

振り子の単振動に対する超関数を用いた高速周波数推定

学生員 緒形 裕太* 正員 新田 益大*
正員 西田 健* 泉 博之

Fast frequency estimation by distribution for simple harmonic oscillation of a pendulum

Ogata Yuta*, Student Member, Nitta Msuhiro*, Member, Nishida Takeshi*, Member, Izumi Hiroyuki,

周波数推定には一般的に高速フーリエ変換によるスペクトル解析が用いられるが、近年、超関数を利用した高速・高精度な周波数推定法が提案されている。そこで本論文ではシミュレーションによって超関数を用いた高速周波数解析法を検証し、推定値の推定誤差修正法を提案する。さらに振り子の単振動に対して実験的に本手法の検証を行い、その結果を示す。

キーワード：高速周波数推定、超関数、単振動、振り子

Keywords: fast frequency estimation, distribution method, simple harmonic oscillation, pendulum

1. はじめに

振動現象の周波数解析には、ノイズ低減を始めとする高速かつ高精度の振動周波数の推定のための手法が数多く提案されている。一般に広く利用される技術としては高速フーリエ変換(FFT: fast Fourier transform)による信号のスペクトル密度のピーク探索である。これは、一定時間信号を累積するための窓関数を準備し、その区間の信号における最も支配的な周波数を探査する手法である⁽¹⁾。この手法は低周波数の振動を解析する場合、数秒から数十秒の幅の窓関数を用意する必要があり、それに伴って、周波数解析結果が算出されるまでの計測時間も長くなる⁽²⁾。一方、近年、超関数を利用する高速かつ高精度の周波数推定手法が提案されている⁽³⁾。この手法による周波数推定は、20から30のサンプリングデータで高精度の周波数推定に達成されることが報告されており⁽³⁾、振動現象を発生する電子回路において、その有効性が実証されている。そこで本研究では、シミュレーションによって超関数を用いた高速周波数解析法を検証し、推定値の推定誤差修正法を提案する。さらに振り子の単振動に対して実験的に本手法の検証を行い、その結果を示す。

2. 超関数による周波数推定の概要

〈2・1〉 定式化 次のような単周期信号を考える。ここで、 X_0 は振幅、 ω は各周波数、 θ は位相の遅れ角である

とする。

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t - \theta) \quad (1)$$

まず、この信号の2階微分方程式は以下のように表せる。

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (2)$$

この関係より、周波数は次のように表現できる。

$$\omega^2 = -\ddot{x}(t)/x(t) \quad (3)$$

しかし、実応用における離散計測値から $\ddot{x}(t)$ を高精度に求めることは一般的に困難であるため、この関係式を利用する周波数推定は一般には行われない。同様に、以下の積分の関係

$$x(t) - x(0) - \dot{x}(0)t + \omega^2 \int_0^t \int_0^{t'} x(t'') dt'' dt' = 0 \quad (4)$$

を利用する場合も、初期値 $x(0)$ と $\dot{x}(0)$ を高精度に計測することは困難である。

〈2・2〉 超関数の導入 次のような超関数を利用するパラメータ推定手法を導入する。まず、パラメータを推定する対象の関数を $f(t)$ 、超関数を $\phi(t)$ とおく。超関数は C^∞ 級関数であり、かつ台がコンパクト、すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{d^n \phi(t)}{dt^n} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

という性質を満たす関数である⁽⁴⁾。これらの関数の組み合わせにおいて、次の式が成り立つ。

* 九州工業大学
Kyushu Institute of Technology

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \phi(t) dt &= [f(t)\phi(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d\phi(t)}{dt} dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d\phi(t)}{dt} dt \end{aligned} \quad (6)$$

したがって、一般に以下が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n f(t)}{dt^n} \phi(t) dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d^n \phi(t)}{dt^n} dt \quad (7)$$

この関係は、 $f(t)$ の導関数を $\phi(t)$ の導関数で表現できることを意味する。

ここで再び式(1)の微分方程式を考える。両辺に $\phi(t)$ を乗じて $(-\infty, \infty)$ で積分すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x}(t) \phi(t) dt + \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi(t) dt = 0 \quad (8)$$

となる。これは式(7)に従って記述し直すと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \ddot{\phi}(t) dt + \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi(t) dt = 0 \quad (9)$$

と変形される。したがって

$$\omega^2 = - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \ddot{\phi}(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi(t) dt} \quad (10)$$

となる。次に、ガウス関数は近似的に台がコンパクトであるとみなせるため⁽⁵⁾、超関数として利用することができる。 μ を平均、 σ^2 を分散とすると、超関数は以下のようにおける。

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (11)$$

この導関数は以下のように表せる。

$$\dot{\phi}(t) = -\frac{t-\mu}{\sigma^2} \phi(t) \quad (12)$$

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{(t-\mu)^2 - \sigma^2}{\sigma^4} \phi(t) \quad (13)$$

したがって、式(11)と式(13)を利用することで、式(10)の ω^2 を導出できる。

〈2・3〉 推定式の離散化 さらに実応用における計測サンプリングおよび量子化を考慮する必要がある。ここで、 k は離散時刻、 T_0 は任意の計測開始時刻、 $N \in \mathbb{N}^+$ 、 T_s はサンプリング周期を表す正の実数である。超関数 $\phi(t)$ の中央値を $\mu = NT_s/2$ と定め、十分に小さな正の実数 ϵ で抑えることができるような σ^2 を設定して

$$0 < |\phi(T_0)| = |\phi(T_0 + NT_s)| \ll \epsilon \quad (14)$$

と定めると、次のように近似できる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi(t) dt \simeq \int_{T_0}^{T_0+2\mu} x(t) \phi(t) dt \quad (15)$$

次に、 $x(t)$ が離散信号 $x(kT_s)$ として計測される状況を考え、有限時間 $[T_0, T_0 + NT_s]$ における式(10)の算出について考

える。これらの表現を用いると、式(15)は区分求積法により、以下のように近似できる。

$$\int_{T_0}^{T_0+2\mu} x(t) \phi(t) dt \simeq \sum_{k=0}^N x(T_0 + kT_s) \phi(T_0 + kT_s) T_s \quad (16)$$

以上の関係を利用すると、式(10)は次のように表せる。

$$\omega^2 = - \frac{\sum_{k=0}^N x(T_0 + kT_s) \ddot{\phi}(T_0 + kT_s)}{\sum_{k=0}^N x(T_0 + kT_s) \phi(T_0 + kT_s)} \quad (17)$$

ここで、この式は信号の位相に対して不变であることから、式(1)の θ に対して不变な推定が行われる。また $T_0 \geq 0$ は任意に設定できる。これらの事実から次の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \omega^2 &\simeq - \frac{\sum_{n=0}^N x(T_0 + nT_s) \ddot{\phi}(T_0 + nT_s)}{\sum_{n=0}^N x(T_0 + nT_s) \phi(T_0 + nT_s)} \\ &= - \frac{\sum_{n=0}^N x(T_0 + nT_s) \ddot{\phi}(nT_s)}{\sum_{n=0}^N x(T_0 + nT_s) \phi(nT_s)} \\ &= - \frac{\sum_{n=0}^N x(nT_s) \ddot{\phi}(nT_s)}{\sum_{n=0}^N x(nT_s) \phi(nT_s)} \end{aligned} \quad (18)$$

すなわち、 $\phi(t)$ および $\ddot{\phi}(t)$ は時間更新する必要はなく、時間 $[0, NT_s]$ における値を利用し続ければよい。さらに、定数成分を約分して整理すると、次のように表せる。

$$\begin{aligned} \omega^2 &\simeq - \frac{\sum_{n=0}^N x(T_0 + nT_s) \exp\left\{-\frac{(nT_s - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{(nT_s - \mu)^2 - \sigma^2}{\sigma^4}}{\sum_{n=0}^N x(T_0 + nT_s) \exp\left\{-\frac{(nT_s - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}} \\ &= - \frac{\sum_{n=0}^N x_n p_n q_n}{\sum_{n=0}^N x_n p_n} \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、

$$x_n \triangleq x(T_0 + nT_s)$$

$$p_n \triangleq \exp\left\{-\frac{(nT_s - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$q_n \triangleq \frac{(nT_s - \mu)^2 - \sigma^2}{\sigma^4}$$

であり、 x_n は周波数が変化する場合には T_0 を時変とすればよい。すなわち、時刻 NT_s 以降は FIFO 形式で x_n の要素をシフトしながら更新する。また、 x_n が全て発生するまでの時間 $[0, NT_s]$ は、 ω の推定は実行されない。すなわち、時刻 NT_s 以降は FIFO 形式で x_n の要素をシフトしながら更新する。さらに、先行研究における解析から、 N および σ 、 T_s は次の関係を満たすように設定する必要があることが明らかにされている⁽⁶⁾。

$$20T_s \leq 16\sigma < NT_s \quad (20)$$

多くの事例では T_s は計測機器に依存して変更できないため、 N を定めた後に、上述の関係を満たす範囲で σ を定め

れば良い。すると、 p_n と q_n は計測と無関係であるため、上述のパラメータが決定されれば直ちに設定される。

以上より明らかなように、本手法は最低限で連続する 21 のサンプリング時刻における計測値が獲得できれば、周波数推定が実行可能である。さらに、振動の周波数が変動する場合にも、 $\mathbf{x}(T_0)$ を逐次更新することで推定を適応的に修正することが可能である。

一方、時系列計算を行なっている最中に以下のような状況においては推定精度が低下することに注意が必要である。

$$\frac{\sum_{n=0}^N x_n p_n q_n}{\sum_{n=0}^N x_n p_n} > 0 \quad (21)$$

$$\sum_{n=0}^N x_n p_n < \varepsilon \quad (\text{e.g. } \varepsilon = 10^{-6}) \quad (22)$$

これらの場合には、前時刻の推定を継続して利用し、推定の不安定化を回避する。

3. シミュレーション

〈3・1〉 単振動の周波数推定 次の信号を用いて上述の推定手法の性能をシミュレーションにより検証する。ここで $T_s = 0.01[\text{s}]$ および $\sigma = ((N - 20)/2 + 20)T_s/16$ とした。また N を最小限度の 21 と設定した。

$$x(t) = \cos(0.5\pi k T_s + \pi/2) \quad (23)$$

また次の公式を用いて周波数を算出し⁽⁷⁾、真値を $\omega = 1.57$ とした。T=4[s] は 1 周期の時間とする。

$$\omega = 2\pi/T \quad (24)$$

まず、以上の条件における超関数 $\phi(t)$ とその 2 階微分 $\ddot{\phi}(t)$ の概形を図 1 に示す。また式(19)を簡単のため次式のように定義する。

$$\omega^2 = -\frac{\sum_{n=0}^N x_n p_n q_n}{\sum_{n=0}^N x_n p_n} = -\frac{M_k}{D_k} \quad (25)$$

さらに、それらを利用して推定した結果と推定値を算出するときの M_k, D_k を図(2)に示す。ここで、 M_k と D_k の交点に注目し、その拡大したグラフを図 3 に示す。図 3 より、 M_k と D_k の交点付近では推定値が大きく振動している。これは D_k が 0 に近づくにつれ、量子化誤差によって M_k と D_k の比が安定しなくなり、 $\ddot{\phi}(t)$ の値が増幅されるためである。

〈3・2〉 推定値の誤差の修正

〈3・2・1〉 量子化誤差の原因 M_k と D_k の交点付近では、分母である D_k の値が小さくなることで推定値が不安定となる。そこで、推定値の誤差を修正するため、 M_k と D_k の交点付近においては、ある一定個数前の推定値を引き継ぐ処理を行う。推定誤差に影響している範囲はガウス関数のピーク値付近、すなわち $\phi(t), \ddot{\phi}(t)$ の $\mu \pm 3.3\sigma$ の範囲である⁽⁸⁾。そこで次式のように整数 W_x を定める。

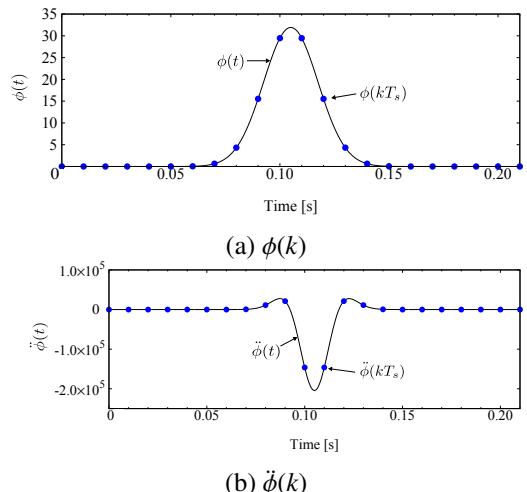


Fig. 1. 超関数とその二階微分の概形 ($N = 21$)。

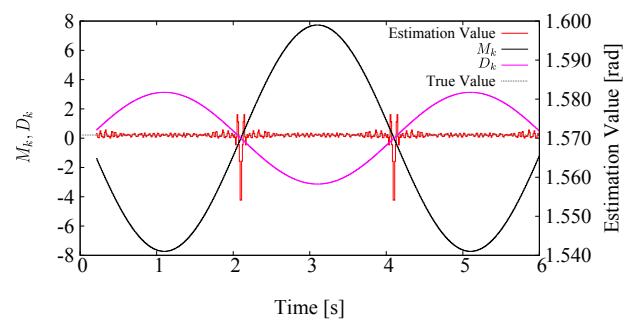


Fig. 2. 推定値と M_k, D_k

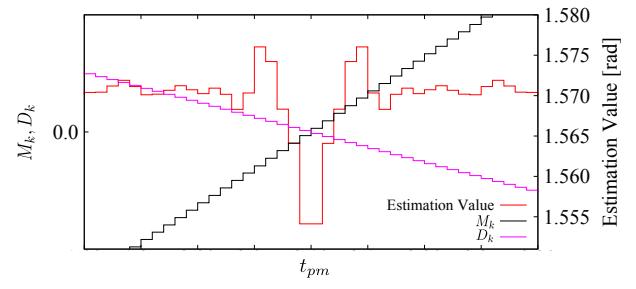


Fig. 3. M_k と D_k の交点の拡大図と推定値

$$3.3\sigma \leq W_x T_s \quad (26)$$

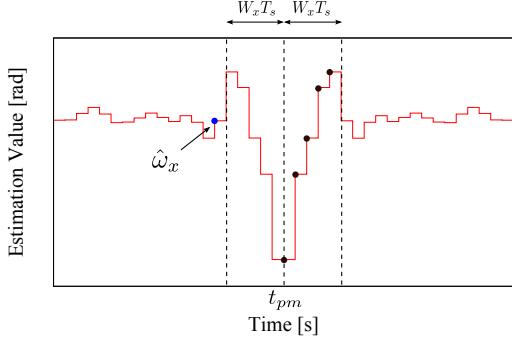
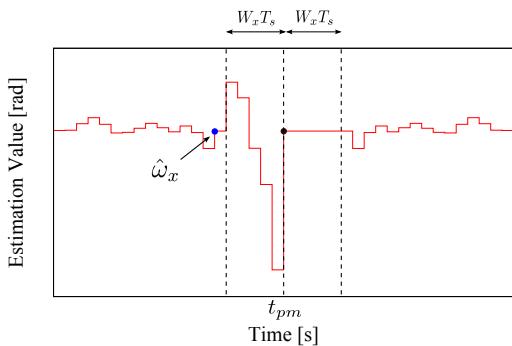
ここで W_x は式(26)を満たす最小の正の整数である。

〈3・2・2〉 提案手法 1 誤差修正のため M_k の値の符号が反転した時刻から W_x 個の推定値は採用しないとする。つまり時刻 t の推定値を $\hat{\omega}(t)$ 、符号が反転した時刻を t_{pm} とし、 $t = t_{pm} - (W_x + 1)$ のときの推定値を $\hat{\omega}_x$ とすると、次式が成り立つ。

$$\hat{\omega}(t) = \hat{\omega}_x \quad (t_{pm} \leq t \leq t_{pm} + W_x T_s) \quad (27)$$

これらを図 4 に図示する。式(26), (27)を用いてシミュレーションにおける推定誤差を修正する。シミュレーションでは式(19)より $\sigma = 0.0128$ であるので、式(26)より、 $W_x = 5$

となる。式(27)より、推定誤差を修正したときの推定値を図5に示す。以上より、 M_k と D_k の交点付近の推定誤差の半分を修正することができた。提案手法1の欠点は、 M_k の値の符号が反転した時刻から $W_x T_s$ 前の推定誤差は残ってしまう点である。また、利点としては、リアルタイムに推定値が得られる点である。

Fig. 4. シミュレーションにおける $W_x T_s$, t_{pm} , $\hat{\omega}_x$ Fig. 5. 提案手法1による誤差修正後の M_k と D_k の交点の拡大図

〈3・2・3〉 提案手法2 誤差修正のため M_k の値の符号が反転した時刻から前後 W_x 個の推定値は採用しないとする。つまり $\hat{\omega}(t)$, t_{pm} , $\hat{\omega}_x$ を提案手法1と同様に定義すると、次式が成り立つ。

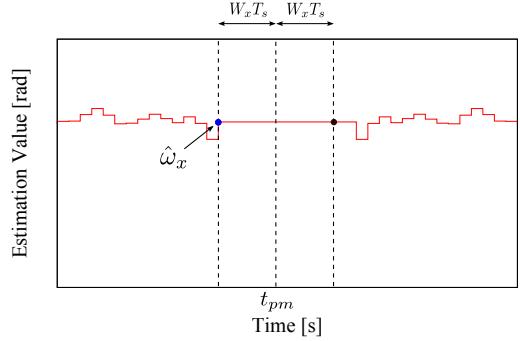
$$\hat{\omega}(t) = \hat{\omega}_x \quad (t_{pm} - (W_x + 1)T_s \leq t \leq t_{pm} + W_x T_s) \quad (28)$$

式(28)より、推定誤差を修正したときの推定値を図6に示す。以上より、 M_k と D_k の交点付近の推定誤差を修正することができた。提案手法2の欠点は、 M_k の値の符号が反転した時刻から $W_x T_s$ 前の推定値を更新せねばならず、その時間だけ推定結果が得るのが遅れる点である。また、利点としては、提案手法1では残ってしまう時刻 t_{pm} より前の誤差が修正できる点である。

4. 実験

4・1 実験装置

実験では図7(a)に示すような单振

Fig. 6. 提案手法2による誤差修正後の M_k と D_k の交点の拡大図

子を用いる。振子の先端部に図7(b)に示すような ATP-Promotions 社製の小型多機能センサ [型番:TSND121]を取り付け、これによって計測された角速度データを式(1)の $x(t)$ として周波数推定に利用する。このセンサは三軸方向別に角速度データ得られ、サンプリングインターバルは 1[s]～255[s]で変更でき、分解能は 0.08[dps]である。実験では振子の単振動の振幅方向を軸とした角速度データを使用する。得られた角速度データは Bluetooth 通信で PC に送信される。

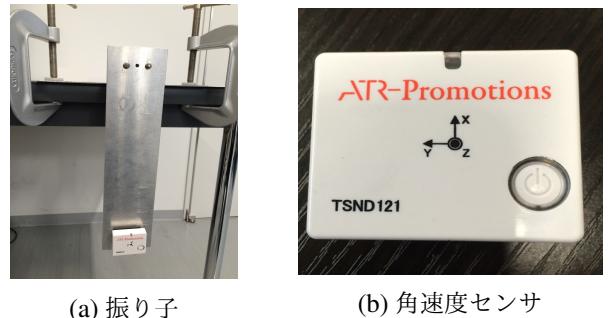


Fig. 7. 実験装置

4・2 実験方法

- (1) 角速度センサのサンプリング周期を 50[Hz]に設定する。
- (2) 单振子の振子部分を手で持ち上げ、静かに離して振子を振る。
- (3) 角速度データの取得を開始する。
- (4) 10 周期程度の角速度データが得られた時点でデータの取得を停止する。
- (5) 第2節と第3節で述べた手法により振子の単振動の角速度データから周波数を推定する。

4・3 実験結果と考察

図8に量子化ノイズがある

場合の推定結果を、図 9 にその推定値のみを、図 10 に提案手法 1 を用いた推定値を、図 8 に提案手法 2 を用いた推定値を示す。シミュレーションと比較すると、推定値が振動していることがわかる。また、量子化誤差修正後も推定値が振動している時間があるのがわかる。これは実験装置の振動や、離散化された角速度データの量子化誤差が原因であると考えられる。また、 t_{pm} の $W_x T_s$ 前の時刻の推定値 $\hat{\omega}_x$ に誤差がある場合、誤差を持つ推定値が引き継がれるため、 W_x を大きく設定する必要がある。

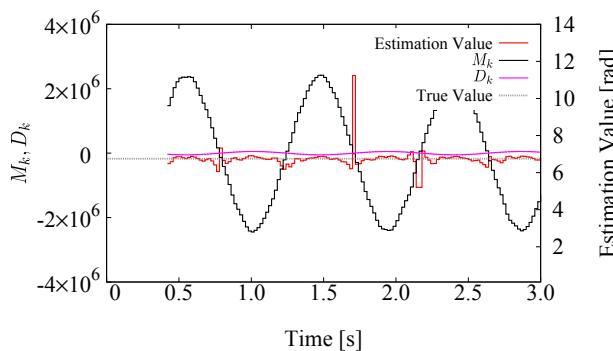
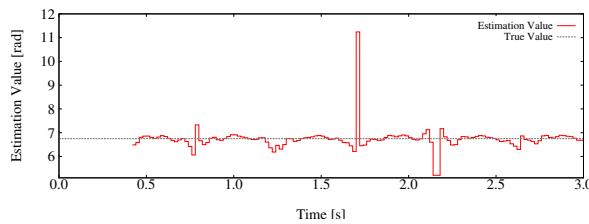
Fig. 8. 実験による推定値と M_k と D_k 

Fig. 9. 実験による推定値

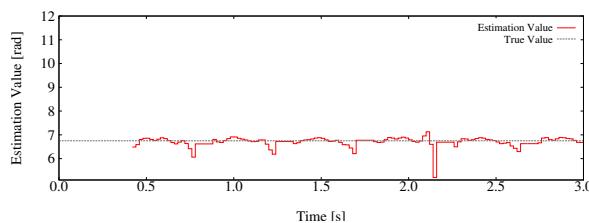


Fig. 10. 提案手法 1 を用いた実験による推定値

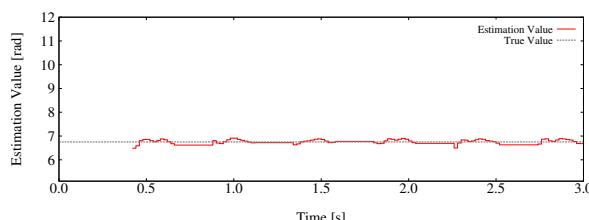


Fig. 11. 提案手法 2 を用いた実験による推定値

5. まとめ

本論文では、振り子の単振動に対して超関数に基づく周波数推定法を用いて周波数を推定し、以下のことを示した。

超関数に基づく周波数推定をシミュレーションによって検証した。その結果、量子化ノイズが発生する原因を究明し、提案手法 1, 2 によって量子化誤差を修正できることを示した。しかし、それぞれの提案手法には長所、短所があり、有効性は推定するサンプリング周波数やサンプリングデータ数による。

実験では提案手法 1, 2 によって推定誤差を修正することができ、本手法が有効であることを示した。

今後の発展として、振動の周波数が観測中に変化した場合、推定精度を保って追従することが挙げられる。また、観測ノイズに推定値が大きな影響を受けるため、適切なフィルタリングを施すなど、精度を向上させる工夫が必要である。さらに、サンプリング周期とサンプリングデータ数の関係から、最も精度よく周波数が推定できる関係を考察することを今後の課題としたい。

謝 辞

本論文作成にあたり御指導下さった九州工業大学大学院工学研究院機械知能工学研究系知能制御工学部門西田准教授に深く感謝致します。さらに、日頃より御協力頂いた機械知能工学科制御工学教室の教職員の皆様ならびに、同教室西田研究室の皆様に感謝致します。

文 献

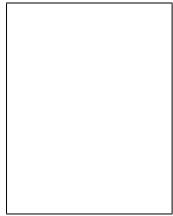
- (1) 加藤正昭，“デジタルフーリエ解析(I)-基礎編-”，コロナ社，1996.
- (2) 加藤幸雄、堤一男、三好正純、清田公保、広林茂樹，“入門ディジタル信号処理”，培風館，pp.85–94，2006.
- (3) A. Ishizaka, M. Nitta, K. Koto, “Error analysis on distribution-based frequency estimator”, Proc. of Int. Conf. on Control, automation, and Systems, pp. 255–260, 2010.
- (4) 棚橋隆彦，“エンジニアのための超関数”，三恵社，pp.5–6，2004.
- (5) チャールズ・K・チュウイ，“ウェーブレット入門”，東京電機大学出版局，pp.59–60，1999.
- (6) 新田益大，“超関数に基づく高精度周波数推定”，第 12 回計測自動制御学会制御部門大会，2012.
- (7) 加藤正昭，“物理学の基礎”，サイエンス社，pp.104–105，1996.
- (8) E. クライツィグ，“確率と統計”，培風館，pp.50–51，2010.

付 錄

1.

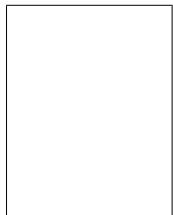
緒形 裕太 (学生員) 1992 年生。2015 年九工大・工・機械知能工卒業。制御工学に従事。

新田 益大（正員）



西田 健（正員） 1998年九工大・工・設計生産工卒業。2002

年九工大大学院博士後期課程修了。同年より九
工大・機械知能工学・助手。2007年より助教、博
士（工学）。屋外移動ロボットに関する研究に従事。
日本ロボット学会、計測自動制御学会、日本神経回
路学会、電子情報通信学会などの会員。



泉 博之（正員）

