3.1.3. Bendrasis uždavinys. Tegu $A=(a_{ij})$ yra $m\times n$ matmenų matrica, $b\in\mathbb{R}_m$, $c\in\mathbb{R}_n$, $I=\{1;\ 2;\ ...;\ m\}$, $J=\{1;\ 2;\ ...;\ n\}$. Tiesinio programavimo bendruoju uždaviniu yra vadinamas toks optimizavimo uždavinys:

$$\min\{\langle c,\ x\rangle :\ x\in X\},\ X=\{x\in\mathbb{R}_n :\ (Ax)_i\geq b_i,\ \text{kai } i\in I_\circ\subset I,$$
$$(Ax)_i=b_i,\ \text{kai } i\in I\setminus I_\circ,$$
$$x_j\geq 0,\ \text{kai } j\in J_\circ\subset J\};\qquad (3.1.7)$$

čia $(Ax)_i$ yra vektoriaus Ax i-toji koordinatė, o x_j – vektoriaus x j-oji koordinatė.

Kai $I_\circ=I$ ir $J_\circ=J$, (3.1.7) uždavinys yra standartinis tiesinio programavimo uždavinys. Atvejis $I_\circ=\varnothing$ ir $J_\circ=J$ atitinka kanoninį uždavinį.

Glaustai panagrinėkime dualiojo uždavinio sudarymo schemą. Pirmiausia atkreipkime dėmesį, kad bendrąjį uždavinį galima pertvarkyti į standartinį uždavinį. Lygtis $(Ax)_i=b_i$, $i\in I\setminus I_\circ$, galima pakeisti nelygybių $(Ax)_i\geq b_i$ ir $(-Ax)_i\geq -b_i$ poromis, o vektoriaus x komponentes x_j; $j\in J\setminus J_\circ$, – neneigiamų skaičių x'_j ir x''_j skirtumais $x'_j-x''_j$. Tada kintamųjų x_j, $j\in J_\circ$, ir x'_j, x''_j, $j\in J\setminus J_\circ$, atžvilgiu (3.1.7) uždavinys įgytų standartinio uždavinio pavidalą. Pagal šio uždavinio Lagranžo funkciją sudaromas dualusis uždavinys ir „perkeliamas" į erdvę $\mathbb{R}_m$. Praleidę konkrečios analizės aprašymą, užrašysime tik galutinį rezultatą – dualųjį uždavinį

$$\max\{\langle b,\ y\rangle :\ y\in Y\},\ Y=\{y\in\mathbb{R}_m :\ (A^Ty)_j\leq c_j,\ j\in J_\circ,$$
$$(A^Ty)_j=c_j,\ j\in J\setminus J_\circ,$$
$$y_i\geq 0,\ i\in I_\circ\}.\qquad (3.1.8)$$

■ **3.1.1 pavyzdys.** Sudarykime tiesinio programavimo uždavinio

$$\min\left(5x_1+7x_2-3x_3+x_4-2x_5\right),\ \text{kai}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15, \\ x_1+3x_2-x_4-4x_5\le 2, \\ 4x_1-x_3+3x_4+7x_5\ge 7, \\ 2x_2+x_3-4x_4+3x_5=2, \\ x_1\ge 0,\ x_5\ge 0, \end{cases} \tag{3.1.9}$$

dualųjį uždavinį.

Iš pradžių antrąją apribojimų sistemos nelygybę pakeiskime priešinga nelygybe (daugindami abi puses iš (-1)). Gausime (3.1.7) pavidalo uždavinį

$$\min\left(5x_1+7x_2-3x_3+x_4-2x_5\right),\ \text{kai}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15, \\ -x_1-3x_2+x_4+4x_5\ge -2, \\ 4x_1-x_3+3x_4+7x_5\ge 7, \\ 2x_2+x_3-4x_4+3x_5=2, \\ x_1\ge 0,\ x_5\ge 0. \end{cases} \tag{3.1.10}$$

Šį uždavinį sugretinę su (3.1.7) uždaviniu, nustatome, jog

$$c=\begin{pmatrix}5\\7\\-3\\1\\-2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}_5,\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\-1&-3&0&1&4\\4&0&-1&3&7\\0&2&1&-4&3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}15\\-2\\7\\2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}_4,$$

$$I=\{1;2;3;4\},\ I_\circ=\{2;3\},\ J=\{1;2;3;4;5\},\ J_\circ=\{1;\ 5\}.$$

Pagal (3.1.8) modelį gauname tokį dualųjį uždavinį:

$$\max\{15y_1 - 2y_2 + 7y_3 + 2y_4\}, \text{ kai}$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + 4y_3 \qquad\qquad \le 5, \\ y_1 - 3y_2 \qquad\quad + 2y_4 = 7, \\ y_1 \qquad\qquad - y_3 + y_4 = -3, \\ y_1 + \ y_2 + 3y_3 - 4y_4 = 1, \\ y_1 + 4y_2 + 7y_3 + 3y_4 \le -2, \\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Atkreipiame dėmesį, kad šis uždavinys yra laikomas ne tik (3.1.10), bet ir (3.1.9) uždavinio dualiuoju uždaviniu.

3.2. Tiesinio programavimo uždavinių ekvivalentumas

Tiesiniame programavime teoriniai teiginiai paprastai formuluojami ir įrodomi vienai uždavinių klasei (standartinių arba kanoninių), o paskui apibendrinami remiantis galimybe kiekvieną tiesinio programavimo uždavinį pertvarkyti į ekvivalentų jam standartinį (taip pat ir kanoninį) uždavinį. Kaip suvokiamas ekvivalentumas tiesiniame programavime?

Du tiesinio programavimo uždaviniai yra vadinami *ekvivalenčiais*, jeigu egzistuoja sprendinių (optimaliųjų taškų) aibes siejanti abipus vienareikšmė atitiktis.

Keičiant kanoninį uždavinį

$$\min\{\langle c,\ x\rangle :\ x \in X\},\quad X = \{x \in \mathbb{R}_n :\ Ax = b,\ x \ge 0\},$$

standartiniu uždaviniu tiesinių lygčių sistema (matricinė lygtis) $Ax = b$ keičiama tiesinių nelygybių sistema

$$\begin{cases} Ax \ge b, \\ -Ax \ge -b. \end{cases}$$

Šiuo atveju pasikeičia tik apribojimų sistema, bet išlieka ta pati tikslo funkcija ir leistinoji aibė, todėl iš esmės uždavinys net nepasikeičia.