

超関数とカルマンフィルタによるノイズにロバストな高速周波数推定

新田 益大*・西 田 健*・泉 博之**

Robust and Fast Frequency Estimation by Distribution and Kalman Filter

Masuhiko NITTA*, Takeshi NISHIDA* and Hiroyuki IZUMI**

We propose a novel rapid and highly precise frequency estimation method of vital signs. The proposed method bases on a notion of distribution theory, and is mathematically stable. The proposed method has adaptation ability and shortens the estimation time of the conventional method, such as FFT, dramatically.

Key Words: fast frequency estimation, distribution method, kalman filter

1. はじめに

医療分野では呼吸数や心拍数などの生体信号の周波数計測は診療の基礎であり、これを自動計測の手法も数多い。それらの周波数解析には、振動現象の周波数解析技術が用いられ、ノイズ低減を始めとする高速かつ高精度の振動周波数の推定のための手法は数多く提案されている。一般に広く利用される技術としては高速フーリエ変換(FFT: fast Fourier transform)による信号のスペクトル密度のピーク探索である。これは、一定時間信号を累積するための窓関数を準備し、その区間の信号における最も支配的な周波数を探索する手法である。一般に生体信号の周波数は低いため、数秒から数十秒の幅の窓関数を用意する必要があり、それに伴って、周波数解析結果が算出されるまでの計測時間も長くなる。例えばヒトの呼吸数計測には、一般に5秒から10秒の計測遅れが発生する。

一方、近年、超関数を利用する高速かつ高精度の周波数推定手法が提案されている¹⁾。本手法による周波数推定は、20から30のサンプリングデータで高精度の周波数推定に達成されることが報告されており¹⁾、振動現象を発生する電子回路において、その有効性が実証されている。本手法の生体信号解析への応用は未だ実施されていないが、従来手法よりも大幅な計測時間の短縮を見込める。そこで本研究では、超関数に基づく周波数推定手法を生体信号解析に応用することを試みる。

2. 超関数による周波数推定の概要

2.1 定式化

次のような単周期信号を考える。

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t - \theta) \quad (1)$$

ここで、 X_0 は振幅、 ω は各周波数、 θ は位相の遅れ角であるとする。まず、この信号の2階の微分方程式は以下のように表せる。

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (2)$$

この関係より、周波数は次のように表現できる。

$$\omega^2 = \ddot{x}(t)/x(t) \quad (3)$$

しかし、実応用における離散計測値から $\ddot{x}(t)$ を高精度に求めることは困難であるため、この関係式を利用する周波数推定は一般に行われない。同様に、以下の積分の関係を利用する場合も、初期値 $x(0)$ と $\dot{x}(0)$ を高精度に計測することは困難である。

$$x(t) - x(0) - \dot{x}(0)t + \omega^2 \int_0^t \int_0^{t'} x(t'') dt'' dt' = 0 \quad (4)$$

そこで、次のような超関数を利用するパラメータ推定手法を導入する。まず、パラメータを推定する対象の関数を $f(t)$ 、テスト関数 $\phi(t)$ とおく。テスト関数は C^∞ 級関数であり、台がコンパクト、すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{d^n \phi(t)}{dt^n} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

という性質を満たす関数である。これらの関数の組み合わせにおいて次式が成立する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \phi(t) dt = [f(t)\phi(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d\phi(t)}{dt} dt$$

* 九州工業大学大学院工学研究院機械知能工学研究系知能制御工学部門

** 産業医科大学

* Control Engineering Section, Department of Mechanical and Control Engineering, Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology

**

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d\phi(t)}{dt} dt \quad (6)$$

したがって、一般に以下が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n f(t)}{dt^n} \phi(t) dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d^n \phi(t)}{dt^n} dt \quad (7)$$

ここで、再び式 (1) の微分方程式を考える。両辺に $\phi(t)$ を乗じて $(-\infty, \infty)$ で積分すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x}(t) \phi(t) dt + \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi(t) dt = 0 \quad (8)$$

となる。これは式 (7) に従うと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \ddot{\phi}(t) dt + \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi(t) dt = 0 \quad (9)$$

と変形される。したがって、

$$\omega^2 = - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \ddot{\phi}(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi(t) dt} \quad (10)$$

となる。

次に、ガウス関数は近似的に台がコンパクトであるとみなせるため、テスト関数として利用することができる。すなわち、テスト関数を以下のようにおく。

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (11)$$

ここで μ は平均、 σ^2 は分散である。この二階の導関数は以下のように表せる。

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{(t-\mu)^2 - \sigma^2}{\sigma^4} \phi(t) \quad (12)$$

したがって、式 (11) と式 (12) を利用することで、式 (10) の ω^2 を導出できる。しかし、上述のようにガウス関数を台がコンパクトな関数であると近似するためには、実応用における計測のサンプリングおよび量子化を考慮する必要がある。

2.2 推定式の離散化

テスト関数 $\phi(t)$ の中央値を $\mu = NT_s/2$ と定め、十分に小さな正の実数 ϵ で抑えることができるような σ^2 を設定して

$$0 < |\phi(T_0)| = |\phi(T_0 + NT_s)| \ll \epsilon \quad (13)$$

と定めると、次のように近似できる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi(t) dt \simeq \int_{T_0}^{T_0+2\mu} x(t) \phi(t) dt \quad (14)$$

次に、 $x(t)$ が離散信号 $x(kT_s)$ として計測される状況を考え、有限時間 $[T_0, T_0 + NT_s]$ における式 (10) の算出について考える。ここで、 k は離散時刻、 T_0 は任意の計測開始時刻、 $N \in \mathbb{N}^+$ 、 T_s はサンプリング周期を表す正の実数である。これらの表現を用いると、式 (14) は区分求積法により以下のように近似できる。

$$\int_{T_0}^{T_0+2\mu} x(t) \phi(t) dt \simeq \sum_{n=0}^N x(T_0 + nT_s) \phi(T_0 + nT_s) T_s \quad (15)$$

これより式 (10) は次のように近似できる。

$$\omega^2 \simeq - \frac{\sum_{n=0}^N x(T_0 + nT_s) \ddot{\phi}(T_0 + nT_s)}{\sum_{n=0}^N x(T_0 + nT_s) \phi(T_0 + nT_s)} \quad (16)$$

ここで、この式は信号の位相に対して不変であることから、式 (1) の θ に対して不変な推定が行われる。また、 $T_0 \geq 0$ は任意に設定できる。これらの事実から、次の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \omega^2 &\simeq - \frac{\sum_{n=0}^N x(T_0 + nT_s) \ddot{\phi}(T_0 + nT_s)}{\sum_{n=0}^N x(T_0 + nT_s) \phi(T_0 + nT_s)} \\ &= - \frac{\sum_{n=0}^N x(T_0 + nT_s) \ddot{\phi}(nT_s)}{\sum_{n=0}^N x(T_0 + nT_s) \phi(nT_s)} \\ &= - \frac{\sum_{n=0}^N x(nT_s) \ddot{\phi}(nT_s)}{\sum_{n=0}^N x(nT_s) \phi(nT_s)} \end{aligned} \quad (17)$$

すなわち、 $\phi(t)$ および $\ddot{\phi}(t)$ は時間更新する必要はなく、時間 $[0, NT_s]$ における値を利用し続けられよいことが分かる。さらに、定数成分を約分して整理すると、次のように表せる。

$$\begin{aligned} \omega^2 &\simeq - \frac{\sum_{n=0}^N x(T_0 + nT_s) \exp \left\{ -\frac{(nT_s - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \frac{(nT_s - \mu)^2 - \sigma^2}{\sigma^4}}{\sum_{n=0}^N x(T_0 + nT_s) \exp \left\{ -\frac{(nT_s - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}} \\ &= - \frac{\sum_{n=0}^N x_n p_n q_n}{\sum_{n=0}^N x_n p_n} \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、

$$\begin{aligned} x_n &\triangleq x(T_0 + nT_s) \\ p_n &\triangleq \exp \left\{ -\frac{(nT_s - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ q_n &\triangleq \frac{(nT_s - \mu)^2 - \sigma^2}{\sigma^4} \end{aligned}$$

であり、 x_n は周波数が変化する場合を考慮して T_0 に関して時変とする。したがって、 x_n が全て発生するまでの時間 $[0, NT_s]$ は、 ω の推定は実行されないことに注意が必要である。また、時刻 NT_s 以降は FIFO 形式で x_n の要素をシフトしながら更新する。さらに、先行研究における解析から、 N および σ 、 T_s は次の関係を満たすように設定する必要があることが明らかにされている。

$$20T_s \leq 16\sigma < NT_s \quad (19)$$

多くの事例では T_s は計測機器に依存して変更できないため、 N を定めた後に、上述の関係を満たす範囲で σ を定めれば良い。すると、 p_n と q_n は計測と無関係であるため、上述のパラメータが決定されれば直ちに設定される。

以上より明らかなように、本手法は最低限で連続する 20 のサンプリング時刻における計測値が獲得できれば、周波数推定が実行可能である。さらに、振動の周波数が変動する場合にも、 $x(T_0)$ を逐次更新することで推定を適応的に修正することが可能である。

一方、時系列計算を行なっている最中に以下のような状況においては推定精度が低下することに注意が必要である。

$$\frac{\sum_{n=0}^N x_n p_n q_n}{\sum_{n=0}^N x_n p_n} > 0 \quad (20)$$

$$\sum_{n=0}^N x_n p_n < \varepsilon \quad (\text{e.g. } \varepsilon = 10^{-6}) \quad (21)$$

これらの場合には、前時刻の推定を継続して利用するなど、推定の不安定化を回避する方策を設ける必要がある。

3. シミュレーション

ここでは、次の信号を用いて上述の推定手法の性能をシミュレーションにより検証する。

$$x(t) = \cos(0.5\pi k T_s + \pi/2) \quad (22)$$

ここで $T_s = 0.01[\text{s}]$ および $N = 20$ と定め、 σ をそれらの従属変数として定めるために、以下の関数を設けた。

$$\sigma = ((N - 20)/2 + 20)T_s/4 \quad (23)$$

まず、以上の条件におけるテスト関数 $\phi(t)$ とその 2 階微分 $\ddot{\phi}(t)$ の概形を図 1 に示す。さらに、それらを利用して推定した結果を図 2 に示す。推定が開始される時刻 0.21[s] 以降は

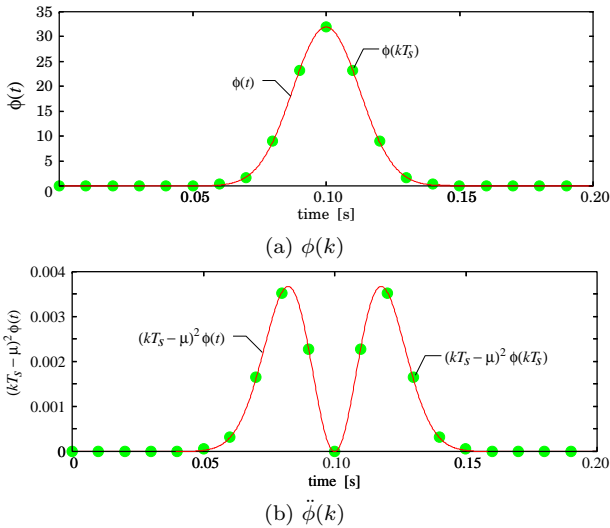


Fig. 1 The test function of \mathbf{p} and \mathbf{q} ($N = 21$).

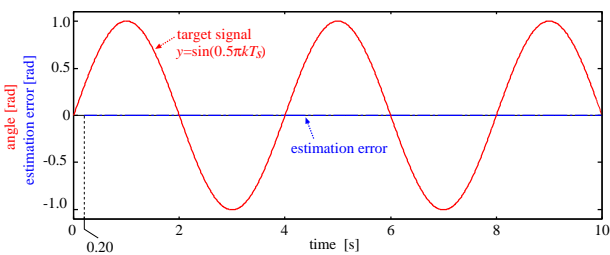


Fig. 2 A periodic signal and its frequency estimation results.

推定誤差が 0 であった。この結果より、単一周期の信号の推定が本手法によって実現されることが示された。

4. カルマンフィルタ

$$\boldsymbol{\eta}_{k+1} = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_k \quad (24)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{C}\boldsymbol{\eta}_k + \boldsymbol{\omega} \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\eta}_k \triangleq \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}), \quad \mathbf{R} \triangleq \text{diag}(\sigma_c^2, \sigma_c^2) \quad (27)$$

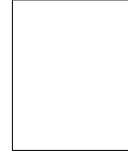
5. おわりに

参考文献

- 1) A. Ishizaka, M. Nitta, K. Koto, “Error analysis on distribution-based frequency estimator”, Proc. of Int. Conf. on Control, automation, and Systems, pp. 255–260, 2010.
- 2) 新田益大, “超関数に基づく高精度周波数推定”, 第 12 回計測自動制御学会制御部門大会, 2012.

[著 者 紹 介]

新田 益大 (正会員)



平 24 年より九工大・機械知能工学・助教, 博士 (工学)。

西 田 健 (正会員)



平 10 九工大・工・設計生産工卒。平 14 九工大大学院博士後期課程修了。同年より九工大・機械知能工学・助手。平成 25 年より准教授, 博士 (工学)。屋外移動ロボットに関する研究に従事。日本ロボット学会, 計測自動制御学会, 日本神経回路学会, 電子情報通信学会などの会員。

泉 博 之



産医大・准教授