tačiau egzistuoja tokie sistemos $\mathbf{a}^j$, $j=1, \ldots, n$, vektoriai $\mathbf{a}^{j_1}, \ldots, \mathbf{a}^{j_s}$, $s<m$, ir realieji skaičiai λ_{j_k}, $k=1, \ldots, s$, kad

$$\sum_{k=1}^{s} \mathbf{a}^{j_k}\lambda_{j_k}=\mathbf{b}.$$

(Tada $\mathbf{x}^0=(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, kai $x_{j_k}^0=\lambda_{j_k}$, $k=1, \ldots, s$, o kiti $x_j^0=0$, yra leistinasis vektorius, kurio teigiamų koordinačių mažiau kaip m.) Aptarsime kiekvieną iš tų atvejų.

Kai matricos A rangas $\mathrm{r}(A)<m$, tada (8.2) sistemoje yra $m-\mathrm{r}(A)$ tiesiškai priklausomų lygčių. Tokios sistemos kiekvienas atraminis vektorius yra išsigimęs. Tarkime, kad (8.2) sistema neišspręsta bazinių kintamųjų atžvilgiu. 6 paragrafe parodėme, kaip dviejų etapų metodu galime rasti tiesiškai priklausomas sistemos lygtis. Išbraukę tas lygtis, gausime ekvivalenčią sistemą, kurioje visos lygtys bus tiesiškai nepriklausomos.

Todėl pakanka nagrinėti tiesinio programavimo uždavinius, kai apribojimų sistemos visos lygtys yra tiesiškai nepriklausomos.

Dabar tirkime antrąjį išsigimimo atvejį. Priminsime, kad taikydami simplekso metodą, vedančiąją eilutę parenkame pagal mažiausią simpleksinį santykį:

$$\frac{b_r}{a_{rs}}=\min_{a_{is}>0}\left\{\frac{b_i}{a_{is}}\right\}. \tag{8.3}$$

Sakykime, kad (8.3) santykis lygus nuliui, t. y. $b_r=0$. Atlikę Žordano eliminavimo žingsnį, gauname kitą atraminį vektorių $\mathbf{x}^1$. Kadangi $b_r=0$, tai vektorių $\mathbf{x}^0$ ir $\mathbf{x}^1$ koordinatės yra vienodos, bet skiriasi juos atitinkančios bazės. Tada ir tikslo funkcijų reikšmės yra vienodos, t. y. $f(\mathbf{x}^0)=f(\mathbf{x}^1)$. Gali būti, kad keliose paeiliui atliktose iteracijose tikslo funkcijos reikšmė nedidėja, t. y. $f(\mathbf{x}^0)=f(\mathbf{x}^1)=f(\mathbf{x}^2)=\ldots$, ir po kelių iteracijų grįšime prie to paties atraminio vektoriaus $\mathbf{x}^0$, t. y. tos pačios bazės B:

$$f(\mathbf{x}^0)=f(\mathbf{x}^1)=\ldots=f(\mathbf{x}^l)=f(\mathbf{x}^0).$$

Tada sakome, kad taikydami simplekso metodą gavome ciklą. Aišku, šiuo atveju pagal tas pačias (8.3) taisykles parinkdami vedančiąją eilutę, negalime gauti nesančio cikle atraminio vektoriaus. Norint išvengti ciklų, vedančiąją eilutę reikia parinkti laikantis papildomų taisyklių.

Pateiksime taisyklę, kurią taikant ciklų neatsiranda. Sakykime, kad yra keletas mažiausių simpleksinių santykių (nebūtinai lygių nuliui). Tada ieškome mažiausio simpleksinio santykio tarp pirmojo lentelės stulpelio, atitinkančio laisvąjį kintamąjį, ir vedančiojo stulpelio elementų, paimtų iš tų eilučių, kuriose buvo mažiausi simpleksiniai santykiai. Jeigu vėl gavome keletą mažiausių simpleksinių santykių, tai analogiškų santykių ieškosime tarp antrojo ir vedančiojo stulpelio elementų ir t. t. Vedančiosios eilutės parinkimo procesą baigiame gavę vieną mažiausią simpleksinį santykį. Jeigu apribojimų matricos A rangas lygus lygčių skaičiui, t. y. $\mathrm{r}(A)=m$, tai, taikydami šią taisyklę, ciklų negauname. Šio teiginio įrodymą rasite [16].

Anksčiau buvo manoma, kad praktiniuose uždaviniuose ciklai gaunami labai retai, kad juos galima gauti tik specialiai sudarytuose teoriniuose pavyzdžiuose. Dabar, kai praktinių uždavinių kintamųjų ir apribojimų skaičius smarkiai padidėjo, išsigimę uždaviniai, taigi ir ciklai, gana dažni. Todėl daugelyje simplekso metodo standartinių programų numatytos procedūros, padedančios išvengti ciklų.

Apie išsigimusius uždavinius galite paskaityti vadovėliuose [8, 16].

§ 9. DUALIEJI TIESINIO PROGRAMAVIMO UŽDAVINIAI

Tiesinio programavimo teorijoje svarbi dualumo sąvoka. Kiekvienam tiesinio programavimo uždaviniui, kuris vadinamas tiesioginiu (pradiniu), galima suformuluoti kitą uždavinį, vadinamą *dualiu* tiesioginiam. Tokie uždaviniai yra glaudžiai susiję. Žinant vieno iš jų savybes, galima nusakyti kito savybes ir atvirkščiai.

1. Dualiojo uždavinio formulavimas. Imkime bendrąjį tiesinio programavimo uždavinį: reikia rasti

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

kai

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant b_i, \quad i=1, \ldots, m_1;\\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, \quad i=m_1+1, \ldots, m;\\ x_j\geqslant 0, \quad j=1, \ldots, n_1;\end{gathered} \tag{9.1}$$

čia $m_1\leqslant m$, $n_1\leqslant n$.

Tiesinio programavimo uždavinys, kuriame reikia rasti

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$$

kai

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i\geqslant c_j, \quad j=1, \ldots, n_1;\\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i=c_j, j=n_1+1, \ldots, n;\\ y_i\geqslant 0, \quad i=1, \ldots, m_1,\end{gathered} \tag{9.2}$$

vadinamas (9.1) uždavinio *dualiuoju uždaviniu.*

Pažymėsime, kad tiesioginiame uždavinyje tikslo funkcija maksimizuojama, o dualiajame – minimizuojama. Jeigu tiesioginiu imtume (9.2) uždavinį, tai jo dualusis būtų (9.1) uždavinys. Todėl sakoma, kad (9.1) ir (9.2) uždaviniai yra tarpusavyje dualūs.

Dualųjį uždavinį sudarome pagal šitokias taisykles:

1. Tiesioginį uždavinį užrašome šitaip: jeigu šio uždavinio tikslo funkcija maksimizuojama, tai visas apribojimų nelygybes taip užrašome, kad jų ženklas būtų $\leqslant$, o jeigu minimizuojama – tai kad ženklas būtų $\geqslant$. Tai galima padaryti atitinkamas nelygybes dauginant iš -1;

2. Dualiajame (9.2) uždavinyje imame tiek kintamųjų y_i, kiek (9.1) tiesioginiame yra apribojimų, ir tiek apribojimų, kiek yra kintamųjų x_j.

Atkreipsime dėmesį, kad (9.1) uždavinio i-ąjį apribojimą atitinka (9.2) uždavinio kintamasis y_i, o (9.2) uždavinio j-ąjį apribojimą – (9.1) uždavinio kintamasis x_j.

3. Jeigu pradinio uždavinio tikslo funkcija maksimizuojama, tai dualiojo – minimizuojama ir atvirkščiai. Dualiojo uždavinio tikslo funkcijos koeficientai yra tiesioginio uždavinio apribojimų laisvieji nariai.

4. Dualiojo uždavinio apribojimų matrica gaunama transponuojant tiesioginio uždavinio apribojimų matricą.

5. Jeigu (9.1) uždavinio kintamasis x_j yra neneigiamas, tai (9.2) dualiojo minimizavimo uždavinio j-asis apribojimas yra nelygybė $\geqslant$. Jeigu x_j gali įgyti bet kokio ženklo reikšmes, tai (9.2) uždavinio j-asis apribojimas yra lygtis. Analogiškas sąryšis ir tarp (9.2) uždavinio kintamųjų y_i ir (9.1) uždavinio apribojimų.

1 pavyzdys. Imkime tiesinio programavimo uždavinį: reikia rasti

$$\max\,(x_1+2x_2+5x_3+4x_4),$$

kai

$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+4x_3-3x_4&\leqslant 2,\\ 3x_1+x_2+x_3+2x_4&=1,\\ x_1-4x_2\qquad+5x_4&\geqslant -6,\\ x_1\geqslant 0,\quad x_4&\geqslant 0. \end{aligned}$$

Parašysime jam dualų uždavinį.

Trečiąją nelygybę padauginę iš -1, uždavinį užrašome šitaip: reikia rasti

$$\max\,(x_1+2x_2+5x_3+4x_4),$$

kai

$$\begin{array}{l|l} 2x_1-x_2+4x_3-3x_4\leqslant 2, & y_1\\ 3x_1+x_2+x_3+2x_4=1, & y_2\\ -x_1+4x_2\qquad-5x_4\leqslant 6, & y_3 \end{array}$$

$$x_1\geqslant 0,\quad x_4\geqslant 0.$$

Šalia pastarojo uždavinio apribojimų surašome dualiojo uždavinio kintamuosius y_1, y_2, y_3. Remdamiesi 1–5 taisyklėmis, sudarome dualųjį uždavinį: reikia rasti

$$\min\,(2y_1+y_2+6y_3),$$

kai

$$\begin{aligned} 2y_1+3y_2-y_3&\geqslant 1,\\ -y_1+y_2+4y_3&=2,\\ 4y_1+y_2\qquad&=5,\\ -3y_1+2y_2-5y_3&\geqslant 4,\\ y_1\geqslant 0,\quad y_3&\geqslant 0. \end{aligned}$$

2. Kanoninio ir standartinio uždavinių dualieji uždaviniai. Kanoninis ir standartinis uždaviniai yra bendrojo uždavinio atskirieji atvejai. Todėl, užrašydami jų dualiuosius uždavinius, naudojamės tomis pačiomis taisyklėmis.

Taigi kanoninio maksimizavimo uždavinio: reikia rasti

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

kai

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i,\quad i=1,\ \ldots,\ m; \tag{9.3}$$

$$x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ \ldots,\ n,$$

dualusis uždavinys yra šitoks: reikia rasti

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$$

kai

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i\geqslant c_j,\quad j=1,\ \ldots,\ n. \tag{9.4}$$

Pasinaudoję 3 paragrafo žymėjimais, (9.3) uždavinį užrašykime šitaip: reikia rasti

$$\max\,\langle \mathbf{c},\ \mathbf{x}\rangle,$$

kai

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b},$$

$$\mathbf{x}\geqslant \mathbf{0}.$$

Tada jo dualusis yra toks: reikia rasti

$$\min\,\langle \mathbf{b},\ \mathbf{y}\rangle,$$

kai

$$A^T\mathbf{y}\geqslant \mathbf{c}.$$

Atkreipsime dėmesį, kad uždavinyje, dualiame kanoniniam uždaviniui, nėra neneigiamumo sąlygų.

Standartinio maksimizavimo uždavinio: reikia rasti

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

kai

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i=1, \ldots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, \ldots, n,$$

dualusis uždavinys yra standartinis minimizavimo uždavinys: reikia rasti

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$$

kai

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j=1, \ldots, n,$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i=1, \ldots, m.$$

2 pavyzdys. Imkime tiesinio programavimo uždavinį: reikia rasti

$$\max(-3x_1+2x_2), \tag{9.5}$$

kai

$$\begin{array}{l|l} x_1+2x_2+3x_3=1, & y_1 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=5, & y_2 \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.$$

Parašysime jam dualų uždavinį; po to užrašysime pastarajam dualų.

Remdamiesi 1–5 taisyklėmis, užrašome duotojo uždavinio dualųjį: reikia rasti

$$\min(y_1+5y_2),$$

kai

$$\begin{array}{rl|l} y_1+3y_2 \geqslant & -3, & x_1 \\ 2y_1+4y_2 \geqslant & 2, & x_2 \\ 3y_1-2y_2 \geqslant & 0. & x_3 \end{array}$$

Pastarąjį uždavinį laikysime tiesioginiu uždaviniu. Jam dualaus uždavinio kintamuosius pažymėkime x_1, x_2, x_3. Pritaikę 1–5 taisykles, gauname šitokį uždavinį: reikia rasti

$$\max(-3x_1+2x_2), \tag{9.6}$$

kai

$$x_1+2x_2+3x_3=1,$$
$$3x_1+4x_2-2x_3=5,$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.$$

Pažymėsime, kad (9.5) ir (9.6) uždaviniai yra vienodi. Apskritai nesunku įsitikinti, kad dualiojo uždavinio dualusis yra tiesioginis uždavinys.

§ 10. DUALUMO TEOREMOS

Dualiųjų uždavinių sąryšius nusako dualumo teoremos.

1. Pagrindinė dualumo nelygybė. Tarkime, kad tiesioginis uždavinys yra standartinis maksimizavimo uždavinys: reikia rasti

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{10.1}$$

kai

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i=1, \ldots, m;$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, \ldots, n. \tag{10.2}$$

Jam dualus uždavinys yra šitoks: reikia rasti

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i, \tag{10.3}$$

kai

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j=1, \ldots, n;$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i=1, \ldots, m. \tag{10.4}$$

Tiesioginio (10.1), (10.2) uždavinio leistinųjų vektorių aibę pažymėkime X, o tikslo funkciją – $f(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$. Dualiojo (10.3), (10.4) uždavinio leistinųjų vektorių aibę pažymėkime Y, o tikslo funkciją – $g(\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$.

10.1 lema. *Sakykime, $\mathbf{x}^0=(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in X$, o $\mathbf{y}^0=(y_1^0, \ldots, y_m^0) \in Y$. Tada teisinga nelygybė*

$$f(\mathbf{x}^0) \leqslant g(\mathbf{y}^0). \tag{10.5}$$

$\triangleright$ Kadangi $\mathbf{x}^0 \in X$ ir $\mathbf{y}^0 \in Y$, tai

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^0 \leqslant b_i, \quad i=1, \ldots, m, \tag{10.6}$$

ir

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 \geqslant c_j, \quad j=1, \ldots, n. \tag{10.7}$$

Be to, $x_j^0 \geqslant 0$, $j=1, \ldots, n$, ir $y_i^0 \geqslant 0$, $i=1, \ldots, m$.

Sudėję (10.6) sistemos nelygybes, padaugintas iš y_i^0 $(i=1, \ldots, m)$, gauname

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 y_i^0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^0. \qquad (10.8)$$

Sudėję (10.7) sistemos nelygybes, padaugintas iš x_j^0 $(j=1, \ldots, n)$, gauname

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 y_i^0 \geqslant \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0. \qquad (10.9)$$

Iš (10.8) ir (10.9) nelygybių išplaukia sąryšis

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i^0 x_j^0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^0. \qquad (10.10)$$

Taigi $f(\mathbf{x}^0) \leqslant g(\mathbf{y}^0)$. ◁

(10.10) nelygybė vadinama *pagrindine dualumo nelygybe*. Ji reiškia, kad maksimizavimo uždavinio tikslo funkcijos reikšmė $f(\mathbf{x})$, kai $\mathbf{x} \in X$, yra ne didesnė už jam dualaus (minimizavimo) uždavinio tikslo funkcijos reikšmę $g(\mathbf{y})$, kai $\mathbf{y} \in Y$.

10.2 lema. Sakykime, kad $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in X$ yra tiesioginio, o $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*) \in Y$ – jam dualaus uždavinio leistinieji vektoriai ir

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*. \qquad (10.11)$$

Tada $\mathbf{x}^*$ yra (10.1), (10.2) uždavinio sprendinys, o $\mathbf{y}^*$ – jam dualaus (10.3), (10.4) uždavinio sprendinys.

▷ Pagal 10.1 lemą su bet kuriuo $\mathbf{x} \in X$ ir $\mathbf{y}^* \in Y$ yra teisinga nelygybė

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*.$$

Kadangi $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$, tai iš pastarosios nelygybės gauname

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*.$$

Taigi leistinasis vektorius $\mathbf{x}^*$ yra (10.1), (10.2) uždavinio sprendinys. Panašiai įrodoma, kad $\mathbf{y}^*$ yra (10.3), (10.4) uždavinio sprendinys. ◁

2. Sprendinio egzistavimo būtinosios ir pakankamosios sąlygos. 3 paragrafo 2 skirsnyje pateikėme tiesinio programavimo uždavinio pakankamąsias sprendinio egzistavimo sąlygas. Pasinaudoję dualiųjų uždavinių

sąryšiais, rasime būtinąsias ir pakankamąsias jų sprendinių egzistavimo sąlygas.

10.1 teorema. *Dualieji uždaviniai turi sprendinių tada ir tik tada, ka kiekvienas iš jų turi bent po vieną leistinąjį vektorių.*

▷ Teoremą įrodysime (10.1), (10.2) ir (10.3), (10.4) uždaviniams.

Būtinumas. Tarkime, kad $\mathbf{x}^*$ yra (10.1), (10.2) uždavinio, o $\mathbf{y}^*$ – jam dualaus (10.3), (10.4) uždavinio sprendiniai. Pagal sprendinio apibrėžimą $\mathbf{x}^* \in X$ ir $\mathbf{y}^* \in Y$. Taigi $\mathbf{x}^*$ yra (10.1), (10.2), o $\mathbf{y}^*$ – (10.3), (10.4) uždavinio leistinieji vektoriai.

Pakankamumas. Imkime $\mathbf{y}^0 \in Y$. Pagal 10.1 lemą

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^0, \quad \mathbf{x} \in X.$$

Vadinasi, (10.1), (10.2) uždavinys tenkina 3.3 teoremos sąlygas – tikslo funkcija leistinųjų vektorių aibėje X aprėžta iš viršaus. Iš tos teoremos išplaukia, kad (10.1), (10.2) uždavinys turi sprendinį. Panašiai samprotaujant, nesunku įrodyti, kad (10.3), (10.4) uždavinio tikslo funkcija $g(\mathbf{y})$ leistinųjų vektorių aibėje Y aprėžta iš apačios. Taigi ir dualusis uždavinys turi sprendinį. ◁

1 išvada. *Jeigu* (10.1), (10.2) *uždavinio tikslo funkcija* $f(\mathbf{x})$ *leistinųjų vektorių aibėje* X *neaprėžta iš viršaus, tai dualiojo* (10.3), (10.4) *uždavinio leistinųjų vektorių aibė yra tuščia, t. y.* $Y = \varnothing$.

▷ Įrodysime prieštaros metodu. Sakykime, (10.3), (10.4) uždavinio leistinųjų vektorių aibė yra $Y \neq \varnothing$. Imkime bet kurį vektorių $\mathbf{y}^0 \in Y$. Pagal 10.1 lemą $f(\mathbf{x}) \leqslant g(\mathbf{y}^0)$, kai $\mathbf{x} \in X$. Vadinasi, (10.1), (10.2) uždavinio tikslo funkcija $f(\mathbf{x})$ aibėje X yra aprėžta iš viršaus. Tai prieštarauja išvados sąlygai. Vadinasi, dualiojo (10.3), (10.4) uždavinio leistinųjų vektorių aibė yra $Y = \varnothing$. ◁

Panašiai galima įrodyti, kad tiesioginio (10.1), (10.2) uždavinio leistinųjų vektorių aibė X yra tuščia, kai jam dualaus (10.3), (10.4) uždavinio tikslo funkcija $g(\mathbf{y})$ leistinųjų vektorių aibėje Y neaprėžta iš apačios.

3. Pirmoji dualumo teorema. Šią teoremą įrodysime tuo atveju, kai tiesioginis uždavinys yra kanoninis. Pasinaudoję 3 paragrafo žymėjimais, kanoninį uždavinį užrašykime šitaip: reikia rasti

$$\max \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \qquad (10.12)$$

kai

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}^j x_j = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}. \qquad (10.13)$$

Jam dualus uždavinys yra šitoks: reikia rasti

$$\min \mathbf{b}^T\mathbf{y}, \qquad (10.14)$$

kai

$$(\mathbf{a}^j)^T\mathbf{y} \geqslant c_j, \quad j=1, \ldots, n. \qquad (10.15)$$

10.2 teorema. *Jeigu vienas iš dualiųjų uždavinių turi sprendinį, tai ir kitas turi sprendinį. Be to,*

$$f(\mathbf{x}^*)=g(\mathbf{y}^*); \tag{10.16}$$

čia $\mathbf{x}^*$ *— tiesioginio uždavinio, o* $\mathbf{y}^*$ *— dualiojo uždavinio bet kokie sprendiniai.*

$\triangleright$ Jeigu (10.12), (10.13) uždavinys turi sprendinį, tai pagal 3.3 teoremą jis turi ir atraminį sprendinį. Tarkime, kad $\mathbf{x}^*=(x_1^*, \ldots, x_m^*, 0, \ldots, 0)$ yra atraminis sprendinys, kurio bazė $B=(\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m)$. Pažymėkime

$$\mathbf{x}_B^*=(x_1^*, \ldots, x_m^*)^T, \; \mathbf{c}_B=(c_1, \ldots, c_m)^T.$$

Tada (žr. § 7, 1 skirsnį)

$$\mathbf{x}_B^*=B^{-1}\mathbf{b}, \; f_{\max}=f(\mathbf{x}^*)=\mathbf{c}_B^T B^{-1}\mathbf{b}, \tag{10.17}$$

$$\Delta_j=\mathbf{c}_B^T B^{-1}\mathbf{a}^j-c_j, \quad j=1, \ldots, n.$$

Kadangi atraminis vektorius $\mathbf{x}^*$ yra uždavinio sprendinys, tai pagal 4.1 teoremą visi įvertinimai

$$\Delta_j=\mathbf{c}_B^T B^{-1}\mathbf{a}^j-c_j \geqslant 0, \quad j=1, \ldots, n. \tag{10.18}$$

Pažymėkime $(\mathbf{y}^*)^T=\mathbf{c}_B^T B^{-1}$. Iš (10.18) nelygybių gauname

$$(\mathbf{a}^j)^T\mathbf{y}^*-c_j \geqslant 0, \quad j=1, \ldots, n.$$

Vadinasi, $\mathbf{y}^*$ yra (10.14), (10.15) uždavinio leistinasis vektorius. Tikslo funkcijos reikšmė yra

$$g(\mathbf{y}^*)=\mathbf{b}^T\mathbf{y}^*=(\mathbf{y}^*)^T\mathbf{b}=\mathbf{c}_B^T B^{-1}\mathbf{b}. \tag{10.19}$$

Iš (10.17) ir (10.19) lygybių gauname

$$g(\mathbf{y}^*)=f(\mathbf{x}^*)=\mathbf{c}_B^T B^{-1}\mathbf{b}.$$

Iš 10.2 lemos išplaukia, kad leistinieji vektoriai $\mathbf{x}^*$ ir $\mathbf{y}^*$ yra sprendiniai. $\triangleleft$

4. Antroji dualumo teorema. Ar dualiųjų uždavinių leistinieji vektoriai yra jų sprendiniai, galima patikrinti remiantis 10.2 lema. Dar vienas standartinių ir kanoninių uždavinių sprendinių kriterijus išplaukia iš tokios teoremos.

10.3 teorema. *Leistinieji vektoriai* $\mathbf{x}^*=(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ *ir* $\mathbf{y}^*=(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ *tada ir tik tada yra* (10.1), (10.2) *ir* (10.3), (10.4) *uždavinių sprendiniai, kai*

1. $$x_j^*\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^*-c_j\right)=0, \quad j=1, \ldots, n; \tag{10.20}$$

2. $$y_i^*\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^*-b_i\right)=0, \quad i=1, \ldots, m. \tag{10.21}$$

$\triangleright$ Būtinumas. Sakykime, $\mathbf{x}^*$ ir $\mathbf{y}^*$ yra tiesioginio ir dualiojo uždavinių sprendiniai. Pagal 10.2 teoremą ir 10.2 lemą

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^*=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}y_i^*x_j^*=\sum_{i=1}^m b_i y_i^*.$$

Kairiąją lygybę galime užrašyti šitaip:

$$\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^*-c_j\right)x_j^*=0. \tag{10.22}$$

Kadangi $\mathbf{y}^*\in Y$, tai

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^*-c_j \geqslant 0, \quad j=1, \ldots, n.$$

Šias nelygybes padauginę iš $x_j^*\geqslant 0$, $j=1, \ldots, n$, gauname

$$\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^*-c_j\right)x_j^* \geqslant 0, \quad j=1, \ldots, n.$$

Taigi (10.22) sumos visi dėmenys yra neneigiami. Tokia suma lygi nuliui tik tada, kai visi dėmenys lygūs nuliui:

$$\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^*-c_j\right)x_j^*=0, \quad j=1, \ldots, n.$$

Panašiai įrodomos ir (10.21) lygybės.

Pakankamumas. Tarkime, kad $\mathbf{x}^*\in X$, $\mathbf{y}^*\in Y$ ir yra teisingos (10.20) ir (10.21) lygybės, t. y.

$$\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^*-c_j\right)x_j^*=0, \quad j=1, \ldots, n; \tag{10.20}$$

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^*-b_i\right)y_i^*=0, \quad i=1, \ldots, m. \tag{10.21}$$

Atskirai sudėję (10.20) ir (10.21) lygybes, gauname

$$\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^*-c_j\right)x_j^*=0,$$

$$\sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^*-b_i\right)y_i^*=0$$

arba

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i^* x_j^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i^* x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*.$$

Iš čia $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$. Pagal 10.2 lemą leistinieji vektoriai $\mathbf{x}^*$ ir $\mathbf{y}^*$ yra atitinkamų uždavinių sprendiniai. ◁

Be įrodymo pateiksime šitokią išvadą.

2 išvada. (10.1), (10.2) *uždavinio ir jam dualaus* (10.3), (10.4) *uždavinio leistinieji vektoriai* $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ *tada ir tik tada yra jų sprendiniai, kai teisingi šie sąryšiai:*

1. *Jeigu* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i$, *tai* $y_i^* = 0$; *jeigu* $y_i^* > 0$, *tai* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$;
2. *Jeigu* $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j$, *tai* $x_j^* = 0$; *jeigu* $x_j^* > 0$, *tai* $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$.

Suformuluosime antrąją dualumo teoremą, kai tiesioginis uždavinys yra kanoninis.

10.4 teorema. *Dualiųjų* (10.12), (10.13) *ir* (10.14), (10.15) *uždavinių leistinieji vektoriai* $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ *tada ir tik tada yra tų uždavinių sprendiniai, kai teisingos lygybės*

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (10.20)$$

Ši teorema įrodoma panašiai kaip ir 10.3 teorema.

Iš (10.20) lygybių išplaukia sąryšiai: *jeigu* $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j$, *tai* $x_j^* = 0$; *jeigu* $x_j^* > 0$, *tai* $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$.

10.3 ir 10.4 teoremos kartais vadinamos pusiausvyros, arba papildomo griežtumo, teoremomis.

5. Kantorovičiaus optimalumo kriterijai.

Pirmasis kriterijus. *Dualiųjų uždavinių leistinieji vektoriai* $\mathbf{x}^*$ *ir* $\mathbf{y}^*$ *tada ir tik tada yra tų uždavinių sprendiniai, kai su jais atitinkamų uždavinių tikslo funkcijų reikšmės yra lygios, t. y.* $f(\mathbf{x}^*) = g(\mathbf{y}^*)$.

Antrasis kriterijus. *Dualiųjų uždavinių leistinieji vektoriai* $\mathbf{x}^*$ *ir* $\mathbf{y}^*$ *tada ir tik tada yra tų uždavinių sprendiniai, kai teisingi šie sąryšiai: griežtą apribojimo nelygybę atitinka lygi nuliui dualiojo kintamojo reikšmė ir atvirkščiai.*

Tuos kriterijus galima taikyti norint patikrinti, ar leistinieji vektoriai yra dualiųjų uždavinių sprendiniai.

Pavyzdys. Imkime dualiuosius uždavinius: reikia rasti

$$\max (x_1 - x_2 + x_3), \qquad (10.23)$$

kai

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 8, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &\leqslant 6, \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ x_3 &\geqslant 0, \end{aligned} \qquad (10.24)$$

ir

$$\min (8y_1 + 6y_2), \qquad (10.25)$$

kai

$$\begin{aligned} 4y_1 - 2y_2 &\geqslant 1, \\ y_1 - y_2 &\geqslant -1, \\ y_1 + 2y_2 &\geqslant 1, \\ y_1 \geqslant 0, \ y_2 &\geqslant 0. \end{aligned} \qquad (10.26)$$

Patikrinsime, ar leistinieji vektoriai $\mathbf{x}^* = (1, 0, 4)$ ir $\mathbf{y}^* = (2/5, 3/10)$ yra jų sprendiniai.

Iš pradžių tikrinsime remdamiesi antrąja dualumo teorema (antruoju Kantorovičiaus kriterijumi). Įrašę $\mathbf{x}^* = (1, 0, 4)$ į (10.24) sistemos apribojimus, gauname $4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \leqslant 8$, $-2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \leqslant 6$ arba $8 = 8$, $6 = 6$. Vadinasi, jeigu $y_1^* = 2/5 > 0$, tai $8 = 8$; jeigu $y_2^* = 3/10 > 0$, tai $6 = 6$. Taigi (10.21) lygybės teisingos.

Įrašę $\mathbf{y}^* = (2/5, 3/10)$ į (10.26) sistemos apribojimus, gauname $1 = 1$, $1/10 > -1$, $1 = 1$. Taigi: jeigu $x_1^* = 1 > 0$, tai $1 = 1$; jeigu $1/10 > -1$, tai $x_2^* = 0$; jeigu $x_2 = 4 > 0$, tai $1 = 1$. Vadinasi, (10.20) lygybės yra teisingos. Pagal 10.3 teoremos išvadą $\mathbf{x}^* = (1, 0, 4)$ yra (10.23), (10.24) uždavinio, o $\mathbf{y}^* = (2/5, 3/10)$ yra (10.25), (10.26) uždavinio sprendiniai.

Dabar tikrinsime remdamiesi 10.2 lema (pirmuoju Kantorovičiaus kriterijumi). Tuo tikslu apskaičiuojame (10.23) ir (10.25) tikslo funkcijų reikšmes:

$$f(\mathbf{x}^*) = 1 - 0 + 4 = 5; \quad g(\mathbf{y}^*) = 8 \cdot \frac{2}{5} + 6 \cdot \frac{3}{10} = 5.$$

Kadangi $f(\mathbf{x}^*) = g(\mathbf{y}^*) = 5$, tai $\mathbf{x}^*$ ir $\mathbf{y}^*$ yra sprendiniai.

§ 11. DUALIOJO UŽDAVINIO SPRENDINIO RADIMAS

Norint rasti dualiųjų uždavinių sprendinius, pakanka simplekso metodu išspręsti vieną iš jų. Kito uždavinio sprendinį lengva gauti iš paskutinės simplekso lentelės.

Imkime kanoninį maksimizavimo uždavinį: reikia rasti

$$\max \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle, \qquad (11.1)$$

kai

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}^j x_j = \mathbf{b}, \tag{11.2}$$

$$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0},$$

ir jam dualų uždavinį: reikia rasti

$$\min \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle, \tag{11.3}$$

kai

$$\langle \mathbf{a}^j, \mathbf{y} \rangle \geqslant c_j, \quad j=1, \dots, n. \tag{11.4}$$

Tarkime, kad žinome (11.1), (11.2) uždavinio pradinį atraminį vektorių $\mathbf{x}^0$. Jo baziniai kintamieji yra $x_{j_1}, \dots, x_{j_m}$, o bazė $B=(\mathbf{a}^{j_1}, \dots, \mathbf{a}^{j_m})$ sudaryta iš vienetinių vektorių

$$\mathbf{a}^{j_1}=\mathbf{e}^1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^{j_2}=\mathbf{e}^2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{a}^{j_m}=\mathbf{e}^m=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{11.5}$$

Simplekso metodu išspręskime (11.1), (11.2) uždavinį. Tarkime, kad iš paskutinės simplekso lentelės gavome sprendinį $\mathbf{x}^*$, kurio bazė $\bar{B}$ sudaryta iš vektorių $\mathbf{a}^{s_1}, \dots, \mathbf{a}^{s_m}$. Įrodysime teoremą, kuria remiantis galima rasti (11.3), (11.4) uždavinio sprendinį $\mathbf{y}^*$.

11.1 teorema. *Sakykime, kad simplekso metodu išsprendėme* (11.1), (11.2) *uždavinį ir turime simplekso lentelės paskutinės eilutės elementus* Δ_j, $j=1, \dots, n$. *Tada* (11.3), (11.4) *uždavinio sprendinio* $\mathbf{y}^*=(y_1^*, \dots, y_m^*)$ *koordinatės apskaičiuojamos pagal formules*

$$y_i^* = \Delta_{j_i} + c_{j_i}, \quad i=1, \dots, m. \tag{11.6}$$

$\triangleright$ Tarkime, kad (11.1), (11.2) uždavinio pradinio atraminio vektoriaus $\mathbf{x}^0$ bazė B sudaryta iš vienetinių vektorių $\mathbf{a}^{j_1}, \dots, \mathbf{a}^{j_m}$ (žr. (11.5)). Sprendinio $\mathbf{x}^*$ bazė yra $\bar{B}=(\mathbf{a}^{s_1}, \dots, \mathbf{a}^{s_m})$. Pažymėkime $\mathbf{c}_{\bar{B}}=(c_{s_1}, \dots, c_{s_m})^T$. Imkime vektorių

$$(\mathbf{y}^*)^T = \mathbf{c}_{\bar{B}}^T \bar{B}^{-1} = \left(\mathbf{c}_{\bar{B}}^T (\bar{B}^{-1})^1, \dots, \mathbf{c}_{\bar{B}}^T (\bar{B}^{-1})^m\right); \tag{11.7}$$

čia $(\bar{B}^{-1})^j$ — atvirkštinės matricos $\bar{B}^{-1}$ j-asis stulpelis.

Kadangi $\mathbf{x}^*$ yra (11.1), (11.2) uždavinio sprendinys, tai pagal 10.2 teoremą $\mathbf{y}^*$ yra dualiojo (11.3), (11.4) uždavinio sprendinys.

Išsprendus (11.1), (11.2) uždavinį, paskutinės simplekso lentelės f eilutės elementus Δ_j, $j=1, \dots, n$, galima apskaičiuoti šitaip:

$$\Delta_j = \mathbf{c}_{\bar{B}}^T \bar{B}^{-1} \mathbf{a}^j - c_j, \quad j=1, \dots, n. \tag{11.8}$$

Apskaičiuokime pradinio atraminio vektoriaus $\mathbf{x}^0$ bazinių kintamųjų $x_{j_1}, \dots, x_{j_m}$ įvertinimus. Pagal (11.8), (11.5) ir (11.7) formules gauname

$$\Delta_{j_i} = \mathbf{c}_{\bar{B}}^T \bar{B}^{-1} \mathbf{a}^{j_i} - c_{j_i} = \mathbf{c}_{\bar{B}}^T \bar{B}^{-1} \mathbf{e}^i - c_{j_i} = \mathbf{c}_{\bar{B}}^T (\bar{B}^{-1})^i - c_{j_i} = y_i^* - c_{j_i}.$$

Iš čia $y_i^* = \Delta_{j_i} + c_{j_i}$, $i=1, \dots, m$. $\triangleleft$

Pavyzdys. Simplekso metodu išspręsime tiesinio programavimo uždavinį: reikia rasti

$$\max (3x_1+4x_2+2x_3),$$

kai

$$\begin{aligned} x_1+2x_2 \quad &\leqslant 500, \\ 2x_1+x_2 \quad &\leqslant 550, \\ x_2+x_3 &\leqslant 200, \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ &x_3 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{11.9}$$

Rasime jam dualaus uždavinio sprendinį.

Pasinaudoję papildomais kintamaisiais x_4, x_5, pakeiskime duotąjį uždavinį kanoniniu: reikia rasti

$$\max (3x_1+4x_2+2x_3),$$

kai

$$\begin{aligned} x_1+2x_2 \quad +x_4 \quad &= 500, \\ 2x_1+x_2 \quad\quad +x_5 &= 550, \\ x_2+x_3 \quad\quad +x_6 &= 200, \\ x_j \geqslant 0, \ j=1, \ &\dots, \ 5. \end{aligned} \tag{11.10}$$

Šis uždavinys turi pradinį atraminį vektorių $\bar{\mathbf{x}}^0=(0, 0, 200, 500, 550, 0)$, kurio bazė $B=(\mathbf{a}^4, \mathbf{a}^5, \mathbf{a}^3)$ sudaryta iš vienetinių vektorių:

$$\mathbf{a}^4=\mathbf{e}^1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^5=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\mathbf{e}^2, \quad \mathbf{a}^3=\mathbf{e}^3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Taigi $\mathbf{c}_B=(0, 0, 2)^T$. Pagal (5.3) formules apskaičiuojame f eilutės elementus. Uždavinio duomenis surašome į 11.1 lentelę.

11.1 *lentelė*

B	$\mathbf{c}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_6
x_4	0	500	1	2	0
x_5	0	550	$\boxed{2}$	1	0
x_3	2	200	0	1	1
f		400	−3	−2	2

Atlikę du Žordano eliminavimo žingsnius, gauname 11.3 lentelę.

11.2 *lentelė*

B	c_B	b	x_5	x_2	x_6
x_4	0	225	$-1/2$	$\boxed{3/2}$	0
x_1	3	275	$1/2$	$1/2$	0
x_3	2	200	0	1	1
f		1225	$3/2$	$-1/2$	2

11.3 *lentelė*

B	c_B	b	x_5	x_4	x_6
x_2	4	150	$-1/3$	$2/3$	0
x_1	3	200	$2/3$	$-1/3$	0
x_3	2	50	$1/3$	$-2/3$	1
f		1300	$4/3$	$1/3$	2

Iš 11.3 lentelės gauname (11.10) uždavinio sprendinį $\bar{\mathbf{x}}^*=(200, 150, 50, 0, 0, 0)$ ir $f_{\max}=1300$. Atmetę papildomų kintamųjų reikšmes, gauname (11.9) uždavinio sprendinį $\mathbf{x}^*=(200, 150, 50)$ ir $f_{\max}=1300$.

Pradiniam uždaviniui (11.9) dualus yra šitoks uždavinys: reikia rasti

$$\min (500y_1+550y_2+200y_3),$$

kai

$$\begin{aligned} y_1+2y_2 \qquad &\geqslant 3,\\ 2y_1+ y_2+ \quad y_3 &\geqslant 4,\\ y_3 &\geqslant 2,\\ y_1\geqslant 0, \quad y_2\geqslant 0, \quad y_3 &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{11.11}$$

Pažymėsime, kad (11.9) uždavinio ir jam ekvivalentaus (11.10) kanoninio keitinio dualieji uždaviniai yra tokie pat (patikrinkite!).

Iš 11.3 lentelės eilutės f gauname (11.10) uždavinio kintamųjų x_i, $i=1, \ldots, 6$, įvertinimus:

$$\Delta_1=0, \quad \Delta_2=0, \quad \Delta_3=0, \quad \Delta_4=1/3, \quad \Delta_5=4/3, \quad \Delta_6=2.$$

Kadangi pradinį atraminį vektorių $\bar{\mathbf{x}}^0$ atitinka vienetinė bazė $B=(\mathbf{a}^4, \mathbf{a}^5, \mathbf{a}^3)$, tai pagal (11.6) formules

$$y_1^*=\Delta_4+c_4=1/3+0=1/3, \quad y_2^*=\Delta_5+c_5=4/3+0=4/3,$$

$$y_3^*=\Delta_3+c_3=0+2=2.$$

Lengva patikrinti, kad vektoriaus $\mathbf{y}^*=(1/3, 4/3, 2)$ koordinatės tenkina (11.11) uždavinio apribojimų sistemą. Dualiojo uždavinio tikslo funkcijos reikšmė taške $\mathbf{y}^*$ yra

$$g(\mathbf{y}^*)=500\cdot\frac{1}{3}+550\cdot\frac{4}{3}+200\cdot 2=1300.$$

Gavome $f_{\max}=g(\mathbf{y}^*)=1300$. Pagal 10.2 lemą $\mathbf{y}^*=(1/3, 4/3, 2)$ yra (11.11) uždavinio sprendinys ir $g_{\min}=1300$.

§ 12. DUALIOJO UŽDAVINIO EKONOMINĖ INTERPRETACIJA

Dualumo teoriją galima taikyti praktiniams uždaviniams nagrinėti. Naudodamiesi matematiniu modeliu – tiesinio programavimo uždaviniu, tirsime gamybos planavimo uždavinį. Pateiksime jam dualaus uždavinio ekonominę interpretaciją (prasmę). Kad būtų paprasčiau ir aiškiau, nagrinėsime konkretų pavyzdį.

Tarkime, kad įmonė gamina trijų pavadinimų gaminius G_1, G_2, G_3 iš trijų pavadinimų žaliavų $Ž_1$, $Ž_2$, $Ž_3$. Turimos žaliavų atsargos ir žaliavų kiekiai, reikalingi kiekvieno pavadinimo vienam gaminiui pagaminti, išreikšti sąlyginiais vienetais ir surašyti 12.1 lentelėje.

12.1 *lentelė*

Žaliavos	Žaliavų atsargos	Žaliavų sąnaudos		
		G_1	G_2	G_3
$Ž_1$	500	1	2	0
$Ž_2$	550	2	1	0
$Ž_3$	200	0	1	1
Pelnas		3	4	2

Paskutinėje lentelės eilutėje nurodytas pelnas, kurį gauna įmonė, realizavusi kiekvieno pavadinimo vieną gaminį.

Reikia sudaryti tokį gamybos planą, kurį realizavusi įmonė gautų didžiausią pelną.

Pažymėkime x_j planuojamą gaminti gaminių G_j skaičių. Tada įmonės gamybos planas bus $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$. Taigi šio uždavinio matematinis modelis yra šitoks tiesinio programavimo uždavinys: reikia rasti

$$\max (3x_1+4x_2+2x_3), \tag{12.1}$$

kai

$$\begin{aligned} x_1+2x_2 \qquad &\leqslant 500,\\ 2x_1+ x_2 \qquad &\leqslant 550,\\ x_2+x_3 &\leqslant 200,\\ x_1\geqslant 0, \quad x_2\geqslant 0, \quad x_3 &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{12.2}$$

Tarkime, kad kita organizacija nori įsigyti įmonės žaliavų $Ž_1$, $Ž_2$, $Ž_3$. Kokia kaina įmonė turėtų parduoti minėtas žaliavas, kad gautų už jas pelną, ne mažesnį negu realizavusi iš jų pagamintus gaminius? Kiek gali mokėti pirkėjas, minimizuodamas savo išlaidas?

Pažymėkime y_1, y_2, y_3 žaliavų $Ž_1$, $Ž_2$, $Ž_3$ vienetų kainas. Vienam gaminiui G_1 pagaminti įmonė sunaudoja 1 vienetą žaliavos $Ž_1$ ir 2 vienetus žaliavos $Ž_2$; realizavusi tą gaminį, gauna 3 vienetus pelno. Pajamos, kurias gautų įmonė, pardavusi žaliavas, reikalingas vienam gaminiui G_1 pagaminti, lygios y_1+2y_2 vienetų. Aišku, įmonei neverta parduoti žaliavų, jeigu pardavimo pajamos bus mažesnės už pelną, kurį įmonė gautų realizavusi vieną gaminį G_1. Vadinasi, kainos y_1 ir y_2 turi tenkinti nelygybę

$$y_1+2y_2\geqslant 3.$$

Panašiai samprotaudami gaminių G_2 ir G_3 atžvilgiu, gauname nelygybes

$$2y_1+y_2+y_3\geqslant 4,$$

$$y_3\geqslant 2.$$

Be to, $y_1\geqslant 0$, $y_2\geqslant 0$, $y_3\geqslant 0$.

Tarkime, kad pirkėjas įsigyja žaliavų, kurių bendroji kaina yra

$$g(\mathbf{y})=500y_1+550y_2+200y_3.$$

Aišku, jis norėtų įsigyti šias žaliavas kuo pigiau, t. y. $g(\mathbf{y})$ turėtų būti mažiausias.

Taigi šios ekonominės problemos matematinis modelis yra šitoks uždavinys: reikia rasti

$$\min\,(500y_1+550y_2+200y_3), \tag{12.3}$$

kai

$$\begin{aligned} y_1+2y_2\quad\; &\geqslant 3,\\ 2y_1+\;y_2+y_3 &\geqslant 4,\\ y_3 &\geqslant 2,\\ y_j\geqslant 0,\quad j&=1,\ 2,\ 3. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Nesunku pastebėti, kad šis uždavinys yra (12.1), (12.2) uždaviniui dualus. Jo sprendinio $\mathbf{y}^*=(y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*)$ koordinatę y_i^* galime interpretuoti kaip žaliavos $\check{Z}_i$ vieneto santykinę kainą (vertę) atžvilgiu maksimalaus pelno, kurį įmonė gautų realizavusi pagamintus iš turimų žaliavų gaminius.

Pabrėšime, kad čia kalbama ne apie žaliavos vieneto kainą, kurią įmonė moka ją įgydama, o apie žaliavos vertę realizuojant optimalųjį gamybos planą.

11 paragrafe išsprendėme (12.1), (12.2) bei (12.3), (12.4) uždavinius, gavome $x_1^*=200$, $x_2^*=150$, $x_3^*=50$, o $f_{\max}=1300$ bei $y_1^*=1/3$, $y_2^*=4/3$, $y_3^*=2$, o $g_{\min}=1300$.

Vadinasi, didžiausią pelną įmonė gaus gamindama 200 gaminių G_1, 150 gaminių G_2 ir 50 gaminių G_3. Realizuojant šį planą, žaliavų $\check{Z}_1$, $\check{Z}_2$, $\check{Z}_3$ vienetų vertę galima laikyti atitinkamai 1/3, 4/3 ir 2. Taigi didžiausia vertė yra žaliavos $\check{Z}_3$, o mažiausia – žaliavos $\check{Z}_1$.

Panašiai galima interpretuoti ir kitokių praktinių tiesinio programavimo uždavinių dualiuosius uždavinius.

§ 13. DUALUSIS SIMPLEKSO METODAS

Remiantis tiesinio programavimo dualiųjų uždavinių sąryšiais, sukurtas kitas simplekso metodo variantas, vadinamas dualiuoju simplekso metodu.

Imkime kanoninį maksimizavimo uždavinį: reikia rasti

$$\max\,\langle\mathbf{c},\ \mathbf{x}\rangle, \tag{13.1}$$

kai

$$\sum_{j=1}^{n}\mathbf{a}^j x_j=\mathbf{b}, \tag{13.2}$$

$$\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}, \tag{13.3}$$

ir jam dualų uždavinį: reikia rasti

$$\min\,\langle\mathbf{b},\ \mathbf{y}\rangle, \tag{13.4}$$

kai

$$(\mathbf{a}^j)^T\mathbf{y}\geqslant c_j,\quad j=1,\ \ldots,\ n. \tag{13.5}$$

Pažymėkime $f(\mathbf{x})=\langle\mathbf{c},\ \mathbf{x}\rangle$, $g(\mathbf{y})=\langle\mathbf{b},\ \mathbf{y}\rangle$.

Priminsime, kaip (13.1)–(13.3) uždavinys sprendžiamas simplekso metodu. Pirmiausia randama atraminių vektorių seka

$$\mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}^1,\ \ldots,\ \mathbf{x}^k,\ \ldots$$

Tikslo funkcijos reikšmės tuose taškuose sudaro nemažėjančią seką, t. y. $f(\mathbf{x}^0)\leqslant f(\mathbf{x}^1)\leqslant\ldots\leqslant f(\mathbf{x}^k)\leqslant\ldots$ Atlikus baigtinį iteracijų skaičių, gaunamas (13.1)–(13.3) uždavinio sprendinys arba įsitikinama, kad sprendinio nėra.

Tarkime, kad B_k yra atraminio vektoriaus $\mathbf{x}^k$ bazė (bazinė matrica), o $\mathbf{c}_{B_k}$ – vektorius, kurio koordinatės yra (13.1) tikslo funkcijos koeficientai prie $\mathbf{x}^k$ bazinių kintamųjų. Remdamiesi formulėmis $(\mathbf{y}^k)^T=\mathbf{c}_{B_k}^T B_k^{-1}$, $k=0,\ 1,\ \ldots$, sudarykime kitą vektorių seką

$$\mathbf{y}^0,\ \mathbf{y}^1,\ \ldots,\ \mathbf{y}^k,\ \ldots \tag{13.6}$$

Vektorių $\mathbf{y}^k$ įrašę į (13.5) sistemos nelygybes, gauname lygybę $\langle\mathbf{a}^j,\ \mathbf{y}^k\rangle=c_j$, kai x_j^k yra atraminio vektoriaus $\mathbf{x}^k$ bazinė koordinatė. Apribojimai, atitinkantys laisvuosius kintamuosius x_j, gali būti netenkinami. Todėl sakome, kad (13.6) sekos nariai yra (13.4), (13.5) uždavinio „beveik“ leistinieji vektoriai.

Jeigu atraminis vektorius $\mathbf{x}^*$, kurio bazė $\bar{B}$, yra (13.1)–(13.3) uždavinio sprendinys, tai pagal 10.2 teoremą vektorius $\mathbf{y}^T=\mathbf{c}_{\bar{B}}^T\bar{B}^{-1}$ yra (13.4), (13.5) uždavinio sprendinys.

Toliau pateiksime dualiojo simplekso metodo esmę. Taikant šį metodą, sudaroma (13.1)–(13.3) uždavinio „beveik“ leistinųjų vektorių seka

$$\tilde{\mathbf{x}}^0,\ \tilde{\mathbf{x}}^1,\ \ldots,\ \tilde{\mathbf{x}}^k,\ \ldots \tag{13.7}$$

Šios sekos nariai $\tilde{\mathbf{x}}^k$, $k=0,\ 1,\ \ldots$, yra (13.2) sistemos baziniai sprendiniai. Tačiau vektorius $\tilde{\mathbf{x}}^k$ gali turėti neigiamų koordinačių, t. y. netenkinti