



Plano de Ensino

- Apresentação, Expressões Regulares, Gramática Regular.
- Autômatos Finitos Determinísticos.
- Minimização de Autômatos.
- Autômatos Finitos Não-Determinísticos.
- Conversão de AFND para AFD.
- **Autômatos Finitos com Movimentos Vazios.**
- **Conversão de Autômatos AFe para AFD.**
- Autômatos com Pilha.
- Máquinas de Turing.

Livro-Texto

- Bibliografia Básica:
 - » MENEZES, Paulo Fernando Blauth. **Linguagens Formais e Autômatos**. 5ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- Bibliografia Complementar:
 - » LEWIS, Ricki. **Elementos da Teoria da Computação**. 2ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.
 - » HOPCROFT, John E; ULLMAN, Jeffrey D; MOTWANI, Rajeev, SOUZA. **Introdução a Teoria dos Autômatos, Linguagens e Computação**. 1ª ed. São Paulo: CAMPUS, 2003.

6. Autômatos Finitos – AFε

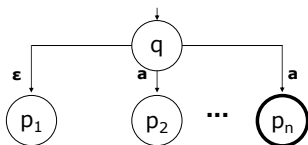


- Definição: um Autômato Finito com Movimentos Vazios (AFε) é uma 5-upla:
 $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ onde:
 - $\Sigma \rightarrow$ alfabeto de símbolos de entrada.
 - $Q \rightarrow$ conjunto de estados possíveis do autômato o qual é finito.
 - $\delta \rightarrow$ função programa ou função transição:
 $\delta: Q \times (\Sigma \cup \epsilon) \rightarrow 2^Q$
 - $q_0 \rightarrow$ estado inicial, tal que $q_0 \in Q$.
 - $F \rightarrow$ conjunto de estados finais tal que $F \subseteq Q$.

6. Autômatos Finitos – AFε



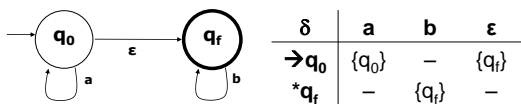
- Sabendo-se que δ é um grafo finito com movimentos vazios, supondo que: $\delta(q, a) = \{p_2, \dots, p_n\}$ e $\delta(q, \epsilon) = \{p_1\}$



6. Autômatos Finitos – AFε



- Exemplo: considere a linguagem $L = \{w \mid \text{qualquer símbolo } a \text{ antecede qualquer símbolo } b\}$ e o AFε $M = (\{a, b\}, \{q_0, q_f\}, \delta, q_0, \{q_f\})$ onde δ é como abaixo representado, reconhece L.



6. Autômatos Finitos – Conversão $AF\epsilon \rightarrow AFND$



- Função Fecho Vazio ($F\epsilon$): a função fecho vazio ($F\epsilon$) é indutivamente definida como segue:
 - » $F\epsilon(q) = \{q\}$, se $\delta(q, \epsilon)$ é indefinido;
 - » $F\epsilon(q) = \{q\} \cup \delta(q, \epsilon) \cup \delta(\delta(q, \epsilon), \epsilon) \cup \dots$, caso contrário.
- Função Programa Estendida ($\hat{\delta}$): é a solução indutiva definida como segue:
 - » $\hat{\delta}(q, \epsilon) = F\epsilon(q)$
 - » $\hat{\delta}(q, wa) = F\epsilon(R)$ onde $R = \{r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \hat{\delta}(q, \epsilon)\}$

6. Autômatos Finitos – Conversão $AF\epsilon \rightarrow AFND$

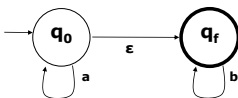


- A classe dos Autômatos Finitos com Movimentos Vazios é equivalente à classe dos Autômatos Finitos Não-Determinísticos.
- Seja $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ um $AF\epsilon$ qualquer, existe um $M' = (\Sigma, Q, \delta', q_0, F')$ um AFND construído a partir de M como segue:
 - » δ' tal que $\delta': Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ onde $\delta'(q, a) = \hat{\delta}(\{q\}, a)$.
 - » F' é o conjunto de todos os estados q pertencentes a Q tal que algum elemento de $F\epsilon(q) \in F$.

6. Autômatos Finitos – Conversão $AF\epsilon \rightarrow AFND$



- **Exemplo 1:** dado um $AF\epsilon M = (\{a, b\}, \{q_0, q_f\}, \delta, q_0, \{q_f\})$. Onde δ é dado pelo grafo abaixo:



- Existe um $M' = (\{a, b\}, \{q_0, q_f\}, \delta', \{q_0\}, F')$ equivalente.

6. Autômatos Finitos – Conversão AFε → AFND



- F' é retirado da função Fecho Vazio ($F\epsilon$).

» $F' = \{q_0, q_f\}$, pois:

- $F\epsilon(q_0) = \{q_0\} \cup \delta(q_0, \epsilon) \cup \delta(\delta(q_0, \epsilon), \epsilon)$
 $= \{q_0\} \cup \{q_f\} \cup \emptyset$
 $= \{q_0, q_f\}$
- $F\epsilon(q_f) = \{q_f\}$

» Como todos tem $\{q_f\}$, todos os estados são finais no AFND.

6. Autômatos Finitos – Conversão AFε → AFND



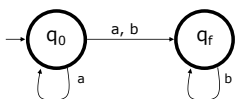
- δ' é retirado da função Programa Estendida (δ).

- » $\delta'(q_0, \epsilon) = \delta(q_0, \epsilon) = F\epsilon(q_0) = \{q_0, q_f\}$
- » $\delta'(q_0, a) = \delta(q_0, a) = F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \delta(q_0, \epsilon)\})$
 $= F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \{q_0, q_f\}\})$
 $= F\epsilon(\{\delta(q_0, a) \cup \delta(q_f, a)\})$
 $= F\epsilon(\{q_0 \cup \emptyset\}) = F\epsilon(\{q_0\}) = \{q_0, q_f\}$
- » $\delta'(q_0, b) = \delta(q_0, b) = F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \delta(q_0, \epsilon)\})$
 $= F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \{q_0, q_f\}\})$
 $= F\epsilon(\{q_f\}) = \{q_f\}$
- » $\delta'(q_f, \epsilon) = \delta(q_f, \epsilon) = F\epsilon(q_f) = \{q_f\}$
- » $\delta'(q_f, a) = \delta(q_f, a) = F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \delta(q_f, \epsilon)\})$
 $= F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \{q_f\}\})$
 $= F\epsilon(\emptyset) = \emptyset$
- » $\delta'(q_f, b) = \delta(q_f, b) = F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \delta(q_f, \epsilon)\})$
 $= F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \{q_f\}\})$
 $= F\epsilon(\{\delta(q_f, b)\}) = F\epsilon(\{q_f\}) = \{q_f\}$

6. Autômatos Finitos – Conversão AFε → AFND



- O AFε $M = (\{a, b\}, \{q_0, q_f\}, \delta, q_0, \{q_f\})$, possui um AFND equivalente $M' = (\{a, b\}, Q, \delta', \{q_0\}, \{q_0, q_f\})$, com δ' mostrado abaixo.

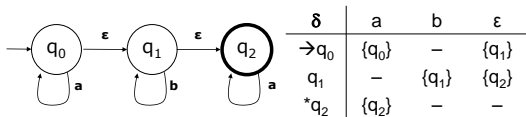


δ'	a	b
$\rightarrow^* q_0$	$\{q_0, q_f\}$	$\{q_f\}$
$*q_f$	—	$\{q_f\}$

6. Autômatos Finitos – Conversão AFε → AFND



- Exemplo 2: dado um AFε $M = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \delta, \{q_0\}, \{q_2\})$. Onde δ é dado pelo grafo abaixo:



- Existe um $M' = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \delta', \{q_0\}, F')$ equivalente.

6. Autômatos Finitos – Conversão AFε → AFND



- F' é retirado da função Fecho Vazio (F_ϵ).

» $F' = \{q_0, q_1, q_2\}$, pois:

- $F_\epsilon(q_0) = \{q_0\} \cup \delta(q_0, \epsilon) \cup \delta(\delta(q_0, \epsilon), \epsilon) = \{q_0\} \cup \{q_1\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $F_\epsilon(q_1) = \{q_1\} \cup \delta(q_1, \epsilon) = \{q_1\} \cup \{q_2\} = \{q_1, q_2\}$
- $F_\epsilon(q_2) = \{q_2\}$

» Como todos tem $\{q_2\}$, todos os estados são finais no AFND.

6. Autômatos Finitos – Conversão AFε → AFND



- δ' é retirado da função Programa Estendida ($\tilde{\delta}$).

- » $\delta'(q_0, \epsilon) = \tilde{\delta}(q_0, \epsilon) = F_\epsilon(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$
- » $\delta'(q_0, a) = \tilde{\delta}(q_0, a) = F_\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \tilde{\delta}(q_0, \epsilon)\})$
 $= F_\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \{q_0, q_1, q_2\}\})$
 $= F_\epsilon(\{\delta(q_0, a) \cup \delta(q_1, a) \cup \delta(q_2, a)\})$
 $= F_\epsilon(\{q_0 \cup \emptyset \cup q_2\})$
 $= F_\epsilon(\{q_0, q_2\})$
 $= F_\epsilon(q_0) \cup F_\epsilon(q_2) = \{q_0, q_1, q_2\}$
- » $\delta'(q_0, b) = \tilde{\delta}(q_0, b) = F_\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \tilde{\delta}(q_0, \epsilon)\})$
 $= F_\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \{q_0, q_1, q_2\}\})$
 $= F_\epsilon(\{\delta(q_0, b) \cup \delta(q_1, b) \cup \delta(q_2, b)\})$
 $= F_\epsilon(\{\emptyset \cup q_1 \cup \emptyset\})$
 $= F_\epsilon(\{q_1\}) = \{q_1, q_2\}$

6. Autômatos Finitos – Conversão AFε → AFND



- » $\delta'(q_1, \epsilon) = \hat{\delta}(q_1, \epsilon) = F\epsilon(q_1) = \{q_1, q_2\}$
- » $\delta'(q_1, a) = \hat{\delta}(q_1, a) = F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \hat{\delta}(q_1, \epsilon)\})$
 $= F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \{q_1, q_2\}\})$
 $= F\epsilon((\delta(q_1, a) \cup \delta(q_2, a)))$
 $= F\epsilon(\{\emptyset \cup q_2\})$
 $= F\epsilon(\{q_2\}) = \{q_2\}$
- » $\delta'(q_1, b) = \hat{\delta}(q_1, b) = F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \hat{\delta}(q_1, \epsilon)\})$
 $= F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \{q_1, q_2\}\}) =$
 $= F\epsilon((\delta(q_1, b) \cup \delta(q_2, b)))$
 $= F\epsilon(\{q_1 \cup \emptyset\})$
 $= F\epsilon(\{q_1\}) = \{q_1, q_2\}$

6. Autômatos Finitos – Conversão AFε → AFND

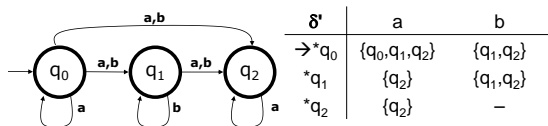


- » $\delta'(q_2, \epsilon) = \hat{\delta}(q_2, \epsilon) = F\epsilon(q_2) = \{q_2\}$
- » $\delta'(q_2, a) = \hat{\delta}(q_2, a) = F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \hat{\delta}(q_2, \epsilon)\})$
 $= F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \{q_2\}\}) =$
 $= F\epsilon(\{\delta(q_2, a)\})$
 $= F\epsilon(\{q_2\}) = \{q_2\}$
- » $\delta'(q_2, b) = \hat{\delta}(q_2, b) = F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \hat{\delta}(q_2, \epsilon)\}) =$
 $= F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \{q_2\}\}) =$
 $= F\epsilon(\{\delta(q_2, b)\})$
 $= F\epsilon(\{\emptyset\}) = \emptyset$

6. Autômatos Finitos – Conversão AFε → AFND



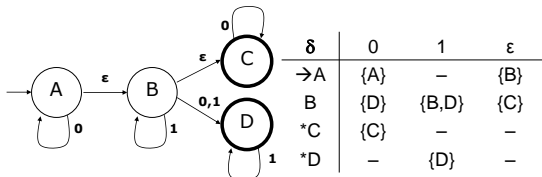
- O AFε $M = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \delta, \{q_0\}, \{q_2\})$, possui um autômato equivalente $M' = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \delta', \{q_0\}, \{q_0, q_1, q_2\})$, com δ' mostrado abaixo.



6. Autômatos Finitos – Conversão AFε → AFND



- Exemplo 3: dado um AFε $M = (\{0,1\}, \{A,B,C,D\}, \delta, \{A\}, \{C,D\})$. Onde δ é dado pelo grafo abaixo:



- Existe um $M' = (\{0,1\}, \{A,B,C,D\}, \delta', \{A\}, F')$ equivalente.

6. Autômatos Finitos – Conversão AFε → AFND



- F' é retirado da função Fecho Vazio (F_ϵ).
 - $F' = \{A, B, C, D\}$, pois:
 - $F_\epsilon(A) = \{A\} \cup \delta(A, \epsilon) \cup \delta(\delta(A, \epsilon), \epsilon) = \{A\} \cup \{B\} \cup \{C\} = \{A, B, C\}$
 - $F_\epsilon(B) = \{B\} \cup \delta(B, \epsilon) = \{B\} \cup \{C\} = \{B, C\}$
 - $F_\epsilon(C) = \{C\}$
 - $F_\epsilon(D) = \{D\}$
 - Como todos tem $\{C\}$ ou $\{D\}$ na composição dos resultados, todos os estados são finais no AFND.

6. Autômatos Finitos – Conversão AFε → AFND



- δ' é retirado da função Programa Estendida (δ).
 - $\delta'(A, \epsilon) = \delta(A, \epsilon) = F_\epsilon(A) = \{A, B, C\}$
 - $\delta'(A, 0) = \delta(A, 0) = F_\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, 0) \text{ e } s \in \delta(A, \epsilon)\}) = F_\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, 0) \text{ e } s \in \{A, B, C\}\}) = F_\epsilon(\{\delta(A, 0) \cup \delta(B, 0) \cup \delta(C, 0)\}) = F_\epsilon(\{A \cup D \cup C\}) = F_\epsilon(\{A, C, D\}) = F_\epsilon(\{A\}) \cup F_\epsilon(\{C\}) \cup F_\epsilon(\{D\}) = \{A, B, C, D\}$
 - $\delta'(A, 1) = \delta(A, 1) = F_\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, 1) \text{ e } s \in \delta(A, \epsilon)\}) = F_\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, 1) \text{ e } s \in \{A, B, C\}\}) = F_\epsilon(\{\delta(A, 1) \cup \delta(B, 1) \cup \delta(C, 1)\}) = F_\epsilon(\{\emptyset \cup \{B, D\} \cup \emptyset\}) = F_\epsilon(\{B, D\}) = F_\epsilon(\{B\}) \cup F_\epsilon(\{D\}) = \{B, C, D\}$

6. Autômatos Finitos – Conversão AFε → AFND



- » $\delta'(B, \epsilon) = \delta(B, \epsilon) = F\epsilon(B) = \{B, C\}$
- » $\delta'(B, 0) = \delta(B, 0) = F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, 0) \text{ e } s \in \delta(B, \epsilon)\})$
 $= F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, 0) \text{ e } s \in \{B, C\}\})$
 $= F\epsilon(\{\delta(B, 0) \cup \delta(C, 0)\})$
 $= F\epsilon(\{D \cup C\})$
 $= F\epsilon(\{C, D\})$
 $= F\epsilon(F\epsilon(\{C\}) \cup F\epsilon(\{D\})) = \{C, D\}$
- » $\delta'(B, 1) = \delta(B, 1) = F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, 1) \text{ e } s \in \delta(B, \epsilon)\})$
 $= F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, 1) \text{ e } s \in \{B, C\}\})$
 $= F\epsilon(\{\delta(B, 1) \cup \delta(C, 1)\})$
 $= F\epsilon(\{\{B, D\} \cup \emptyset\})$
 $= F\epsilon(\{B, D\})$
 $= F\epsilon(\{B\}) \cup F\epsilon(\{D\}) = \{B, C, D\}$

6. Autômatos Finitos – Conversão AFε → AFND



- » $\delta'(C, \epsilon) = \delta(C, \epsilon) = F\epsilon(C) = \{C\}$
- » $\delta'(C, 0) = \delta(C, 0) = F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, 0) \text{ e } s \in \delta(C, \epsilon)\})$
 $= F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, 0) \text{ e } s \in \{C\}\})$
 $= F\epsilon(\{\delta(C, 0)\})$
 $= F\epsilon(\{C\}) = \{C\}$
- » $\delta'(C, 1) = \delta(C, 1) = F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, 1) \text{ e } s \in \delta(C, \epsilon)\})$
 $= F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, 1) \text{ e } s \in \{C\}\})$
 $= F\epsilon(\{\delta(C, 1)\})$
 $= F\epsilon(\{\emptyset\}) = \emptyset$

6. Autômatos Finitos – Conversão AFε → AFND

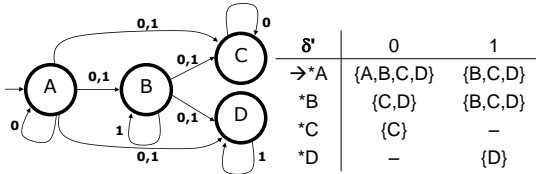


- » $\delta'(D, \epsilon) = \delta(D, \epsilon) = F\epsilon(D) = \{D\}$
- » $\delta'(D, 0) = \delta(D, 0) = F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, 0) \text{ e } s \in \delta(D, \epsilon)\})$
 $= F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, 0) \text{ e } s \in \{D\}\})$
 $= F\epsilon(\{\delta(D, 0)\})$
 $= F\epsilon(\{\emptyset\}) = \emptyset$
- » $\delta'(D, 1) = \delta(D, 1) = F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, 1) \text{ e } s \in \delta(D, \epsilon)\})$
 $= F\epsilon(\{r \mid r \in \delta(s, 1) \text{ e } s \in \{D\}\})$
 $= F\epsilon(\{\delta(D, 1)\})$
 $= F\epsilon(\{D\}) = \{D\}$

6. Autômatos Finitos – Conversão AFε → AFND



- O AFε $M = (\{0,1\}, \{A,B,C,D\}, \delta, \{A\}, \{C,D\})$, possui um autômato equivalente $M' = (\{0,1\}, \{A,B,C,D\}, \delta', \{A\}, \{A,B,C,D\})$, com δ' mostrado abaixo.





Linguagens Formais e Autômatos

Engenharia da Computação
clayton.valdo@anhanguera.com