研究速報

白色雑音下の正弦波信号とその周波数を推定する拡張複素カルマンフィルタの安定性——単一正弦波の場合——

正員　西山　清†

Stability of Extended Complex Kalman Filter for Estimating a Sinusoidal Signal and its Frequency in White Noise—On the Case of a Single Sinusoid—

Kiyoshi NISHIYAMA†, *Member*

† 職業能力開発大学校情報工学科，相模原市
Department of Information and Computer Engineering, The Polytechnic University, Sagamihara-shi, 229 Japan

あらまし　周波数の関数と原信号を状態変数とする非線形確率システムに拡張複素カルマンフィルタを適用することによって，白色雑音下の複素正弦波信号とその周波数を同時に推定するオンライン処理可能な非線形フィルタが著者によって既に報告され，SN 比 5 [dB] 以上の 1 成分からなる場合において良好な推定結果が得られている．しかし，この提案されたフィルタは非線形であるため初期値によって発散する恐れがあるがその安定性は明らかにされていなかった．本論文では，原信号が多成分からなる場合を直接扱うことは現時点では困難なため，1 成分からなる場合に限定し，その安定性を証明する．

キーワード　非線形フィルタ，拡張カルマンフィルタ，正弦波信号，周波数推定，安定性

1. まえがき

白色雑音下の正弦波信号からその成分の周波数やその他のパラメータを推定する問題は，レーダ，ソナー，核磁気共鳴，騒音源や地震波の解析など広い分野で研究されさまざまな推定法が提案されている．多くの推定法では周波数の推定精度はかなり高いが，成分の大きさや位相の推定精度は大幅に低下し，特に位相に関しては全く推定できない場合もある[1]．また，信号の定常性を仮定していたり，信号の減衰を考慮した場合でも信号そのものや他のパラメータ (大きさなど) の推定を直接行うことは困難であった[2]．そこで，周波数の関数と原信号を状態変数とする非線形確率システムに拡張複素カルマンフィルタを適用することによって，白色雑音下の複素正弦波信号とその周波数を同時に推定できるオンライン処理可能な非線形フィルタが著者によって既に報告されている[3]．これは減衰を伴う正弦波信号に対しても容易に拡張できる．しかし，このフィルタは非線形であるため一般に状態変数ベクトルの初期値によって発散する恐れがあり[4]，その安定性を明らかにする必要があった．

本論文では，原信号 z_k が多成分からなる場合を直接扱うことは現時点では困難なため，1 成分からなる場合に限定し，その安定性を証明する．

2. 白色雑音下の複素正弦波信号を推定する拡張複素カルマンフィルタ

本章ではまず問題設定を行った後に，この問題に対する拡張複素カルマンフィルタ (ECKF: Extended Complex Kalman Filter) を導き，最後にその安定性を理論的に明らかにする．

2.1 問題設定

次のような雑音下にある離散化された複素正弦波信号を考える．

$$y_k = z_k + v_k, \quad k = 1, 2, 3, \cdots, N \tag{1 a}$$

但し，

$$z_k = \sum_{i=1}^{n} a_i \exp(j\omega_i t_k) \tag{1 b}$$

ここで，成分数 n は既知とし，a_i は初期位相 ϕ_0 を考慮した複素数の振幅 ($a_i = |a_i| e^{j\phi_0}$)，$\omega_i = 2\pi f_i$ は角周波数，$t_k = k\Delta t$ はサンプリング時間とし，Δt はサンプリング間隔 (周期) を表す．また，雑音 v_k は平均値 0，分散 σ_v^2 の定常な複素ガウス白色雑音[4] とする．

本論文では，原信号 z_k が多成分からなる場合 ($n>1$) を直接扱うことは現時点では困難なため，1 成分からなる場合 ($n=1$) に限定し，観測信号 $\{y_k\}$ から周波数 f_1 および原信号 $\{z_k\}$ を推定する問題を考える．但し，振幅 a_1 と白色雑音の分散 σ_v^2 は未知とする．

2.2 拡張複素カルマンフィルタの適用

まず，成分数 1 の場合の式 (1) に注意すれば，$z_k = e^{j\omega_1\Delta t} z_{k-1}$ の関係式が成り立ち，これより観測信号 y_k は次のような非線形確率システムに表現することができる[3]．

$$x_{k+1} = f_k(x_k) \quad \text{(状態方程式)} \tag{2 a}$$

$$y_k = h_k(x_k) + v_k \quad \text{(観測方程式)} \tag{2 b}$$

但し，

$$x_k = [x_k(1), x_k(2)]^T = [\alpha(1), z_{k-1}]^T$$

$$z_k = h_k(x_k), \ \alpha(1) \triangleq \exp\{j\omega_1 \Delta t\}$$

$$f_k(x_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(1) \\ z_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(1) \\ \alpha(1) z_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k(1) \\ x_k(1) x_k(2) \end{bmatrix}$$

$$h_k(x_k) = [z_{k-1}, 0] \begin{bmatrix} \alpha(1) \\ z_{k-1} \end{bmatrix} = z_{k-1}\alpha(1) = x_k(1) x_k(2) \tag{2 c}$$

このときの拡張複素カルマンフィルタは次のように得られる[(3),(4)].

$$\hat{x}_{k|k}=\hat{x}_{k|k-1}+K_k[y_k-h_k(\hat{x}_{k|k-1})]$$

$$\hat{x}_{k+1|k}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \hat{x}_{k|k}(1)\end{bmatrix}\hat{x}_{k|k}=f_k(\hat{x}_{k|k})$$

(フィルタ方程式)　(3 a)

$$K_k=\hat{P}_{k|k-1}H_k^{*T}[H_k\hat{P}_{k|k-1}H_k^{*T}+1]^{-1}$$

(フィルタゲイン)　(3 b)

$$\hat{P}_{k|k}=\hat{P}_{k|k-1}-K_kH_k\hat{P}_{k|k-1}$$

$$\hat{P}_{k+1|k}=F_k\hat{P}_{k|k}F_k^{*T}$$ (誤差の共分散方程式)　(3 c)

但し,

$$F_k=\left.\frac{\partial f_k(x_k)}{\partial x_k}\right|_{x_k=\hat{x}_{k|k}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \hat{x}_{k|k}(2) & \hat{x}_{k|k}(1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \hat{z}_{k-1|k} & \hat{a}_{k|k}(1)\end{bmatrix}$$

$$H_k=\left.\frac{\partial h_k(x_k)}{\partial x_k}\right|_{x_k=\hat{x}_{k|k-1}}=[\hat{x}_{k|k-1}(2),\ \hat{x}_{k|k-1}(1)]$$

$$=[\hat{z}_{k-1|k-1},\ \hat{a}_{k|k-1}(1)]$$

$$\hat{P}_{k|k}=\hat{\Sigma}_{k|k}/\sigma_v^2,\ \hat{P}_{k+1|k}=\hat{\Sigma}_{k+1|k}/\sigma_v^2,\ \sigma_v^2=\sigma_{vr}^2+\sigma_{vi}^2$$

$$\hat{\Sigma}_{k|k}=E\{(x_k-\hat{x}_{k|k})(x_k-\hat{x}_{k|k})^{*T}\},$$

$$\hat{\Sigma}_{k+1|k}=E\{(x_{k+1}-\hat{x}_{k+1|k})(x_{k+1}-\hat{x}_{k+1|k})^{*T}\}$$

$$\hat{x}_{1|0}=\bar{x}_1,\ \hat{P}_{1|0}=\hat{\Sigma}_{1|0}/\sigma_v^2,\ \hat{\Sigma}_{1|0}=\Sigma_{x1},$$

$$\Sigma_{x1}=E\{(x_1-\bar{x}_1)(x_1-\bar{x}_1)^{*T}\} \quad (3\,d)$$

ここで, ^{T} は転置, * は複素共役を表す.

2.3 拡張複素カルマンフィルタの安定性

前章で導出した拡張複素カルマンフィルタに基づく非線形フィルタの安定性を示すためには, $|\hat{x}_{k|k}(1)|\leqq 1$ とすれば1段予測誤差の共分散行列が

$$\hat{\Sigma}_{k+1|k}\to 0\quad (k\to\infty) \quad (4)$$

となることを示せば十分である. なぜなら, このときゲイン $K_k=0$ となるからである. そこで, 一般性を考慮した上で時刻 t_k の1段予測誤差の共分散行列を非負定値エルミート行列

$$\hat{\Sigma}_{k|k-1}=\begin{bmatrix}\hat{\sigma}_{k|k-1}^2(1) & \gamma_{k|k-1}\\ \gamma_{k|k-1}^* & \hat{\sigma}_{k|k-1}^2(2)\end{bmatrix} \quad (5\,a)$$

とする(初期値と考えてもよい). ここで,

$$\hat{\sigma}_{k|k-1}^2(1)\,\hat{\sigma}_{k|k-1}^2(2)-|\gamma_{k|k-1}|^2\geqq 0,$$

$$\hat{\sigma}_{k|k-1}^2(i)\geqq 0,\quad i=1,2 \quad (5\,b)$$

が成り立つことに注意されたい.

このとき, 次の時刻 t_{k+1} の $\hat{\Sigma}_{k+1|k}$ を誤差の共分散方程式

$$\hat{\Sigma}_{k|k}=\hat{\Sigma}_{k|k-1}-K_kH_k\hat{\Sigma}_{k|k-1} \quad (6\,a)$$

$$\hat{\Sigma}_{k+1|k}=F_k\hat{\Sigma}_{k|k}F_k^{*T} \quad (6\,b)$$

を用いて導くことにする(式(3 c)参照). 但し, $\hat{x}_{k|k}(1)=e^{j\hat{\omega}_{k|k}\Delta T}$ より $|\hat{x}_{k|k}(1)|\neq 0$ と仮定する.

まず, 式(6 a)を順次計算していけば $\hat{\Sigma}_{k|k}$ は次のように得られる.

$$\hat{\Sigma}_{k|k}=\begin{bmatrix}\hat{\sigma}_{k|k}^2(1) & \gamma_{k|k}\\ \gamma_{k|k}^* & \hat{\sigma}_{k|k}^2(2)\end{bmatrix} \quad (7\,a)$$

但し,

$$\hat{\sigma}_{k|k}^2(1)\triangleq\hat{\sigma}_{k|k-1}^2(1)-\eta_k^2|\hat{\sigma}_{k|k-1}^2(1)\hat{x}_{k|k-1}(2)+\gamma_{k|k-1}^*\hat{x}_{k|k-1}(1)|^2$$

$$\hat{\sigma}_{k|k}^2(2)\triangleq\hat{\sigma}_{k|k-1}^2(2)-\eta_k^2|\hat{\sigma}_{k|k-1}^2(2)\hat{x}_{k|k-1}(1)+\gamma_{k|k-1}\hat{x}_{k|k-1}(2)|^2$$

$$\begin{aligned}\gamma_{k|k}\triangleq\gamma_{k|k-1}-\eta_k^2\{&\hat{\sigma}_{k|k-1}^2(1)\hat{\sigma}_{k|k-1}^2(2)\hat{x}_{k|k-1}(1)\\ &\cdot\hat{x}_{k|k-1}(2)^*+\gamma_{k|k-1}^2\hat{x}_{k|k-1}(1)^*\hat{x}_{k|k-1}(2)\\ &+\hat{\sigma}_{k|k-1}^2(2)\gamma_{k|k-1}|\hat{x}_{k|k-1}(1)|^2\\ &+\hat{\sigma}_{k|k-1}^2(1)\gamma_{k|k-1}|\hat{x}_{k|k-1}(2)|^2\}\end{aligned}$$

$$\eta_k^2\triangleq\frac{1}{\rho_k^2}$$

$$\begin{aligned}\rho_k^2\triangleq\ &\hat{\sigma}_{k|k-1}^2(1)|\hat{x}_{k|k-1}(2)|^2+\hat{\sigma}_{k|k-1}^2(2)|\hat{x}_{k|k-1}(1)|^2\\ &+\gamma_{k|k-1}\hat{x}_{k|k-1}(1)^*\hat{x}_{k|k-1}(2)\\ &+\gamma_{k|k-1}^*\hat{x}_{k|k-1}(1)\hat{x}_{k|k-1}(2)^*+\sigma_v^2>0\end{aligned}$$

($\because\hat{\Sigma}_{k|k-1}$ の非負性と $\sigma_v^2>0$ より)　(7 b)

ここで, 次の関係式が成り立つことに注意されたい(文献(5)参照).

$$\hat{\sigma}_{k|k}^2(1)\,\hat{\sigma}_{k|k}^2(2)-|\gamma_{k|k}|^2\geqq 0 \quad (7\,c)$$

次に, 式(7 a)を式(6 b)に代入すれば次の時刻 t_{k+1} の誤差の共分散行列 $\hat{\Sigma}_{k+1|k}$ が得られる.

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}_{k+1|k}&=F_k\hat{\Sigma}_{k|k}F_k^{*T}\\ &=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \hat{x}_{k|k}(2) & \hat{x}_{k|k}(1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\sigma}_{k|k}^2(1) & \gamma_{k|k}\\ \gamma_{k|k}^* & \hat{\sigma}_{k|k}^2(2)\end{bmatrix}\\ &\quad\cdot\begin{bmatrix}1 & \hat{x}_{k|k}(2)^*\\ 0 & \hat{x}_{k|k}(1)^*\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\hat{\sigma}_{k|k}^2(1) & \hat{\sigma}_{k|k}^2(1)\hat{x}_{k|k}(2)^*+\gamma_{k|k}\hat{x}_{k|k}(1)^*\\ \hat{\sigma}_{k|k}^2(1)\hat{x}_{k|k}(2)+\gamma_{k|k}^*\hat{x}_{k|k}(1) & \hat{\sigma}_{k+1|k}^2(2)\end{bmatrix}\end{aligned} \quad (8\,a)$$

但し,

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{k+1|k}^2(2)\triangleq\ &\hat{\sigma}_{k|k}^2(1)|\hat{x}_{k|k}(2)|^2+\hat{\sigma}_{k|k}^2(2)|\hat{x}_{k|k}(1)|^2\\ &+\gamma_{k|k}\hat{x}_{k|k}(1)^*\hat{x}_{k|k}(2)\\ &+\gamma_{k|k}^*\hat{x}_{k|k}(1)\hat{x}_{k|k}(2)^*\end{aligned} \quad (8\,b)$$

このとき,

$$\hat{\sigma}_{k+1|k}^2(1)\,\hat{\sigma}_{k+1|k}^2(2)-|\gamma_{k+1|k}|^2\geqq 0$$

$$\hat{\sigma}_{k+1|k}^2(i)\geqq 0,\quad i=1,2 \quad (8\,c)$$

が成り立つので(文献(5)参照)，初期値 $\hat{\Sigma}_{1|0}$ を非負定値のエレミート行列とすれば，任意の $k \geqq 1$ に対して $\hat{\Sigma}_{k+1|k}$ は常に非負定値のエルミート行列となる．すなわち，非負定性は $k \geqq 1$ に対して保存されることがわかる．

さて，準備が整ったところで，$\hat{\Sigma}_{k+1|k}$ の $(1,1)$ 成分 $\hat{\sigma}^2_{k+1|k}(1)$ に着目すれば次の関係式が得られる．

$$\hat{\sigma}^2_{k+1|k}(1)-\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(1) = -\eta_k^2\left|\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(1)\hat{x}_{k|k-1}(2)+\gamma^*_{k|k-1}\hat{x}_{k|k-1}(1)\right|^2 \tag{9 a}$$

上式の左辺に注目すれば，$\eta_k^2>0$ より $(\because \sigma_v^2>0)$，$\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(1)\hat{x}_{k|k-1}(2)+\gamma^*_{k|k-1}\hat{x}_{k|k-1}(1)=0$ となるまで $\hat{\sigma}^2_{k+1|k}(1)$ は単調減少することがわかる．ここで，式(8 c)から $\hat{\sigma}^2_{k+1|k}(1)\geqq 0$ となることに注意すれば，$\hat{\sigma}^2_{k+1|k}(1)$ は 0 以上のある点に必ず収束することが分かる．もし，$\hat{\sigma}^2_{k+1|k}(1)>0$ に収束したとすれば，次式の右辺も 0 とならなければならない．

$$\hat{\sigma}^2_{k+2|k+1}(1)-\hat{\sigma}^2_{k+1|k}(1) = -\eta_{k+1}^2\left|\hat{\sigma}^2_{k+1|k}(1)\hat{x}_{k+1|k}(2)+\gamma^*_{k+1|k}\hat{x}_{k+1|k}(1)\right|^2 \tag{9 b}$$

このとき，$\hat{\sigma}^2_{k+1|k}(1)=\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(1)$ から次の関係式が得られるが，

$$2\hat{x}_{k|k-1}(1)\hat{x}_{k|k}(2)=\hat{x}_{k|k}(1)\hat{x}_{k|k-1}(2) \tag{10}$$

これは一般には成り立たない（付録参照）．すなわち，式(9b)の右辺は0とならず再び減少することになる．

一方，$\hat{\sigma}^2_{k+1|k}(1)=0$ に収束すれば，式(8 c)の関係式 $\hat{\sigma}^2_{k+1|k}(1)\hat{\sigma}^2_{k+1|k}(2)-|\gamma_{k+1|k}|^2\geqq 0$ から，$\gamma_{k+1|k}=0$ となり，式(9 b)の右辺は 0 となるので，この点(0)は平衡点となる．

以上より，$k\to\infty$ のとき $\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(1)\to 0$，$\gamma_{k|k-1}\to 0$，$\hat{\sigma}^2_{k|k}(1)\to 0$，$\gamma_{k|k}\to 0$ となることから，十分大きな k に対して式(8 a)は次のようになる．

$$\hat{\Sigma}_{k+1|k}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^2_{k|k}(2)|\hat{x}_{k|k}(1)|^2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

ここで，$\hat{\Sigma}_{k+1|k}(2,2)=\hat{\sigma}^2_{k+1|k}(2)=0$ であれば，$\hat{\Sigma}_{k+1|k}=0$ なるので，$\hat{\sigma}^2_{k+1|k}(2)\neq 0$ とし，その振舞いを調べると式(11)から次式が得られる．

$$\hat{\sigma}^2_{k+1|k}(2)=\left\{\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(2) - \frac{\hat{\sigma}^4_{k|k-1}(2)|\hat{x}_{k|k-1}(1)|^2}{\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(2)|\hat{x}_{k|k-1}(1)|^2+\sigma_v^2}\right\}|\hat{x}_{k|k-1}(1)|^2$$

$$=\frac{\sigma_v^2|\hat{x}_{k|k-1}(1)|^2}{\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(2)|\hat{x}_{k|k-1}(1)|^2+\sigma_v^2}\cdot\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(2) \tag{12 a}$$

ここで，式(11)より

$$\eta_k{}^2=\frac{1}{\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(2)|\hat{x}_{k|k-1}(1)|^2+\sigma_v^2}$$

$$\hat{x}_{k+1|k}(1)=\hat{x}_{k|k}(1)=\hat{x}_{k|k-1}(1) \quad (\because K_k(1)=0) \tag{12 b}$$

となることに注意されたい．

このとき，$0<|\hat{x}_{k|k-1}(1)|\leqq 1$ であれば，$\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(2)>0$ である限り，その遷移係数は

$$\frac{\sigma_v^2|\hat{x}_{k|k-1}(1)|^2}{\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(2)|\hat{x}_{k|k-1}(1)|^2+\sigma_v^2}<1 \tag{13}$$

となり，$k\to\infty$ のとき，$\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(2)\to 0$ となることがわかる．

ここで，$|\hat{x}_{k|k-1}(1)|>1$ であっても，$\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(2)$ は

$$\frac{\sigma_v^2|\hat{x}_{k|k-1}(1)|^2}{\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(2)|\hat{x}_{k|k-1}(1)|^2+\sigma_v^2}=1 \tag{14 a}$$

を満たす

$$\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(2)=\frac{\sigma_v^2\{|\hat{x}_{k|k-1}(1)|^2-1\}}{|\hat{x}_{k|k-1}(1)|^2}>0 \tag{14 b}$$

に収束することに注意されたい．

よって，文献(3)のように推定直後に $\hat{x}_{k|k}(1)=\hat{x}_{k|k}(1)/|\hat{x}_{k|k}(1)|$ の操作を導入した本フィルタでは $k\to\infty$ のとき常に $\hat{\Sigma}_{k+1|k}=0$ となることがわかる．すなわち，$\hat{\Sigma}_{k+1|k}$ は 0 に漸近安定することになる(具体的な誤差の共分散行列の遷移の様子は文献(5)を参照されたい)．

このとき，フィルタゲイン $K_k=0$ となり，フィルタ方程式は次の状態で安定する．

$$\hat{x}_{k+1|k}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{x}_{k|k}(1) \end{bmatrix}\hat{x}_{k|k-1} \tag{15}$$

ここで，$|\hat{x}_{k|k}(1)|\leqq 1$ であれば次式を得る．

$$\|\hat{x}_{k+1|k}\|=\|\hat{x}_{k|k-1}\| \tag{16}$$

但し，$\|\cdot\|$ はノルムを表す．

以上より，先に提案した非線形フィルタ[3]は，誤差の共分散行列の初期値 $\hat{\Sigma}_{1|0}(\hat{P}_{1|0})$ が非負定値エルミート行列であり，かつ $0<|\hat{x}_{k|k}(1)|\leqq 1$ とすれば初期値 $\hat{x}_{1|0}$ や $\hat{\Sigma}_{1|0}(\hat{P}_{1|0})$ に依存せず常に安定である（発散しない）ことが照明された．但し，収束したからといって必ずしも推定が成功した $(\hat{x}_{k|k}\to x_k)$ とは限らないことに注意されたい（文献(5)参照）．

3. む す び

先に提案した白色雑音下の複素正弦波信号とその周波数を同時に推定する拡張複素カルマンフィルタに基

づく非線形フィルタの安定性を原信号の成分数が1の場合に関して証明した．これにより，このフィルタはある条件を満たせば非線形にもかかわらず状態ベクトルや誤差の共分散行列の初期値に依存せず常に安定であることを明らかにした．

今後は，成分数が増加した場合についても考察していきたいが，本解析法の単純な拡張は困難であると予想されるため，Lyapunov の方法などより一般的な解析法による安定性の証明に関しても考察していきたい．

謝辞 日ごろから御指導頂いている東京工業大学制御システム工学科中野道雄教授，美多勉教授に深謝する．また，本学4年生中沢麗君に感謝する．

文献

(1) Kay S. M. and Marple S. L.: Spectrum Analysis-A Modern Perspective, Proceeding of the IEEE, **69**, 11, pp. 1380-1419 (1981).

(2) Kumaresan R. and Tufts D. W.: Estimating the Parameters of Exponentially Damped Sinusoids and Pole-zero Modeling in Noise, IEEE Trans., **ASSP-30**, 6, pp. 833-840 (1982).

(3) 西山 清，佐藤 治："白色雑音下の正弦波信号とそのパラメータを推定する拡張複素カルマンフィルタに関する一考察"，信学論(A)，**J77-A**, 7, pp. 1023-1027 (1994-07).

(4) 西山 清："パソコンで解くカルマンフィルタ"，丸善 (1993).

(5) 西山 清："白色雑音下の正弦波信号とその周波数を推定する拡張複素カルマンフィルタの安定性と信頼性"，計測自動制御学会第17回DSTシンポジウム，pp. 355-358 (1994).

付録

$2\hat{x}_{k|k-1}(1)\hat{x}_{k|k}(2)=\hat{x}_{k|k}(1)\hat{x}_{k|k-1}(2)$ の関係式の導出とその意味

時刻 t_k において $\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(1)$ が収束したと仮定すれば，すなわち

$$\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(2)\neq 0,\ \text{かつ}$$

$$\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(1)\hat{x}_{k|k-1}(2)+\gamma^*_{k|k-1}\hat{x}_{k|k-1}(1)=0 \qquad (\mathrm{A}\cdot 1)$$

とすれば，次の時刻においても次式が成り立たなければならない．

$$\begin{aligned}0&=\hat{\sigma}^2_{k+1|k}(1)\hat{x}_{k+1|k}(2)+\gamma^*_{k+1|k}\hat{x}_{k+1|k}(1)\\&=\hat{\sigma}^2_{k+1|k}(1)x_{k+1|k}(2)\\&\quad+\{\hat{\sigma}^2_{k|k}(1)\hat{x}_{k|k}(2)+\gamma^*_{k|k}\hat{x}_{k|k}(1)\}\hat{x}_{k+1|k}(1)\\&=\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(1)\{\hat{x}_{k|k}(1)\hat{x}_{k|k}(2)+\hat{x}_{k|k}(1)\hat{x}_{k|k}(2)\}\\&\quad+\gamma^*_{k|k}\hat{x}_{k|k}(1)^2\\&\quad(\because \hat{\sigma}^2_{k+1|k}(1)=\hat{\sigma}^2_{k|k}(1)=\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(1),\ \gamma_{k|k}=\gamma_{k|k-1},\\&\quad\quad \hat{x}_{k+1|k}(1)=\hat{x}_{k|k}(1),\ \hat{x}_{k+1|k}(2)=\hat{x}_{k|k}(1)\hat{x}_{k|k}(2))\\&=\hat{x}_{k|k}(1)\{2\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(1)\hat{x}_{k|k}(2)+\gamma^*_{k|k-1}\hat{x}_{k|k}(1)\}\end{aligned} \qquad (\mathrm{A}\cdot 2)$$

これより，$\hat{x}_{k|k}(1)\neq 0$ に注意すれば，

$$2\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(1)\hat{x}_{k|k}(2)+\gamma^*_{k|k-1}\hat{x}_{k|k}(1)=0 \qquad (\mathrm{A}\cdot 3)$$

となる．

この仮定が正しいためには $\hat{\sigma}^2_{k|k-1}(1)>0$ は式(A•1)と式(A•3)を同時に満たさなければならない．これより，次の関係式が得られる．

$$2\hat{x}_{k|k-1}(1)\hat{x}_{k|k}(2)=\hat{x}_{k|k}(1)\hat{x}_{k|k-1}(2) \qquad (\mathrm{A}\cdot 4)$$

もし，本フィルタに $\hat{x}_{k|k}(1)=\hat{x}_{k|k}(1)/|\hat{x}_{k|k}(1)|$ の操作を導入した場合を想定すれば，$|\hat{x}_{k|k-1}(1)|=|\hat{x}_{k|k}(1)|=1$ となり，式(A•4)より次の関係式が成り立つことがわかる．

$$|\hat{x}_{k+1|k}(2)|=0.5|\hat{x}_{k|k-1}(2)|$$
$$(\because \hat{x}_{k+1|k}(2)=\hat{x}_{k|k}(1)\hat{x}_{k|k}(2)) \qquad (\mathrm{A}\cdot 5)$$

すなわち，原信号の推定値は急速 (0.5^k) に減衰することになり，$|\hat{x}_{k|k}(1)|=1$ と矛盾する．よって，式(A•4)は一般には成り立たない．

(平成6年8月29日受付，12月18日再受付)