . x$

2°) $x R y \Leftrightarrow x \circ y = x$

- $x^2 = x \Rightarrow x \circ x = x \Rightarrow x R x \Rightarrow R$ reflexive
- $\begin{cases} x R y \\ y R x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \circ y = x \\ y \circ x = y \end{cases}$

Or $x \circ y = y \circ x \Rightarrow x = y \Rightarrow R$ Antisym.

- $\begin{cases} x R y \\ y R z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \circ y = x \\ y \circ z = y \end{cases}$
- $x \circ z = x \circ y \circ z = x . y = x \Rightarrow R$ transitive

Aintègre

3°) $x^2 = x \Leftrightarrow \cancel{x.x = 0_A}$

$\Rightarrow x^2 - x = 0_A$

$\Rightarrow x(x-1) = 0_A$

$\Rightarrow x = 0_A$ ou $x = 1_A$

$\Rightarrow x = 0_A$ ou $x = 1_A$

Exercice 5:

$(A, +, \cdot)$ anneau (unitaire)

$a \in A$ nilpotent ssi $\exists n \in \mathbb{N}^* / a^n = 0_A$

1°) $a \in A$ nilpotent $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* / a^n = 0$?

$(a^n - 1) = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$

$1 = (1-a)(a^{n-1} + \dots + a + 1)$

$\Rightarrow 1-a$ est inversible et $(1-a)^{-1} = a^{n-1} + \dots + a + 1$

2°) ab nilpotent $\Rightarrow (ab)^n = 0$

$(b \cdot a)^{n+1} = \underbrace{b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot \dots \cdot b \cdot a}_{1+n \text{ fois}}$

$= b \cdot (a \cdot b)^n \cdot a$

$= b \cdot 0 \cdot a$

$= 0$

Exercice