Conceito de Função

Na análise de fenômenos econômicos, muitas vezes usamos funções matemáticas para descrevê-los e interpretá-los. Nesse sentido, as funções matemáticas são usadas como ferramentas que auxiliam na resolução de problemas ligados à administração de empresas. Nesta seção descrevemos o conceito de função e algumas de suas representações.

No exemplo a seguir, a Tabela 1.1 traz a distribuição dos preços do produto "A" no decorrer dos meses num ano na cidade de São Paulo.

Tabela 1.1 Preço médio do produto "A" em São Paulo

Mês (t)	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Maio	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.
Preço (p) ($)	6,70	6,75	6,80	6,88	6,95	7,01	7,08	7,14	7,20	7,28	7,36	7,45

A cada mês, observamos um preço do produto. Assim, podemos dizer que cada preço, p, está associado a um mês, t, ou ainda que o preço *depende* do mês que escolhemos.

Nesse exemplo, se substituirmos cada mês por um número, podemos entender a relação entre o mês e o preço como uma associação entre duas variáveis numéricas; assim temos uma nova tabela:

Tabela 1.2 Preço médio do produto "A" em São Paulo

Mês (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Preço (p) ($)	6,70	6,75	6,80	6,88	6,95	7,01	7,08	7,14	7,20	7,28	7,36	7,45

Vale ressaltar que, a cada valor da variável "mês", temos um único valor da variável "preço" associado, o que caracteriza uma *função* matemática ou mais precisamente:

> A cada valor da grandeza t está associado um único valor da grandeza P, caracterizando P como função de t, o que é indicado por $P = f(t)$.

Nesse contexto, a variável t é chamada de *independente* e a variável p é chamada de *dependente*; o conjunto dos valores possíveis para a variável independente é o **domínio** da função; a **imagem** da função é o conjunto dos valores da variável dependente que foram associados à variável independente.

No exemplo anterior, por meio da tabela, fizemos uma representação numérica da função, que pode ser representada também por meio de um gráfico:

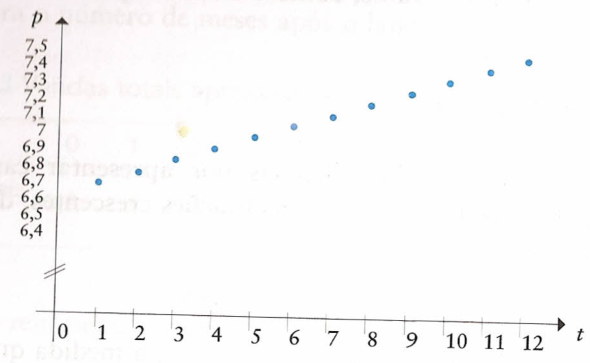


Figura 1.1 Preço médio do produto "A" em São Paulo.

As funções também são representadas por fórmulas que relacionam as variáveis. No exemplo dado não existe uma fórmula que relacione de maneira exata as variáveis t e P, mas podemos aproximar tal relação com a fórmula

$$p = 0{,}0676\,t + 6{,}6104$$

cujo gráfico é representado por uma reta que se aproxima dos pontos já traçados na Figura 1.1:

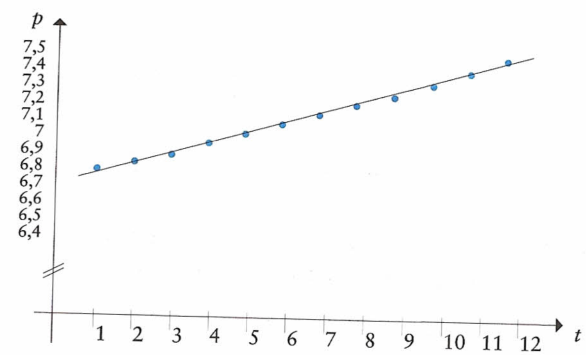


Figura 1.2 Reta que aproxima o preço médio do produto "A" – São Paulo.

Lembramos que, para o traçado da reta no gráfico, o *domínio* que antes era dado por $D(f) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ foi substituído pelo conjunto do números reais. Consideraremos o conjunto dos números reais, ou seus intervalos, como o domínio para as funções apresentadas neste livro.

Tipos de Função

Muitas funções podem ser identificadas por apresentar características semelhantes. Nesta seção estudaremos as funções crescentes, decrescentes, limitadas e compostas.

Função Crescente ou Decrescente

Na função do exemplo anterior, percebemos que, à medida que o número t do mês aumenta, o preço p da carne também aumenta; nesse caso, dizemos que a função é ***crescente***.

Tomando como exemplo a demanda, q, de um produto em função de seu preço, p, relacionados pela fórmula

$$q = -2p + 10$$

podemos esboçar o gráfico

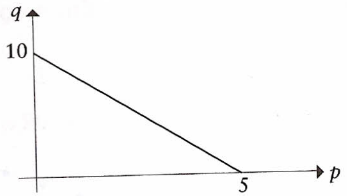


Figura 1.3 Demanda de um produto em função de seu preço.

Percebemos que, à medida que o preço p aumenta, a demanda q diminui. Nesse caso, dizemos que a função é ***decrescente***.

Função Limitada

Vamos analisar a função da venda total, v, de um CD, no decorrer dos meses, t, dada pela seguinte expressão:

$$v = \frac{250}{1 + 500 \cdot 0{,}5^t}.$$

Construindo uma tabela, obtemos as vendas aproximadas (em milhares de CDs) para o número de meses após o lançamento do CD.

Tabela 1.3 Vendas totais aproximadas de um CD após seu lançamento

t (meses)	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v (vendas totais em milhares)	0,5	1	2	8	28	84	168	223	243	248	250	250

Podemos representar tais valores no gráfico

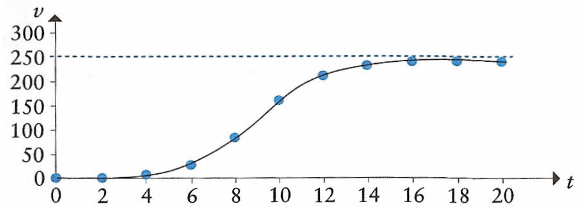


Figura 1.4 Vendas totais aproximadas de um CD após seu lançamento.

De acordo com essa função, as vendas nunca ultrapassam 250.000 CDs. Na verdade, o valor correto para $t = 18$ é $v = 249.524$ e para $t = 20$ é $v = 249.881$.

Como notamos, por maior que seja o valor de t, o valor da função jamais ultrapassa 250. Nesse caso, dizemos que a função é ***limitada superiormente*** e que o valor 250 é um *limitante superior*. Podemos dizer que outros valores – por exemplo, 251, 260, 300 ou 1.000 – também são limitantes superiores, porém chamamos o valor 250 de *supremo* por ele ser o *menor dos limitantes superiores*.

Agora, analisaremos o custo por unidade, c_u, de um eletrodoméstico em função da quantidade produzida, q, cuja relação é dada por

$$c_u = \frac{240}{q} + 50$$

Construindo uma tabela, obtemos os custos unitários para os números de unidades produzidas.

Tabela 1.4 Custos unitários para produção de um eletrodoméstico

q (unidades)	10	20	40	60	80	100	150	200	250	300
c_u (custo por unidade) ($)	74,00	62,00	56,00	54,00	53,00	52,40	51,60	51,20	50,96	50,80

Podemos representar tais valores no gráfico

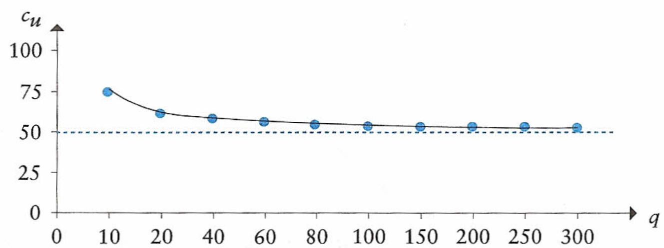


Figura 1.5 Custos unitários para produção de um eletrodoméstico.

De acordo com essa função, o custo unitário nunca é menor que 50,00. Na verdade, se calculamos o custo por unidade para produzir $q = 10.000$ unidades, obtemos o custo aproximado de $c_u = 50{,}02$.

Como notamos, por maior que seja o valor de q, o valor da função jamais será inferior a 50. Nesse caso, dizemos que a função é ***limitada inferiormente*** e que o valor 50 é um *limitante inferior*. Podemos dizer que outros valores – por exemplo, 49, 40, 30 ou 0 – também são limitantes inferiores, porém chamamos o valor 50 de *ínfimo* por ele ser o *maior dos limitantes inferiores*.

Analisaremos agora a função do valor, v, de uma ação negociada na bolsa de valores, no decorrer dos meses, t, dada pela expressão

$$v = \frac{t^2 - 6t + 12}{t^2 - 6t + 10}.$$

Construindo uma tabela, obtemos o valor aproximado para o número de meses após o lançamento para a negociação da ação na bolsa de valores.

Tabela 1.5 Valor aproximado de uma ação na bolsa de valores

t (meses)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
v (valor em $)	1,20	1,40	2,00	3,00	2,00	1,40	1,20	1,12	1,08	1,05	1,04	1,01

Podemos representar tais valores no gráfico

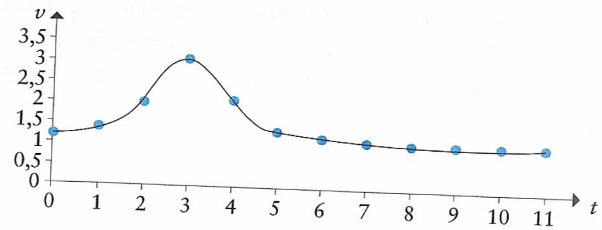


Figura 1.6 Valor aproximado de uma ação negociada na bolsa de valores.

Analisando mais atentamente essa função, percebemos que o valor da ação jamais ultrapassa $ 3,00 e, ao mesmo tempo, nunca é inferior a $ 1,00. Portanto, temos uma função que é limitada *superiormente* e *inferiormente*, o que nos leva a chamá-la de função ***limitada***.

Função Composta

Agora, consideremos duas funções: a produção p de um produto, em função da quantidade q de insumo disponível, e a quantidade vendida v do mesmo produto, em função daquilo que foi produzido, p.

Vamos supor que a produção, dependendo do insumo, seja dada por

$$p = -q^2 + 8q + 9$$

e que a venda, dependendo da produção, seja dada por

$$v = 0{,}7p.$$

Se for dada uma quantidade $q = 1$ de insumo, podemos calcular a produção correspondente:

$$p = -1^2 + 8 \cdot 1 + 9$$
$$p = 16.$$

Sabendo a produção $p = 16$, podemos determinar a venda correspondente:

$$v = 0{,}7 \cdot 16$$
$$v = 11{,}2.$$

Realizando os mesmos cálculos para uma quantidade de insumo $q = 4$, obtemos a produção $p = 25$ e a venda $v = 17{,}5$.

Notamos, então, que dada uma quantidade de insumo, é possível calcular as vendas, desde que calculemos primeiramente a produção. Entretanto, é possível obter uma função que permite calcular diretamente as vendas a partir da quantidade de insumo, não sendo necessário o cálculo da produção. Essa função é conhecida como **composta** das funções v e p, simbolizada como $v = v(p) = v(p(q))$. Tal função composta é obtida substituindo a função da produção na expressão que dá a venda:

Substituindo $p = -q^2 + 8q + 9$ em $v = 0{,}7p$, obtemos

$$v = 0{,}7(-q^2 + 8q + 9)$$
$$v = -0{,}7q^2 + 5{,}6q + 6{,}3.$$

Como podemos notar, nessa última expressão, a venda v depende da quantidade q.

Podemos confirmar a validade da expressão obtida calculando a venda para a quantidade $q = 1$ de insumo:

$$v = -0{,}7 \cdot 1^2 + 5{,}6 \cdot 1 + 6{,}3$$
$$v = 11{,}2.$$

Representando graficamente os cálculos realizados, temos:

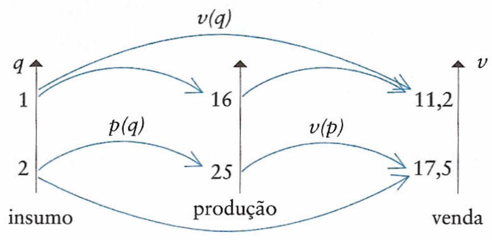


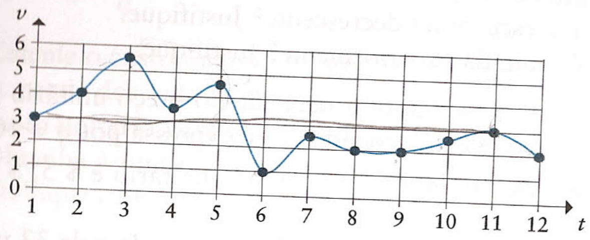
Figura 1.7 Representação gráfica de uma composição de função.

Nesse exemplo, simbolizamos a produção em função do insumo por $p(q)$, a venda em função da produção $v(p)$ e a composta da venda em função do insumo por

$$v(p(q)) = v(q)$$

Exercícios

1. O gráfico a seguir representa o valor (em \$) de uma ação negociada na bolsa de valores no decorrer dos meses.



Considerando $t = 1$ o mês de janeiro, $t = 2$ o mês de fevereiro, e assim sucessivamente, determine:

a) o valor da ação nos meses de fevereiro, maio, agosto e novembro.
b) os meses em que a ação vale \$ 2,00.
c) os meses em que a ação assumiu o maior e o menor valor. Determine também os valores nesses meses.
d) os meses em que a ação teve as maiores valorizações e de quanto foram essas valorizações. Os meses em que a ação teve as maiores desvalorizações e de quanto foram essas desvalorizações.
e) a média dos valores das ações.

2. A produção de peças em uma linha de produção, nos dez primeiros dias de um mês, é dada pela tabela a seguir:

Dia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Unidades	1.250	1.200	1.450	1.380	1.540	1.270	1.100	1.350	1.300	1.410

Com base nos dados:

a) Determine a produção média de peças nos dez dias.

b) Determine a variação entre a maior e a menor produção de peças.
c) Determine o maior aumento percentual na produção de um dia para outro.
d) Construa um gráfico de linha da produção.
e) Em que períodos a função é crescente? E decrescente?

3. A receita R na venda de q unidades de um produto é dada por $R = 2q$.
a) Determine a receita quando são vendidas 5, 10, 20 e 40 unidades do produto.
b) Quantas unidades foram vendidas, se a receita foi de \$ 50,00?
c) Esboce o gráfico da receita.
d) A função é crescente ou decrescente? Justifique.
e) A função é limitada superiormente? Justifique.

4. A demanda q de uma mercadoria depende do preço unitário p em que ela é comercializada, e essa dependência é expressa por $q = 100 - 4p$.
a) Determine a demanda quando o preço unitário é \$ 5, \$ 10, \$ 15, \$ 20 e \$ 25.
b) Determine o preço unitário quando a demanda é de 32 unidades.
c) Esboce o gráfico da demanda.
d) A função é crescente ou decrescente? Justifique.

5. O custo C para a produção de q unidades de um produto é dado por $C = 3q + 60$.
a) Determine o custo quando são produzidas 0, 5, 10, 15 e 20 unidades.
b) Esboce o gráfico da função.
c) Qual o significado do valor encontrado para C quando $q = 0$?
d) A função é crescente ou decrescente? Justifique.
e) A função é limitada superiormente? Em caso afirmativo, qual seria o valor para o supremo? Justifique.

6. O lucro l na venda, por unidade, de um produto depende do preço p em que ele é comercializado, e tal dependência é expressa por $l = -p^2 + 10p - 21$.
a) Obtenha o lucro para o preço variando de 0 a 10.
b) Esboce o gráfico.
c) A função é limitada superiormente? Em caso afirmativo, qual um possível valor para o supremo?

7. O custo unitário c_u para a produção de q unidades de um eletrodoméstico é dado por $c_u = \dfrac{200}{q} + 10$.

a) Qual será o custo unitário quando se produzirem 10, 100, 1.000 e 10.000 unidades?
b) Quantas unidades são produzidas quando o custo unitário é de \$ 14?
c) Esboce o gráfico.
d) A função c_u é crescente ou decrescente? Justifique.
e) A função é limitada superiormente? E inferiormente? Em caso afirmativo para uma das respostas, qual seria o supremo (ou ínfimo)?

8. O custo C para a produção de q unidades de um produto é dado por $C = 3q + 60$. O custo unitário c_u para a confecção de um produto é dado por $c_u = \dfrac{C}{q}$.
a) Calcule o custo quando se produzem 2, 4 e 10 unidades.
b) A partir dos valores de custo encontrados no item (a), obtenha o custo unitário para as respectivas quantidades produzidas.
c) Obtenha a função composta do custo unitário c_u em função de q.
d) Verifique com a expressão do item (c) os valores obtidos no item (b).

TÓPICO ESPECIAL – Dispersão e Correlação Linear

Diagrama de Dispersão

Como vimos, o conceito de função está intimamente ligado à nossa vida prática, e é comum relacionarmos grandezas tais como preço e quantidade produzida, preço e faturamento, custo e quantidade produzida, tempo em meses, dias ou ano, com grandezas como custos, gastos e produção.

Notamos que essas relações podem ficar mais bem caracterizadas quando definimos variáveis para o que queremos estudar. Desse ponto de vista, é comum trabalhar com duas variáveis, x e y.

A variável "y" é a mais importante, dentro do que estamos interessados em saber ou pesquisar. Assim, em uma pesquisa sobre gastos com propaganda e tempo em meses, a variável "y" representará os gastos, e a variável "x", os meses a serem pesquisados. Podemos criar inúmeras associações entre as variáveis x e y, tais como: consumo e renda, preço e quantidade ofertada, receita e preço, lucro e quantidade produzida, variação da inflação em um determinado período em relação aos meses observados, gastos