

# Sprawozdanie z Listy nr 2

Sara Żyndul  
279686

# 1 Zadanie 1

## 1.1 Opis i Rozwiążanie

Zadanie polega na powtórzeniu eksperymentu z zadania 5 z listy 1 (wykorzystaniu czterech algorytmów sumowania do obliczenia iloczynu skalarnego dwóch wektorów) przy wprowadzeniu niewielkich zmian w wektorze  $x$ . Wektory  $x$ ,  $y$  z poprzedniej listy:

$$x = [2.718281828, -3.141592654, 1.414213562, 0.5772156649, 0.3010299957]$$

$$y = [1486.2497, 878366.9879, -22.37492, 4773714.647, 0.000185049].$$

Zmodyfikowany wektor  $x'$ :

$$x' = [2.718281828, -3.141592654, 1.414213562, 0.5772156649, 0.3010299957]$$

Rozwiązanie znajduje się w pliku `task1.jl`.

## 1.2 Wyniki

| Algorytm | Float32 (oryginalny $x$ ) | Float32 (zmodyfikowany $x'$ ) |
|----------|---------------------------|-------------------------------|
| a        | -0.4999442994594573975    | -0.4999442994594573975        |
| b        | -0.4543457031250000000    | -0.4543457031250000000        |
| c        | -0.5000000000000000000    | -0.5000000000000000000        |
| d        | -0.5000000000000000000    | -0.5000000000000000000        |

| Algorytm | Float64 (oryginalny $x$ )               | Float64 (zmodyfikowany $x'$ )          |
|----------|---|--|
| a        | $1.025188136829667182 \times 10^{-10}$  | $-4.296342739891585369 \times 10^{-3}$ |
| b        | $-1.564330887049436569 \times 10^{-10}$ | $-4.296342998713953421 \times 10^{-3}$ |
| c        | 0.0000000000000000000                   | $-4.296342842280864716 \times 10^{-3}$ |
| d        | 0.0000000000000000000                   | $-4.296342842280864716 \times 10^{-3}$ |

## 1.3 Wnioski

Float32 w tym przykładzie „zatopił” perturbację zaokrąglaniami — wynik nie zmienił się widocznie. Float64 był wystarczająco precyzyjny, by wykryć różnicę i wynik przesunął się o  $4.3 \times 10^{-3}$ .

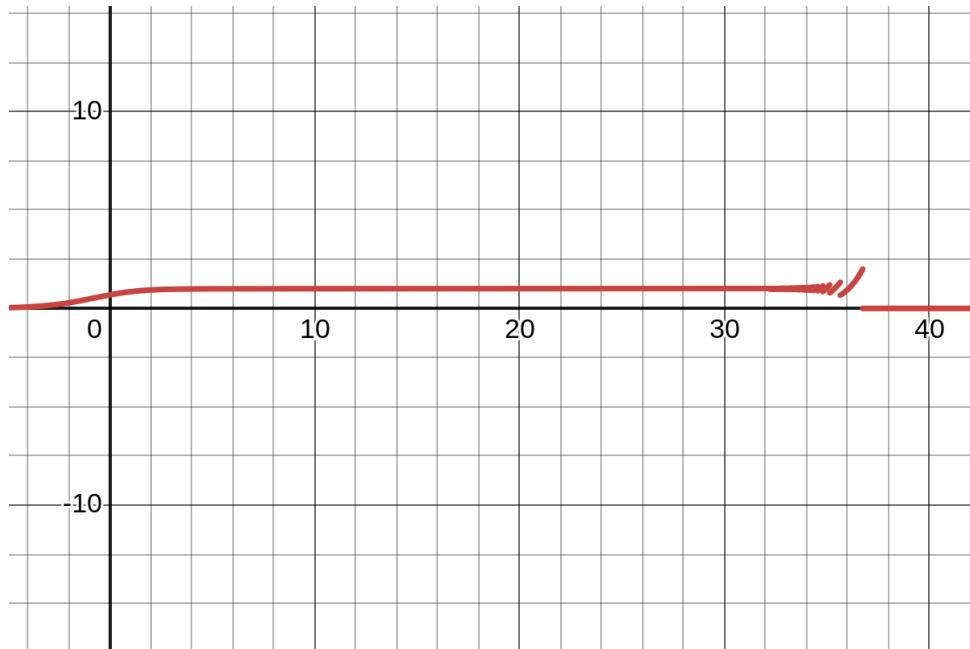
Drobna zmiana danych znacząco zmieniła wynik iloczynu skalarnego  $x' \cdot y$  względem  $x \cdot y$ . Możemy więc wywnioskować, że zadanie obliczenia iloczynu skalarnego dla tych danych jest źle uwarunkowane.

# 2 Zadanie 2

## 2.1 Opis

Zadanie polega na wykorzystaniu co najmniej dwóch programów do wizualizacji do narysowania funkcji  $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$  oraz na obliczeniu granicy funkcji przy  $x \rightarrow \infty$ .

## 2.2 Rozwiązańie



Rysunek 1: Wizualizacja funkcji  $f$  z użyciem kalkulatora graficznego Desmos



Rysunek 2: Wizualizacja funkcji  $f$  z użyciem kalkulatora graficznego Geogebra

Obliczenie granicy funkcji  $f$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{e^{-x}} \quad \text{(forma } 0/0\text{)} \\ &\stackrel{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} \ln(1 + e^{-x})}{\frac{d}{dx} e^{-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-e^{-x}/(1 + e^{-x})}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1 \end{aligned}$$

## 2.3 Wnioski

Obserwacja: na kalkulatorach graficznych funkcja wygląda najpierw jak zbliżająca się do 1, potem pojawiają się oscylacje, a w końcu wykres „spada” do 0. Dla dużych  $x$  wartości  $e^x$  stają się bardzo duże (możliwe przepełnienie), a  $e^{-x}$  — bardzo małe (możliwe podpełnienie). Gdy  $e^{-x}$  podaje do 0,  $\ln(1+e^{-x})$  przyjmuje wartość 0 i mnożenie przez (zawodny)  $e^x$  może dać 0 lub NaN/Inf — stąd skoki i „oscylogramy”. Dodatkowo rzadkie próbkowanie punktów i łączenie ich liniami na wykresie potęguje artefakty (widoczne oscylacje).

## 3 Zadanie 3

### 3.1 Opis

Zadanie polega na rozwiązyaniu układów  $Ax = b$  dla dwóch rodzin macierzy: Hilberta  $H_n$  dla rosnącego  $n$  oraz losowych macierzy  $R_n$  wygenerowanych z zadanym wskaźnikiem uwarunkowania  $c$ . Dla każdej macierzy rozwiązyano układ dwoma metodami:  $\mathbf{A}\backslash\mathbf{b}$  oraz  $\mathbf{inv}(\mathbf{A})*\mathbf{b}$ . Porównano otrzymane wektory z rozwiązaniem dokładnym, licząc względne błędy  $\text{rel}_2$ , oraz sprawdzono  $\text{cond}(A)$  i  $\text{rank}(A)$ .

### 3.2 Wyniki

Tabela 1: Macierze Hilberta

| $n$ | $\text{cond}(A)$       | $\text{rank}(A)$ | $\text{rel}_2(\mathbf{A}\backslash\mathbf{b})$ | $\text{rel}_2(\mathbf{inv}(\mathbf{A})*\mathbf{b})$ |
|-----|------------------------|------------------|--|---|
| 2   | $1.928 \times 10^1$    | 2                | $5.661 \times 10^{-16}$                        | $1.404 \times 10^{-15}$                             |
| 3   | $5.241 \times 10^2$    | 3                | $8.023 \times 10^{-15}$                        | 0   |
| 4   | $1.551 \times 10^4$    | 4                | $4.137 \times 10^{-14}$                        | 0   |
| 5   | $4.766 \times 10^5$    | 5                | $1.683 \times 10^{-12}$                        | $3.354 \times 10^{-12}$                             |
| 6   | $1.495 \times 10^7$    | 6                | $2.619 \times 10^{-10}$                        | $2.016 \times 10^{-10}$                             |
| 7   | $4.754 \times 10^8$    | 7                | $1.261 \times 10^{-8}$                         | $4.713 \times 10^{-9}$                              |
| 8   | $1.526 \times 10^{10}$ | 8                | $6.124 \times 10^{-8}$                         | $3.077 \times 10^{-7}$                              |
| 9   | $4.932 \times 10^{11}$ | 9                | $3.875 \times 10^{-6}$                         | $4.541 \times 10^{-6}$                              |
| 10  | $1.602 \times 10^{13}$ | 10               | $8.670 \times 10^{-5}$                         | $2.501 \times 10^{-4}$                              |
| 11  | $5.223 \times 10^{14}$ | 10               | $1.583 \times 10^{-4}$                         | $7.618 \times 10^{-3}$                              |
| 12  | $1.761 \times 10^{16}$ | 11               | $1.340 \times 10^{-1}$                         | $2.590 \times 10^{-1}$                              |
| 13  | $3.191 \times 10^{18}$ | 11               | $1.104 \times 10^{-1}$                         | 5.331   |
| 14  | $9.276 \times 10^{17}$ | 11               | 1.455  | 8.715   |
| 15  | $3.676 \times 10^{17}$ | 12               | 4.697  | 7.345   |

$n$  — rozmiar macierzy Hilberta  $H_n$ .  $\text{cond}(A)$  — zmierzony wskaźnik uwarunkowania w normie 2.  $\text{rank}(A)$  — rzęd (liczba liniowo niezależnych kolumn); wartości mniejsze niż  $n$  wskazują na utratę rzędu numerycznego.  $\text{rel}_2(\mathbf{A}\backslash\mathbf{b})$  i  $\text{rel}_2(\mathbf{inv}(\mathbf{A})*\mathbf{b})$  — względne błędy w normie 2 dla dwóch metod rozwiązyania (kolejno:  $\mathbf{A}\backslash\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{inv}(\mathbf{A})*\mathbf{b}$ ).

Interpretacja: rosnące  $\text{cond}(A)$  koreluje z narastaniem błędu;  $\mathbf{A}\backslash\mathbf{b}$  zwykle daje mniejsze błędy niż  $\mathbf{inv}(\mathbf{A})*\mathbf{b}$ .

Tabela 2: Macierze losowe

| $n$ | $c$                  | $\text{cond}(A)$       | $\text{rank}(A)$ | $\text{rel}_2(\mathbf{A}\backslash\mathbf{b})$ | $\text{rel}_2(\text{inv}(\mathbf{A})\ast\mathbf{b})$ |
|-----|----------------------|------------------------|------------------|--|--|
| 5   | $1.0 \times 10^0$    | $1.000 \times 10^0$    | 5                | $2.483 \times 10^{-16}$                        | $2.627 \times 10^{-16}$                              |
| 5   | $1.0 \times 10^1$    | $1.000 \times 10^1$    | 5                | $9.930 \times 10^{-17}$                        | $1.404 \times 10^{-16}$                              |
| 5   | $1.0 \times 10^3$    | $1.000 \times 10^3$    | 5                | $2.693 \times 10^{-14}$                        | $2.883 \times 10^{-14}$                              |
| 5   | $1.0 \times 10^7$    | $1.000 \times 10^7$    | 5                | $2.983 \times 10^{-10}$                        | $2.855 \times 10^{-10}$                              |
| 5   | $1.0 \times 10^{12}$ | $1.000 \times 10^{12}$ | 5                | $4.297 \times 10^{-6}$                         | $5.327 \times 10^{-6}$                               |
| 5   | $1.0 \times 10^{16}$ | $1.633 \times 10^{16}$ | 4                | $1.036 \times 10^{-1}$                         | $9.607 \times 10^{-2}$                               |
| 10  | $1.0 \times 10^0$    | $1.000 \times 10^0$    | 10               | $2.107 \times 10^{-16}$                        | $2.979 \times 10^{-16}$                              |
| 10  | $1.0 \times 10^1$    | $1.000 \times 10^1$    | 10               | $2.107 \times 10^{-16}$                        | $2.432 \times 10^{-16}$                              |
| 10  | $1.0 \times 10^3$    | $1.000 \times 10^3$    | 10               | $2.776 \times 10^{-15}$                        | $6.723 \times 10^{-15}$                              |
| 10  | $1.0 \times 10^7$    | $1.000 \times 10^7$    | 10               | $1.723 \times 10^{-10}$                        | $9.155 \times 10^{-11}$                              |
| 10  | $1.0 \times 10^{12}$ | $1.000 \times 10^{12}$ | 10               | $3.408 \times 10^{-6}$                         | $5.117 \times 10^{-6}$                               |
| 10  | $1.0 \times 10^{16}$ | $1.220 \times 10^{16}$ | 9                | $2.678 \times 10^{-1}$                         | $1.065 \times 10^{-1}$                               |
| 20  | $1.0 \times 10^0$    | $1.000 \times 10^0$    | 20               | $5.166 \times 10^{-16}$                        | $3.846 \times 10^{-16}$                              |
| 20  | $1.0 \times 10^1$    | $1.000 \times 10^1$    | 20               | $5.601 \times 10^{-16}$                        | $5.027 \times 10^{-16}$                              |
| 20  | $1.0 \times 10^3$    | $1.000 \times 10^3$    | 20               | $4.817 \times 10^{-15}$                        | $4.037 \times 10^{-15}$                              |
| 20  | $1.0 \times 10^7$    | $1.000 \times 10^7$    | 20               | $2.362 \times 10^{-10}$                        | $2.207 \times 10^{-10}$                              |
| 20  | $1.0 \times 10^{12}$ | $9.999 \times 10^{11}$ | 20               | $3.343 \times 10^{-7}$                         | $5.245 \times 10^{-6}$                               |
| 20  | $1.0 \times 10^{16}$ | $6.226 \times 10^{15}$ | 19               | $4.816 \times 10^{-2}$                         | $5.241 \times 10^{-2}$                               |

$n$  — rozmiar macierzy losowej.  $c$  — zadany współczynnik uwarunkowania użyty przy generowaniu macierzy.  $\text{cond}(A)$  — zmierzony wskaźnik uwarunkowania macierzy (może różnić się od żądanego z powodu ograniczeń precyzji).  $\text{rank}(A)$  — rząd macierzy (sprawdza, czy następuje utrata rzędu numerycznego przy bardzo dużym  $c$ ).  $\text{rel}_2(\mathbf{A}\backslash\mathbf{b})$  i  $\text{rel}_2(\text{inv}(\mathbf{A})\ast\mathbf{b})$  — względne błędy w normie 2 dla dwóch metod rozwiązywania (kolejno:  $\mathbf{A}\backslash\mathbf{b}$ ,  $\text{inv}(\mathbf{A})\ast\mathbf{b}$ ).

Interpretacja: rosnące  $c$  prowadzi do wzrostu  $\text{cond}(A)$  i błędów; przy ekstremalnych  $c$  może wystąpić spadek rzędu i znaczne pogorszenie dokładności.

### 3.3 Wnioski

1. Dla macierzy Hilberta błąd rośnie bardzo szybko wraz ze wzrostem  $n$  — problem staje się silnie źle uwarunkowany (w tabeli już od  $n \approx 10$  widać wyraźny wzrost błędów).
2.  $\mathbf{A}\backslash\mathbf{b}$  daje zwykle mniejsze błędy niż  $\text{inv}(\mathbf{A})\ast\mathbf{b}$  — odwracanie macierzy jest mniej stabilne numerycznie.
3. Wzrost  $\text{cond}(A)$  koreluje z rosnącym błędem; ekstremalnie duże wartości  $\text{cond}$  prowadzą do błędów rzędu jedności lub większych.
4. Spadek rzędu numerycznego ( $\text{rank}(A) < n$ ) wiąże się z gwałtownym pogorszeniem jakości rozwiązania (przykład:  $c$  bardzo duże  $\rightarrow \text{rank}$  spada  $\rightarrow$  duże relacje błędów).
5. W praktyce: zawsze sprawdzać  $\text{cond}(A)$  i  $\text{rank}(A)$ ; używać  $\mathbf{A}\backslash\mathbf{b}$  zamiast  $\text{inv}(\mathbf{A})\ast\mathbf{b}$ ; dla źle uwarunkowanych macierzy rozważyć regularizację lub arytmetykę o większej precyzji.
6. Dla  $\text{cond}(A) \gg 10^{12}$  wyniki mogą nie być wiarygodne bez dodatkowych zabiegów.

## 4 Zadanie 4

### 4.1 Opis i rozwiązanie

Zadanie: obliczyć miejsca zerowe wielomianu Wilkinsoна w postaci naturalnej  $P(x)$  za pomocą funkcji `roots` z pakietu `Polynomials` z Julii. Porównać otrzymane pierwiastki  $z_k$  z pierwiastkami „oczekiwanyimi”  $k = 1, \dots, 20$  przez obliczenie wartości  $|P(z_k)|, |p(z_k)|$  (ewaluacja przez iloczyn  $(x - 1) \cdots (x - 20)$ ) oraz  $|z_k - k|$ . Część (b) powtórzona po maleńkiej perturbacji współczynnika o  $2^{-23}$ .

Rozwiązanie znajduje się w pliku `task4.jl`.

### 4.2 Wyniki

**Opis kolumn:**

- $k$  — wartość oczekiwanej pierwiastka (1..20).
- $z_k / z'_k$  — wartość znalezionego pierwiastka
- $|P(z_k)|$  — wartość modułu wielomianu w postaci naturalnej.
- $|p(z_k)|$  — wartość modułu ewaluacji przez iloczyn  $(x - 1) \cdots (x - 20)$ .
- $|z_k - k|$  — przesunięcie względem oczekiwanej pierwiastka.

## Bez perturbacji

Tabela 3: Wyniki bez perturbacji: pierwiastki są bliskie wartościom całkowitym, ale odchyłki rosną dla większych  $k$ . Wartości  $|P(z_k)|$  i  $|p(z_k)|$  (ewaluacje różnymi metodami) są znaczące — różnice wynikają z kondycji numerycznej ewaluacji.

| $k$ | $z_k$            | $ P(z_k) $             | $ p(z_k) $             | $ z_k - k $             |
|-----|------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|
| 1   | 1.00000000000000 | $2.332 \times 10^4$    | $2.331 \times 10^4$    | $1.916 \times 10^{-13}$ |
| 2   | 2.000000000011   | $6.461 \times 10^4$    | $7.316 \times 10^4$    | $1.143 \times 10^{-11}$ |
| 3   | 2.999999999817   | $1.885 \times 10^4$    | $1.303 \times 10^5$    | $1.832 \times 10^{-10}$ |
| 4   | 3.999999983819   | $2.636 \times 10^6$    | $2.031 \times 10^6$    | $1.618 \times 10^{-8}$  |
| 5   | 5.000000688671   | $2.371 \times 10^7$    | $2.161 \times 10^7$    | $6.887 \times 10^{-7}$  |
| 6   | 5.999988371602   | $1.264 \times 10^8$    | $1.217 \times 10^8$    | $1.163 \times 10^{-5}$  |
| 7   | 7.000112910766   | $5.230 \times 10^8$    | $5.062 \times 10^8$    | $1.129 \times 10^{-4}$  |
| 8   | 7.999279406282   | $1.798 \times 10^9$    | $1.740 \times 10^9$    | $7.206 \times 10^{-4}$  |
| 9   | 9.003273831141   | $5.122 \times 10^9$    | $5.264 \times 10^9$    | $3.274 \times 10^{-3}$  |
| 10  | 9.989265687778   | $1.416 \times 10^{10}$ | $1.415 \times 10^{10}$ | $1.073 \times 10^{-2}$  |
| 11  | 11.027997558570  | $3.586 \times 10^{10}$ | $3.693 \times 10^{10}$ | $2.800 \times 10^{-2}$  |
| 12  | 11.948273958400  | $8.511 \times 10^{10}$ | $8.162 \times 10^{10}$ | $5.173 \times 10^{-2}$  |
| 13  | 13.082031971970  | $2.214 \times 10^{11}$ | $2.044 \times 10^{11}$ | $8.203 \times 10^{-2}$  |
| 14  | 13.906800565193  | $3.812 \times 10^{11}$ | $3.852 \times 10^{11}$ | $9.320 \times 10^{-2}$  |
| 15  | 15.081439299377  | $8.809 \times 10^{11}$ | $9.126 \times 10^{11}$ | $8.144 \times 10^{-2}$  |
| 16  | 15.942404318674  | $1.675 \times 10^{12}$ | $1.675 \times 10^{12}$ | $5.760 \times 10^{-2}$  |
| 17  | 17.026861831476  | $3.307 \times 10^{12}$ | $3.512 \times 10^{12}$ | $2.686 \times 10^{-2}$  |
| 18  | 17.990484623391  | $6.166 \times 10^{12}$ | $6.644 \times 10^{12}$ | $9.515 \times 10^{-3}$  |
| 19  | 19.001981084996  | $1.407 \times 10^{13}$ | $1.275 \times 10^{13}$ | $1.981 \times 10^{-3}$  |
| 20  | 19.999803908064  | $3.285 \times 10^{13}$ | $2.384 \times 10^{13}$ | $1.961 \times 10^{-4}$  |

## Po perturbacji ( $-210 \rightarrow -210 - 2^{-23}$ )

Tabela 4: Po bardzo małej perturbacji współczynnika część pierwiastków przesuwa się znacznie; pojawiają się pary pierwiastków zespolonych sprzężonych (dla wyższych indeksów), a przesunięcia  $|z'_k - k|$  mogą być rzędu jednostek.

| $k$ | $z'_k$                           | $ P(z'_k) $            | $ p(z'_k) $            | $ z'_k - k $            |
|-----|----------------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|
| 1   | 1.00000000000000                 | $2.169 \times 10^3$    | $2.377 \times 10^3$    | $1.954 \times 10^{-14}$ |
| 2   | 1.999999999999                   | $2.995 \times 10^4$    | $9.132 \times 10^3$    | $1.426 \times 10^{-12}$ |
| 3   | 3.000000000105                   | $2.390 \times 10^5$    | $7.476 \times 10^4$    | $1.051 \times 10^{-10}$ |
| 4   | 3.99999995007                    | $9.393 \times 10^5$    | $6.269 \times 10^5$    | $4.993 \times 10^{-9}$  |
| 5   | 5.000000034713                   | $7.449 \times 10^6$    | $1.089 \times 10^6$    | $3.471 \times 10^{-8}$  |
| 6   | 6.000005852511                   | $1.469 \times 10^7$    | $6.123 \times 10^7$    | $5.853 \times 10^{-6}$  |
| 7   | 6.999704466217                   | $5.818 \times 10^7$    | $1.325 \times 10^9$    | $2.955 \times 10^{-4}$  |
| 8   | 8.007226654065                   | $1.395 \times 10^8$    | $1.738 \times 10^{10}$ | $7.227 \times 10^{-3}$  |
| 9   | 8.917396943382                   | $2.460 \times 10^8$    | $1.349 \times 10^{11}$ | $8.260 \times 10^{-2}$  |
| 10  | $10.095290344779 - 0.64327709im$ | $2.291 \times 10^9$    | $1.482 \times 10^{12}$ | $6.503 \times 10^{-1}$  |
| 11  | $10.095290344779 + 0.64327709im$ | $2.291 \times 10^9$    | $1.482 \times 10^{12}$ | $1.110 \times 10^0$     |
| 12  | $11.793588728372 - 1.65225355im$ | $2.078 \times 10^{10}$ | $3.294 \times 10^{13}$ | $1.665 \times 10^0$     |
| 13  | $11.793588728372 + 1.65225355im$ | $2.078 \times 10^{10}$ | $3.294 \times 10^{13}$ | $2.046 \times 10^0$     |
| 14  | $13.992330537348 - 2.51881964im$ | $9.391 \times 10^{10}$ | $9.545 \times 10^{14}$ | $2.519 \times 10^0$     |
| 15  | $13.992330537348 + 2.51881964im$ | $9.391 \times 10^{10}$ | $9.545 \times 10^{14}$ | $2.713 \times 10^0$     |
| 16  | $16.730730080370 - 2.81262730im$ | $9.592 \times 10^{11}$ | $2.742 \times 10^{16}$ | $2.906 \times 10^0$     |
| 17  | $16.730730080370 + 2.81262730im$ | $9.592 \times 10^{11}$ | $2.742 \times 10^{16}$ | $2.825 \times 10^0$     |
| 18  | $19.502438958684 - 1.94033202im$ | $5.050 \times 10^{12}$ | $4.252 \times 10^{17}$ | $2.454 \times 10^0$     |
| 19  | $19.502438958684 + 1.94033202im$ | $5.050 \times 10^{12}$ | $4.252 \times 10^{17}$ | $2.004 \times 10^0$     |
| 20  | $20.846908874105 + 0.00000000im$ | $4.859 \times 10^{12}$ | $1.374 \times 10^{18}$ | $8.469 \times 10^{-1}$  |

### 4.3 Wnioski

1. Wielomian Wilkinsona jest bardzo źle uwarunkowany — małe zmiany współczynników powodują duże przesunięcia pierwiastków.
2. Przed perturbacją pierwiastki były bliskie wartościom całkowitym, ale odchyłki rosły wraz z  $k$ .
3. Po perturbacji: część pierwiastków rozszczepiła się na pary zespolone sprzężone — to typowy efekt niestabilności: realne pierwiastki zamieniają się lokalnie w pary zespolone.
4. Różnice  $|P(z_k)|$  vs  $|p(z_k)|$  pokazują, że ewaluacja w postaci współczynnikowej i iloczynowej ma różną kondycję numeryczną — wartości dużych modułów świadczą o utracie dokładności przy ewaluacji.

## 5 Zadanie 5

### 5.1 Opis

Zadanie: porównać trajektorie rekurencji wzrostu populacji  $p_{n+1} = p_n + rp_n(1 - p_n)$  dla  $p_0 = 0.01$ ,  $r = 3$  w trzech wariantach:

- `Float32` (bez modyfikacji),
- `Float32` z jednorazowym **obcięciem** po 10. iteracji (ucięcie do trzech miejsc po przecinku),
- `Float64`.

Wykonano 40 iteracji i zapisano wartość ( $p_n$ ) dla każdej iteracji; w raporcie przedstawiono otrzymane wyniki i krótkie komentarze.

Rozwiązanie znajduje się w pliku `task5.jl`.

## 5.2 Wyniki

Tabela 5: Kolumny pokazują wartości  $p_n$  w kolejnych iteracjach dla trzech wariantów obliczeń. Wersja z obcięciem została ucięta raz po 10. iteracji i kontynuowano iteracje od tej uciętej wartości.

| $n$ | Float32                         | Float32 z obcięciem             | Float64                         |
|-----|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 1   | $3.970000147820 \times 10^{-2}$ | $3.970000147820 \times 10^{-2}$ | $3.970000000000 \times 10^{-2}$ |
| 2   | $1.540717333555 \times 10^{-1}$ | $1.540717333555 \times 10^{-1}$ | $1.540717300000 \times 10^{-1}$ |
| 3   | $5.450726151466 \times 10^{-1}$ | $5.450726151466 \times 10^{-1}$ | $5.450726260444 \times 10^{-1}$ |
| 4   | $1.288978099823 \times 10^0$    | $1.288978099823 \times 10^0$    | $1.288978001189 \times 10^0$    |
| 5   | $1.715188026428 \times 10^{-1}$ | $1.715188026428 \times 10^{-1}$ | $1.715191421092 \times 10^{-1}$ |
| 6   | $5.978190898895 \times 10^{-1}$ | $5.978190898895 \times 10^{-1}$ | $5.978201201071 \times 10^{-1}$ |
| 7   | $1.319113373756 \times 10^0$    | $1.319113373756 \times 10^0$    | $1.319113792414 \times 10^0$    |
| 8   | $5.627322196960 \times 10^{-2}$ | $5.627322196960 \times 10^{-2}$ | $5.627157764626 \times 10^{-2}$ |
| 9   | $2.155928611755 \times 10^{-1}$ | $2.155928611755 \times 10^{-1}$ | $2.155868392326 \times 10^{-1}$ |
| 10  | $7.229306101799 \times 10^{-1}$ | $7.220000028610 \times 10^{-1}$ | $7.229143011796 \times 10^{-1}$ |
| 11  | $1.323836445808 \times 10^0$    | $1.324147939682 \times 10^0$    | $1.323841944168 \times 10^0$    |
| 12  | $3.771698474884 \times 10^{-2}$ | $3.648841381073 \times 10^{-2}$ | $3.769529725473 \times 10^{-2}$ |
| 13  | $1.466002166271 \times 10^{-1}$ | $1.419594436884 \times 10^{-1}$ | $1.465183827136 \times 10^{-1}$ |
| 14  | $5.219259858131 \times 10^{-1}$ | $5.073803663254 \times 10^{-1}$ | $5.216706214352 \times 10^{-1}$ |
| 15  | $1.270483732224 \times 10^0$    | $1.257216930389 \times 10^0$    | $1.270261773935 \times 10^0$    |
| 16  | $2.395482063293 \times 10^{-1}$ | $2.870845198631 \times 10^{-1}$ | $2.403521727782 \times 10^{-1}$ |
| 17  | $7.860428094864 \times 10^{-1}$ | $9.010854959488 \times 10^{-1}$ | $7.881011902353 \times 10^{-1}$ |
| 18  | $1.290581345558 \times 10^0$    | $1.168476819992 \times 10^0$    | $1.289094302790 \times 10^0$    |
| 19  | $1.655247211456 \times 10^{-1}$ | $5.778930187225 \times 10^{-1}$ | $1.710848467019 \times 10^{-1}$ |
| 20  | $5.799036026001 \times 10^{-1}$ | $1.309691071510 \times 10^0$    | $5.965293124947 \times 10^{-1}$ |
| 21  | $1.310749769211 \times 10^0$    | $9.289216995239 \times 10^{-2}$ | $1.318575587983 \times 10^0$    |
| 22  | $8.880424499512 \times 10^{-2}$ | $3.456818163395 \times 10^{-1}$ | $5.837760825943 \times 10^{-2}$ |
| 23  | $3.315584063530 \times 10^{-1}$ | $1.024239540100 \times 10^0$    | $2.232865975994 \times 10^{-1}$ |
| 24  | $9.964407086372 \times 10^{-1}$ | $9.497582316399 \times 10^{-1}$ | $7.435756763952 \times 10^{-1}$ |
| 25  | $1.007080554962 \times 10^0$    | $1.092910766602 \times 10^0$    | $1.315588346001 \times 10^0$    |
| 26  | $9.856885075569 \times 10^{-1}$ | $7.882812023163 \times 10^{-1}$ | $7.003529560278 \times 10^{-2}$ |
| 27  | $1.028008580208 \times 10^0$    | $1.288963079453 \times 10^0$    | $2.654263545206 \times 10^{-1}$ |
| 28  | $9.416294097900 \times 10^{-1}$ | $1.715748310089 \times 10^{-1}$ | $8.503519690601 \times 10^{-1}$ |
| 29  | $1.106519818306 \times 10^0$    | $5.979855656624 \times 10^{-1}$ | $1.232112462387 \times 10^0$    |
| 30  | $7.529209256172 \times 10^{-1}$ | $1.319182157516 \times 10^0$    | $3.741464896393 \times 10^{-1}$ |
| 31  | $1.311013936996 \times 10^0$    | $5.600392818451 \times 10^{-2}$ | $1.076629171429 \times 10^0$    |
| 32  | $8.778309822083 \times 10^{-2}$ | $2.146063894033 \times 10^{-1}$ | $8.291255674005 \times 10^{-1}$ |
| 33  | $3.280147910118 \times 10^{-1}$ | $7.202578186989 \times 10^{-1}$ | $1.254154650050 \times 10^0$    |
| 34  | $9.892780780792 \times 10^{-1}$ | $1.324717283249 \times 10^0$    | $2.979069414723 \times 10^{-1}$ |
| 35  | $1.021098971367 \times 10^0$    | $3.424143791199 \times 10^{-2}$ | $9.253821285571 \times 10^{-1}$ |
| 36  | $9.564665555954 \times 10^{-1}$ | $1.334483325481 \times 10^{-1}$ | $1.132532262670 \times 10^0$    |
| 37  | $1.081381440163 \times 10^0$    | $4.803679585457 \times 10^{-1}$ | $6.822410727153 \times 10^{-1}$ |
| 38  | $8.173682689667 \times 10^{-1}$ | $1.229211807251 \times 10^0$    | $1.332605646962 \times 10^0$    |
| 39  | $1.265200376511 \times 10^0$    | $3.839622139931 \times 10^{-1}$ | $2.909156902851 \times 10^{-3}$ |
| 40  | $2.586054801941 \times 10^{-1}$ | $1.093567967415 \times 10^0$    | $1.161123802975 \times 10^{-2}$ |

## Tabela wyników (wartości $p_n$ w kolejnych iteracjach)

### 5.3 Wnioski

1. W początkowych iteracjach wartości funkcji w obu arytmetykach są zbieżne.
2. Już niewielka modyfikacja (obcięcie raz po 10. iteracji) prowadzi do **znacznie odmiennych** trajektorii. Już przy 19 iteracji model z obcięciem daje duży błąd względem pozostałych dwóch modeli.
3. Różnice między `Float32` a `Float64` kumulują się — różnice rosną z liczbą iteracji (od iteracji 22 widać znaczne różnice w wartościach funkcji) i zachodzi efekt kumulacji błędów.
4. Model logistyczny przy ( $r = 3$ ) jest czuły na drobne zmiany wartości i precyzję arytmetyki — niewielkie perturbacje (obcięcie lub niższa precyzja) dają duże rozbieżności końcowe.

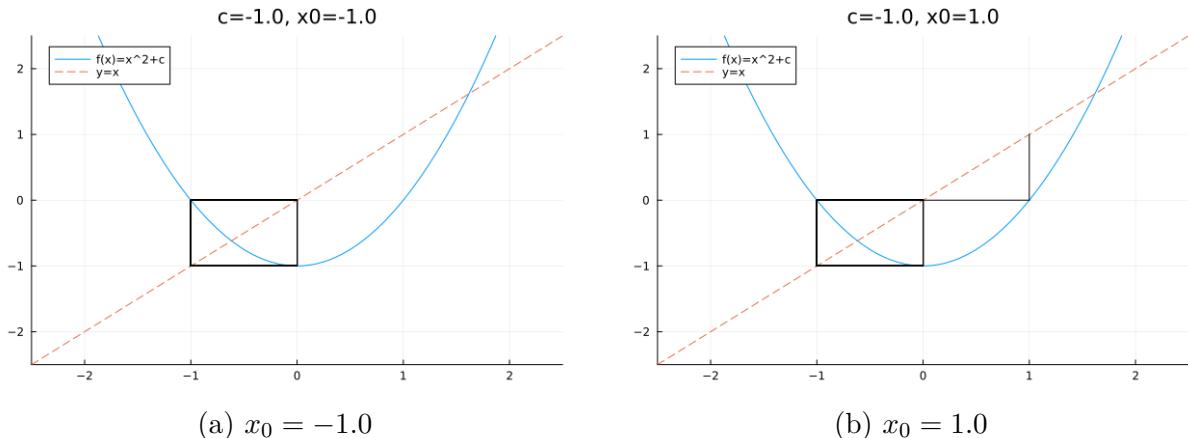
## 6 Zadanie 6

### 6.1 Opis i rozwiązywanie

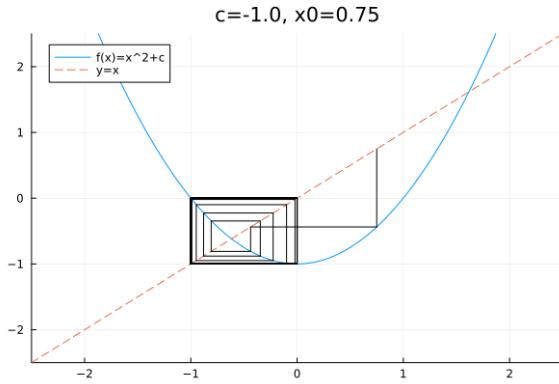
Zadanie polega na obliczaniu w arytmetyce `Float64` kolejnych wartości wyrażenia rekurencyjnego  $x_{n+1} = x_n^2 + c$ . Rozwiązywanie znajduje się w pliku `task6.jl`.

### 6.2 Wyniki

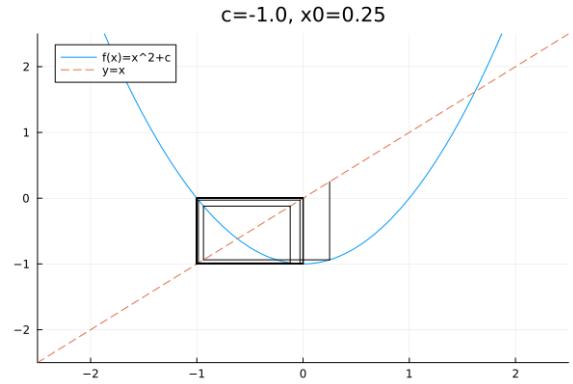
Poniższe graficzne iteracje ciągów to siatka, w której oś pozioma określa wartość  $x_n$  a oś pionowa to wartość  $f(x_n)$ .



Rysunek 3: Graficzne iteracje ciągu  $x_{n+1} = x_n^2 - 1$ . Dla  $x_0 = -1.0$  ciąg:  $(1 \mapsto 0 \mapsto -1 \mapsto 0 \mapsto -1 \dots)$ . Szybkie wejście w cykl okresu  $(0, -1)$ . Dla  $x_0 = 1.0$  już w cyklu:  $(1 \mapsto 0 \mapsto -1 \dots)$ . Ciąg pozostaje w okresie-2 (punkt startowy na cyklu).

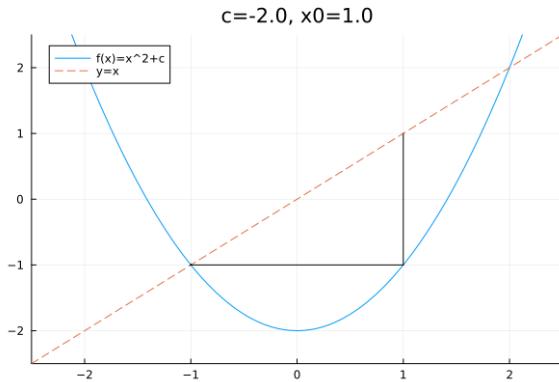


(a)  $x_0 = 0.75$

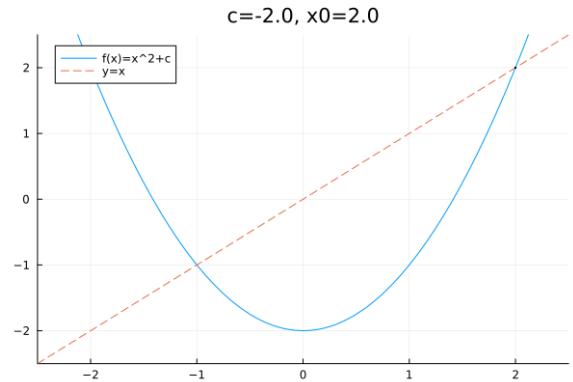


(b)  $x_0 = 0.25$

Rysunek 4: Graficzne iteracje ciągu  $x_{n+1} = x_n^2 - 1$ . Dla  $x_0 = 0.75$  początkowo nieregularne wartości, ale w krótkim czasie następuje zbliżenie do cyklu  $(0, -1)$  — w tabelce widoczne częste wartości  $-1$  i  $0$  od pewnej iteracji (przyciąganie cyklu). Dla  $x_0 = 0.25$  również po kilku iteracjach następuje przejście ku okresowi-2  $(0, -1)$ .

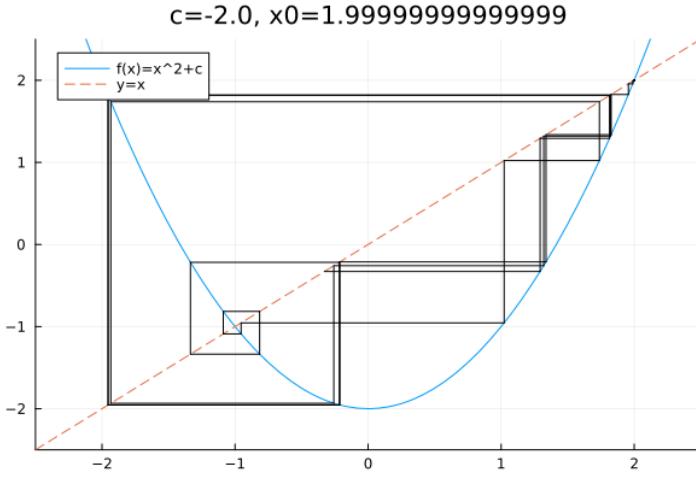


(a)  $x_0 = 1.0$



(b)  $x_0 = 2.0$

Rysunek 5: Graficzne iteracje ciągu  $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ . Dla  $x_0 = 1.0$  Szybkie przejście:  $(1 \mapsto 0 \mapsto -1 \mapsto -1 \mapsto \dots)$ . Ciąg „zatrzymuje się” w  $-1$  (punkt stały osiągnięty dokładnie). Dla  $x_0 = 2.0$  ciąg równa się 2 we wszystkich iteracjach.



Rysunek 6: Start bardzo blisko 2. Przez kilka iteracji  $x_n \approx 2$ , potem wartości stopniowo oddalają się od 2 i pojawiają się duże oscylacje/zmiany (przejście przez wartości  $> 1$ ,  $< 0$ , aż do dużych ujemnych) — wrażliwość na małe perturbacje.

| iter | $c = -2, x_0 = 1$ | $c = -2, x_0 = 2$ | $c = -2, x_0 = 1.99\dots 9$ | $c = -1, x_0 = 1$ | $c = -1, x_0 = -1$ | $c = -1, x_0 = 0.75$ | $c = -1, x_0 = 0.25$ |
|------|-------------------|-------------------|-----------------------------|-------------------|--------------------|----------------------|----------------------|
| 1    | -1.00000          | 2.00000           | 2.00000                     | 0.00000           | 0.00000            | -0.43750             | -0.93750             |
| 2    | -1.00000          | 2.00000           | 2.00000                     | -1.00000          | -1.00000           | -0.80859             | -0.12109             |
| 3    | -1.00000          | 2.00000           | 2.00000                     | 0.00000           | 0.00000            | -0.34618             | -0.98534             |
| 4    | -1.00000          | 2.00000           | 2.00000                     | -1.00000          | -1.00000           | -0.88016             | -0.02911             |
| 5    | -1.00000          | 2.00000           | 2.00000                     | 0.00000           | 0.00000            | -0.22531             | -0.99915             |
| 6    | -1.00000          | 2.00000           | 2.00000                     | -1.00000          | -1.00000           | -0.94923             | -0.00169             |
| 7    | -1.00000          | 2.00000           | 2.00000                     | 0.00000           | 0.00000            | -0.09896             | -1.00000             |
| 8    | -1.00000          | 2.00000           | 1.99999                     | -1.00000          | -1.00000           | -0.99021             | -0.00001             |
| 9    | -1.00000          | 2.00000           | 2.00000                     | 0.00000           | 0.00000            | -0.01949             | -1.00000             |
| 10   | -1.00000          | 2.00000           | 1.99999                     | -1.00000          | -1.00000           | -0.99962             | 0.00000              |
| 11   | -1.00000          | 2.00000           | 2.00000                     | 0.00000           | 0.00000            | -0.00076             | -1.00000             |
| 12   | -1.00000          | 2.00000           | 2.00000                     | -1.00000          | -1.00000           | -1.00000             | 0.00000              |
| 13   | -1.00000          | 2.00000           | 1.99999                     | 0.00000           | 0.00000            | -0.00000             | -1.00000             |
| 14   | -1.00000          | 2.00000           | 2.00000                     | -1.00000          | -1.00000           | -1.00000             | 0.00000              |
| 15   | -1.00000          | 2.00000           | 1.99999                     | 0.00000           | 0.00000            | 0.00000              | -1.00000             |
| 16   | -1.00000          | 2.00000           | 1.99996                     | -1.00000          | -1.00000           | -1.00000             | 0.00000              |
| 17   | -1.00000          | 2.00000           | 1.99983                     | 0.00000           | 0.00000            | 0.00000              | -1.00000             |
| 18   | -1.00000          | 2.00000           | 1.99931                     | -1.00000          | -1.00000           | -1.00000             | 0.00000              |
| 19   | -1.00000          | 2.00000           | 1.99725                     | 0.00000           | 0.00000            | 0.00000              | -1.00000             |
| 20   | -1.00000          | 2.00000           | 1.98902                     | -1.00000          | -1.00000           | -1.00000             | 0.00000              |
| 21   | -1.00000          | 2.00000           | 1.95622                     | 0.00000           | 0.00000            | 0.00000              | -1.00000             |
| 22   | -1.00000          | 2.00000           | 1.82678                     | -1.00000          | -1.00000           | -1.00000             | 0.00000              |
| 23   | -1.00000          | 2.00000           | 1.33712                     | 0.00000           | 0.00000            | 0.00000              | -1.00000             |
| 24   | -1.00000          | 2.00000           | -0.21211                    | -1.00000          | -1.00000           | -1.00000             | 0.00000              |
| 25   | -1.00000          | 2.00000           | -1.95501                    | 0.00000           | 0.00000            | 0.00000              | -1.00000             |
| 26   | -1.00000          | 2.00000           | 1.82206                     | -1.00000          | -1.00000           | -1.00000             | 0.00000              |
| 27   | -1.00000          | 2.00000           | 1.31991                     | 0.00000           | 0.00000            | 0.00000              | -1.00000             |
| 28   | -1.00000          | 2.00000           | -0.25784                    | -1.00000          | -1.00000           | -1.00000             | 0.00000              |
| 29   | -1.00000          | 2.00000           | -1.93352                    | 0.00000           | 0.00000            | 0.00000              | -1.00000             |
| 30   | -1.00000          | 2.00000           | 1.73850                     | -1.00000          | -1.00000           | -1.00000             | 0.00000              |