1. Ensemble, Relation, Application

1.1. Ensemble opération sur les parties d'un ensembles :

① Inclusion : $F \subset E = \{\forall x \in F \quad x \in E\}$ F dite partie de E

$P(E)$: L'ensemble des partie de E

$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$

② Complémentaire : $\overline{A} = C_E^A = \{\forall x \in E \quad x \notin A\}$

③ Intersection : $A \cap B = \{x \in A \quad et \quad x \in B\}$

$A \cap B \subset A \quad A \cap B = B \cap A \quad E \cap \varnothing = \varnothing \quad E \cap E = E$

④ Réunion : $A \cup B = \{x \in A \quad ou \quad x \in B\}$

⑤ Différence : $A - B = \{x \in A \quad avec \quad x \notin B\}$

$A - B = A \setminus A \cap B = \overline{A \cap B}$

⑥ Différence symétrique : $A \triangleright B = (A - B) \cup (B - A)$

$A \triangleright B = (A \cup B) - (A \cap B)$

⑦ Loi de Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

⑦ Produit cartésien : $E \times F = \{(x, y) \quad x \in E \quad x \in F\} \neq F \times E$

1.2. Application :

① $f : E \mapsto F$ application $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E$ $f(x)$ existe et unique

② Soit $f : E \mapsto F \quad g : A \mapsto F \quad A \subset E \quad A \neq \varnothing \quad \forall x \ f(x) = g(x)$

g est restriction de f noté $g = f_{/A}$

f est prolongement de g noté $f = \tilde{g}$

③ Composition d'application : $g \circ f(x) = g(f(x))$

1.2.1. Application caractéristique :

Soit $A \in P(E), A \neq \varnothing$ et $\chi_A : E \mapsto \{0,1\} \ x \mapsto \begin{cases} 1 \ si \ x \in A \\ 0 \ si \ x \notin A \end{cases}$

① $A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B$

② $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B \qquad \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B} \qquad \chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$

③ $\chi_{A-B} = \chi_A (1 - \chi_B) \qquad \chi_A^2 = \chi_A$

1.2.2. Image directe et image réciproque :

Soit $A \subset E$ et $B \subset F$

① Image directe : $f(A) = \{f(x) \text{ avec } x \in E\}$

② Image réciproque : $f^{-1}(B) = \{x \in E \text{ avec } f(x) \in B\}$

1.3. Application Injective, Surjective, Bijective :

Soit $f : E \mapsto F$ alors on a :

① f Injectif $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in E \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in E \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

② f Surjective $\Leftrightarrow$ $\forall y \in F \ \exists x \in E \ / \ f(x) = y$

③ f Bijective $\Leftrightarrow$ f injectif et surjective

1.4. Lois de composition interne :

On appelle (L.c.i) sur E toute application $*$ de $E \times E$ dans E

① $*$ commutative $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in E \quad x * y = y * x$

② $*$ associative $\Leftrightarrow$ $\forall x, y, z \in E \quad (x * y) * z = x * (y * z)$

③ $*$ admet élément neutre $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E \quad x * e = e * x = x$

Si existe un élément neutre e il est unique

④ x admet élément de symétrie $\Leftrightarrow$ $y \in E \quad x * y = y * x = e$

⑤ $(E, *)$ monoïde $\Leftrightarrow$ $*$ associative et admet un élément neutre

1.5. Relation d'ordre :

① Soit R une relation binaire :

R réflexive si $\forall x \in E$ on a xRx

R antisymétrique si xRy et $yRx \Rightarrow x = y$

R transitive si xRy et $yRz \Rightarrow xRz$

R symétrique si $\forall x, y \in E \quad xRy \Rightarrow yRx$

② R relation d'ordre $\Leftrightarrow$ R réflexive, antisymétrique et transitive

③ R relation d'ordre totale $\Leftrightarrow$ R relation d'ordre symétrique

Si non il dite relation d'ordre partiel

2. Entier naturelle et Dénombrement

2.1. Ensemble finie :

① Cardinal : Soit $E = [\![1, n]\!] \Rightarrow Card(E) = n = |E|$

② Soit $Card(E) = n$ et $A \subset E \Rightarrow Card(A) \leq n$

③ $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$

④ $Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$

⑤ $p > 1 \quad Card(E^p) = (Card(E))^p$

⑥ $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$

⑦ $Card(E^F) = (Card(F))^{Card(E)}$

2.2. Dénombrement :

① Arrangement : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} \qquad A_n^n = n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$

② Combinaison : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!} \qquad \sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n$

$C_n^0 = 1 \quad C_n^n = 1 \quad C_n^1 = n \quad C_n^p = C_n^{n-p}$

③ Relation de Pascal permet de construire le triangle de Pascal

$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \leq p \leq n-1$

④ Formule de binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k a^{n-k}$

3. Structure algébrique

3.1. Groupes :

$(G, *)$ Groupe $\Leftrightarrow$ $*$ associatif, $*$ admet un élément neutre et toute élément de G possède un symétrique dans G

$(G, *)$ Groupe abélien si de plus $*$ comitative

3.1.1. Sous groupes :

Soit $A \subset E$, $A \neq \varnothing$ et $(G, *)$ groupe alors ①②③④équivalant:

① $(A, *)$ sous groupe de $(G, *)$

② A stable ($\forall x, y \in A \Rightarrow x * y \in A$) et $(A, *)$ groupe

③ $e_G \in A$, A stable et $\forall x \in A \quad x^{-1} \in A$

④ $e_G \in A$, A stable et $\forall x, y \in A \quad x * y^{-1} \in A$

(A stable $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in A \Rightarrow x * y \in A$) ($y^{-1}$ le symétrie de y)

3.1.2. Morphisme de groupes :

Soit $(G, *)$ et $(H, +)$ de groupe et $f : (G, *) \mapsto (H, +)$

f morphisme de groupe $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in G \Rightarrow f(x + y) = f(x) * f(y)$

① f morphisme bijectif $\Rightarrow$ f isomorphisme

② f isomorphisme et $G = H$ $\Rightarrow$ f automorphisme

③ Propriété de morphisme de groupe

$f(e_G) = e_H \qquad \forall x \in G \quad f^{-1}(x) = f(x^{-1})$

④ $\mathrm{Im}(f) = f(G)$ sous groupe de H

⑤ $Ker(f) = \{x \in G / \ f(x) = e_H\} = f^{-1}(e_H)$ sous groupe de G

⑥ f injective $\Leftrightarrow$ $Ker(f) = e_G$

3.2. Anneaux :

$(A, +, \cdot)$ Anneaux $\Leftrightarrow$ $(A, +)$ Groupe abélien, $\cdot$ associative, $\cdot$ admet un élément neutre noté 1_A et $\cdot$ distributive par rapport $+$

① Si de plus $\cdot$ commutatif alors $(A, +, \cdot)$ anneaux commutatif

② On note : 0_A élément neutre de $+$ $\qquad 1_A$ élément neutre de $\cdot$

$-x$ élément symétrie de $+$ $\qquad x^{-1}$ élément symétrie de $\cdot$

③ Règle de calcul d'un anneaux : soit $(A, +, \cdot)$ anneaux alors

$\forall a, b \in A \quad a.0_A = 0_A.a = 0_A \quad a(-b) = (-a)b = -(ab) \quad ab = ba$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \qquad a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$

④ a et b diviseur de zéro $\Leftrightarrow$ $a \neq 0$ et $b \neq 0 \Rightarrow ab = 0$

⑤ Soit $(A,+,\cdot)$ anneaux commutatif est un anneaux intègre $\Leftrightarrow$ $\forall a,b \in A \setminus \{0_A\}\ ab \neq 0$

3.2.1. Sous anneaux :

Soit $B \subset A$, $A \neq \varnothing$ et $(A,+,\cdot)$ anneaux alors $(B,+,\cdot)$ sous anneaux de $(A,+,\cdot)$ $\Leftrightarrow$ ① $1_A \in B$

② $\forall x,y \in B\quad x-y \in B$ ③ $\forall x,y \in B\quad x \cdot y \in B$

3.2.2. Morphisme d'anneaux:

Soit $(A,+,\cdot)$ et $(B,*,\times)$ deux anneaux et $f:(A,+,\cdot) \mapsto (B,*,\times)$

f morphisme d'anneaux $\Leftrightarrow$ $\forall x,y \in A\quad f(x+y) = f(x) * f(y)$ et $\forall x,y \in B\quad f(x \cdot y) = f(x) \times f(y)$ et $f(1_A) = 1_B$

① f morphisme et $A = B \Rightarrow f$ endomorphisme

② f morphisme bijectif $\Rightarrow f$ isomorphisme

③ f endomorphisme bijectif $\Rightarrow f$ automorphisme

④ $\mathrm{Im}(f) = f(A)$ sous anneaux de B

⑥ Soit $(A,+,\cdot)$ anneaux donc $U(A) = \{x \in A / \exists x^{-1} \in A\}$ groupe

3.3. Corps:

$(\mathbb{K},+,\cdot)$ Corps $\Leftrightarrow$ $(\mathbb{K},+,\cdot)$ anneaux commutatif avec $\mathbb{K} \neq \varnothing$ et $U(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^* = \mathbb{K}/\{0\}$

① $\mathbb{K}$ corps $\Rightarrow$ $\mathbb{K}$ anneaux commutatif intègre

② Soit $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ alors $\mathbb{L}$ sous corps de $\mathbb{K}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbb{L}$ sous anneaux de $\mathbb{K}$ et $\forall x \in \mathbb{L}/\{0\}\ \exists x^{-1} \in \mathbb{L}\ \backslash x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1_{\mathbb{L}}$

4. Arithmétique dans Z

4.1. Divisibilité dans Z :

Soit $a,b \in \mathbb{Z}$ on dit que a diviseur de b et b multiple de a $\Leftrightarrow$ $\exists q \in \mathbb{Z} \setminus b = qa$ noté a/b $D(a)$ l'ensemble de diviseur de a

① $\forall a \in \mathbb{Z}\quad 1/a\ \ -1/a$ ② $a/b \Leftrightarrow b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$

③ a/b et $b/a \Leftrightarrow |a| = |b|$ ④ $a/b\ \forall c \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a/bc$

⑤ c/a et $d/b \Leftrightarrow cd/ab$ ⑥ a/b et $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a^n/b^n$

⑦ d/a et $d/b \Rightarrow d/ax+by\ \forall x,y \in \mathbb{Z}$

⑧ Division euclidienne : soit $a,b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$ alors $\exists!(q,r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$

4.2. PGCD de deux entiers relatif :

Soit $a,b \in \mathbb{Z}$ alors $PGCD(a,b) = a \wedge b = Max(D(a) \cap D(b)) \geq 1$

① Soit $a > b > 0$ et $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b \Rightarrow a \wedge b = b \wedge r$

② Algorithme pour déterminer le $PGCD$. Soit $a,b \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1 & \dots\ \dots\ \dots \\ b = r_1 q_2 + r_2 & r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-1} + r_{n-1} \\ r_1 = r_2 q_3 + r_3 & r_{n-2} = r_{n-1} q_n + 0 \\ r_2 = r_3 q_4 + r_4 & a \wedge b = r_{n-1} \text{ est le dérnier reste non nul} \end{array}$$

③ Soit $a \wedge b = d$ donc $\exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2\ /\ au + bv = d$

④ Soit $a \wedge b = d$ donc $D(a) \cap D(b) = D(d)$

4.3. Entiers premiers entre eux :

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ alors a et b première entre eux si $a \wedge b = 1$

① Théorème de Bézout :

$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2\ /\ au + bv = d$

(u,v) s'appelle coefficient de Bézout qui ne sont pas unique

② Théorème de Gauss :

Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{Z}^*)^3$ si a/bc et $a \wedge b = 1 \Rightarrow a/c$

③ Soit $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \wedge (n+1) = 1$ (première entre eux)

④ Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{Z}^*)^3$

$a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1 \Leftrightarrow a \wedge bc = 1$

$a \wedge b = 1$ et $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a^n \wedge b^n = 1$

$(E): ax + by = c$ admet des solution dans $\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow a \wedge b / c$

4.4. Nombres premiers :

$p \in \mathbb{N}$ nombre première $\Leftrightarrow$ $p \geq 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, p\}\ \ n \nmid p$

① p/ab et p nombre première $\Leftrightarrow$ p/a ou p/b

② Théorème d'Euclide :

$p = \{\text{nombre premier}\}$ est un ensemble finie

③ Théorème fondamental de l'arithmétique :

Tout $n \in \mathbb{N}\ n \geq 2$ s'écrit $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$

avec $p_1, p_2, \dots, p_n$ nombre première et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}^*$

$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_n + 1)$ dite nombre de diviseur de p

④ Soit $a = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$ et $a = p_1^{\beta_1} \times \dots \times p_n^{\beta_n}$ alors

$PGCD(a,b) = a \wedge b = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \times \dots \times p_n^{\min(\alpha_n, \beta_n)}$

4.4. Congrue :

$a \equiv b[n] \Leftrightarrow a - b$ est multiple de n (ex : $7 \equiv 3[2]$)

① $a \equiv b[n] \Rightarrow b \equiv a[n]$ et $a^k \equiv b^k[n]$

② $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n] \Rightarrow a \equiv c[n]$

③ $a \equiv b[n] \Rightarrow da \equiv db[n]$ et $da \equiv db[dn]$

④ $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n] \Rightarrow a + c \equiv b + d[n]$ et $a.c \equiv b.d[n]$

⑤ Si $a = nq + r \Rightarrow a \equiv r[n]$

5. Espaces vectoriels

Loi de composition externe :

- (L.c.e) si $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E\quad \lambda * x \in E$

5.1. Espaces vectoriels :

Soit $E \neq \varnothing$ +(L.c.i) $\cdot$(L.c.e) alors $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$ ev si

① $(E,+)$ groupe abélien

② $\forall x \in E\ \ 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

③ $\forall x \in E\ \ \forall y \in E\ \ \forall(\alpha,\beta) \in K^2$

$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$

$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

5.2. Sous espaces vectoriels :

Soit $(E,+,\cdot)$ $\mathbb{K}$ ev et $F \subset E$ alors $(F,+,\cdot)$ sev de $(E,+,\cdot)$ si :

① $0_E \in F\quad (F \neq \varnothing)$

② $\forall(x,y) \in F$ et $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}\quad \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F$

Propriété :

Si F et G deux sev de E

① $F \cap G$ sev de E

② $F \cup G$ sev de $E \Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$

5.3. Sommes des sous espaces vectoriels :

Soit F, G deux sev de E

① F et G en somme direct si $F \cap G = \{0_E\}$ au aussi

$\forall x \in F + G\ \ \exists! x_1 \in F\ \ \exists! x_2 \in G$ tel que $x = x_1 + x_2$

② F et G supplémentaire en E noté $E = F \oplus G$ si :

$F \cap G = \{0_E\}$ (somme direct)

$E = F + G$ $(\forall x \in E\ \exists y \in F\ \exists z \in G$ tel que $x = y + z)$

Ou bien $\forall x \in E\ \exists! y \in F\ \exists! z \in G$ tel que $x = y + z$

③ Si $A \subset E$ alors $Vect(x) = \{\alpha x, \alpha \in \mathbb{K}\}$

④ $F + G = Vect(F \cup G)$

5.4. Familles libre, Familles génératrice, Base :

5.4.1. Partie libre :

$A = (x_1, x_2, \dots\dots, x_n) \subset E$ Famille libre de E $\Leftrightarrow$

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

sinon ($\exists \alpha_i \neq 0$) alors la famille A .est liée

① $\{x\}$ libre $\Leftrightarrow x \neq 0$

5.4.2. Famille génératrice :

$A=\{a_i\}$ Famille génératrice de E noté $vect(A)=E$ si :

$\forall x\in E\ \exists\alpha_i\in K\ \ telque\ \ x=\sum\alpha_i a_i$

5.4.3. Base :

E est une base $\Leftrightarrow$ E est libre et génératrice

5.5. Application linéaire :

$f:E\mapsto F$ application linéaire si $\forall(x,y)\in E^2\ \ \forall\alpha\in\mathbb{K}$ on a

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ et $f(\alpha x)=\alpha f(x)$

$\mathcal{L}(E,F)$ ensemble d'application linéaire de $E\mapsto F$

① $E=F\ \Rightarrow\ f$ endomorphisme et $f\in\mathcal{L}(E)$

② f bijectif $\Rightarrow$ f isomorphisme et $f\in Isom(E,F)$

② f bijectif et $E=F\ \Rightarrow\ f$ automorphisme et $f\in GL(E)$

Propriété :

① $f\in\mathcal{L}(E,F)$ alors $f(0_E)=0_F$ et $f(\sum\alpha_i x_i)=\sum\alpha_i f(x_i)$

② f injectif $\Leftrightarrow$ $Ker(f)=\{0_E\}$

② f surjectif $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f)=F$

5.6. K-algèbre :

$(A,+,\times,\bullet)$ est $\mathbb{K}$-algèbre $\Leftrightarrow$ $(A,+,\times)$ anneau, $(A,+,\bullet)$ $\mathbb{K}$ev

et $\forall\lambda\in\mathbb{K}\ \forall a,b\in A$ on a $a\times(\lambda\bullet b)=\lambda\bullet(a\times b)$

① Soit A,B deux $\mathbb{K}$-algèbre alors $f:A\mapsto B$ morphisme d'algèbre si $f(1_A)=1_B$, $f(x\times y)=f(x)\times f(y)$ et f linéaire

5.7. Projecteurs et symétrie:

5.7.1. Projecteurs:

Soit $p\in\mathcal{L}(E)$ est projecteur $\Leftrightarrow$ $p\circ p=p$

① $x\in\mathrm{Im}(p)\ \Leftrightarrow\ p(x)=x$

② $E=\mathrm{Im}(p)\oplus Ker(p)$

5.7.2. Symétrie:

Soit $s\in\mathcal{L}(E)$ est symétrie $\Leftrightarrow$ $s\circ s=Id_E$

① $s\in GL(E)$ ② $s^{-1}=s$

③ $E=Ker(s-Id_E)\oplus Ker(s+Id_E)$

5.7.3. Forme linéaire:

Soit E un $\mathbb{K}ev$ si $f\in\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ alors f dite forme linéaire

$E^*=\{$Forme linéaire de $E\}$ est un $\mathbb{K}ev$

5.7.4. Hyperplan:

Soit E un $\mathbb{K}ev$ et H sev de E alors H hyperplan si

$\exists$ un vecteur $a\in E\setminus\{0\}\ \ /E=H\oplus<a>$

① H hyperplan $\Leftrightarrow$ $\exists f\in E^*\ \ /H=Ker(f)$

② $Ker(f)$ hyperplan $\Rightarrow$ $f\in E^*$

6. Polynômes et Fraction rationnelle

6.1. Algèbre d'un polynôme :

$\mathbb{K}[x]=\{$polynome a coéficient dans $\mathbb{K}\}$

$\{1,X,X^2,....,X^n\}$ Famille génératrice de $\mathbb{K}[x]$

Soit $P=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{m}b_k x^k$ alors $P\circ Q=\sum_{k=0}^{n}a_k Q^k$

6.1.1. Degré d'un polynôme :

$P\in\mathbb{K}[x]\ \ P\neq 0\Rightarrow\deg(P)=Max\{k,a_k\neq 0\}$ sinon $\deg(P)=-\infty$

① $\mathbb{K}_n[x]=\{P\in\mathbb{K}[x],\deg(P)\le n\}$

② $(\mathbb{K}_n[x],+,\bullet)$ $\mathbb{K}ev$ ③ $(\mathbb{K}_n[x],+,\times)$ anneaux intègre commutatif

④ Soit $P,Q\in\mathbb{K}[x]$, $\deg(P)=n$ et $\deg(Q)=m$ alors

$\deg(P\times Q)=\deg(P)+\deg(Q)$ $\deg(\lambda P)=\deg(P)$

$\deg(P\circ Q)=\deg(P)\times\deg(Q)$ $\deg(P+Q)\le Max(m,n)$

6.2. Arithmétique dans K[X] :

Soit $P,Q\in\mathbb{K}[x]\ \ Q/P\ \Leftrightarrow\ \exists A\in\mathbb{K}[x]\ /\ P=AQ$

① P et Q associé $\Leftrightarrow$ $\exists\lambda\in\mathbb{K}^*\ /\ P=\lambda Q$ $\Leftrightarrow$ Q/P et P/Q

② Q/P et $P\neq 0\ \Rightarrow\ \deg(P)>\deg(Q)$

③ Q/P_1 et $Q/P_2\ \Rightarrow\ \forall A_1,A_2\in\mathbb{K}[x]\quad Q/A_1P_1+A_2P_2$

④ Théorème de division euclidienne : Soit $P,Q\in\mathbb{K}[x]$

alors $\exists A,R\in\mathbb{K}[x]\ \ /P=QA+R$ avec $\deg(R)<\deg(Q)$

6.3. Racines d'un polynôme :

Soit $P\in\mathbb{K}[x]\ \deg(P)=n$

① α racine de P $\Leftrightarrow$ $P(\alpha)=0$ $\Leftrightarrow$ $x-\alpha/P$

② Si $\deg(P)=n$ et P admet $n+1$ racine $\Rightarrow$ $P=0$

③ a racine P de multiplicité k $\Leftrightarrow$ $P=(x-a)^k Q(x)$ et $Q(a)\neq 0$

④ P polynôme scindé $\Leftrightarrow$ $\exists x_1,...,x_n\in\mathbb{K}\ /\ P=\lambda(x-x_1)..(x-x_n)$

⑤ Théorème d'Alembert Gauss :

Tout polynôme non constante de $\mathbb{C}[x]$ est scindé

⑥ Soit $P=a_0+a_1X+...+a_nX^n=a_n(X-x_1)...(X-x_n)$ alors

$$\sigma_1=\sum_{i=1}^{n}x_i=(-1)^1\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sigma_2=\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}x_{i_1}x_{i_2}=x_1x_2+x_1x_3+...+x_1x_n=(-1)^2\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sigma_k=\sum_{1\le i_1\le i_2\le...\le i_k\le n}x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$$

....

$$\sigma_n=x_1x_2...x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

6.4. Formule de Taylor :

6.4.1. Dérivé d'un polynôme :

Soit $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$ alors $P'(x)=\sum_{k=1}^{n}ka_k x^{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}x^k$

① Soit $\deg(P)=n\ \Rightarrow\ \deg(P')=n-1$

② $(P+\lambda Q)'=P'+\lambda Q'$ $(PQ)'=P'Q+PQ'$

$(P\circ Q)'=(P'\circ Q)+Q'$

③ Dérivé successives : $P^{(0)}=P$ $P^{(1)}=P'$ $P^{(k)}=\left(P^{(k-1)}\right)'$

6.4.2. Formule de Taylor :

$\forall P\in\mathbb{K}[x]\ \forall a\in\mathbb{K}\ \ P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}_{(a)}}{k!}(x-a)^k$ et

$$P(x+a)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}_{(a)}}{k!}(x)^k$$

① Si $a=0$ alors $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}_{(0)}}{k!}(x)^k$ (Formule Mac Lorin)

② α racine de $P\in\mathbb{K}[x]$ de multiplicité k $\Leftrightarrow$

$P^{(0)}_{(\alpha)}=P^{(1)}_{(\alpha)}=...=P^{(k-1)}_{(\alpha)}=0$ et $P^{(k)}_{(\alpha)}\neq 0$

6.5. Polynôme irréductibles :

$P\in\mathbb{K}[x]$ irréductible $\Leftrightarrow$ $\deg(P)\ge 1$ et $Q/P\Leftrightarrow Q\in\mathbb{K}$

① $P(x)=cst\ \Rightarrow\ P$ n'est pas irréductible

② $\deg(P)\ge 1\ \Rightarrow\ P$ irréductible

③ Soit $P\in\mathbb{K}[x]$ alors on peut factorisé

dans $\mathbb{C}[x]$ $P(x)=\lambda\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^{\alpha_i}$

dans $\mathbb{R}[x]$ $P(x)=\lambda\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^{\alpha_i}\prod_{i=1}^{n}(x^2+b_ix+c_i)$

④ Soit $P\in\mathbb{R}[x]$ et $\alpha\in\mathbb{C}$ alors si α racine de P de multiplicité k donc $\bar{\alpha}$ racine de P de multiplicité k

⑤ Conjugué : Soit $P=\sum_{k>0}a_kx^k\in\mathbb{K}[x]$ alors $\overline{P}=\sum_{k>0}\overline{a}_kx^k$

6.6. Fractions rationnelles :

$\mathbb{K}(x)=\left\{\frac{P}{Q}, P\in\mathbb{K}[x]\ Q\in\mathbb{K}^*[x]\right\}$ Corps de fraction rationnel

$\mathbb{K}[x]\subset\mathbb{K}(x)\quad \mathbb{R}(x)\subset\mathbb{C}(x)$

Soit $F=P/Q\in\mathbb{K}(x)$ alors

① $\deg(F)=\deg(P)-\deg(Q)\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$

② F fraction irréductible si $\nexists R$ tel que R/P et R/Q

③ $\exists!(E,R)\ /\ E\in\mathbb{K}[x]$ et $R\in\mathbb{K}[x]$ avec $\deg(R)<0$

trouvé E (partie entier de F) par division euclidien de P par Q

$\deg(F)\geq 0\Rightarrow \deg(E)=\deg(F)\qquad \deg(F)<0\Rightarrow E=0$

④ Décomposition en élément simple

Décomposition en $\mathbb{C}(x)$: soit $\lambda_{ij}\in\mathbb{C}$

$$F(x)=\frac{P}{\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)^{k_i}}=E+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k_i}\frac{\lambda_{ij}}{(x-\alpha_i)^j}\right)$$

Décomposition en $\mathbb{R}(x)$: soit $\alpha_i,\beta_j,\gamma_j\in\mathbb{R}$

$$F(x)=\frac{P}{(x-a)^s(x^2+bx+c)^r}=E+\sum_{i=1}^{s}\frac{\alpha_i}{(x-a)^i}+\sum_{j=1}^{r}\frac{\beta_j x-\gamma_j}{(x^2-bx+c)^j}$$

⑤ Soit $F(x)=\frac{P}{x^kQ}$ et $Q(0)\neq 0$ alors $F(x)=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_k}{x^k}$

On le trouve par division suivant puissance ↗ de P sur Q

7. Espace vectoriel de dimension finie

7.1. Espace vectoriel de dimension finie :

Soit E un $\mathbb{K}ev$ alors

① E de dimension finie $\Leftrightarrow\exists$ une base B de E de cardinal finie

② Soit B,B' deux base de E $\Rightarrow Card(B)=Card(B')=\dim(E)$

③ $\dim(\mathbb{K}^n)=n\quad \dim(\mathbb{K}_n[x])=n+1$

④ Si $\dim(E)=n\geq 1$

A famille libre de $E\Rightarrow Card(A)\leq n$

Si $Card(A)=n$ alors A est une base de E

B famille génératrice de $E\Rightarrow Card(B)\geq n$

Si $Card(B)=n$ alors B est une base de E

⑤ Théorème de base incomplète :

Tout famille libre dans E peut être complété en une base de E

⑥ $\dim(E\times F)=\dim(E)+\dim(F)$

⑦ $\dim(E)=\dim(F)\Leftrightarrow\exists\varphi:E\mapsto F$ isomorphisme

7.2. Sous espace vectoriel de dimension finie :

① D droite vectoriel $\Leftrightarrow \dim(D)=1$ noté $D=<U>$

② P plan vectoriel $\Leftrightarrow\dim(P)=2$ noté $P=<V,W>$

avec U base de D et (V,W) base de P

③ E un $\mathbb{K}ev$ et F sev de E alors $\dim(F)=\dim(E)\Leftrightarrow F=E$

④ Soit E un $\mathbb{K}ev$ et F,G deux sev de E alors

$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$

⑤ Soit E un $\mathbb{K}ev$ $\dim(E)=n\geq 1$ et E_1,E_2 deux sev de E alors

$E=E_1\oplus E_2\Leftrightarrow\dim(E)=\dim(E_1)+\dim(E_2)$ *et* $E_1\cap E_2=\{0\}$

$\Leftrightarrow\dim(E)=\dim(E_1)+\dim(E_2)$ *et* $E=E_1+E_2$

7.3. Application linéaires de dimension finie :

Soit E un $\mathbb{K}ev$ $\dim(E)=n\geq 1$, $B=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ base de E

et $(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in F$ $\mathbb{K}ev$ alors $\exists! f\in\mathcal{L}(E,F)$ tel que

$f(e_1)=y_1\quad f(e_2)=y_2\ \ldots\ldots\ f(e_n)=y_n$

① $\dim(\mathcal{L}(E,F))=\dim(E).\dim(F)$

7.3.1. Rang d'une famille de vecteur :

$rg(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\dim(Vect(x_1,x_2,\ldots,x_n))$

① $x\in E\setminus\{0\}\Rightarrow rg(x)=1\qquad x=0\Rightarrow rg(x)=0$

② $\dim(E)=n\quad rg(x_1,x_2,\ldots,x_p)\leq\inf(n,p)$

③ $rg(x_1,x_2,\ldots,x_p)=p\Rightarrow(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ famille libre de E

7.3.2. Rang d'une application linéaire :

Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)\Rightarrow rg(f)=\dim(\mathrm{Im}(f))\leq\dim(F)$

① Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ base de $E\Rightarrow rg(f)=rg(f(e_1),\ldots,f(e_n))$

7.3.3. Théorème de rang :

Soit E un $\mathbb{K}ev$ $\dim(E)=n\geq 1$, F un $\mathbb{K}ev$ et $f\in\mathcal{L}(E,F)$ alors

$\dim(E)=\dim(Ker(f))+rg(f)$

① $rg(f)\leq\min(\dim(E),\dim(F))$

② f injective $\Leftrightarrow rg(f)=\dim(E)$

③ f surjective $\Leftrightarrow rg(f)=\dim(F)$

④ Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $\dim(F)=\dim(F)=n\geq 1$

f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ bijective $\Leftrightarrow rg(f)=n$

7.4. Forme linéaire en dimension finie

f Forme linéaire $\Leftrightarrow f\in\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ (avec E un $\mathbb{K}ev$)

① $f\in\mathcal{L}(E,\mathbb{K})\quad rg(f)=0\Leftrightarrow f=0$

② $f\in\mathcal{L}(E,\mathbb{K})\quad f\neq 0\Leftrightarrow rg(f)=1\Leftrightarrow f$ surjective

③ Soit E un $\mathbb{K}ev$, $\dim(E)=n\geq 1$ et H un sev de E alors

H hyperplan $\Leftrightarrow\dim(H)=n-1\Leftrightarrow\exists f\in\mathcal{L}(E,\mathbb{K})/H=Ker(f)$

8. Matrices

8.1. Généralités sur les matrices :

A matrice de n ligne et p colonne de valeur dans $\mathbb{K}$ noté par

$$A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})=\{$matrice de n ligne et p colonne de valeur dans $\mathbb{K}\}$

Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors

① Si $\forall i,\forall j\ a_{ij}=0$ alors A matrice nul noté $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$

② Si $p=1$ alors A matrice colonne

③ Si $n=1$ alors A matrice ligne

④ Si $n=p$ alors A matrice carré noté $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

⑤ $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,\bullet)$ $\mathbb{K}ev$ et $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))=n.p$

8.2. Opération sur les matrices :

8.2.1. Opération sur les matrices carré :

Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors

① Si $\forall i\neq j\ a_{ij}=0$ alors A matrice diagonale

noté $A=diag(a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn})$

② Si $\forall i\neq j\ a_{ij}=0$ et $\forall i\ a_{ii}=1$ alors A matrice Identité noté Id_n

③ Si $\forall i>j\ a_{ij}=0$ alors A matrice triangulaire supérieur

④ Si $\forall i<j\ a_{ij}=0$ alors A matrice triangulaire inférieur

⑤ $T_n(\mathbb{K})=\{$matrice triangulaire$\}$ *et* $\dim(T_n(\mathbb{K}))=n$

⑥ $D_n(\mathbb{K})=\{$matrice diagonale$\}$ *et* $\dim(D_n(\mathbb{K}))=n(n+1)/2$

⑦ $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times,\bullet)$ algèbre non commutatif et non intègre

8.2.2. Produit de deux matrices :

Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors le produit

$$C=A\times B=AB=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}=(c_{ij})\in\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

8.2.3. Transposé d'une matrice :

Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C=(c_{ij})\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ transposé de A

si $\forall i\in[\![1,p]\!]\ \forall j\in[\![1,n]\!]\ c_{ij}=a_{ji}$ on note $C={}^tA$

① ${}^t(\alpha A+B)=\alpha\,{}^tA+{}^tB$

② ${}^t({}^tA)=A$ ③ ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$

8.2.4. Trace d'une matrice :

Soit $A=(a_{ij})$ alors la trace de A égale $\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

① $\operatorname{tr}(\alpha A+B)=\alpha\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$ ② $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$

③ Si $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable alors $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$

8.2.5. Matrice symétrie et antisymétrie :

A est symétrique $\Leftrightarrow {}^tA=A \quad (a_{ij}=a_{ji})$

A est antisymétrique $\Leftrightarrow {}^tA=-A \quad (a_{ij}=-a_{ji})$

① $S_n=\{\text{Ensemble des matrice symétrique}\}$

② $A_n=\{\text{Ensemble des matrice antisymétrique}\}$

③ S_n, A_n deux sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on a

$$\dim(S_n)=\frac{n(n+1)}{2} \quad \dim(A_n)=\frac{n(n-1)}{2}$$

8.2.6. Calcule de comatrice :

Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors le comatrice de A est

$$\operatorname{com}(A)=\begin{array}{c|ccc|c} & \cdots & j & \cdots & \\ \hline & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ & \cdots & (-1)^{i+j}\Delta_{ij} & \cdots & i \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \end{array} \quad \text{avec } \Delta_{ij}=\det(A_{ij})$$

avec $A_{ij}\in\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ on supprime $i^{\text{éme}}$ ligne et $j^{\text{éme}}$ colonne de A

8.3. Matrices d'une application linéaire :

Soit $B=(e_1,e_2,...,e_p)$ une base de E et $C=(f_1,f_2,...,f_n)$ une base de F et $f\in\mathcal{L}(E,F)$ alors

$\forall j\in[\![1..p]\!] \quad f(e_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}f_i$ et on a la matrice A de f est

$$A=\mathfrak{M}(f,B,C)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f_1(e_1) & \cdots & f_n(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array}$$

① $\mathfrak{M}(\alpha f+g,B,C)=\alpha\mathfrak{M}(f,B,C)+\mathfrak{M}(g,B,C)$

② $\mathfrak{M}(f,B,C)=\mathfrak{M}(g,B,C) \Rightarrow f=g$

③ Soit $X=\sum_{i=1}^{p}x_ie_i=\mathfrak{M}(x,B)$ et $Y=\sum_{i=1}^{n}y_if_i=\mathfrak{M}(y,C)$ alors

$f(x)=y \Leftrightarrow AX=Y$

④ Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,G)$ alors $g\circ f\in\mathcal{L}(E,G)$ et $\mathfrak{M}(g\circ f,B,D)=\mathfrak{M}(f,B,C)+\mathfrak{M}(g,C,D)$

⑤ f inversible $\Leftrightarrow \mathfrak{M}(f,B,C)$ inversible et on a $\mathfrak{M}^{-1}(f,B,C)=\mathfrak{M}(f^{-1},C,B)$

8.4. Matrice de passage, formule de changement de la base :

Soit $B=(e_1,...,e_n)$ base et $\forall j\in[\![1..p]\!] \quad V_j=a_{1j}e_1+...+a_{nj}e_n$

$$\mathfrak{M}_B(V_1,...,V_n)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V_1 & \cdots & V_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

① Soit $B=(e_1,...,e_n)$ et $C=(V_1,...,V_n)$ deux base de E alors

$$P_{B\to C}=\mathfrak{M}_B(V_1,...,V_n)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V_1 & \cdots & V_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

② Soit B et C deux base de E alors $(P_{B\to C})^{-1}=P_{C\to B}$

③ Soit $X=\mathfrak{M}(x,B)$ et $X'=\mathfrak{M}(x,B')$ alors $X=P_{B\to B'}\times X'$

④ Soit $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable si $\exists P \;/\; B=P^{-1}AP$

8.5. Rang d'une matrice :

Soit $A=\mathfrak{M}(f,B)$ alors $\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(f)=\operatorname{rg}(\operatorname{Im}(f))$

① Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \Rightarrow 0\le\operatorname{rg}(A)<\min(n,p)$

② $\operatorname{rg}(A)=0 \Leftrightarrow A=0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$

③ A et B équivalent si $\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(B)$

8.6. Déterminant d'ordre 2 et 3 :

$$\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$ Développé par règle de Sarrus $\searrow + \searrow + \searrow - \nearrow - \nearrow - \nearrow$

① $\det_B(V,V)=0$ Si $V_1=0 \Rightarrow \det(V_1,V_2,V_3)=0$

$(V_1=V_2)\,ou\,(V_1=V_3)\,ou\,(V_2=V_3) \Rightarrow \det(V_1,V_2,V_3)=0$

② (V_1,V_2,V_3) libre $\Leftrightarrow \det(V_1,V_2,V_3)\neq0$

③ $\det_{B'}(V_1,V_2,V_3)=\det_{B'}(B)\det_B(V_1,V_2,V_3) \quad \det_B(B)=1$

④ $\det(AB)=\det(A)\det(B) \quad \det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$

$\det({}^tA)=\det(A) \quad \det(f\circ g)=\det(f)\det(g)$

⑤ $A\in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A)\neq0$ alors $\det(A^{-1})=1/\det(A)$

⑥ $\det(C_1,C_2,...,C_n)=-\det(C_2,C_1,...,C_n)$

$\det(C_1,\lambda C_2,...,C_n)=\lambda\det(C_1,C_2,...,C_n)$

$\det(C_1,C_2+\alpha C_1,...,C_n)=\det(C_1,C_2,...,C_n)$

⑦ Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\det(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\Delta_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Delta_{ij}$

8.7. Matrice carré inversible :

$A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible si $\exists B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \;/\; AB=BA=Id_n$

B se note A^{-1} et s'appelle l'inverse de A

$GL_n(\mathbb{K})$ Ensemble des matrices inversibles

① $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\operatorname{rg}(A)=n \Leftrightarrow A$ inversible $\Leftrightarrow \det(A)\neq0$

② Si $\det(A)\neq0$ alors $A^{-1}=\det^{-1}(A)\;{}^t\operatorname{com}(A)$

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

③ A inversible alors A^{-1} inversible et $(A^{-1})^{-1}=A$

④ A et B inversible alors (AB) inversible et $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

⑤ A inversible alors $({}^tA)$ inversible et $({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$

8.8. Système linéaire :

8.8.1. Opération élémentaire :

① $L_i\leftrightarrow L_j$ (permuter deux ligne)

② $L_i\leftarrow aL_i$ (multiplié le ligne par un scalaire non nulle)

③ $L_i\leftarrow L_i+bL_j$ (addition d'un multiple de ligne a une autre)

④ On peut faire c'est dernière opération sur les colonnes

8.8.2. Système de Carmer :

$$(S):\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=\alpha_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=\alpha_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=\alpha_3 \end{cases} \quad \text{on note } \delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(S) Système de Carmer si $\delta\neq0$ et $S_{\mathbb{R}^3}=\{(x,y,z)\}$ tel que

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\delta} \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\delta} \quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}}{\delta}$$

8.9. Pivot de Gauss :

8.9.1. Déterminer le rang d'une matrice :

Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ Si $a_{11}=0$ on fait les permutation jusqu'à $a_{11}\neq0$ en suite $\forall i\ge2$ on remplace $L_i\leftarrow a_{11}L_i+a_{i1}L_1$

on itère le procédure sur les $n-1$ dernières lignes on fin le matrice trouvé est équivalent a A

8.9.2. Calcule l'inverse d'une matrice carrée inversible :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on applique des opérations élémentaire sur A jusqu'à que A se transforme on matrice Id_n puis en répète c'est opération sur Id_n on obtient A^{-1} qui vérifié $AA^{-1} = Id_n$

9. Espace vectoriel euclidien

9.1. Produit scalaire :

$\varphi(x,y)$ est un produit scalaire noté $<x/y> \Leftrightarrow$

① φ symétrie : $\forall x \in E \quad \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$

② φ bilinéaire : $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \varphi(x+\alpha y, z) = \varphi(x,z) + \alpha\varphi(y,z)$

③ φ positive : $\forall x \in E \quad \varphi(x,x) \geq 0$

④ φ définie : $\varphi(x,x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

9.2. Inégalité de Cauchy-Shwartz :

Soit E un $\mathbb{R}ev$ muni d'un produit scalaire note $<x/y>$ alors

$\forall x,y \in E \quad |<x/y>| \leq \sqrt{<x/x>}\sqrt{<y/y>}$

9.3. Norme Euclidien :

N est dite norme $\Leftrightarrow$

① $\forall x \in E \quad N(x) \geq 0$ et $N(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

② $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

③ $\forall x,y \in E \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

9.3. Propriété sur les normes :

① $\|x\| = \sqrt{<x/x>}$ est dite norme euclidienne

② $x \in E$ est un norme unitaire si $\|x\| = 1$

③ Formule d'Alkeshi $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2<x/y>$

④ Identité parallélogramme $\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

⑤ Identité de polarisation $<x/y> = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

9.4. Vecteur orthogonaux :

① x et y vecteur orthogonaux si $<x/y> = 0$ on note $x \perp y$

② A et B parties orthogonaux si $\forall x \in A \ \forall y \in B \quad <x/y> = 0$

③ L'orthogonale a A est $A^{\perp} = \{x \in E \ / \forall y \in A \quad <x/y> = 0\}$

④ $A^{\perp} = (vect(A))^{\perp} \qquad A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp} \qquad F^{\perp} \subset (F^{\perp})^{\perp}$

⑤ (x_i) famille orthonormé si il est normé ($\forall i \ \|x_i\| = 1$) et orthogonal ($\forall i \neq j \quad <x_i/x_j> = 0$)

⑥ Tout famille orthogonale de vecteur non nulle est libre

9.5. Théorème de Pythagore :

$x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

9.6. Espace euclidienne :

$(E, </>)$ espace Euclidien si E un $\mathbb{R}ev$ de dimension finie et muni d'un produit scalaire $</>$

① Soit $(E,</>)$ un espace Euclidien et F un sev de E si $E = F \oplus F^{\perp}$ alors $F^{\perp}$ est dite supplémentaire orthogonale de F

Si F,G deux sev de E alors $(F^{\perp})^{\perp} = F \qquad F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$

② Procédure de Schmidt soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E

$\varepsilon_1 = e_1 / \|e_1\|$

$\varepsilon_2^* = e_2 + \lambda\varepsilon_1$ cherche $\lambda \ / <\varepsilon_2^*/\varepsilon_1> = 0$

$\varepsilon_2 = \varepsilon_2^* / \|\varepsilon_2^*\|$

$\varepsilon_3^* = e_3 + \lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2$ cherche $\lambda, \mu \ / <\varepsilon_3^*/\varepsilon_1> = <\varepsilon_3^*/\varepsilon_2> = 0$

$\varepsilon_3 = \varepsilon_3^* / \|\varepsilon_3^*\|$

….. En site suite on a $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ une base orthonormée de E