

# 代数的アプローチによる雑音下における減衰正弦波のオンライン同定

新田 益大\*・鈴木 拓人\*・加藤 清敬\*

## Algebraic Identification of a Noisy Damped Sinusoidal Signal in Real Time

Masuhiko NITTA\*, Takuto SUZUKI\* and Kiyotaka KATO\*

Due to industrialization, there is a demand for rapid and highly accurate frequency estimator. The present paper tackles the identification problem of a damped sinusoidal signal in real time. To this end, an algebraic approach is employed. The authors derive an integral form of the frequency estimation algorithm by using the Laplace transform. In order to treat a noisy observation problem, the paper introduces a postfilter. The validity of the proposed algorithm is confirmed through numerical simulations in MATLAB/Simulink environment.

**Key Words:** frequency estimation, damped sinusoidal signal, exact identification, noisy observation

### 1. はじめに

周波数推定は工学における基本的な技術の1つである。この技術は信号処理の分野をはじめさまざまな分野で研究されており、応用は多岐にわたる。近年、産業の発展に伴い、ますます高速高精度な周波数推定器への要求が高まっている。これらの要求に応えるためには、実環境において、オンラインで正確に周波数を推定する方法が必要となる。

周波数推定の古典的な方法として高速 Fourier 変換が挙げられる。これは多岐に応用されているが、基本的には離散 Fourier 変換のアルゴリズムであるから、周波数分解能をよくするためには多量のデータが必要となる。拡張 Kalman フィルタを用いた方法<sup>1), 2)</sup>は収束が早いのが推定精度の面で問題がある。適応ノッチフィルタを用いた方法<sup>3)~5)</sup>は精度のよい推定結果が得られるが、収束に時間がかかるという問題がある。したがって、これらの方法では高速かつ高精度に周波数を推定するという要求に応えることができない。さらに、これらの方法は純粋な正弦波のみを分析対象とするため、エネルギーの散逸が生じる実環境へ適用すれば推定精度が劣化する。

そこで本論文では、高速高精度な周波数推定を実現するために代数的アプローチに基づく減衰正弦波の周波数推定法を提案する。そして実用を考えた場合、推定手法が雑音を含む信号に対しても正しく機能することが求められるため、この問題を解決する。文献6)では雑音の重畳した2つの正弦波の角周波数を高速高精度に同定する方法が示されているが、信号が減衰する場合については議論がなされていない。そこで

本論文では Sira-Ramírez ら<sup>6)</sup>の方法に基づくものの、雑音の影響下にある減衰正弦波から高速高精度にパラメータを同定するために postfilter<sup>7)</sup>を用いた耐雑音性を有するアルゴリズムを開発し、その有効性を数値シミュレーションによって明らかにする。

### 2. 問題の記述

#### 2.1 単振動と減衰振動

単振子や質量・バネ系のように、ダイナミクスが

$$\omega_n^2 x(t) + \ddot{x}(t) = 0 \quad (1)$$

なる微分方程式（ $\dot{\phantom{x}}$  は  $t$  での微分を表わす）で与えられるシステムの解は、 $A, \phi$  を適当な定数として

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) \quad (2)$$

で与えられるので、固有振動数  $\omega_n$  の単振動となる。一般に、周波数推定とは固有振動数  $\omega_n$  を求めることをいう。

ところでシステムが単振動となれば振動は永久に続くことになるが、実環境ではエネルギーの散逸が起こるので振動振幅は減衰していき、やがては平衡点に落ち着く。これはダイナミクスがよく知られた

$$\omega_n^2 x(t) + 2\zeta\omega_n \dot{x}(t) + \ddot{x}(t) = 0 \quad (3)$$

という2次遅れ系で記述されることを意味しており、この微分方程式の解は、減衰比  $\zeta$  を  $0 < \zeta < 1$  とすれば

$$x(t) = A e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t - \phi) \quad (4)$$

で与えられるので減衰振動となる。

従来の周波数推定法は純粋な正弦波のみを分析対象としているため、それらの手法で減衰正弦波の周波数推定を行なえば  $\zeta = 0$  を暗黙に仮定しているので固有振動数には  $\sqrt{1-\zeta^2}$

\* 東京理科大学工学部第一部 東京都千代田区九段北 1-14-6

\* Faculty of Engineering Division I, Tokyo University of Science, 1-14-6 Kudankita, Chiyoda-ku, Tokyo

(Received March 19, 2009)

(Revised July 29, 2009)

倍の推定誤差が生じてしまう．そこで本論文では (4) 式で与えられる減衰正弦波を観測したときに，固有角周波数  $\omega_n$  と減衰比  $\zeta$  をオンラインで正確に推定することを目的とする．

## 2.2 正弦波のオンライン同定

(2) 式の正弦波のオンライン同定を行なうには，これが (1) 式に従うから，信号  $x(t)$  を観測した後に，微分器を 2 回通過させて  $\ddot{x}(t)$  を生成し， $x(t) \neq 0$  に対して

$$\omega_n^2 = -\frac{\ddot{x}(t)}{x(t)} \quad (5)$$

として推定する方法が考えられる．

しかし因果律によって微分器は実現できないし，仮に後退差分近似によって実現したとしても雑音の影響下では定数  $\omega_n$  を推定し続けるのは困難であろう．

この問題に対して Sira-Ramírez ら<sup>6)</sup>は Laplace 変換を応用することで (1) 式と等価な積分方程式を導出している．

$x(t)$  の Laplace 変換を  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$  で表わすとき，(1) 式の Laplace 変換は

$$\omega_n^2 X(s) + (s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) = 0 \quad (6)$$

となり，上式を  $s$  で 2 階微分すれば

$$\omega_n^2 X''(s) + (2X(s) + 4sX'(s) + s^2 X''(s)) = 0 \quad (7)$$

が得られる ( $'$  は  $s$  での微分を表わす)．これに  $s^{-2}$  を掛けて整理すると

$$\omega_n^2 = -\frac{2X(s)/s^2 + 4X'(s)/s + X''(s)}{X''(s)/s^2} \quad (8)$$

となるから，逆 Laplace 変換すれば

$$\widehat{\omega_n^2} = -\frac{\iint 2x(\tau) d\tau^2 - \int 4\tau x(\tau) d\tau + \tau^2 x(\tau)}{\iint \tau^2 x(\tau) d\tau^2} \quad (9)$$

という時間領域のアルゴリズムが得られる．本論文では，この手法を応用し，減衰正弦波のオンライン同定法を導く．

## 3. 同定法の導出

### 3.1 信号発生器

(4) 式の減衰正弦波は (3) 式の微分方程式の解であるから，(3) 式は減衰正弦波の信号発生器となっている．この式は係数に同定すべきパラメータを含んでいる点特徴である．

すでに述べたように信号の微分を用いてパラメータを同定するのは困難なため，この信号発生器をもとに，積分を用いたアルゴリズムを導くことにする．

### 3.2 積分方程式

(3) 式を Laplace 変換すると

$$\begin{aligned} \omega_n^2 X(s) + 2\zeta\omega_n (sX(s) - x(0)) \\ + (s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

が得られる．上式には信号  $x(t)$  を観測した時点では知ること

のできない初期状態  $x(0)$ ,  $\dot{x}(0)$  が含まれる．そこで，これを消去するために  $s$  で 2 階微分すれば

$$\begin{aligned} \omega_n^2 X''(s) + 2\zeta\omega_n (2X'(s) + sX''(s)) \\ + (2X(s) + 4sX'(s) + s^2 X''(s)) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

を得る．

しかし，この式を逆 Laplace 変換して時間領域に戻しても， $s$  が微分演算子であるため微分を含む方程式が得られる．この問題を回避するために  $s^{-1}$  が積分演算子となることを利用する．上式で  $s$  の最高次数は 2 であるから， $s^2$  で除すと時間領域では微分を含まない方程式となる．すなわち

$$\begin{aligned} \omega_n^2 \frac{1}{s^2} X''(s) + 2\zeta\omega_n \left( \frac{2}{s^2} X'(s) + \frac{1}{s} X''(s) \right) \\ + \left( \frac{2}{s^2} X(s) + \frac{4}{s} X'(s) + X''(s) \right) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

となり，この逆 Laplace 変換は微分を一切含まない．そこで

$$\begin{cases} G_1(s) = \frac{1}{s^2} X''(s) \\ G_2(s) = \frac{2}{s^2} X'(s) + \frac{1}{s} X''(s) \\ G_3(s) = \frac{2}{s^2} X(s) + \frac{4}{s} X'(s) + X''(s) \end{cases} \quad (13)$$

とおけば (12) 式はつぎのように書くことができる．

$$\omega_n^2 G_1(s) + 2\zeta\omega_n G_2(s) + G_3(s) = 0 \quad (14)$$

よって上式を逆 Laplace 変換すれば

$$\omega_n^2 g_1(t) + 2\zeta\omega_n g_2(t) + g_3(t) = 0 \quad (15)$$

という時間領域の関係を得る．ここで  $g_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[G_i(s)]$  は

$$\begin{cases} g_1(t) = \iint \tau^2 x(\tau) d\tau^2 \\ g_2(t) = \iint -2\tau x(\tau) d\tau^2 + \int \tau^2 x(\tau) d\tau \\ g_3(t) = \iint 2x(\tau) d\tau^2 + \int -4\tau x(\tau) d\tau + t^2 x(t) \end{cases} \quad (16)$$

であるから (15) 式は微分を一切含まないことがわかる．以後， $g_i(t)$  を媒介信号と呼ぶことにする．

### 3.3 パラメータ同定

これまでの開発によって (3) 式の微分方程式と等価な関係として (15) 式の積分方程式を導出した．しかし (15) 式は 1 つの方程式に対して 2 つの未知数  $\omega_n$ ,  $\zeta$  を含むため，このままでは一意に決定することができない．よって (15) 式とは独立なもう 1 つの方程式が必要となる．

いま信号  $x(t)$  が (4) 式の減衰正弦波であれば (14) 式および (15) 式は恒等的に成立する．したがって (15) 式に任意の時間関数  $f(t)$  を掛けても等式は成り立ち

$$\omega_n^2 f(t)g_1(t) + 2\zeta\omega_n f(t)g_2(t) + f(t)g_3(t) = 0 \quad (17)$$

となる．これを新たな方程式とみなして，連立させれば未知係数  $\omega_n^2$ ,  $2\zeta\omega_n$  を同定することができる．ところが本論文で

はオンライン同定法を導くため、これではある時刻  $t = T$  において、上式は (15) 式の定数  $f(T)$  倍となるから独立な方程式とはならない。

そこで (14) 式に着目する。同式は恒等式であるため任意の関数  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  を掛けても成立する。すなわち

$$\omega_n^2 F(s) G_1(s) + 2\zeta\omega_n F(s) G_2(s) + F(s) G_3(s) = 0 \quad (18)$$

である。 $s$  領域での積は時間領域では畳み込み積分であるから、上式の逆 Laplace 変換を計算することによって

$$\omega_n^2 \tilde{g}_1(t) + 2\zeta\omega_n \tilde{g}_2(t) + \tilde{g}_3(t) = 0 \quad (19)$$

を得る。ここで

$$\tilde{g}_i(t) = (f * g_i)(t) = \int_0^t f(\tau) g_i(t - \tau) d\tau \quad (20)$$

である。したがって  $f(t)$  が Dirac のデルタ関数でなければ (19) 式は任意の時刻において (15) 式とは独立な方程式となる。以上のことから

$$\begin{bmatrix} g_1(t) & g_2(t) \\ \tilde{g}_1(t) & \tilde{g}_2(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_n^2 \\ 2\zeta\omega_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_3(t) \\ -\tilde{g}_3(t) \end{pmatrix} \quad (21)$$

なる連立方程式が得られ、これを解くことでつぎのオンライン同定アルゴリズムを得る。

$$\begin{cases} \omega_n^2 = \frac{g_3(t)\tilde{g}_2(t) - g_2(t)\tilde{g}_3(t)}{g_2(t)\tilde{g}_1(t) - g_1(t)\tilde{g}_2(t)} \\ 2\zeta\omega_n = \frac{g_1(t)\tilde{g}_3(t) - g_3(t)\tilde{g}_1(t)}{g_2(t)\tilde{g}_1(t) - g_1(t)\tilde{g}_2(t)} \end{cases} \quad (22)$$

よって本来推定すべき固有角周波数  $\omega_n$  および減衰比  $\zeta$  は、同定した値を用いて

$$\hat{\omega}_n = \sqrt{\omega_n^2}, \quad \hat{\zeta} = \frac{(2\zeta\omega_n)}{2\sqrt{\omega_n^2}} \quad (23)$$

として求めることができる。

#### 4. 数値例 I

提案手法の有効性を確認するために MATLAB/Simulink 上で時間刻みを 0.001s として数値シミュレーションを行なった。同定対象としては (4) 式で  $A = 1$ ,  $\zeta = 1/2$ ,  $\omega_n = 3$ ,  $\phi = 4$  とした Fig. 1 に示す減衰正弦波  $x(t)$  を用いた。

パラメータ同定には (16) 式および (20) 式が必要となる。

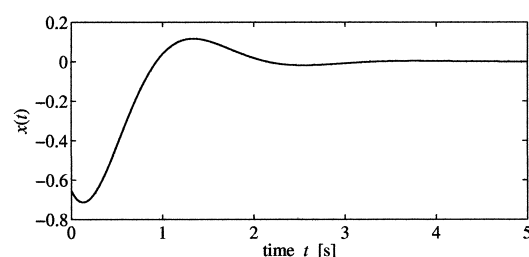


Fig. 1 Assumed damped sinusoidal signal

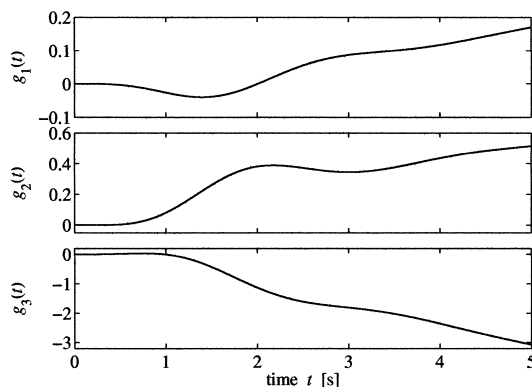


Fig. 2 Intermediate signals  $g_i(t)$

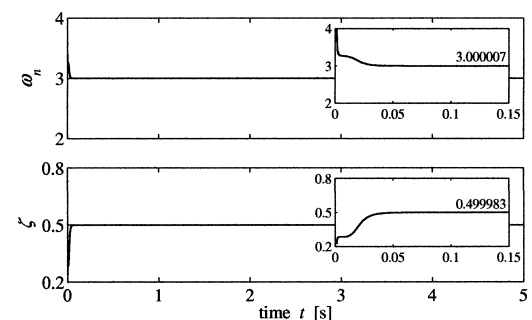


Fig. 3 Identification results

ここでは (20) 式の  $f(t)$  として  $f(t) = 1$  を採用する。したがって  $\tilde{g}_i(t)$  は  $g_i(t)$  を単純に積分すればよいので、同定アルゴリズムはつぎのようになる。

$$\begin{cases} \omega_n^2 = \frac{g_3(t) \int_0^t g_2(\tau) d\tau - g_2(t) \int_0^t g_3(\tau) d\tau}{g_2(t) \int_0^t g_1(\tau) d\tau - g_1(t) \int_0^t g_2(\tau) d\tau} \\ 2\zeta\omega_n = \frac{g_1(t) \int_0^t g_3(\tau) d\tau - g_3(t) \int_0^t g_1(\tau) d\tau}{g_2(t) \int_0^t g_1(\tau) d\tau - g_1(t) \int_0^t g_2(\tau) d\tau} \end{cases} \quad (24)$$

Fig. 2 に媒介信号  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$ ,  $g_3(t)$  の時間変化を示す。減衰正弦波の入力を受けて、時々刻々と値が変化していることが確認できる。この信号を用いて (24) 式を計算し、(23) 式によって同定したパラメータ  $\omega_n$ ,  $\zeta$  の結果を Fig. 3 に示す。同定に用いる媒介信号は絶えず変化しているものの、パラメータ  $\omega_n$ ,  $\zeta$  は同定開始後から、真値を推定していることが確認できる。Fig. 3 には  $t = 0$  付近を拡大した図を併せて掲載しているが、双方の推定値の相対誤差が 0.001 以下になるのは  $t = 0.074$  であるから、高速高精度にオンラインで同定できていることがわかる。グラフ上に記載した値は 0.15s 経過した時点での推定値である。なお 5s 経過時の絶対誤差は双方とも  $10^{-10}$  以下であった。

比較のために高速 Fourier 変換によって減衰正弦波  $x(t)$  から周波数を推定した結果を Fig. 4 に示す。横軸が角周波数を

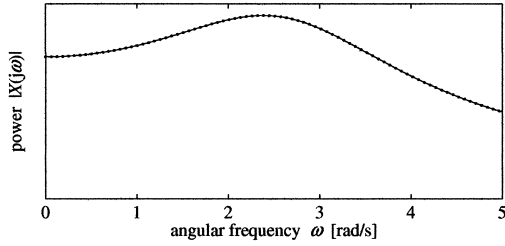


Fig. 4 Comparison with the FFT

表わし、縦軸がパワーを表わしている。図は周波数分解能を上げるために減衰正弦波をサンプリング周期 0.001s で 100s まで観測したデータをもとに周波数解析を行なった結果である。図より減衰の影響を受けて真値の 3rad/s にピーク（線スペクトル）をもたないことがわかる。このことより提案した減衰正弦波の同定法の有効性が明らかとなった。

### 5. 雑音の影響を考慮した同定法の導出

実環境での利用を想定すると、信号には雑音が重畳するため、この影響を考慮した同定法が必要となる。本手法は (14) 式の恒等式に基づくため、 $X(s)$  が減衰正弦波でなければこの式を満たさず、雑音の影響下では正しく同定することができない。この問題への対策を以下に説明する。

#### 5.1 前処理による雑音除去

減衰正弦波  $x(t)$  に観測雑音  $e(t)$  が重畳した

$$y(t) = x(t) + e(t) \quad (25)$$

なる信号を観測したとする。  $E(s) = \mathcal{L}[e(t)]$  とするとき、  $P(s)E(s) = 0$  となるようなフィルタ  $P(s)$  があれば、観測信号  $y(t)$  をこれで前処理することで雑音のない信号  $P(s)X(s)$  を得ることができる。

このフィルタ通過後の信号を提案法によって処理した場合を考察すると、正しく同定されるには (14) 式、すなわち (12) 式が  $X(s)$  を  $P(s)X(s)$  で置き換えたときにも成立しなければならない。実際に代入して計算すると、恒等式の成立は  $P(s)$  が次式を満足する場合に限られることがわかる。

$$\left( \frac{\omega_n^2}{s^2} + \frac{2\zeta\omega_n}{s} + 1 \right) (P''(s)X(s) + 2P'(s)X'(s)) + \left( \frac{2 \cdot 2\zeta\omega_n}{s^2} + \frac{4}{s} \right) P'(s)X(s) = 0 \quad (26)$$

このような  $P(s)$  は定数に限られるが、そのときは雑音を除くフィルタとして機能しない。したがって本問題に対して前処理を適用できないことがわかった。

#### 5.2 後処理による雑音除去

観測信号  $y(t)$  を前処理しても雑音の問題は解決しないので、ここでは、それから得られる媒介信号  $g_i(t)$  に適切な操作（これを後処理という）を加えることで解決を図る。以降、とくに  $g_1(t)$  に着目して議論を進めることにする。

雑音が重畳した信号  $y(t)$  を分析すると、 $g_1(t)$  は

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \int_0^t \int_0^\sigma \tau^2 y(\tau) d\tau d\sigma \\ &= \int_0^t \int_0^\sigma \tau^2 x(\tau) d\tau d\sigma + \int_0^t \int_0^\sigma \tau^2 e(\tau) d\tau d\sigma \end{aligned} \quad (27)$$

となる。簡単のために上式を

$$g_1^y(t) = g_1^x(t) + g_1^e(t) \quad (28)$$

と書くことにする。 $g_i^x(t)$  に関しては、これが減衰正弦波  $x(t)$  のみで定まる信号であるから恒等式

$$\omega_n^2 g_1^x(t) + 2\zeta\omega_n g_2^x(t) + g_3^x(t) = 0 \quad (29)$$

を満足することを注意しておく。

ところで雑音はさまざまな周波数成分の信号で構成されるから

$$e(t) = \sum_k e_k \cos(\beta_k t - \psi_k) \quad (30)$$

として表わすことができる。ここで  $e_k, \beta_k, \psi_k$  は適当な定数である。すると次式を得る。

$$\begin{aligned} g_1^e(t) &= \sum_k e_k \left( \frac{6}{\beta_k^4} (\cos(\beta_k t - \psi_k) - \cos \psi_k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2t}{\beta_k^3} (2 \sin(\beta_k t - \psi_k) + \sin \psi_k) - \frac{t^2}{\beta_k^2} \cos(\beta_k t - \psi_k) \right) \end{aligned} \quad (31)$$

一般に観測雑音は高周波雑音となることが多いから、以後

$$\beta_k \gg \omega_n \quad (32)$$

を仮定する。

このとき (31) 式を  $t^2$  で除し、さらに  $1/\beta_k^4, 1/\beta_k^3$  の項を微小量として無視すればつぎの近似式が得られる。

$$\frac{1}{t^2} g_1^e(t) \approx - \sum_k \frac{e_k}{\beta_k^2} \cos(\beta_k t - \psi_k) \quad (33)$$

これより、高周波雑音を除去するには、 $t^{-2} g_1^e(t)$  に適切な低域通過フィルタ  $Q(s)$  を適用すればよいことがわかった。

#### 5.3 雑音の影響下での同定法

雑音の影響下でも正しく同定が行なわれるには、時間領域で、(15) 式が  $y(t)$  に対して成立しなければならない。

(29) 式は恒等式だから  $g_i^x(t)$  を  $t^2$  で除した  $t^{-2} g_i^x(t)$  についても成立する。そこで  $y(t)$  を積分して得られた媒介信号  $g_i^y(t)$  を  $t^2$  で除し、 $g_i^y(t) = g_i^x(t) + g_i^e(t)$  の関係が成り立つことを利用すると

$$\begin{aligned} \omega_n^2 t^{-2} g_1^y(t) + 2\zeta\omega_n t^{-2} g_2^y(t) + t^{-2} g_3^y(t) \\ = \omega_n^2 t^{-2} g_1^x(t) + 2\zeta\omega_n t^{-2} g_2^x(t) + t^{-2} g_3^x(t) \end{aligned} \quad (34)$$

なる関係が得られる。雑音の影響が残り、上式は非 0 となるから、このままでは正しく同定できない。

いま  $t^{-2} g_i^e(t)$  は角周波数  $\beta_k \gg \omega_n$  なる正弦波の重ね合わせであるから遮断周波数  $\beta < \min \beta_k$  なる低域通過フィルタ

$Q(s) = \mathcal{L}[q(t)]$ があれば、それとの畳み込みによって雑音成分を除去することができる。すなわち

$$(q * t^{-2} g_i^e)(t) = 0 \quad (35)$$

が成立するのである。このことから、 $g_i^y(t)$ を $t^2$ で除した後、フィルタ $Q(s)$ を通過させると(34)式は0となり、雑音が重畳する場合でもパラメータを正しく同定することができる。

## 6. 数値例 II

### 6.1 雑音下でのパラメータ同定

雑音への対策の有効性を確認するために数値シミュレーションを行なった。同定対象の減衰正弦波 $x(t)$ はFig.1と同じものであり、同定すべきパラメータは $\omega_n = 3, \zeta = 1/2$ である。

この信号 $x(t)$ に付加する雑音 $e(t)$ としては、分散 $0.01^2$ の正規性白色雑音を遮断周波数 $100\text{rad/s}$ 、低周波域の減衰 $-20\text{dB/dec}$ とした1次の高域通過フィルタに通過させたものを用いた。分析対象 $y(t)$ の波形をFig.5に示す。 $x(t)$ の減衰によって $e(t)$ が支配的となったときの振る舞いを観察するために終了時刻は倍の $10\text{s}$ までとした。

高周波雑音を除去するための低域通過フィルタ $Q(s)$ としては、遮断周波数 $10\text{rad/s}$ 、高周波域の減衰 $-20\text{dB/dec}$ とした1次の低域通過フィルタを4段並べたものを用い、高周波域を $-80\text{dB/dec}$ で遮断するように設計した。なお理論的には媒介信号 $g_i^y(t)$ を $t^2$ で除した信号を $Q(s)$ に通過させるが、 $t=0$ でゼロ割りが生じるので、シミュレーションでは $t^2 + 0.001$ で除している。

シミュレーション結果をFig.6に示す。図は雑音が同定精度に与える影響を評価するために真値付近を拡大したものを掲載している。雑音除去のための低域通過フィルタを4段通すために収束には多少の時間を要するが、このような雑音下でも $2\text{s}$ ほどで減衰正弦波 $x(t)$ のパラメータを良好に同定していることが確認できる。

ただし $4\text{s}$ を経過したあたりからは、いったん収束した推定が徐々に発散していくような傾向が見られる。これはFig.1を見てわかるように、減衰正弦波 $x(t)$ は $4\text{s}$ ほどで振幅が0に収束するため、この時点以降は雑音 $e(t)$ が主たる分析対象となるからである。

このように減衰正弦波の場合、信号の振幅がやがて0に収束するので、ある時点以降の推定は意味をなさない。後処理

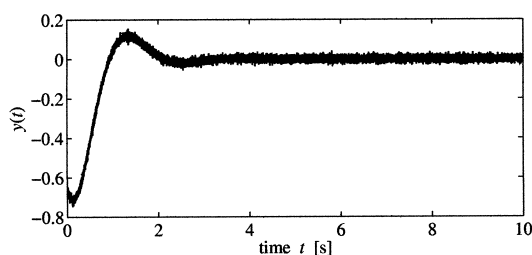


Fig. 5 Assumed noisy damped sinusoidal signal

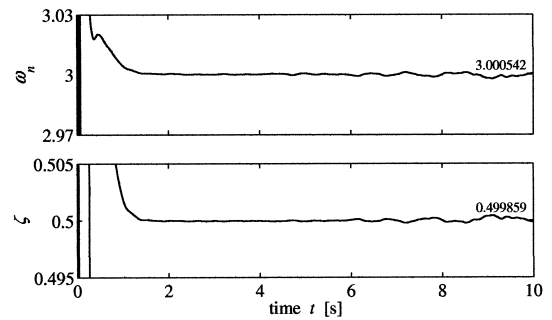


Fig. 6 Identification results in noisy case

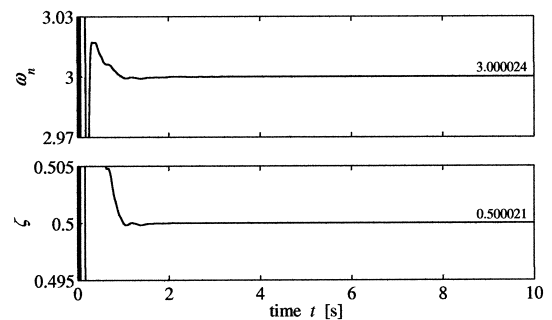


Fig. 7 Identification results in noisy case using  $e^{t^2}$

Table 1 Mean value and standard deviation

elapsed time [s]	$\omega_n$ [rad/s]	$\zeta$ [—]
1	$2.998578 \pm 0.002687$	$0.499456 \pm 0.000871$
4	$2.999941 \pm 0.000123$	$0.500002 \pm 0.000043$
10	$3.000107 \pm 0.000246$	$0.500014 \pm 0.000049$

は、原理的には、媒介信号 $g_i(t)$ に $t^{-2}$ 以上の速さで0に収束する関数を掛けて低域通過フィルタ $Q(s)$ で処理すればよいので、ad hocな対策としては $t^2$ ではなく $e^{\alpha t^2}$ で除する方法が考えられる( $\alpha$ は適当な正の定数である)。

先と同一条件で $t^2$ ではなく $e^{t^2}$ で除して同定した場合の結果をFig.7に示す。この場合は雑音が支配的になっても推定は発散せず、一定値に収束していることが確認できる。乱数の種を変えた試行を10回行ない、1, 4, 10sにおける推定値の平均と標準偏差をまとめたものをTable 1に示す。この表から雑音の影響下においても、大きなばらつきなく減衰正弦波のパラメータが同定できていることが確認できる。

### 6.2 他手法との比較

提案手法の有効性を確認するために、オンライン周波数推定法の1つである拡張Kalmanフィルタを用いた方法<sup>2)</sup>との比較を行なう。ただし、Bittantiら<sup>2)</sup>の方法は減衰正弦波には対応していないので、減衰正弦波ではなく純粋な正弦波に対する周波数推定を行なうことにする。

シミュレーションには(4)式で $A = 1, \zeta = 0, \omega_n = 3, \phi = 0$ とした以下の正弦波を用いた。

$$x(t) = \cos 3t \quad (36)$$

これに加える雑音は分散 $0.001^2$ の正規性白色雑音を高域通過

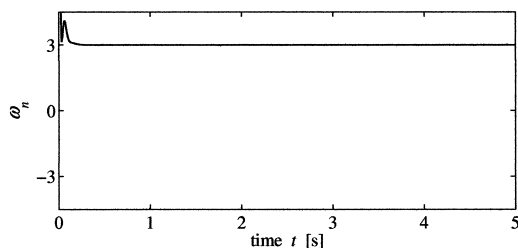


Fig. 8 Identification result (proposed method)

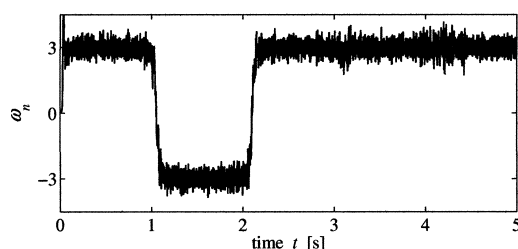


Fig. 9 Identification result (conventional method)

フィルタに通過させたものである。

提案手法による同定結果を Fig. 8 に、従来の Bittanti ら<sup>2)</sup>の方法による同定結果を Fig. 9 に示す。提案手法の場合、雑音の振幅が先の 1/10 となっていることもあり、高速に真値の 3rad/s を推定していることがわかる。これに対して従来法は、同等の速度で推定ができるものの、真値付近で推定値が変動しており収束には至っていない。また途中 -3rad/s という推定も得られており、比較的低雑音な環境であっても高精度に推定できているとはいえない。このことから提案した後処理は雑音に対して有効に機能することがわかった。

## 7. おわりに

本論文では代数的アプローチを用いた減衰正弦波のオンライン同定法について議論した。まず、信号発生器等価な関係を有する積分方程式を導出し、その後、同定問題を連立方程式の解法に帰着させることでオンライン同定アルゴリズムを導いた。実環境への適用を考慮すると観測雑音の影響下でも高速高精度に減衰正弦波のパラメータが同定できなければならない。この問題に対しては前処理による雑音除去ではなく後処理を導入することで解決を図った。これらの手法の有効性を数値シミュレーションで確認した。

今後はアルゴリズムの離散化を行なう予定である。

## 参考文献

- 1) B.F. La Scala and R.R. Bitmead: Design of an Extended Kalman Filter Frequency Tracker, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **44**-3, 739/742 (1996)
- 2) S. Bittanti and S.M. Savaresi: On the Parameterization and Design of an Extended Kalman Filter Frequency Tracker, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**-9, 1718/1724 (2000)
- 3) S. Bittanti, M. Campi and S.M. Savaresi: Unbiased Estimation of a Sinusoid in Colored Noise via Adapted Notch Filters, *Automatica*, **33**-2, 209/215 (1997)
- 4) L. Hsu, R. Ortega and G. Damm: A Globally Convergent Frequency Estimator, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**-4, 698/713 (1999)
- 5) M. Mojiri and A.R. Bakhshai: An Adaptive Notch Filter for Frequency Estimation of a Periodic Signal, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **49**-2, 314/318 (2004)
- 6) H. Sira-Ramírez, J.R. Trapero and V. Feliu-Batlle: Frequency identification in the noisy sum of two sinusoidal signals, *Proc. of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Kyoto, Japan, 1102/1107 (2006)
- 7) T. Suzuki, M. Nitta and K. Kato: Algebraic Identification of Damped Sinusoidal Signal and Its Application to Dynamic Mass Measurement, *Proc. of the 2007 CACS International Automatic Control Conference*, Taichung, Taiwan (2007)

## [著者紹介]

### 新田 益大 (正会員)



2002 年京都工芸繊維大学卒業。2007 年奈良先端科学技術大学院大学博士後期課程を修了し、東京理科大学助教となり現在に至る。独立成分分析、システム同定、雑音除去などの研究に従事。博士(工学)。システム制御情報学会、電子情報通信学会の会員。2007 年計測自動制御学会論文賞受賞。

### 鈴木 拓人



2007 年東京理科大学工学部第一部電気工学科卒業。2009 年同大学大学院工学研究科修士課程修了。同年(株)デンソーに入社し、現在に至る。在学中は信号処理、雑音除去などの研究に従事。

### 加藤 清敬 (正会員)



1978 年早稲田大学理工学部電気工学科卒業。同年三菱電機(株)入社。2000 年東京理科大学助教授、2007 年同大学教授となり現在に至る。移動・飛行ロボット、FA、HMI、バーチャルリアリティに関する研究に従事。博士(工学)。精密工学会、日本ロボット学会、情報処理学会の会員。