

ANHANGUERA EDUCACIONAL DE JUNDIAI
MATEMÁTICA APLICADA IV
LISTA 3 – RELAÇÕES BINÁRIAS: PROPRIEDADES

Bibliografia adotada

MENEZES, Paulo Fernando Blauth. **Matemática Discreta para Computação e Informática..** 2ª ed. Porto Alegre: Sagra Luzzatto, 2005.

I. Reflexiva

Dizemos que \mathcal{R} é reflexiva se $(\forall x)(x \in A \rightarrow x\mathcal{R}x)$ ou $(\forall x)(x \in A \rightarrow (x, x) \in \mathcal{R})$.

II. Simétrica

Dizemos que \mathcal{R} é simétrica se, e somente se $(\forall x, y \in A)(x\mathcal{R}y \rightarrow y\mathcal{R}x)$.

III. Transitiva

Dizemos que \mathcal{R} é transitiva se, e somente se $(\forall x, y, z)((x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}z) \rightarrow x\mathcal{R}z)$.

IV. Anti-simétrica

Dizemos que \mathcal{R} é anti-simétrica se, e somente se $(\forall x, y \in A)((x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}x) \rightarrow x = y)$ ou equivalente $(\forall x, y \in A)(x \neq y \rightarrow (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x))$.

- 1) Seja $A = \{a, b, c, d\}$, complete o quadro:

Relação \mathcal{R}	Reflexiva	Simétrica	Transitiva
$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$			
$\mathcal{R} = \{(a, c), (c, a), (c, c), (a, d)\}$			
$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a), (b, d), (d, b)\}$			

- 2) Seja $A = \{1, 3, 8\}$ e as relações abaixo, definidas sobre A. Quais das alternativas indicam a ocorrência da propriedade reflexiva?

- $R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 3), (3, 1), (8, 1)\}$
- $R_2 = \{(1, 1), (3, 1), (1, 8), (3, 3), (8, 8)\}$
- $R_3 = \{(3, 1), (3, 3), (5, 8), (1, 1), (8, 8)\}$
- $R_4 = \{(8, 8), (3, 3), (1, 8), (3, 1), (1, 1)\}$
- $R_5 = \{(8, 8), (3, 3)\}$

- 3) Quais das relações a seguir são simétricas e quais são antissimétricas?

- $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ ou } a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$

- 4) As relações a seguir são reflexivas? Justifique.

a) $D = \{(a, a) \mid a \in A\}$: a relação de igualdade no conjunto A.

b) $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a \neq b\}$

c) Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2)\}$.

- 5) Seja $A = \mathbb{Z}$ (o conjunto dos inteiros) e seja R a relação $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a \geq b\}$. Determine se R é simétrica.

- 6) Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e seja a relação: $R = \{(1, 2), (2, 2), (3, 4), (4, 1)\}$. Determine se R é simétrica.
- 7) Mostre se a relação binária D é reflexiva, simétrica, transitiva. Seja a relação D definida sobre R como: $x; y \in R / xDy \leftrightarrow xy \geq 0$:
- 8) Determine se a relação R no conjunto de todas as páginas Web é reflexiva, simétrica e transitiva, onde $(x; y) \in R$, se:
- Todas as pessoas que visitam a página Web x também visitam a página Web y .
 - Não existem links comuns na página Web x e na página Web y .
- 9) Seja o conjunto $A = \{0, 1\}$. Quantas relações binárias distintas podem ser definidas sobre o conjunto A ?
- 10) Liste todas as relações de partições do exercício anterior $P(A \times A)$:
- 11) Considere as relações do exercício anterior. Faça uma tabela, como a que está no exercício 1, indicando se cada uma das três propriedades é verdadeira (x) ou falsa ().
- 12) Seja $S = \{1, 2, 3\}$ e $p = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$ diga se são válidas as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.
- 13) Para as relações definidas no conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$.
- $\{(a, a), (a, c), (b, b), (c, c), (d, d)\}$ reflexiva, não simétrica, transitiva
 - $\{(a, a), (a, c), (b, c), (b, b), (c, b), (c, c), (d, d)\}$ reflexiva, não simétrica, não transitiva
 - $\{(a, b), (b, c), (b, a), (c, b), (d, d)\}$ não reflexiva, simétrica e não transitiva
- Diga justificando, se a relação é reflexiva, simétrica ou transitiva.
- 14) Todas as relações são consideradas no conjunto dos seres humanos. Quais delas apresentam a propriedade reflexiva, simétrica e transitiva.
- $\overset{def}{xRy} \Leftrightarrow x$ é filho de y
 - $\overset{def}{xRy} \Leftrightarrow x$ tem os mesmos pais que y
 - $\overset{def}{xRy} \Leftrightarrow x$ é descendente de y
 - $\overset{def}{xRy} \Leftrightarrow x$ é casado com y
 - $\overset{def}{xRy} \Leftrightarrow x$ é da mesma altura que y ou x é mais baixo que y

15) Seja $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz de uma relação definida em $A = \{x, y, z\}$.

Diga se R é simétrica e se é reflexiva. Justifique.

RESPOSTAS

1)

Relação \mathcal{R}	Reflexiva	Simétrica	transitiva
$\mathcal{R} = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d)\}$	S	N	N
$\mathcal{R} = \{(a,c), (c,a), (c,c), (a,d)\}$	N	N	N
$\mathcal{R} = \{(a,a), (b,b), (a,b), (b,a), (b,d), (d,b)\}$	N	S	S

2) Resp: R2, R3 e R4.

3)

R3 é simétrica: se $a=b$ ou $a=-b$, então $b=a$ ou $b=-a$.

R4 é simétrica: $a=b \Rightarrow b=a$.

R6 é simétrica: $a+b \leq 3 \Rightarrow b+a \leq 3$.

R1 é antissimétrica: $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow b=a$.

R2 é antissimétrica: é impossível $a > b$ e $b > a$.

R4 é antissimétrica pela definição.

R5 é antissimétrica: é impossível acontecer $a=b+1$ e $b=a+1$.

4)

- a. Por definição, $(a,a) \in D$, $\forall a \in A$.
- b. Irreflexiva pois $(a,a) \notin R$, $\forall a \in A$.
- c. R não é reflexiva pois $(2,2) \notin R$

5)

simetria: se $a \geq b$, então não é sempre verdade que $b \geq a$
(exemplo: $2 \geq 1$ mas $1 < 2$) $\Rightarrow R$ é não-simétrica.

6)

simetria: R é não-simétrica, pois, por exemplo, $1R2$ e $2 \not R 1$

7) Resposta:

– Reflexiva (V): $\forall x \in \mathbb{R}; xx \geq 0$.

Independentemente do sinal de x, o seu quadrado sempre será maior ou igual 0.

– Simétrica (V): $\forall x; y \in \mathbb{R}$; se $xy \geq 0$ então $yx \geq 0$.

Pela transitividade da multiplicação.

– Transitiva (V): $\forall x; y$ e $z \in \mathbb{R}$; se $xy \geq 0$ e $yz \geq 0$ então $xz \geq 0$.

Para esse predicado ser verdadeiro, y tem que ter o mesmo sinal de x e y tem que ter o mesmo sinal de z. Assim, x e z têm o mesmo sinal, o que garante que $xz \geq 0$.

8)

- a) – Reflexiva (V): Todas as pessoas que visitam a página x também visitam a página Web x.
– Simétrica (F): Certamente existem pessoas que visitam a página x que formam um conjunto próprio das pessoas que visitam a página y e, assim, a recíproca é verdadeira.
– Transitiva (V): se todas as pessoas que visitam a página x também visitaram a página y e todas as pessoas que visitam a página y visitam a página z então todas as pessoas que visitam a página x visitam também a página z.
- b) – Reflexiva (F): qualquer página x que tenha um link não está relacionada com ela mesma.
– Simétrica (V): pela definição da relação.
– Transitiva (F): pela simetria temos que $(x; y) \in R$ e $(y; x) \in R$ e não temos $(x; x) \in R$.

9)

$A \times A = \{(0; 0); (0; 1); (1; 0); (1; 1)\}$:

10)

$R0 = \{ \}$

$R1 = \{(0; 0)\}$

$R2 = \{(0; 1)\}$

$R3 = \{(1; 0)\}$
 $R4 = \{(1; 1)\}$
 $R5 = \{(0; 0); (0; 1)\}$
 $R6 = \{(0; 0); (1; 0)\}$
 $R7 = \{(0; 0); (1; 1)\}$
 $R8 = \{(0; 1); (1; 0)\}$
 $R9 = \{(0; 1); (1; 1)\}$
 $R10 = \{(1; 0); (1; 1)\}$
 $R11 = \{(0; 0); (0; 1); (1; 0)\}$
 $R12 = \{(0; 0); (0; 1); (1; 1)\}$
 $R13 = \{(0; 0); (1; 0); (1; 1)\}$
 $R14 = \{(0; 1); (1; 0); (1; 1)\}$
 $R15 = \{(0; 0); (0; 1); (1; 0); (1; 1)\}$

11)

	R0	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15
Reflexiva								X					X	X		X
Simétrica	X	X			X			X	X			X			X	X
Transitiva	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X		X	X		X

12) RESPOSTA: Então p não é reflexiva, não é simétrica e não é transitiva.

13)

- a) reflexiva, não simétrica, transitiva
- b) reflexiva, não simétrica, não transitiva
- c) não reflexiva, simétrica e não transitiva

14)

- a) Não reflexiva: se x é filho de y, então y é diferente de x
 Não simétrica: se x é filho de y, então y não é filho de x
 Não transitiva. Se x é filho de y e y é filho de z então x não é filho de z.
- b) Não Reflexiva: x tem os mesmos pais de y. Logo x Não pode ser igual a y
 Simétrica: se x é filho e y é filho então y é irmão de x e x é irmão de y
 transitiva. Se x tem os mesmos pais de y e y tem os mesmos pais de z então x tem os mesmos pais de z.
- c) Não reflexiva: se x é descendente de y, então y é diferente de x
 Não simétrica: se x é descendente de y, então y não é descendente de x
 Transitiva. Se x é descendente de y e y é descendente de z então x é descendente de z.
- d) Não reflexiva: se x é casado com y, então y é diferente de x
 Simétrica: se x é casado com y, então y é casado com x
 Transitiva. Se x é casado com y e y é casado com z, então x=z.
- e) Não Reflexiva: se x é da mesma altura que y, então y é diferente de x
 Simétrica: se x é da mesma altura que y, então y é da mesma altura que x
 Transitiva. Se x é da mesma altura que y e y é da mesma altura que z, então x é da mesma altura que z.

15) É reflexiva e não é simétrica