Penktasis OM laboratorinis darbas

Figure 1:

5 Optimizavimas su apribojimais baudos metodu

Kokia turėtų būti stačiakampio gretasienio formos dėžė, kad vienetiniam paviršiaus plotui jos tūris būtų maksimalus?

1. Aprašykite kvadratinę baudos funkciją, apimančią tikslo funkciją $f(X)$ ir lygybinio apribojimo funkciją $g(X)$.
2. Patyrinėkite baudos daugiklio įtaką baudos funkcijos reikšmėms.
3. Minimizuokite suformuluotą uždavinį naudojant optimizavimo be apribojimų algoritmus (funkcijas) pradedant iš taškų $X_0 = (0, 0, 0)$, $X_1 = (1, 1, 1)$ ir $X_m = (a/10, b/10, c/10)$, čia a, b, c – studento knygelės numerio "$1x1abcd$" skaitmenys.
4. Palyginkite rezultatus: gauti sprendiniai, rastas funkcijos minimumo įvertis, atliktų žingsnių ir funkcijų skaičiavimų skaičius priklausomai nuo pradinio taško.

```
(%i1) f:x*y*z;
```
(%o1) $x\,y\,z$

```
(%i2) g:2*x*y+2*x*z+2*y*z-1;
```
(%o2) $2\,y\,z+2\,x\,z+2\,x\,y-1$

Reikia rasti funcijos f maksimumą, kai g=0.

Apibrėžiame baudos funkciją:

```
(%i3) F:f+g^2/r;
```
(%o3) $\dfrac{(2\,y\,z+2\,x\,z+2\,x\,y-1)^2}{r}+x\,y\,z$

Parametrui r artėjant prie nulio, baudos funkcijos F
maksimumo taškas artėja prie pradinio uždavinio sprendinio.
Su CAS Maxima tai pavyksta realizuoti naudojant tikslius simbolinius skaičiavimus.

Randame funkcijos F maksimumą pagal kintamuosius x, y ir z.
Įjungiame laiko rodymą:

```
(%i4) if showtime#false then showtime:false else showtime:all$
```
Evaluation took 0.0000 seconds (0.0000 elapsed) using 0 bytes.

```
(%i5) sist:[diff(F,x)=0,diff(F,y)=0,diff(F,z)=0];
```
Evaluation took 0.0000 seconds (0.0000 elapsed) using 11.992 KB.

(%o5) $\left[\dfrac{2\,(2\,z+2\,y)\,(2\,y\,z+2\,x\,z+2\,x\,y-1)}{r}+y\,z=0,\ \dfrac{2\,(2\,z+2\,x)\,(2\,y\,z+2\,x\,z+2\,x\,y-1)}{r}+x\,z=0,\ \dfrac{2\,(2\,y+2\,x)\,(2\,y\,z+2\,x\,z+2\,x\,y-1)}{r}+x\,y=0\right]$

```
(%i6) solve(sist,[x,y,z]);
```
Evaluation took 51.3120 seconds (51.9190 elapsed) using 5310.612 MB.

(%o6) $\left[\left[x=-\dfrac{(r^2+384)\sqrt{r^2+1536}-r^3-1152\,r}{48\,r\sqrt{r^2+1536}-48\,r^2-36864},\ y=\dfrac{\sqrt{r^2+1536}-r}{96},\ z=\dfrac{\sqrt{r^2+1536}-r}{96}\right],\ \left[x=-\dfrac{(r^2+384)\sqrt{r^2+1536}+r^3+1152\,r}{48\,r\sqrt{r^2+1536}+48\,r^2+36864},\ y=-\dfrac{\sqrt{r^2+1536}+r}{96},\ z=-\dfrac{\sqrt{r^2+1536}+r}{96}\right],\ [x=0,y=0,z=0]\right]$

Mums tiks pirmasis sprendinys:

```
(%i7) spr:%[1];
```
Evaluation took 0.0000 seconds (0.0000 elapsed) using 0 bytes.

(%o7) $\left[x=-\dfrac{(r^2+384)\sqrt{r^2+1536}-r^3-1152\,r}{48\,r\sqrt{r^2+1536}-48\,r^2-36864},\ y=\dfrac{\sqrt{r^2+1536}-r}{96},\ z=\dfrac{\sqrt{r^2+1536}-r}{96}\right]$

Gavome, kad solve užtrunka apie 40-50 sek.
Tai priklauso nuo Maxima versijos ir kompiuterio greičio.
Išjungiame laiko rodymą:

```
(%i8) if showtime#false then showtime:false else showtime:all$
```

Randame sprendinio ribą, kai r -> 0 ir gauname atsakymą:

```
(%i9) limit(spr,r,0);
```

(%o9) $[x=\frac{1}{\sqrt{6}},y=\frac{1}{\sqrt{6}},z=\frac{1}{\sqrt{6}}]$

```
(%i10) subst(spr,F)$
       V_max=limit(%,r,0);
```

(%o11) $V\_max=\frac{1}{6^{3/2}}$

Kituose uždaviniuose komanda "solve" gali neveikti.
Šiuo atveju reikia panaudoti skaitinius metodus.

Laboratorinio darbo užduotis:

Raskite funkcijos F = (2*y*z+2*x*z+2*x*y-1)^2/r+x*y*z
maksimumus, kai r = 10^(-k), k = 1, 2,...,20. Sudarykite reikšmių lentelę.
Tai atlikite dviem būdais:
a) sprendžiant sistemą "sist" su mnewton. Pradžioje reikia įvesti load(mnewton).
b) naudojant optimizavimo be apribojimų algoritmus(gradietų arba Niutono metodus).
Tais būdais mes jau sprendėme 2 laboratoriniame darbe.

Su kokiu k pasiekiamas tikslumas 10^(-6), t.y.
|x_k-1/sqrt(6)| + |y_k-1/sqrt(6)| + |z_k-1/sqrt(6)| < 10^(-6).
Skaičiavimus užbaigti, kai bus įvykdyta ši sąlyga.

Pradinius duomenis imkite pagal studento pažymėjimo numerį kaip nurodyta
užduoties 3 dalyje.

Padarykite išvadas apie artinių konvergavimą, funkcijos minimumo įvertį,
atliktų žingsnių skaičių priklausomai nuo pradinio taško.

[1] A.Žilinskas, Matematinis programavimas, 2005, 98-101
[2] John W.Chinnek, Constrained Nonlinear Programming, 2014,
http://www.sce.carleton.ca/faculty/chinneck/po/Chapter18.pdf
[3] David G. Luenberger, Yinyu Ye, Linear and Nonlinear Programming, Springer, 2008,
Chapter 13, PENALTY AND BARRIER METHODS, 401-434