I.N.S.A.T

MPI
Septembre 2015

N.Hmida-M.Errokh

Travaux dirigés d'Algèbre

SERIE 1

Exercice 1

Donner la négation des propositions suivantes:

1- Soient P et Q deux propositions dépendantes de x et y.

$$\forall\, x \quad \exists\, y \quad \text{tel que} \quad P \cap Q \text{ est vrai}$$

2- Soit I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$

2.1- $\forall x \in I; \quad f(x) \neq 0$

2.2- $\exists M \in \mathbf{R}; \quad \forall x \in I \quad |f(x)| \leq M$

Exercice 2

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. Déterminer les ensembles:

- $(A \cap B) \cup (A^c \cap B)$
- $(A^c \cap B)^c \cap (A \cap B)^c$
- $(A \cap B) \cup (A^c \cap C) \cup [(A^c \cup B) \cap (A \cup C)]^c$

Exercice 3

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.Montrer que:

- $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$
- $A \cap B = A \cap C \iff A \cap B^c = A \cap C^c$
- $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$

Exercice 4

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.Montrer que les sous ensembles $A \cap B$; $C_A(A \cap B)$; $C_B(A \cap B)$ et $C_E(A \cup B)$ forment une partition de E

Exercice 5

Dans $\mathbf{N}^*$, on définit la relation $p \mathcal{R} q \iff \exists n > 0 / p^n = q$

1- Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. total ou partiel?

2- Montrer que la partie $\{2, 3\}$ n'est pas majorée par cette relation

Exercice 6

Dans $\mathbf{R}^2$, on définit la relation

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Longleftrightarrow x^2+y^2 = x'^2+y'^2$$

1- Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2- Déterminer les classes d'équivalences de $(0,0); (1,1)$ et $(1,2)$

Exercice 7

Donner s'il existe le Sup, Inf, Max et Min de chacuns des ensembles suivants:

$$E = [a,b[; \quad E =]a,b[; \quad E = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbf{N}^*\}$$

$$E = \{2n; n \in \mathbf{N}^*\}; \quad E = \mathbf{R}_+; \quad \mathbf{R}_-; \quad \mathbf{R}$$

Exercice 8

1- Soient $A \subset B$ deux parties non vides de $\mathbf{R}$ telque B est majorée.

1.1- Montrer que A est majorée et que $Sup(A) \leq Sup(B)$

1.2- Trouver un résultat semblable pour les bornes Inférieures

2- Soient A et B deux parties non vides, bornées de $\mathbf{R}$

2.1- Montrer que $Sup(A \cup B) = Max(Sup(A), Sup(B))$

2.2- On définit $A_- = \{-x/x \in A\}$. Montrer que $inf(A_-) = -Sup(A)$

Exercice 9

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1- Soient A et B deux parties de E. Montrer que:

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$A \subset f^{-1}(f(A))$ et qu'on a l'égalité ssi f est injective

2- Soient X et Y deux parties de F. Montrer que:

$$X \subset Y \Rightarrow f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$$

$$f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(X^c) = f^{-1}(X)^c$$

$f(f^{-1}(X)) \subset X$ et qu'on a l'égalité ssi f est surjective

Exercice 10

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications. Montrer que:

1- Si gof est injective alors f est injective

2- Si gof est surjective alors g est surjective

3- En déduire que si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ trois applications tq gof et hog sont bijectives alors f, g et h sont bijectives

Exercice 11

Soient E, F et G trois ensembles et $f : F \longrightarrow G$ une application. Montrer que:

1- f est injective ssi

$$\forall (g, h) \in (F^E)^2; fog = foh \Rightarrow g = h$$

2- Si $card(H) \geq 2$, f est surjective ssi

$$\forall (g, h) \in (E^G)^2; gof = hof \Rightarrow g = h$$

Exercice 12

Soient les applications

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ & k & \longrightarrow & 2k \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g : & \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ & k & \longrightarrow & \begin{cases} \dfrac{k}{2} & si\ k\ est\ pair \\ \dfrac{(k-1)}{2} & si\ k\ est\ impair \end{cases} \end{array}$$

1- Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g

2- Déterminer les applications gof et fog et étudier leurs injectivités, surjectivités et bijectivités

Algèbre Serie 1(2)

Exercice 3(2)

- $A\cap B = A\cap C \Leftrightarrow A\cap B^c = A\cap C^c$

"$\Rightarrow$": On a $A\cap B = A\cap C$

Il faut $A\cap B^c \subset A\cap C^c$ et $A\cap C^c \subset A\cap B^c$

B & C jouent le m rôle donc il suffit de montrer une seule inclusion

Soit $x\in A\cap B^c \Rightarrow x\in A$ et $x\notin B$

On veut montrer que $x\in A\cap C^c \Rightarrow x\in A$ et $x\notin C$

Supp que $x\in C \Rightarrow x\in A\cap C$

$\Rightarrow x\in A\cap B$

$\Rightarrow x\in B$ absurde donc $x\notin C$

"$\Leftarrow$": On vient de montrer que si $A\cap B = A\cap C \Rightarrow A\cap B^c = A\cap C^c$

On a $A\cap B^c = A\cap C^c \Rightarrow A\cap (B^c)^c = A\cap (C^c)^c$

$\Rightarrow A\cap C = A\cap B$

2ème méthode: $A\cap B = A\cap C \Rightarrow A^c\cup B^c = A^c\cup C^c$

$\Rightarrow A\cap (A^c\cup B^c) = A\cap (A^c\cup C^c)$

$\Rightarrow (A\cap A^c)\cup(A\cap B^c) = (A\cap A^c)\cup(A\cap C^c)$

$\Rightarrow A\cap B^c = A\cap C^c$

- $A\Delta B = A\Delta C \Rightarrow B = C$

Si $x\in A \Rightarrow x\in A\cap B$

$\Rightarrow x\notin A\Delta B$

$\Rightarrow x\notin A\Delta C$

$\begin{cases} x\in A \\ x\notin A\Delta C \end{cases} \Rightarrow x\in A\cap C \Rightarrow x\in C$

Cl: $B\subset C$

- Soit $x\in B$

Si $x\notin A$

$\Rightarrow x\in A\Delta C$

$\Rightarrow$ ~~$x\in A$~~ et $x\notin C$

ou

$x\in C$ et $x\notin A$

$\Rightarrow x\in C$

Cl: $B\subset C$

Exercice 4:

$A, B \in \mathcal{P}(E)$

$(A \cap B) \cup C_A(A \cap B) \cup C_B(A \cap B)$

$= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

$= [A \cap (B \cup B^c)] \cup (B \cap A^c)$

$= A \cup (B \cap A^c)$

$= (A \cup B) \cap (A \cup A^c)$

$= A \cup B$

$\Rightarrow (A \cap B) \cup C_A(A \cap B) \cup C_B(A \cap B) \cup C_E(A \cup B) = E$

$(A \cap B) \cap C_A(A \cap B) = \emptyset$

$(A \cap B) \cap C_B(A \cap B) = \emptyset$

$(A \cap B) \cap C_E(A \cup B) = \emptyset$ car $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

$C_A(A \cap B) \cap C_E(A \cup B) = \emptyset$ car $C_A(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

$C_B(A \cap B) \cap C_E(A \cup B) = \emptyset$ car $C_B(A \cap B) \subset B \subset (A \cup B)$

$C_A(A \cap B) \cap C_B(A \cap B) = (A \cap B^c) \cap (B \cap A^c) = (A \cap A^c) \cap (B \cap B^c) = \emptyset$

Algèbre Serie 1(3)

Exercice 5 :

$E = \mathbb{N}^*$

$pRq \Rightarrow \exists n \in E$ tq $p^n = q$

1°) • Reflexive : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, Mq pRp ?

$p^1 = p$ alors pRp Vrai

• Antisymétrique : soit p et $q \in \mathbb{N}^*$ tq pRq et qRp

$\Rightarrow \begin{cases} \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } p^n = q \\ \exists n' \in \mathbb{N}^* \text{ tq } q^{n'} = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^n = q \\ (p^n)^{n'} = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^n = q \\ p^{nn'} = p \end{cases}$

$p^{nn'} = p \Rightarrow \begin{cases} nn' = 1 \Rightarrow n = n' = 1 \\ \text{ou} \\ p = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} p^n = q \Rightarrow p^1 = q \Rightarrow p = q \\ \text{ou} \\ p = 1 \quad 1^n = q \Rightarrow q = 1 \Rightarrow p = q \end{cases}$

Vrai

• transitive : Vrai

• $1 \not R 2$ car $1^n = 1 \neq 2$

$2 \not R 1$ car $2^n \geq 2 \Rightarrow 2^n \neq 1$

$\Rightarrow$ Ordre partiel

2°) $A = \{2, 3\}$

Supp. que A est majorée

$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{N}^* / \forall x \in A, xRM$

$\begin{cases} 2RM \\ 3RM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^n = M \\ 3^{n'} = M \end{cases} \Rightarrow 2^n = 3^{n'}$ imp. car $2 \wedge 3 = 1$

$\Rightarrow A$ non majorée

Exercice 6 :

$(x,y) \mathcal{R} (x',y') \iff x^2+y^2 = x'^2+y'^2$

1°) Reflexive : $(x,y) \mathcal{R} (x,y)$ car $x^2+y^2 = x^2+y^2$

symetrique : $(x,y) \mathcal{R} (x',y') \Rightarrow (x',y') \mathcal{R} (x,y)$

car $x^2+y^2 = x'^2+y'^2 \Rightarrow x'^2+y'^2 = x^2+y^2$

transitive : $\begin{cases} (x,y) \mathcal{R} (x',y') \\ (x',y') \mathcal{R} (x'',y'') \end{cases} \Rightarrow (x,y) \mathcal{R} (x'',y'')$

car $\begin{cases} x^2+y^2 = x'^2+y'^2 \\ x'^2+y'^2 = x''^2+y''^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = x''^2+y''^2$

2°) $\overline{(x,y)} = \{(x',y') \, ; \, (x,y) \mathcal{R} (x',y')\}$
$= \overline{(x',y')}$

$\overline{(0,0)} = \{(x,y) \,/\, (x,y) \mathcal{R} (0,0)\}$
$= \{(x,y) \,/\, x^2+y^2 = 0\}$
$= \{(0,0)\}$

$\overline{(1,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 = 2\}$
$= \mathcal{C}(0,\sqrt{2})$

$\overline{(1,2)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x,y) \mathcal{R} (1,2)\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 = 5\}$

$= \mathcal{C}(0,\sqrt{5})$

Algèbre Serie 1(4)

Exercice 1:

- $A = \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^*\}$

On a $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{n} \leq 1$

$\Rightarrow$ E majorée et minorée par 1 et 0

$\Rightarrow \sup A \leq 1$ et $\inf(A) \geq 0$

$1 = \frac{1}{1} \in E \Rightarrow 1 \leq \sup A$ donc $1 = \sup A$

$1 \in A \Rightarrow 1 = \max A = \sup A$

- Supp. que $\inf A \neq 0 \Rightarrow \inf A > 0$

Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 / \forall n \geq n_0, \frac{1}{n} < \varepsilon$

En particulier $\varepsilon = \inf A$ absurde $\varepsilon \in (\frac{1}{n} \in A)$

Donc $\inf A = 0$

2ème Methode $(\inf A)$

$\inf A \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\inf(A)} > 1 \Rightarrow \underbrace{E\left(\frac{1}{\inf A}\right) + 1}_{\mathbb{N}} > \frac{1}{\inf(A)}$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{N}}_{\in A} < \inf(A)$ Absurde

- $E =]0, +\infty[$

E minorée par 0 car $\forall x \in E, x > 0 \Rightarrow \operatorname{Inf} A \geq 0$

Supp $\operatorname{Inf}(E) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Inf} E > 0 \Rightarrow 0 \leq x = \frac{\operatorname{Inf} E}{2} < \operatorname{Inf} E$

$\underset{E}{\cap}$

absurde

$\Rightarrow \inf E = 0$

E non majorée $\Rightarrow \sup A \nexists$

Supp $\exists M = \sup A \Rightarrow \forall x \in A \quad x \leq M$

Or $M + 1 \in]0, +\infty[$ et ~~xxx~~ $M + 1 > M$

absurde

Exercice 8.

1°) 1.) $A \subset B$ et B majorée

$\forall x \in A, x \in B \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \leq \sup B$

$\Rightarrow A$ est majoré par $\sup B$

$\Rightarrow \sup A \leq \sup B$

2.) $A \subset B$ et B minorée

$\forall x \in A, x \in B \Rightarrow x \geq \operatorname{Inf} B \Rightarrow A$ minoré par $\operatorname{Inf} B$

Or $\operatorname{Inf} A$ est le plus grand des minorants

$\Rightarrow \operatorname{Inf} A \geq \operatorname{Inf} B$

2°) 1°) A et B bornées

$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ ou $x \in \sup B$

$\Rightarrow x \leq \sup A$ ou $x \leq \sup B$

$\Rightarrow x \leq \operatorname{Max}(\sup A, \sup B)$

$\Rightarrow A \cup B$ majorée par $\operatorname{Max}(\sup A, \sup B)$

$\Rightarrow \sup(A \cup B) \leq \operatorname{Max}(\sup A, \sup B)$ car c'est le plus petit des maj

Algèbre Serie 1 (5)

Exercice 8 (2)

$A \subset A \cup B$ et $A \cup B$ maj

donc $\sup A \leq \sup(A \cup B)$

de m $\sup B \leq \sup(A \cup B)$

$\Rightarrow \max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$

$\Rightarrow \max(\sup A, \sup B) = \sup(A \cup B)$

2°/2) $A_- = \{-x \;/ x \in A\}$

$\operatorname{Inf}(A_-) = -\sup(A)$???

$-x \in A_- \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \leq \sup A \Rightarrow -x \geq -\sup A$

$\Rightarrow A_-$ minorée par $-\sup A \Rightarrow \operatorname{Inf}(A_-) \geq -\sup(A)$

Il reste de Mq $\operatorname{Inf} A_- \leq -\sup A \Rightarrow \sup A \leq -\operatorname{Inf} A_-$

$x \in A \Rightarrow -x \in A_- \Rightarrow -x \geq \operatorname{Inf}(A_-)$

$\Rightarrow x \leq -\operatorname{Inf}(A_-)$

$\Rightarrow A$ maj. par $-\operatorname{Inf}(A_-)$

$\Rightarrow \sup A \leq -\operatorname{Inf}(A)$

$\Rightarrow \operatorname{Inf}(A_-) \leq \sup(A)$

$\Rightarrow \operatorname{Inf} A_- = \sup A$

Exercice 9:

1°) • $A \subset B$

Soit $y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A / f(x) = y$

Or $A \subset B \Rightarrow x \in B$ et $f(x) = y$

$\Rightarrow y \in f(B)$

• $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$?

Soit $y \in f(A \cap B) \Rightarrow \exists x \in A \cap B / y = f(x)$

$\Rightarrow \exists x \in A$ et $x \in B$ / $y = f(x)$

$\Rightarrow \begin{cases} y \in f(A) \\ y \in f(B) \end{cases}$

$\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$

$\Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

• $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$?

Soit $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow \exists x \in A \cup B / f(x) = y$

$\Leftrightarrow \exists x \in A$ ou $x \in B$ tq $f(x) = y$

$\Leftrightarrow y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$

$\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$

$\Rightarrow f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$

• $a \in A \Rightarrow y = f(a) \in f(A)$

$f^{-1}(f(A)) = \{t \in E \text{ tq } f(t) \in f(A)\}$

$\Rightarrow A \in f^{-1}(f(A))$

$\Rightarrow A \subset f^{-1}(f(A))$

~~• Injective~~ $x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow f(x) \in f(A)$

$\Rightarrow \exists t \in A$ tq $f(t) = f(x)$

Si f inj $\Rightarrow t = x \Rightarrow x \in A \Rightarrow f^{-1}(f(A)) \subset A$

Algèbre Serie 1(6)

Exercice 9(2)

2) • $t \in f^{-1}(X) \Rightarrow f(t) \in X$

or $\Rightarrow X \subset Y$

$\Rightarrow f(t) \in Y$,

$\Rightarrow t \in f^{-1}(Y)$

• $t \in f^{-1}(X \cap Y) \Leftrightarrow f(t) \in (X \cap Y)$

$\Leftrightarrow f(t) \in X$ et $f(t) \in Y$

$\Leftrightarrow t \in f^{-1}(X)$ et $t \in f^{-1}(Y)$

~~$\Rightarrow t \in X \cap Y$~~

$\Leftrightarrow t \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

$\Rightarrow f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

• $f^{-1}(X^c) = \{t \in E \text{ tq } f(t) \in X^c\}$

$= \{t \in E \text{ tq } f(t) \notin X\}$

$(f^{-1}(X))^c = \{t \notin f^{-1}(X)\}$

$= \{t \in E \text{ tq } f(t) \notin X\}$

$f^{-1}(X) = \{t \in E \text{ tq } f(t) \in X\}$

$\Rightarrow f^{-1}(X)^c = f^{-1}(X^c)$

• $y \in f(f^{-1}(X)) \Rightarrow \exists t \in f^{-1}(X)$ tq $y = f(t)$

$\Rightarrow \exists t \in$ tq $f(t) \in (X)$ et $y = f(t)$

$\Rightarrow y \in X$

Exercice 12 :

1°) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$k \mapsto 2k$

- f inj car $f(k_1) = f(k_2)$
$\Rightarrow 2k_1 = 2k_2$
$\Rightarrow k_1 = k_2$

- f n'est pas surj.
$1 \in \mathbb{N}$
$f(k) = 1 \Rightarrow 2k = 1$
$\Rightarrow k = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$k \mapsto \begin{cases} \frac{k}{2} \text{ si } k \text{ pair} \\ \text{sinon } \frac{k-1}{2} \end{cases}$

$g(2) = 2$, $g(3) = \frac{3-1}{2} = 2$
$\Rightarrow$ non ~~surj~~ inj

$k \in \mathbb{N}$ On a $g(2k) = k$
Donc g surj

2°) $g \circ f : \mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$
$k \mapsto 2k \mapsto k$

$g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$ bij

$f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
$k \mapsto \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{k-1}{2} & \text{sinon} \end{cases} \mapsto \begin{cases} k \text{ si } k \text{ pair} \\ k-1 \text{ si } k \text{ impair} \end{cases}$

$\begin{cases} f \circ g\,(2) = 2 \\ f \circ g\,(3) = 2 \end{cases}$ non bij

non surj : $0 \mapsto 0$
$1 \mapsto 0$
$2 \mapsto 2$
$3 \mapsto 2$

Exercice 10 :

1°) $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2))$

$\Rightarrow g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2)$

$\Rightarrow x_1=x_2$

$\Rightarrow f$ inj

$g\circ f$ surj $\Rightarrow g$ surj ?

$y\in G$ Mq $\exists x\in F \,/\, g(x)=y$?

$y\in G$ $g\circ f : \underset{t}{\overset{}{E}} \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} \underset{y}{G}$

$g\circ f$ surj $\Rightarrow \exists t\in E$ tq $g\circ f(t)=y$

$\Rightarrow g(\underbrace{f(t)}_{x})=y$

Exercice 11 :

1°) "$\Rightarrow$" : soit f inj.

Soit $g, h : E\to F$ vérifiant $f\circ g=f\circ h$

Mq $g=h$?

$f\circ g=f\circ h \Rightarrow \forall x\in E, f\circ g(x)=f\circ h(x)$

$\Rightarrow \forall x\in E, f(g(x))=f(h(x))$

Or f inj

$\Rightarrow \forall x\in E, h(x)=g(x)$

$\Rightarrow g=h$

"$\Leftarrow$" : on a une appf vérifiant $\forall g,h, f\circ g=f\circ h \Rightarrow g=h$

Mq f est inj

Soit $f(y_1)=f(y_2)$; $y_1, y_2\in F$

Mq $y_1=y_2$

On choisit

$g : E \to F$, $h : E \to F$

$x \mapsto y_1$ $x \mapsto y_2$

$f \circ g : E \to F \to G$ $f \circ h : E \to F \to G$

$x \mapsto y_1 \mapsto f(y_1)$ $x \mapsto y_2 \mapsto f(y_2) = f(y_1)$

$\Rightarrow f \circ g = f \circ h$

$\Rightarrow g = h$

$\Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow f$ inj

$\Rightarrow$

2) "$\Rightarrow$" On a f surj $\Rightarrow \forall t \in G, \exists y \in F / f(y) = t$

Soient $g, h : G \to E$ vérifiant $g \circ f = h \circ f$

Mq $g = h$?

$\forall t \in G, g(t) = g(f(y)) = g \circ f(y) = h \circ f(y) = h(f(y)) = h(t)$

$\Rightarrow g = h$

"$\Leftarrow$": On a une app. vérifiant $\forall g, h : G \to E : g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$

$g : G \to G$

$t \mapsto t_1$

$h : G \to G$

$t \mapsto \begin{cases} t_1 & \text{si } t \neq t_2 \\ t_2 & \text{si } t = t_2 \end{cases}$

Supp. que f n'est pas surj

$\Rightarrow \exists t_2 \in G$ qui n'a pas d'antécédent

$t_2 \neq f(y)$

Soit $t_1 \in G$ $t_1 \neq t_2$ car card $G \geq 2$

$g \circ f(y) = g(f(y)) = g(t) = t_1$

$h \circ f(y) = h(f(y)) = h(t) = t_1 \neq t_2$

$g \circ f = h \circ f$ et pourtant $g \neq h$

Absurde