



---

---

---

---

---

---

---

### Plano de Ensino

- Apresentação, Expressões Regulares, Gramática Regular.
- Autômatos Finitos Determinísticos.
- Minimização de Autômatos.
- Autômatos Finitos Não-Determinísticos.
- Conversão de AFND para AFD.
- Autômatos Finitos com Movimentos Vazios.
- Conversão de Autômatos AFD para AFND.
- **Autômatos com Pilha.**
- Máquinas de Turing.

---

---

---

---

---

---

---

### Livro-Texto

- Bibliografia Básica:
  - » MENEZES, Paulo Fernando Blauth. **Linguagens Formais e Autômatos**. 5ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- Bibliografia Complementar:
  - » LEWIS, Ricki. **Elementos da Teoria da Computação**. 2ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.
  - » HOPCROFT, John E; ULLMAN, Jeffrey D; MOTWANI, Rajeev, SOUZA. **Introdução a Teoria dos Autômatos, Linguagens e Computação**. 1ª ed. São Paulo: CAMPUS, 2003.

---

---

---

---

---

---

---

## 7. Autômatos com Pilha – Introdução



- Da mesma forma que uma Autômato Finito está associado a uma Linguagem Regular, os Autômatos com Pilha também; só que neste caso associados à Linguagem Livre de Contexto.
- Este tipo de autômato é similar ao Autômato Finito, incluindo uma pilha de memória auxiliar, sendo esta independente da fita de entrada e sem limite máximo de tamanho ("infinita").

---

---

---

---

---

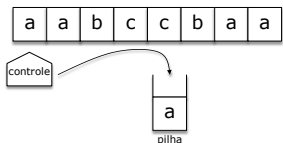
---

---

## 7. Autômatos com Pilha – Introdução



- A unidade de controle possui um número finito e predefinido de estados. Possui uma cabeça de fita e uma cabeça de pilha.



---

---

---

---

---

---

---

## 7. Autômatos com Pilha – Introdução



- **Cabeça da fita** → unidade de leitura a qual acessa uma célula da fita de cada vez e movimenta-se exclusivamente para direita. É possível testar se a entrada foi lida completamente.
- **Cabeça da pilha** → movimenta-se para baixo (ou para a esquerda) ao gravar e para baixo (ou para a direita) ao ler um símbolo. Acessa um símbolo de cada vez, estando sempre posicionada no topo. A leitura exclui o símbolo lido. É possível testar se a pilha está vazia. Em uma mesma operação de gravação é possível armazenar uma palavra composta por mais de um símbolo. Neste caso, o símbolo do topo é o mais à esquerda da palavra gravada.

---

---

---

---

---

---

---

## 7. Autômatos com Pilha – Introdução



- A pilha é dividida em células, armazenando, cada uma um símbolo do alfabeto auxiliar (pode ser igual ao alfabeto de entrada). Em uma estrutura de pilha, a leitura/gravação ocorre sempre na mesma extremidade (topo).
- O programa é uma função parcial que, dependendo do estado corrente, símbolo lido da fita e símbolo lido da pilha, determina o novo estado e a palavra a ser gravada. Possui a facilidade de movimento vazio, permitindo mudar de estado sem ler da fita.

---

---

---

---

---

---

---

## 7. Autômatos com Pilha – Introdução



- O modelo Autômato com Pilha possui duas definições\* universalmente aceitas que diferem no critério de parada do autômato, como segue:
  - » O valor inicial da pilha é vazio e o autômato pára aceitando ao atingir um estado final.
  - » A pilha contém, inicialmente, um símbolo especial denominado símbolo inicial da pilha. Não existem estados finais e o autômato pára aceitando quando a pilha estiver vazia.

\* As 2 definições possuem o mesmo poder computacional.

---

---

---

---

---

---

---

## 7. Autômatos com Pilha – Introdução



- Um Autômato com Pilha é composto por 4 partes:
  - » Fita → análoga à do AF.
  - » Pilha → memória auxiliar que pode ser usada livremente para leitura/gravação.
  - » Unidade de controle → reflete o estado corrente da máquina. Possui uma cabeça de fita e uma cabeça de pilha.
  - » Programa ou função de transição → função que comanda a leituras da fita, a leitura/gravação da pilha e define o estado da máquina.

---

---

---

---

---

---

---

## 7. Autômatos com Pilha – APD



- Definição: um APD é uma 6-upla:  
 $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F, V)$  onde:  
 $\Sigma \rightarrow$  alfabeto de símbolos de entrada.  
 $Q \rightarrow$  conjunto de estados possíveis do autômato o qual é finito.  
 $\delta \rightarrow$  função programa ou função transição:  $\delta: Q(\Sigma \cup \{\epsilon, ?\}) \times (V \cup \{\epsilon, ?\}) \rightarrow 2^{Q \times V^*}$  (função parcial)  
 $q_0 \rightarrow$  estado inicial, tal que  $q_0 \in Q$ .  
 $F \rightarrow$  conjunto de estados finais tal que  $F \subseteq Q$ .  
 $V \rightarrow$  alfabeto auxiliar ou alfabeto da pilha.

---

---

---

---

---

---

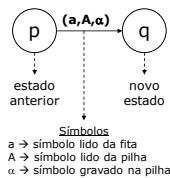
---

---

## 7. Autômatos com Pilha – APD



- O símbolo  $\epsilon$  na leitura/gravação indica que nenhum valor será retirado ou inserido na pilha.




---

---

---

---

---

---

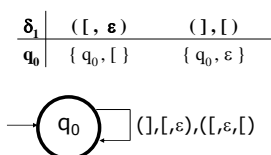
---

---

## 7. Autômatos com Pilha – APD



- Exemplo 1:** Considere a linguagem  $L_1 = \{w \mid w \text{ possui colchetes balanceados}\}$  reconhecida pelo APD  $M_1 = (\{[, ], \{q_0\}, \delta_1, q_0, \{q_0\}, \{[]\})$  onde  $\delta_1$  é como abaixo, representado na forma de um grafo, reconhece a linguagem  $L_1$ .




---

---

---

---


---

---

---

---

7. Autômatos com Pilha – APD



$w = [[][]]$  (reconhecida pelo Autômato  $M_1$ )

Símb. lido	Símb. não-lidos	Est. Atual	Pilha
$\epsilon$	$[[][]]$	-	$\epsilon$
[	$[][]]$	$q_0$	[
[	$[]]$	$q_0$	[ [
[	$]$	$q_0$	[ [ [
]	$[]]$	$q_0$	[ [
[	$]]$	$q_0$	[ [ [
]	$]$	$q_0$	[ [
]	$\epsilon$	$q_0$	[
]	$\epsilon$	$q_0$	$\epsilon$

---

---

---

---

---

---


---

---

---

---

7. Autômatos com Pilha – APD



$w = [[]]$  (não reconhecida pelo Autômato  $M_1$ )

Símb. Lido	Símb. não-lidos	Est. Atual	Pilha
$\epsilon$	$[[]]$	-	$\epsilon$
[	$[]]$	$q_0$	[
[	$]$	$q_0$	[ [
]	$]$	$q_0$	[
]	$\epsilon$	$q_0$	$\epsilon$
-	$]$	$q_0$	$\epsilon$

---

---

---

---

---

---


---

---

---

---

7. Autômatos com Pilha – APD



▪ **Exemplo 2:** considere a linguagem  $L_2 = \{w \mid w \text{ possui o formato } wcw^r\}$  reconhecida pelo APD  $M_2 = (\{a, b, c\}, \{q_0, q_1\}, \delta_2, q_0, \{q_1\}, \{a, b\})$  onde  $\delta_2$  é como abaixo, representado na forma de um grafo, reconhece a linguagem  $L_2$ .

$\delta_2$	(a, $\epsilon$ )	(b, $\epsilon$ )	(c, $\epsilon$ )	(a,a)	(b,b)
$q_0$	$\{q_0, a\}$	$\{q_0, b\}$	$\{q_1, \epsilon\}$	-	-
$q_1$	-	-	-	$\{q_1, \epsilon\}$	$\{q_1, \epsilon\}$

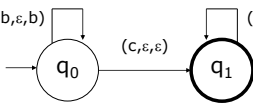
(a,  $\epsilon$ , a)

(b,  $\epsilon$ , b)

(c,  $\epsilon$ ,  $\epsilon$ )

(a, a,  $\epsilon$ )

(b, b,  $\epsilon$ )



---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## 7. Autômatos com Pilha – APD



**w = bacab (reconhecida pelo Autômato  $M_2$ )**

Símb. Lido	Símb. não-lidos	Est. Atual	Pilha
$\epsilon$	<b>bacab</b>	-	$\epsilon$
b	acab	$q_0$	b
a	cab	$q_0$	ab
c	ab	$q_0$	ab
a	b	$q_1$	b
<b>b</b>	$\epsilon$	$q_1$	$\epsilon$

## 7. Autômatos com Pilha – APND

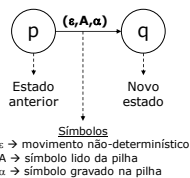


- Definição: um APND é uma 6-upla:  
 $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F, V)$  onde:  
 $\Sigma \rightarrow$  alfabeto de símbolos de entrada.  
 $Q \rightarrow$  conjunto de estados possíveis do autômato o qual é finito.  
 $\delta \rightarrow$  função programa ou função transição:  $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon, ?\}) \times (V \cup \{\epsilon, ?\}) \rightarrow 2^{Q \times V^*}$  (função parcial)  
 $q_0 \rightarrow$  estado inicial, tal que  $q_0 \in Q$ .  
 $F \rightarrow$  conjunto de estados finais tal que  $F \subseteq Q$ .  
 $V \rightarrow$  alfabeto auxiliar ou alfabeto da pilha.

## 7. Autômatos com Pilha – APND



- O símbolo  $\epsilon$  na leitura/gravação indica que nenhum valor será retirado ou inserido na pilha.



7. Autômatos com Pilha – APND

Anhangüera

▪ **Exemplo 3:** considere a linguagem  $L_3 = \{w \mid w \text{ possui o formato } ww^r\}$  reconhecida pelo APND  $M_3 = (\{a, b, c\}, \{q_0, q_1\}, \delta_3, q_0, \{q_1\}, \{a, b\})$  onde  $\delta_3$  é como abaixo, representado na forma de um grafo, reconhece a linguagem  $L_3$ .

$\delta_3$	(a, ε)	(b, ε)	(ε, ε)	(a,a)	(b,b)
$q_0$	$\{q_0, a\}$	$\{q_0, b\}$	$\{q_1, \epsilon\}$	-	-
$q_1$	-	-	-	$\{q_1, \epsilon\}$	$\{q_1, \epsilon\}$

$q_0$

$q_1$

$(a, \epsilon, a), (b, \epsilon, b)$

$(\epsilon, \epsilon, \epsilon)$

$(a, a, \epsilon), (b, b, \epsilon)$

---

---

---

---

---

---

---

---

7. Autômatos com Pilha – APND

Anhangüera

**w = aabbbaa (reconhecida pelo Autômato  $M_3$ )**

Símb. Lido	Símb. não-lidos	Est. Atual	Pilha
ε	aabbbaa	-	ε
a	abbbaa	$q_0$	a
a	bbbaa	$q_0$	aa
b	bbbaa	$q_0$	baa
ε	baa	$q_0$	baa
b	aa	$q_1$	aa
a	a	$q_1$	a
a	ε	$q_1$	ε

---

---

---

---

---

---

---

---

7. Autômatos com Pilha – APND

Anhangüera

**w = abbbaa (não reconhecida pelo Autômato  $M_3$ )**

Símb. Lido	Símb. não-lidos	Est. Atual	Pilha
ε	abbbaa	-	ε
a	bbbaa	$q_0$	a
b	bbbaa	$q_0$	ab
ε	baa	$q_0$	ab
b	aa	$q_1$	a
a	a	$q_1$	ε
-	a	$q_1$	ε

---

---

---

---

---

---

---

---

7



**Linguagens Formais e  
Autômatos**

**Ciência da Computação**  
[clayton.valdo@anhanguera.com](mailto:clayton.valdo@anhanguera.com)



---

---

---

---

---

---

---