1 Matricinių lošimų strategijos

1.1 apibrėžimas. Matricinio lošimo su matrica $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ pirmojo lošėjo *strategija* yra vadinamas vektorius

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_m], \quad x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

antrojo lošėjo *strategija* yra vadinamas vektorius

$$Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n], \quad y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Strategijos pavidalo $[0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]$ yra vadinamos *grynosiomis.* Kitais atvejais strategijos vadinamos *mišriosiomis.* Komponentės x_i išreiškia tikimybes, su kuriomis pirmasis lošėjas renkasi matricos eilutę; komponentės y_j išreiškia tikimybes, su kuriomis antrasis lošėjas renkasi matricos stulpelį:

$$x_i = P(\text{I lošėjas renkasi i-ąją eilutę}),$$

$$y_j = P(\text{II lošėjas renkasi j-ąjį stulpelį}).$$

Strategijų aibes žymėsime

$$S_k \equiv \{[z_1, z_2, \ldots, z_k] \mid z_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, k,\ \sum_{i=1}^{k} z_i = 1\}.$$

Lošimo *situacija* yra strategijų pora (X, Y), $X \in S_m$, $Y \in S_n$.

1.2 apibrėžimas. Abiejų lošėjų išlošius(pirmojo – išlošį, o antrojo – pralošį) galima apibūdinti *vidurkiu*

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = XAY^T. \tag{1}$$

1.3 apibrėžimas. Situacija (X^*, Y^*) yra vadinama matricinio lošimo *pusiausvyros situacija* arba *balno tašku*, jei

$$E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, Y), \quad \forall X \in S_m,\ \forall Y \in S_n. \tag{2}$$

1 teorema. *Bet kuris matricinis lošimas turi balno tašką.*

Pirmasis lošėjas daugiausiai gali išlošti

$$v^- = \max_{X\in S_m} \min_{Y\in S_n} E(X, Y).$$

Antrasis lošėjas mažiausiai gali pralošti

$$v^+ = \min_{Y\in S_n} \max_{X\in S_m} E(X, Y).$$

Dydžiai v^- ir v^+ yra vadinami *apatine ir viršutine lošimo verte.*

2 teorema. *Bet kuriam nulinės sumos matriciniam lošimui yra teisinga lygybė*

$$v^- = v^+ = E(X^*, Y^*). \tag{3}$$

Čia (X^*, Y^*) yra bet kuri lošimo pusiausvyros situacija.

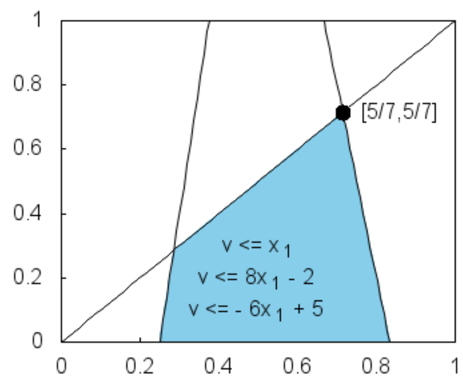
Reikšmė $v = v^- = v^+ = E(X^*, Y^*)$ yra vadinama *lošimo verte.* Uždavinio nežinomieji yra lošimo vertė v ir pusiausvyros situacijos (X^*, Y^*). Lošimo vertė v yra vienintelė, o pusiausvyros situacijų gali būti daug. Pastaruoju atveju X^* ir Y^* galimos reikšmės sudaro iškilas uždaras aibes, kurios gali būti aprašomos kaip iškilasis kraštutinių taškų apvalkalas.

3 teorema. *Matricinio lošimo uždavinys yra ekvivalentus dviems tiesinio programavimo uždaviniams:*

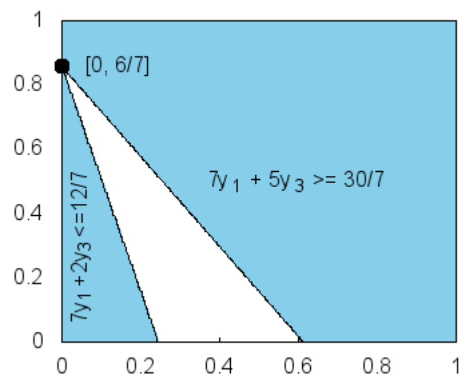
$$\textit{rasti } \max v, \ \textit{kai} \qquad A^T X^T \geq v, \ X \in S_m; \tag{T}$$

$$\textit{rasti } \min v, \ \textit{kai} \qquad AY^T \leq v, \ Y \in S_n. \tag{D}$$

Kadangi uždaviniai (T) ir (D) yra vienas kitam dualūs, tai $\max v = \min v$ (žr. ??). Todėl antrojo uždavinio praktiškai nereikia spręsti. Belieka tik ištirti apribojimų aibę.



1 pav.



2 pav.

1.1 pavyzdys. Išspręsime matricinį lošimą, kai lošimo matrica yra

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sprendimas. Ieškomas strategijas pažymėkime $X = [x_1, x_2]$ ir $Y = [y_1, y_2, y_3, y_4]$. Trečiasis stulpelis dominuoja antrojo stulpelio atžvilgiu. Todėl antrąjį stulpelį galima išbraukti ir $y_2 = 0$. Matricą A pakeičiame matrica

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sudarykime du tiesinio programavimo uždavinius:

$$\max \ v, \ \text{kai} \qquad \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 \geq v, \\ x_1 \geq v, \\ -x_1 + 5x_2 \geq v, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 = 1; \end{cases}$$

$$\min \ v, \ \text{kai} \qquad \begin{cases} 6y_1 + y_3 - y_4 \leq v, \\ -2y_1 + 5y_4 \leq v, \\ y_1 \geq 0, \ y_3 \geq 0, \ y_4 \geq 0, \\ x_1 + y_3 + y_4 = 1, \end{cases}$$

Pirmajame uždavinyje pakeitę $x_2 = 1 - x_1$, gauname uždavinį

$$\max \ v, \ \text{kai} \quad v \leq x_1, \ v \leq 8x_1 - 2, \ v \leq -6x_1 + 5, \ 0 \leq x_1 \leq 1.$$

Grafiniu metodu(žr. 1 pav.) gauname max $v = 5/7$, kai $x_1 = 5/7$. Todėl $x_2 = 1 - x_1 = 2/7$. Antrajame uždavinyje įstatę $v = 5/7$, $y_4 = 1 - y_1 - y_3$, gauname apribojimus: $7y_1 + 5y_3 \geq 30/7$, $7y_1 + 2y_3 \leq 12/7$, $0 \leq y_i \leq 1$. Juos tenkina tik vienas taškas(žr. 2 pav.) $y_1 = 0$, $y_3 = 6/7$. Todėl $y_4 = 1 - y_1 - y_3 = 1/7$.

Atsakymas: $X = [5/7, 2/7]$, $Y = [0, 0, 6/7, 1/7]$, $v = 5/7$.