

## バイタルサインの高速な周波数推定

正員 新田 益大\* 正員 西田 健\*

Rapid Frequency Estimation of Vital Signs

Masuhiro Nitta\*, Member, Takeshi Nishida\*, Member

We propose a novel rapid and highly precise frequency estimation method of vital signs. The proposed method bases on a notion of distribution theory, and is mathematically stable. The proposed method has adaptation ability and shortens the estimation time of the conventional method, such as FFT, dramatically.

キーワード：超関数推定，

Keywords: supper function estimation

## 1. はじめに

医療分野では呼吸数や心拍数などの生体信号の周波数計測は診療の基礎であり，これを自動計測の手法も数多い．これらの周波数解析には，振動現象の周波数解析技術が用いられ，ノイズ低減を始めとする高速かつ高精度の振動周波数の推定のための手法は数多く提案されている．一般に広く利用される技術としては高速フーリエ変換（FFT: fast Fourier transform）による信号のスペクトル密度のピーク探索である．これは，一定時間信号を累積するための窓関数を準備し，その区間の信号における最も支配的な周波数を探索する手法である．一般に生体信号の周波数は低いため，数秒から数十秒の幅の窓関数を用意する必要があり，それに伴って，周波数解析結果が算出されるまでの計測時間も長くなる．例えばヒトの呼吸数計測には，一般に 5 秒から 10 秒の計測遅れが発生する．

一方，近年，超関数を利用する高速かつ高精度の周波数推定手法が提案されている<sup>(1)</sup>．本手法による周波数推定は，20 から 30 のサンプリングデータで高精度の周波数推定に達成されることが報告されており<sup>(1)</sup>，振動現象が発生する電子回路において，その有効性が実証されている．本手法の生体信号解析への応用は未だ実施されていないが，従来手法よりも大幅な計測時間の短縮を見込める．そこで本研究では，超関数に基づく周波数推定手法を生体信号解析に応用することを試みる．

## 2. 超関数による周波数推定の概要

2.1 定式化 次のような単周期信号を考える．

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t - \theta) \quad (1)$$

ここで， $X_0$  は振幅， $\omega$  は各周波数， $\theta$  は位相の遅れ角であるとする．まず，この信号の 2 階の微分方程式は以下のように表せる．

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (2)$$

この関係より，周波数は次のように表現できる．

$$\omega^2 = \ddot{x}(t)/x(t) \quad (3)$$

しかし，離散計測値から  $\ddot{x}(t)$  を高精度に求めることは一般に困難であるため，この関係を実応用に利用することはできない．さらに，微分を利用せず積分の関係，

$$x(t) - x(0) - \dot{x}(0)t + \omega^2 \int_0^t \int_0^{t'} x(t'') dt'' dt' = 0 \quad (4)$$

を利用しても，初期値  $x(0)$  と  $\dot{x}(0)$  を高精度に計測することは困難である．

2.2 超関数の導入 次の線形関数を考える．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)dt \quad (5)$$

$f(t)$  は超関数， $\phi(t)$  はテスト関数と呼ばれる．テスト関数は  $C^\infty$  級関数であり，かつ台がコンパクト，すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{d^n \phi(t)}{dt^n} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (6)$$

である．これらの関数の組み合わせにおいて，次が成り立つ．

\* 九州工業大学

〒 804-8550 福岡県北九州市 戸畑区仙水町 1-1

Kyushu Institute of Technology

1-1 Sensui, Tobata, Kitakyushu, Fukuoka 804-8550

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \phi(t) dt &= [f(t)\phi(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d\phi(t)}{dt} dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d\phi(t)}{dt} dt\end{aligned}\quad (7)$$

したがって、一般に以下が成り立つ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n f(t)}{dt^n} \phi(t) dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d^n \phi(t)}{dt^n} dt \quad (8)$$

この関係は、 $f(t)$  の導関数を  $\phi(t)$  の導関数で表現できることを意味する．

ここで再び式 (1) の微分方程式を考える．両辺に  $\phi(t)$  を乗じて  $(-\infty, \infty)$  で積分すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x}(t) \phi(t) dt + \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi(t) dt = 0 \quad (9)$$

となる．これを、上述の超関数の性質に従って以下のように記述し直すと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \ddot{\phi}(t) dt + \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi(t) dt = 0 \quad (10)$$

となり、これより、

$$\omega^2 = - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \ddot{\phi}(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi(t) dt} \quad (11)$$

となる．

上述のテスト関数の条件を満たす関数として、ガウス関数を用いることができる．すなわち、

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (12)$$

とし、 $\mu$  は平均、 $\sigma^2$  は分散である．この導関数は以下のようになる．

$$\dot{\phi}(t) = -\frac{t-\mu}{\sigma^2} \phi(t) \quad (13)$$

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{(t-\mu)^2 - \sigma^2}{\sigma^4} \phi(t) \quad (14)$$

**2.3 推定式の離散化** 次に、式 (11) に関して、有限時間  $[T_0, T_0 + NT_s]$  における積分を考える． $\mu = NT_s/2$  とおき、十分に小さな正の実数  $\epsilon$  で抑えることができるような  $\sigma^2$  を利用して  $0 < |\phi(T_0)| = |\phi(T_0 + NT_s)| \ll \epsilon$  と仮定すると、次のように近似できる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi(t) dt \simeq \int_{T_0}^{T_0+2\mu} x(t) \phi(t) dt \quad (15)$$

さらに区分求積法により、以下のように近似できる．

$$\int_{T_0}^{T_0+2\mu} x(t) \phi(t) dt \simeq \sum_{k=0}^N x(T_0 + kT_s) \phi(T_0 + kT_s) T_s \quad (16)$$

以上の関係を利用すると、式 (11) は次のように表せる．

$$\omega^2 = - \frac{\sum_{k=0}^N x(T_0 + kT_s) \ddot{\phi}(T_0 + kT_s)}{\sum_{k=0}^N x(T_0 + kT_s) \phi(T_0 + kT_s)} \quad (17)$$

ここで、 $T_0$  は任意の計測開始時刻を表す．一方、式 (1) の  $\theta$ 、すなわち信号の位相ずれに本手法は不変であるため、次の関係式が成り立つ．

$$\phi(T_0 + kT_s) = \phi(kT_s) \quad (18)$$

$$\ddot{\phi}(T_0 + kT_s) = \ddot{\phi}(kT_s) \quad (19)$$

これらより、

$$\omega = \sqrt{\sigma^2 - \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{x}(T_0)}{\mathbf{p}^T \mathbf{x}(T_0)}} / \sigma^2 \quad (20)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(T_0) &\triangleq [x(T_0) \quad \cdots \quad x(T_0 + NT_s)]^T \\ \mathbf{p} &\triangleq [\phi(0) \quad \cdots \quad \phi(NT_s)]^T \\ \mathbf{q} &\triangleq [\mu^2 \phi(0) \quad \cdots \quad (NT_s - \mu)^2 \phi(NT_s)]^T\end{aligned}$$

である．特に、 $x(T_0)$  の要素が全て充填されるまでの時間  $[0, NT_s]$  は、 $\omega$  の推定は実行されないことに注意が必要である．また、時刻  $NT_s$  以降は FIFO 形式で  $x(T_0)$  の要素をシフトしながら更新する．さらに、先行研究における解析から、 $N$  および  $\sigma$ 、 $T_s$  は次の関係を満たす必要があることがわかっている．

$$20T_s < 16\sigma < NT_s \quad (21)$$

多くの事例では  $T_s$  は計測機器に依存して変更できないため、 $N$  を定めた後に、上述の関係を満たす範囲で  $\sigma$  を定めれば良い．すると、 $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{q}$  は計測と無関係であるため、上述のパラメータが決定されれば計測開始前に一意に設定される．また、計算安定性を確保するために、以下の場合には推定ができない、もしくは不正確になることに注意する必要がある．

$$\sigma^2 - \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{x}(T_0)}{\mathbf{p}^T \mathbf{x}(T_0)} < 0 \quad (22)$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{x}(T_0) < \epsilon \quad (\text{e.g. } \epsilon = 10^{-6}) \quad (23)$$

これらの場合には、前時刻の推定を継続して利用するとよい．

本手法は、式 (1) に示した振動現象の  $X_0$  周波数  $\omega$  の変動をトラッキング可能な適応オンライン推定が可能である．ヒトの呼吸数をこの関係で表す場合には、 $X_0$  および  $\omega$ 、 $\theta$  は時変関数で表す必要があるが、定式化においては時不変の定数として扱い、後にこれらの変動に適応する機構を考慮する．

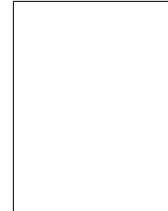
### 3. シミュレーション

ここでは、上述の推定手法の性能をシミュレーションに

## 付 録

### 1. 超関数の性質の導出

新田 益大（正員） 平 24 年より九工大・機械知能工学・助教，博士（工学）。



西 田 健（正員） 平 10 九工大・工・設計生産工卒・平 14 九工大大学院博士後期課程修了。同年より九工大・機械知能工学・助手。平成 25 年より准教授，博士（工学）。屋外移動ロボットに関する研究に従事。日本ロボット学会，計測自動制御学会，日本神経回路学会，電子情報通信学会などの会員。

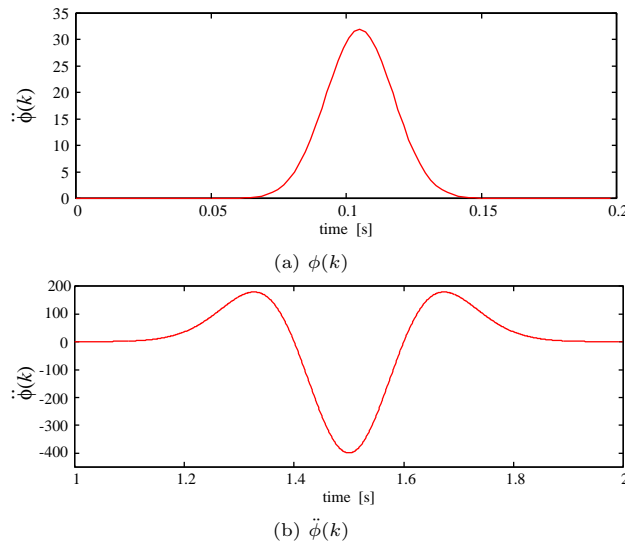


Fig. 1. The test function of  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{q}$  ( $N = 21$ ).

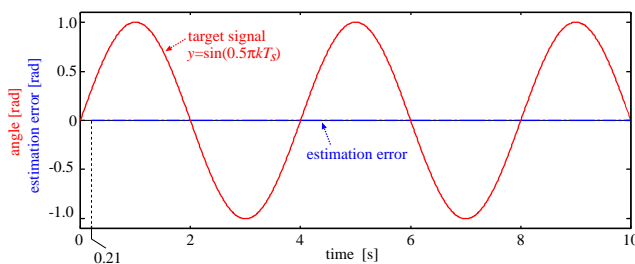


Fig. 2. A periodic signal and its frequency estimation results.

より検証するために，推定対象として次の信号を用いた．

$$y = \sin(0.5\pi kT_s) \quad (24)$$

ここで  $T_s = 0.01$  [s] および  $\sigma = ((N - 20)/2 + 20)T_s/4$  とした．また， $N$  を最小限度の 21 と設定した．

まず，これらの条件におけるテスト関数  $\phi(k)$  とその 2 階微分  $\ddot{\phi}(k)$  の概形を図 1 に示す．さらに，それらを利用して推定した結果を図 2 に示す．推定が開始される時刻 0.21[s] 以降は推定誤差が 0 であった．この結果より，単一周期の信号の推定が本手法によって実現されることが示された．

## 4. 実 験

### 4.1 呼吸数の推定

### 4.2 心拍数の推定

## 5. おわりに

## 文 献

- (1) A. Ishizaka, M. Nitta, K. Koto, “Error analysis on distribution-based frequency estimator”, Proc. of Int. Conf. on Control, automation, and Systems, pp. 255–260, 2010.