# Netiesinis programavimas

## *Geometrinis netiesinio programavimo uždavinio sprendimas*

Bendru atveju netiesinio programavimo uždavinys yra rasti didžiausią (mažiausią) tikslo funkcijos reikšmę, kai tenkinamos tam tikros sąlygos:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to max(min), \tag{1.1}$$

kai

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_i, & i = 1, 2, \cdots, k, \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, & i = k+1, k+2, \cdots, m, \end{cases} \tag{1.2}$$

kur $f$ ir $g_i$ yra žinomos $n$ kintamųjų funkcijos, o $b_i$ – duoti skaičiai.

Uždavinio sprendinys yra tam tikras taškas $X^*(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$, kurio koordinatės tenkina (1.2) sąlygas bei bet kuriam kitam taškui $X(x_1, x_1, \cdots, x_n)$ didžiausios reikšmės atveju tenkinama nelygybė

$$f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \geq f(x_1, x_1, \ldots, x_n), \tag{1.3}$$

o mažiausios reikšmės atveju tenkinama nelygybė

$$f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \leq f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{1.4}$$

Priminsime, kad jei funkcijos $f$ ir $g_i$ yra tiesinės, tai (1.1) – (1.2) uždavinys yra tiesinis (žr. I-ąją knygos dalį).

(1.2) sąlygos sudaro ribojimų sistemą. Neneigiamumo sąlygos gali būti įtraukta į ją arba aprašytos tiesiogiai. Euklido erdvėje $E_n$ ribojimų sistema nusako leistinųjų sprendinių sritį. Skirtingai nei tiesiniu atveju ši sritis ne visuomet yra iškila.

Kai duota leistinųjų sprendinių sritis, tai netiesinio programavimo uždavinio sprendimą sudaro tokio srities taško, per kurį eina didžiausio (mažiausio) lygio hiperplokštuma $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = h$, paieška. Toks taškas gali būti tiek ant leistinųjų sprendinių srities ribos, tiek ir srities viduje.

Netiesinio programavimo uždavinio sprendinio radimo geometriniu metodu algoritmas analogiškas algoritmui tiesiniame programavime.

## Uždavinio sprendimo geometriniu metodu algoritmas

Netiesinio programavimo uždavinio sprendimo geometriniu metodu algoritmą sudaro tokie etapai:

1. Randama leistinųjų sprendinių sritis, kuria nusako (1.2) sąlygos. Jei ši sritis tuščia, tuomet uždavinys neturi sprendinio.
2. Konstruojamos hiperplokštumos $f(x_1, x_1, \dots, x_n) = h$.
3. Nustatoma aukščiausio (žemiausio) lygio hiperplokštuma arba randama, kad uždavinys neturi sprendinio dėl (1.1) tikslo funkcijos neaprėžtumo iš viršaus (iš apačios).
4. Randamas leistinųjų sprendinių srities taškas, per kurį eina didžiausio (mažiausio) lygio hiperplokštuma.
5. Randama uždavinio tikslo funkcijos reikšmė šiame taške.

## *1 pavyzdys*

Rasti funkcijos

$$f = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \qquad (1.5)$$

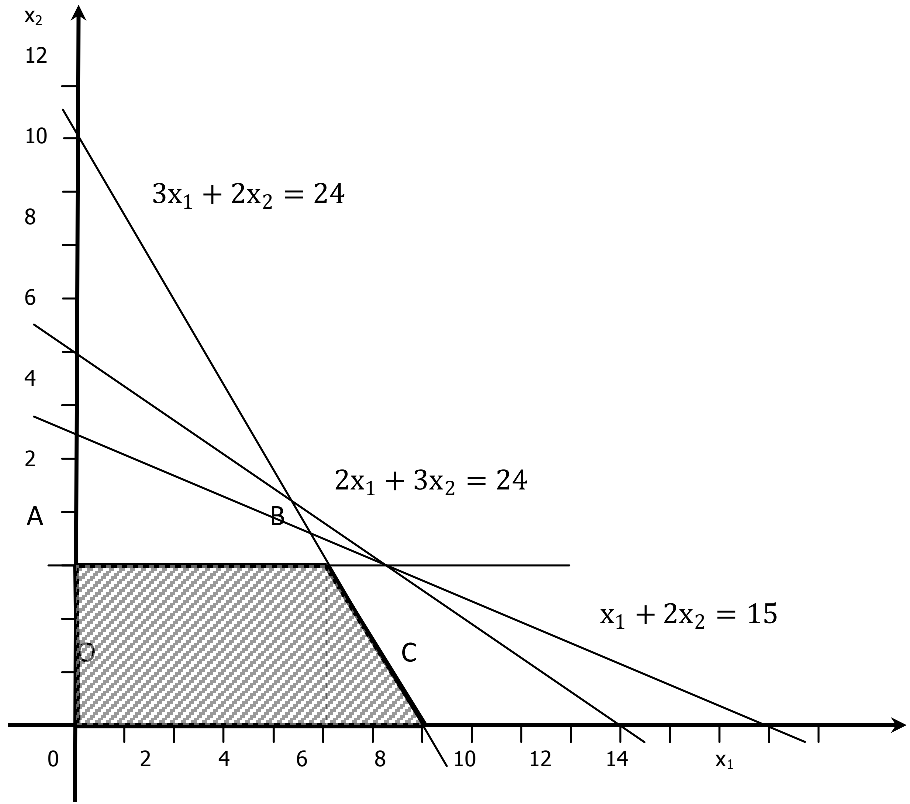
didžiausią reikšmę, kai

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ x_1 + 2x_2 \leq 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \qquad (1.6)$$

## Sprendimas

Kadangi (1.5) tikslo funkcija yra netiesinė, tai šis matematinio programavimo uždavinys yra netiesinis. Jo leistinųjų sprendinių sritis, nusakoma (1.6) ribojimų, yra keturkampis $OABC$.

Reikia rasti tokį šio daugiakampio tašką, kuriame (1.5) tikslo funkcijos reikšmė yra didžiausia.



$x_2$
12
10
8
6
4
2
A
B
O
C
0
2
4
6
8
10
12
14
$x_1$
$3x_1 + 2x_2 = 24$
$2x_1 + 3x_2 = 24$
$x_1 + 2x_2 = 15$

Brėžiama lygio linija $f = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = h$, kur $h$ – tam tikra konstanta ir tiriama jos padėtis, esant skirtingoms $h$ reikšmėms. Kiekvieną $h$ reikšmę atitinka parabolė, kuri yra pakilusi virš $Ox_1$ ašies tuo aukščiau, kuo didesnė $h$ reikšmė.

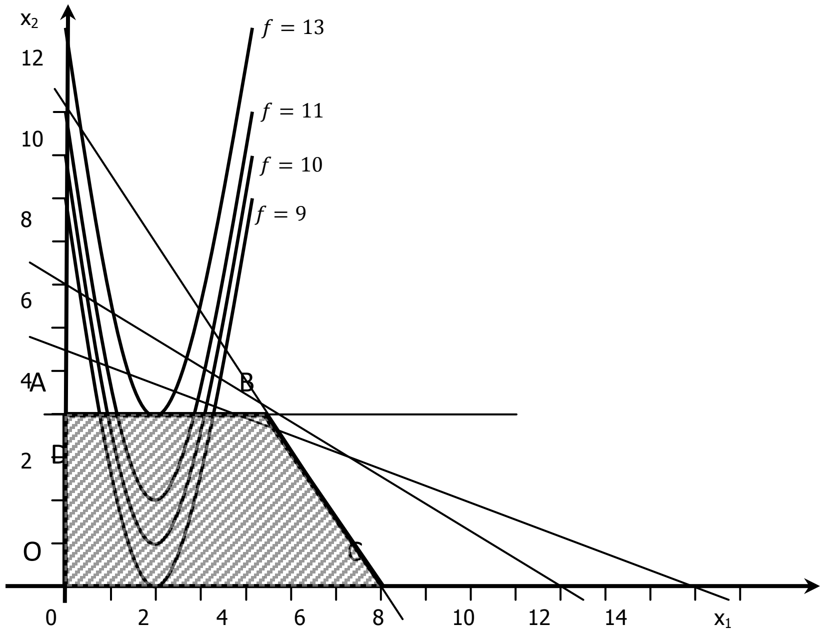
Brėžinyje matome, kad tikslo funkcija įgyja didžiausią reikšmę taške $D$, kuriame parabolė (lygio linija $f = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13$) liečia daugiakampio $OABC$ kraštinę $AB$. Taško D koordinates galima rasti išsprendus lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13, \\ x_2 = 4. \end{cases} \tag{1.7}$$

Šios lygčių sistemos sprendinys – (3, 4).

Netiesinio programavimo uždavinio sprendinys $x_1^* = 3$, $x_2^* = 4$ arba $X^* = (3; 4)$ o tikslo funkcijos reikšmė $F = 13$.

Uždavinio sprendinys nėra leistinųjų sprendinių daugiakampio viršūnė. Tiesinio programavimo uždavinių sprendime naudojama viršūnių peržiūros procedūra, kaip ir simplekso metodas, negali būti panaudota sprendžiant panašius uždavinius.



## *2 pavyzdys*

Rasti funkcijos

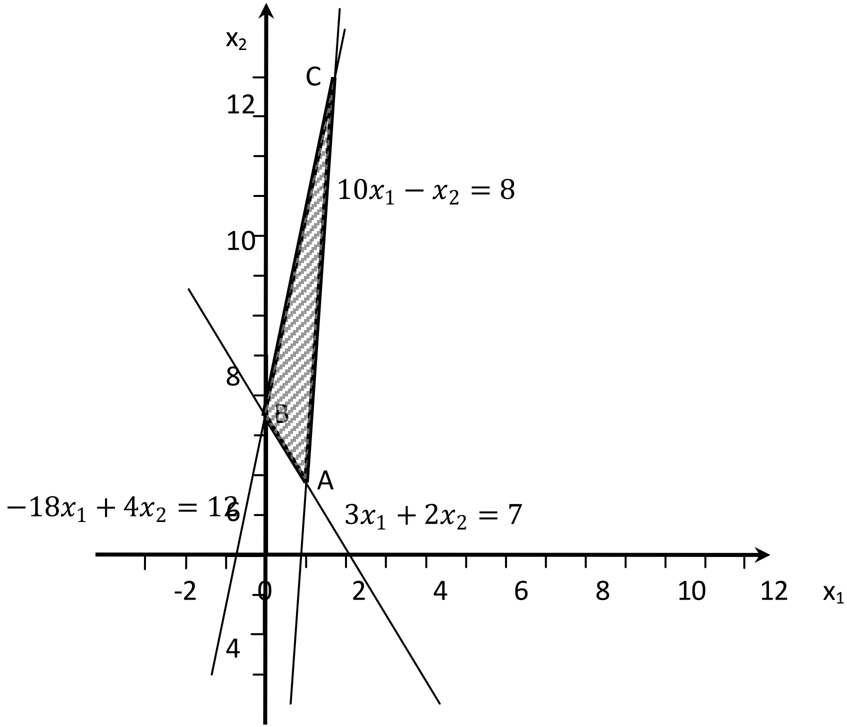
$$f = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \tag{1.8}$$

didžiausią ir mažiausią reikšmes, kai

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 10x_1 - x_2 \leq 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

## Sprendimas

Šio uždavinio leistinųjų sprendinių sritis – trikampis *ABC*.

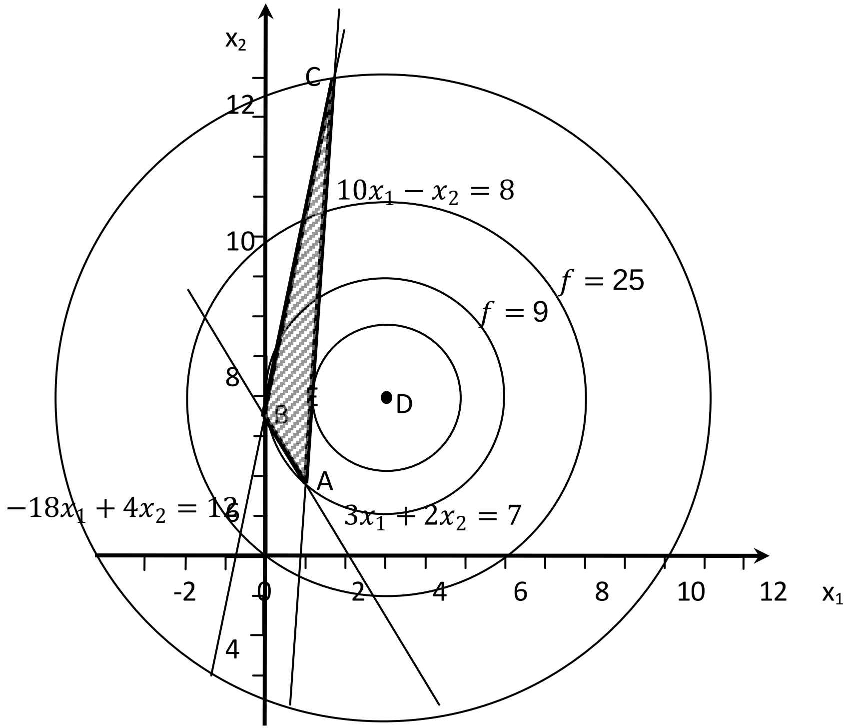


Brėžiamos lygio linijos $f = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = h$, kur $h$ – tam tikra konstanta, ir tiriamos jų padėtys, esant skirtingoms h reikšmėms. Kiekvieną $h$ reikšmę atitinka apskritimas $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = h$, kurio centras taške $D$, o spindulys – $\sqrt{h}$.

Pagal brėžinį tikslo funkcija įgyja didžiausią reikšmę taške $C$. Jo koordinatės randamos išsprendus lygčių, kurios nusako šiame taške susikertančias tieses, sistemą

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 8, \\ -18x_1 + 4x_2 = 12. \end{cases} \qquad (1.10)$$

Šios lygčių sistemos sprendinys $x_1^* = 2$, $x_2^* = 12$. Šiame taške tikslo funkcija įgyja mažiausią reikšmę $f_{min}\,(2; 12) = 65$.



$x_2$
C
12
$10x_1 - x_2 = 8$
10
$f = 25$
$f = 9$
8
B
E
D
A
$-18x_1 + 4x_2 = 12$
6
$3x_1 + 2x_2 = 7$
-2
0
2
4
6
8
10
12
$x_1$
4

Tikslo funkcija įgyja mažiausią reikšmę taške $E$, kuriame vienas iš apskritimų liečia leistinųjų sprendinių trikampio $ABC$ kraštinę $AC$. Šio taško koordinates galima rasti, pasinaudojus tuo, kad besiliečiančių kreivių krypties koeficientai yra lygūs. Taške $E$ liečiasi apskritimas $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = r^2$, kurio centras taške $D$, o spindulys r nežinomas ir tiesė $10x_1 - x_2 = 8$.

Iš tiesės lygties $x_2 = 10x_1 - 8$ matome, kad tiesės krypties koeficientas lygus 10. Jis taip pat yra lygus ir funkcijos $x_2$ išvestinei pagal argumentą $x_1$ taške $E$.

Analogiškai galima apskaičiuoti ir apskritimo krypties koeficientą taške $E$, kuris yra lygus apskritimo funkcijos $x_2$ išvestinei pagal argumentą $x_1$ taške $E$. Laikydami $x_2$ sudėtine kintamojo $x_1$ neišreikštąja funkcija bei diferencijuodami apskritimo lygtį $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = r^2$, gauname

$$2(x_1 - 3) + 2(x_2 - 4)x_2' = 0, \qquad (1.11)$$

iš kur

$$x_2' = -\frac{x_1 - 2}{x_2 - 4}.$$

Sulyginus tiesės ir apskritimo krypties koeficientus

$$-\frac{x_1-2}{x_2-4} = 10,$$

gauname lygtį

$$x_1 + 10x_2 = 43. \quad (1.11)$$

Prijungus tiesės, kurioje yra taškas E, lygtį, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = \\ x_1 + 10x_2 = 43, \end{cases} \quad (1.14)$$

kurios sprendinys $x_1^* = \frac{123}{101}, x_2^* = \frac{422}{101}$.

Šiame taške tikslo funkcija įgyja didžiausią reikšmę $f_{max}\left(\frac{123}{101}; \frac{422}{101}\right) = \frac{324}{101}$.

### *3 pavyzdys*

Rasti funkcijos

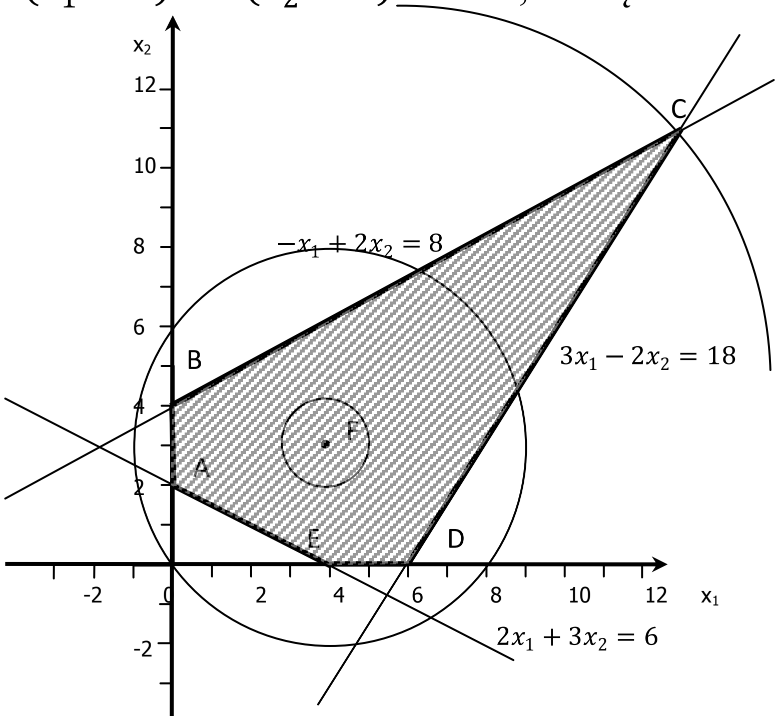
$$f = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \tag{1.15}$$

didžiausią ir mažiausią reikšmes, kai

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

## Sprendimas

Šio uždavinio leistinųjų sprendinių sritis – daugiakampis $ABCDE$, o lygio linijos – apskritimai $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = R^2$, kurių centras taške $F(4;3)$, o spindulys $R = \sqrt{h}$.



Pagal brėžinį tikslo funkcija įgyja didžiausią reikšmę taške $C$: $f_{max}(13; 10{,}5) = 137{,}25$ mažiausią reikšmę taške $F$: $f_{min}(4; 3) = 0$, kai apskritimas tampa išsigimusiu apskritimu, kurio spindulys lygus nuliui (tašku).

## *4 pavyzdys*

Rasti funkcijos

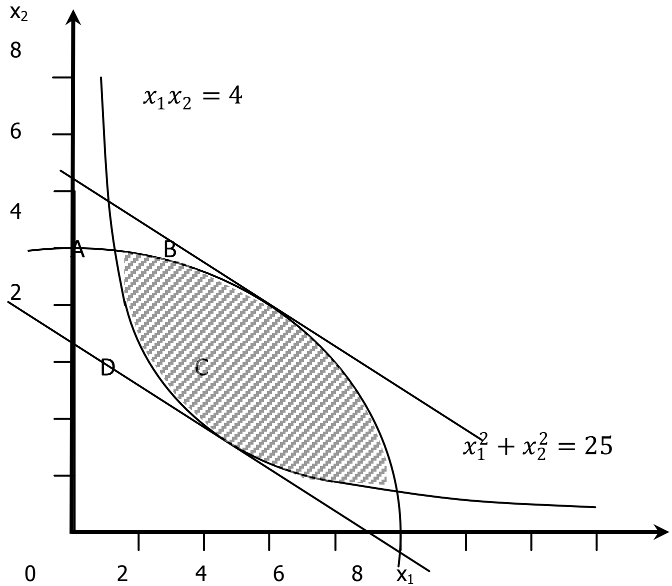
$$f = 3x_1 + 4x_2 \tag{1.17}$$

didžiausią ir mažiausią reikšmes, kai

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 25, \\ x_1 x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{1.18}$$

## Sprendimas

Šio uždavinio leistinųjų sprendinių sritis – figūra *ABCD*, o lygio linijos – tiesės $3x_1 + 4x_2 = h$ (6 pav.).



Pagal brėžinį tikslo funkcija įgyja didžiausią reikšmę taške $B$, o mažiausią – taške $D$. Jo koordinates galima rasti pasinaudojus 2-ame pavyzdyje aprašytu būdu.

Taške $B$ liečiasi tiesė $3x_1 + 4x_2 = h_1$ ir apskritimas $x_1^2 + x_2^2 = 25$. Tiesės krypties koeficientas lygus $-\frac{3}{4}$, o apskritimo krypties koeficientas randamas – diferencijuojant jo lygtį

$$2x_1 + 2x_2 x_2' = 0$$

Arba

$$x_2' = -\frac{x_1}{x_2}. \tag{1.19}$$

Prilyginę gautąjį reiškinį tiesės krypties koeficientui, gauname vieną iš lygčių taško $B$ koordinačių nustatymui

$$4x_1 - 3x_2 = 0 \tag{1.20}$$

ir, prijungę apskritimo lygtį, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 25, \end{cases} \tag{1.21}$$

kurios sprendinys ir yra taško $B$ koordinatės $x_1^* = 3;\ x_2^* = 4$. Tikslo funkcijos didžiausia reikšmė $f_{max}\,(3;\ 4) = 25$.

Taško $B$ koordinatės randamos analogiškai, sudarius lygčių sistemą, aprašančią besiliečiančias šiame taške tiesę $3x_1 + 4x_2 = h_2$ ir hiperbolę $x_1 x_2 = 4$. Tiesės krypties koeficientas lygus $-\frac{3}{4}$, o apskritimo – diferencijuojant jo lygtį

$$x_2 + x_1 x_2' = 0$$

arba

$$x_2' = -\frac{x_2}{x_1}. \tag{1.22}$$

Prilyginę gautąjį reiškinį tiesės krypties koeficientui, gauname vieną iš lygčių taško $D$ koordinačių nustatymui

$$3x_1 - 4x_2 = 0 \tag{1.23}$$

ir, prijungę apskritimo lygtį, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 0, \\ \quad\quad x_1 x_2 = 4, \end{cases} \tag{1.24}$$

kurios sprendinys ir yra taško $D$ koordinatės $x_1^* = \frac{4}{3}\sqrt{3}$; $x_2^* = \sqrt{3}$. Tikslo funkcijos mažiausia reikšmė $f_{min}\left(\frac{4}{3}\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right) = 8\sqrt{3}$.

## Užduotys

1. Rasti didžiausią funkcijos $f = x_1 x_2$ reikšmę, kai

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Rasti mažiausią funkcijos $f = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2$ reikšmę, kai

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3. Rasti didžiausią funkcijos $f = 4x_1 + 3x_2$ reikšmę, kai

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \leq 0, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

4. Rasti didžiausią funkcijos $f = x_1 x_2$ reikšmę, kai

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$