

カルマンフィルタによる同定

環境システム 松本 英敏

1. はじめに

動特性について伝達関数表現を中心とした制御理論を古典制御理論といえる。それに対して、Kalman による時系列解析と、状態空間表示をもとにした線形システム理論の方法論は、現代制御理論と呼ばれ、多くの実用面での応用を可能にした。そして、工学分野はもちろんのこと、幅広く多くの分野において、制御問題、推定問題、同定問題等の解析に有効な方法となっている。今回は、簡単な線形 1 自由度振動系における同定問題について報告する。

2. モデル化

入出力とシステムの関係は、一般的に数式によって表現される。数式による表現方法は、物理現象に基づいて理論的に入出力の関係を表現する方法と、現象論的または仮定的な近似式として求めた入出力関係に大別される。前者は物理モデルまたは構成式モデル、後者は非構成的モデルといわれる。

例として、前者は振動現象を表現する運動方程式

$$\ddot{x} + 2bw\dot{x} + w^2x = -\ddot{y} \quad (1)$$

ここで、 w : 固有円振動数、 b : 減衰定数

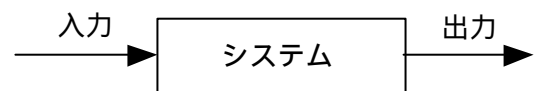
後者は多項式

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \quad (2)$$

ここで、 a_0, a_1, \cdots : 係数

やスプライン関数、チェビシェフの多項式などである。

通常的设计に用いる各種計算や有限要素法に代表される解析は右図のブロック線図では、入力（荷重など）



とシステム（対象のモデル）を仮定し、出力（対象の挙動）を求める。この方法を順解析という。

図1 ブロック線図

次に、システムの入力および出力の測定データをもとにそのシステムの状態を推定することを同定といい、またブロック線図でみて、システムの状態が既知であり、その出力の測定データから入力を調整することを制御という。さらに、入力の測定データと既知のシステム状態から出力を推定することを予測という。

3. カルマンフィルタ

(1) 状態空間表示式

式(1)について、いま変数を

$$x_1 = x, x_2 = \dot{x}, u = \ddot{y} \quad (3)$$

ただし、 $\dot{x}_1 = x_2$

とすれば、式(1)は

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & -2bw \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} u \quad (4)$$

これを一般化すれば、

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{F}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{G}_t \mathbf{w}_t \quad (5)$$

あるいは

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}(k, k-1) \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}(k) \mathbf{w}_k \quad (6)$$

ここで $\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_k$: システムの状態量 ($t = \Delta k$)、($m \times 1$ 次元ベクトル) Δ は時間刻み

$\mathbf{F}_t, \mathbf{A}(k, k-1)$: 変換行列 ($m \times m$ 次元行列)

$\mathbf{G}_t, \mathbf{B}(k)$: 変換行列 ($m \times r$ 次元行列)

$\mathbf{w}_t, \mathbf{w}_k$: システムの雑音 (ガウス性のホワイトノイズ) ($r \times 1$ 次元ベクトル)

このように動的なシステムの状態を表現した数学モデルを一階の確率ベクトル微分方程式かまたは離散化した差分式で示される。

状態量 \mathbf{x}_k の一部を観測するものとする、状態量 \mathbf{x}_k と観測量の関係は、

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{M}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \quad (7)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{M}(k) \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_k$: ($t = \Delta k$) 時間における観測データ ($s \times 1$ 次元ベクトル)

$\mathbf{M}_t, \mathbf{M}(k)$: 変換行列 ($s \times m$ 次元行列)

$\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_k$: 観測の雑音 (ガウス性のホワイトノイズ) ($s \times 1$ 次元ベクトル)

動的な数学モデルで表現できるシステムを通して時々刻々と得られる観測データは式(6),(8)より互いに独立でないことがわかる。ここで式(5),(6)はシステムの状態を表した式で状態方程式という。

また、式(7),(8)はシステムの状態と観測データとの関係を表した式で観測方程式という。以上の式を組み合わせた式を空間状態表示式という。

(2) 拡張カルマンフィルタ

システムの状態量とともにそのシステムに含まれるパラメータ推定 (同定) 問題では、式(5),(6)の状態空間表示式が非線形になる場合が多い。

さて拡張カルマンフィルタは次式の非線形の状態空間表示式にもとづいて状態量の最適推定アルゴリズムを構成したものである。

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_t, t) + \mathbf{G}_t \mathbf{w}_t \quad (9)$$

$$\mathbf{y}_{t_k} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{t_k}, t_k) + \mathbf{v}_{t_k} \quad (10)$$

次式はそのアルゴリズムを示したもので詳細は文献 2)を参照のこと。

$$\hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} | t_k) = \hat{\mathbf{x}}(t_k | t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t | t_k), t) dt \quad (11)$$

$$\mathbf{P}(t_{k+1} | t_k) = [\mathbf{t}_{k+1}, t_k; \hat{\mathbf{x}}(t_k | t_k)] \mathbf{P}(t_k | t_k)^T [\mathbf{t}_{k+1}, t_k; \hat{\mathbf{x}}(t_k | t_k)] + (t_k) \mathbf{Q}(t_{k+1})^T (t_k) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\{t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} | t_k)\} &= \mathbf{P}(t_{k+1} | t_k) \mathbf{M}^T \{t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} | t_k)\} \\ &\times [\mathbf{M}\{t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} | t_k)\} \mathbf{P}(t_{k+1} | t_k) \mathbf{M}^T \{t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} | t_k)\} + \mathbf{R}(t_{k+1})]^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} | t_{k+1}) = \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} | t_k) + \mathbf{K}\{t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} | t_k)\} [\mathbf{y}_{t_{k+1}} - \mathbf{h}\{\hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} | t_k), t_{k+1}\}] \quad (14)$$

$$\mathbf{P}(t_{k+1} | t_{k+1}) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}\{t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} | t_k)\} \mathbf{M}\{t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} | t_k)\}] \mathbf{P}(t_k | t_k)$$

$$\begin{aligned} & \times [I - K\{t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} | t_k)\} M\{t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} | t_k)\}]^T \\ & + K\{t_{k+1}; \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} | t_k)\} R(t_{k+1}) K^T \{t_{k+1}; \mathbf{x}(t_{k+1} | t_k)\} \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、

$$M[t_k; \hat{\mathbf{x}}(t_k | t_k)] = \left[\frac{\partial h_i(\hat{\mathbf{x}}_{tk}, t_k)}{\partial x_j} \right]_{x_{tk} = \mathbf{x}(tk | tk)} \quad (16)$$

$$[t_{k+1}, t; \hat{\mathbf{x}}(t_k | t_k)] = I + \Delta G[t_k; \hat{\mathbf{x}}(t_k | t_k)] \quad (17)$$

$$G[t_k; \hat{\mathbf{x}}(t_k | t_k)] = \left[\frac{\partial g_i(\mathbf{x}_t, t)}{\partial x_j} \right]_{x_t = \mathbf{x}(tk | tk)} \quad (18)$$

$h_i(\mathbf{x}_{tk}, t_k) : h(\mathbf{x}_{tk}, t_k)$ の要素

$g_i(\mathbf{x}_t, t) : g(\mathbf{x}_t, t)$ の要素

なお、繰り返し拡張カルマンフィルタでは、式(14)を

$$_{i+1} = \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} | t_k) + K(t_{k+1}; _i) [y_{tk+1} - h(_i, t_{k+1}) - M(t_{k+1}; _i) \{\hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} | t_k) - _i\}] \quad (19)$$

ただし、 $i : i = 1 \sim l$

$$_1 : \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} | t_k)$$

$$_l : \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1} | t_{k+1})$$

と置き換えて用いる。

4 . 線形 1 自由度振動系

右図に示した線形 1 自由度系の運動方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_0 \quad (20)$$

ここで、 x : 相対変位

\dot{x} : 相対速度

\ddot{x} : 相対加速度

\ddot{x}_0 : 入力加速度

m : 質量

c : 粘性減衰係数

k : ばね定数

で与えられる。そこで、

$$w^2 = \frac{k}{m}, \quad b = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

とおけば、式(20)は式(1)と同じように書ける。

$$\ddot{x} + 2bw\dot{x} + w^2x = -\ddot{x}_0 \quad (21)$$

ここで、 w : 固有円振動数、 b : 減衰定数

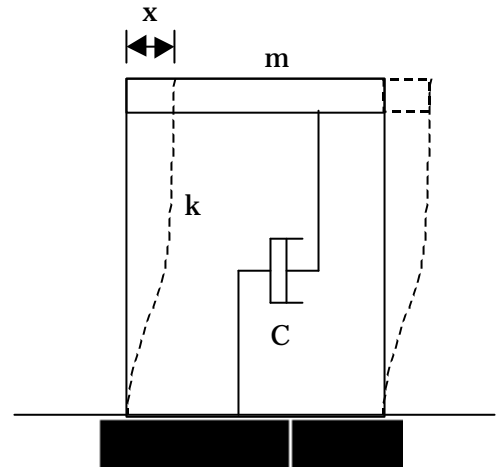


図 2 1 自由度振動系

(1)状態ベクトルの推定

式(21)を状態方程式の形に変換すると、

$$x_1 = x, x_2 = \dot{x}, u = \ddot{x}_0 \quad (22)$$

ただし、 $\dot{x}_1 = x_2$

とすれば、式(21)は

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mathbf{w}^2 & -2\mathbf{bw} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} u \quad (23)$$

連続型の状態方程式を次のようにおくと

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_t + \mathbf{B}_1 u_t \quad (24)$$

ここで、 \mathbf{x}_t : 状態ベクトル

$\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1$: 変換行列

u_t : 入力変数ベクトル

その離散型の状態方程式は

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_2 u_{k+1} \quad (25)$$

ただし、 $\mathbf{A}_2 = \mathbf{I} + \mathbf{A}_1 \Delta + \frac{1}{2!} \mathbf{A}_1^2 \Delta^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{A}_1^3 \Delta^3 + \dots$

$$\mathbf{B}_2 = \left[\mathbf{I} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}_1 \Delta + \frac{1}{3!} \mathbf{A}_1^2 \Delta^2 + \dots \right] \Delta \mathbf{B}_1$$

式(23)と式(24),(25)の関係を利用して、2次の項までとると、

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ -\mathbf{w}^2 \Delta & 1 - 2\mathbf{bw} \Delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_k + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\Delta \end{Bmatrix} u_{k+1} \quad (26)$$

相対変位 x が観測データとして得られるものとすれば、観測方程式は

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_k \quad (27)$$

(2)同定問題

次に、式(21)のパラメータである \mathbf{w}, \mathbf{b} を推定 (同定) する問題に対する定式化は状態ベクトルの要素として次のようにおくと

$$x_3 = \mathbf{b}, \quad x_4 = \mathbf{w} \quad (28)$$

ただし、 $\dot{x}_3 = 0, \quad \dot{x}_4 = 0$ 式(21)は

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_2 \\ -2x_3 x_4 x_2 - x_4^2 x_1 - u \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

また、相対変位が観測されているとすれば式(27)は

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}_k \quad (30)$$

相対変位と相対速度が同時に観測されている場合は式(30)は

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}_k \quad (31)$$

式(29)および式(30),(31)にノイズを加えれば、式(9),(10)に対応した状態空間表現式となる。
一般に観測量としては加速度を用いる場合が多い。この場合は式(21)を利用して観測方程式は

$$y_k = h(x_k, t_k) = -2x_3x_4x_2 - x_4^2x_1 \quad (32)$$

なお、式(29)に対する変換行列式は式(17)より

$$[t_{k+1}, t_k; \hat{x}(t_k | t_k)] = \begin{bmatrix} 1 & \Delta & 0 & 0 \\ -\Delta x_4^2 & 1 - 2\Delta x_3x_4 & -2\Delta x_2x_4 & -2\Delta(x_2x_3 + x_1x_4) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

式(32)に対する変換行列式は

$$M[t_k; x_k] = [-x_4^2 \quad -2x_3x_4 \quad -2x_2x_4 \quad -2(x_2x_3 + x_1x_4)] \quad (34)$$

(3) 同定問題の数値計算 (ノイズが無い場合)

図2の様な1自由度振動系に入力加速度として周期 0.25sec の正弦波、振幅 100gal を用いた。時間刻み Δ は 0.01sec である。観測データは $b=0.1, w=6.28(rad/s)$ の応答変位波形である。

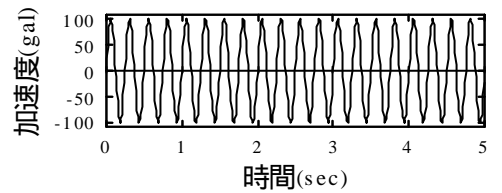


図3 入力加速度

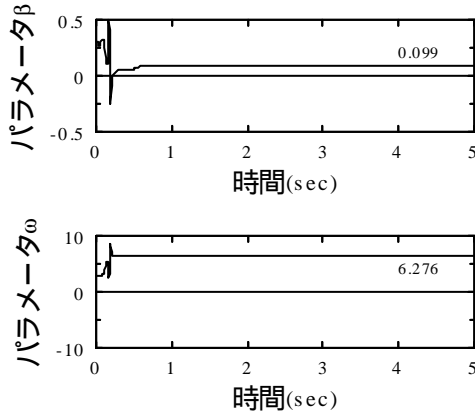


図5 パラメータの同定

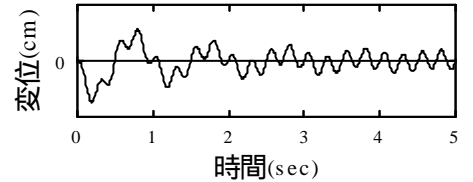


図4 観測データ

(4)同定問題の数値計算（ノイズが有る場合）

式(29)および式(32)の状態空間表現式を用いて同定する。入力加速度は図6に示してあり、振動数 1.125Hz の正弦波で最大加速度 100gal、時間刻み $\Delta = 0.01\text{sec}$ である。

・出力観測データの作成

固有円振動数 $w = 7.07(\text{rad/s})$ 、減衰定数 $b = 0.1$ の応答加速度波形は図7のようになる。

- ・帯域ホワイトノイズの作成周波数帯域 10Hz ~ 30Hz の有帯域ホワイトノイズを次式により $n = 20\%$ 発生させたのが図8である。

$$n = \frac{\sum V(t_k)^2}{\sum u^*(t_k)^2} \times 100(\%) \quad (35)$$

ここに、 $V(t_k)$ ：ノイズ時刻 t_k での値

$u^*(t_k)$ ：応答波形の時刻 t_k での値

応答加速度と有帯域ホワイトノイズを加え合わせた波形が図9である。従って、図6の入力加速度と図9の模擬観測データから b, w を同定する。

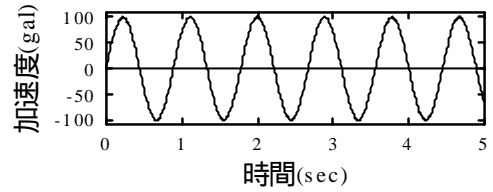


図6 入力加速度

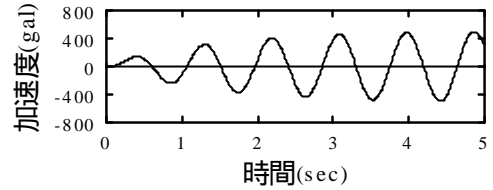


図7 応答加速度

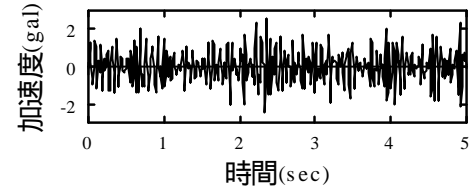


図8 有帯域ホワイトノイズ

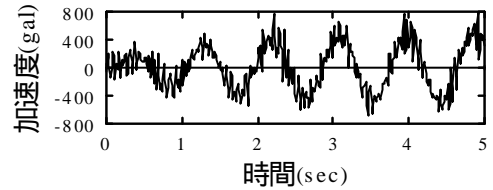


図9 模擬観測データ

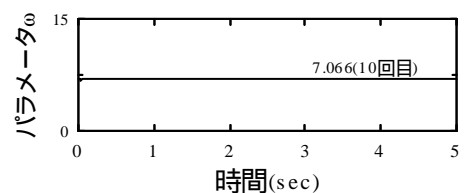
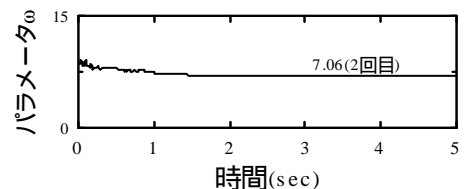
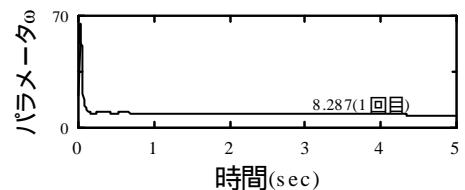
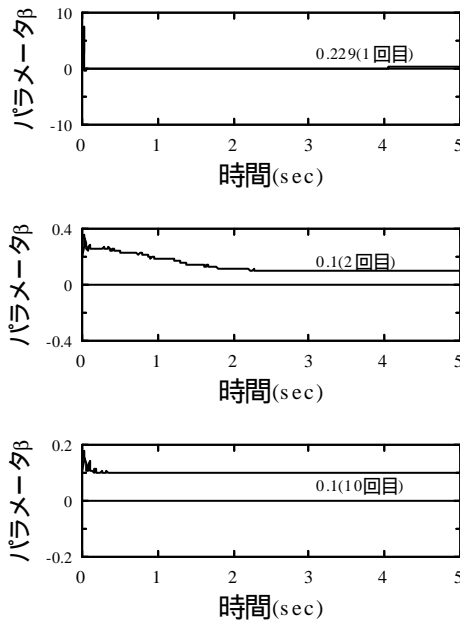


図10 繰り返し回数の違いによる同定結果

参考文献：

- 1) 星谷 勝：建設技術者のためのデータ解析と応用
- 2) Jazwinski：Stochastic processes and filtering theory