

Sprawozdanie z Laboratorium 2: Programowanie Liniowe i Całkowitoliczbowe

Sara Żyndul

12 listopada 2025

Wstęp

Niniejsze sprawozdanie przedstawia modele matematyczne oraz zwięzłą analizę wyników dla zadań z Listy 2. Rozwiązania uzyskano przy użyciu języka Julia z pakietem JuMP.

1 Zadanie 1: Problem transportu paliwa

1.1 Model Matematyczny

Problem minimalizacji kosztów dostaw paliwa.

- **Zbiory:**

- $I = \{1, 2, 3\}$: Zbiór dostawców (Firma 1, 2, 3).
- $J = \{1, 2, 3, 4\}$: Zbiór lotnisk (Lotnisko 1, 2, 3, 4).

- **Parametry:**

- c_{ij} : Koszt dostawy 1 galonu od dostawcy i na lotnisko j .
- p_i : Podaż (pojemność) dostawcy i .
- d_j : Popyt (zapotrzebowanie) lotniska j .

- **Zmienne decyzyjne:**

- $x_{ij} \geq 0$: Ilość paliwa (w galonach) dostarczona od dostawcy i na lotnisko j .

- **Funkcja celu (Minimalizacja kosztów):**

$$\min Z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}$$

- **Ograniczenia:**

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq p_i \quad \forall i \in I \quad (\text{Ograniczenie podaży})$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \geq d_j \quad \forall j \in J \quad (\text{Ograniczenie popytu})$$

1.2 Wyniki i Interpretacja

Egzemplarz rozwiązano dla danych z zadania.

- (a) **Minimalny łączny koszt:** \$8 525 000.
- **Optymalny plan dostaw:**

Dostawca	Lotnisko	Ilość (galony)
Firma 1	Lotnisko 2	165 000.0
Firma 1	Lotnisko 4	110 000.0
Firma 2	Lotnisko 1	110 000.0
Firma 2	Lotnisko 2	55 000.0
Firma 3	Lotnisko 3	330 000.0
Firma 3	Lotnisko 4	330 000.0

- (b) **Czy wszystkie firmy dostarczają paliwo?** Tak.

- (c) Czy możliwości dostaw są wyczerpane?
 - F1: Tak (dostarczono 275 000).
 - F2: Nie (dostarczono 165 000 z 550 000).
 - F3: Tak (dostarczono 660 000).

2 Zadanie 2: Plan produkcji

2.1 Model Matematyczny

Problem maksymalizacji tygodniowego zysku z produkcji.

- **Zbiory:**

- $I = \{1, 2, 3, 4\}$: Zbiór produktów (P_i).
- $J = \{1, 2, 3\}$: Zbiór maszyn (M_j).

- **Parametry:**

- t_{ij} : Czas obróbki produktu i na maszynie j (min/kg).
- L_j : Dostępny czas maszyny j (60 godz. = 3600 min).
- c_i : Cena sprzedaży produktu i (\$/kg).
- k_{m_i} : Koszt materiałowy produktu i (\$/kg).
- k_{p_j} : Koszt pracy maszyny j (\$/godz).
- D_i : Maksymalny tygodniowy popyt na produkt i (kg).

- **Zmienne decyzyjne:**

- $x_i \geq 0$: Ilość (w kg) wyprodukowanego produktu i .

- **Zysk jednostkowy (obliczony):** Niech z_i będzie zyskiem jednostkowym dla produktu i :

$$z_i = c_i - k_{m_i} - \sum_{j \in J} (k_{p_j}/60) \cdot t_{ij}$$

- **Funkcja celu (Maksymalizacja zysku):**

$$\max Z = \sum_{i \in I} z_i x_i$$

- **Ograniczenia:**

$$\sum_{i \in I} t_{ij} x_i \leq 3600 \quad \forall j \in J \quad (\text{Limit czasu maszyn})$$

$$0 \leq x_i \leq D_i \quad \forall i \in I \quad (\text{Limit popytu})$$

2.2 Wyniki i Interpretacja

Egzemplarz rozwiązano dla danych z zadania.

- **Maksymalny tygodniowy zysk:** \$3632.5.

- **Optymalny plan produkcji:**

- P1: 125.0 kg (Popyt Niewyczerpany)
- P2: 100.0 kg (Popyt Wyczerpany)
- P3: 150.0 kg (Popyt Wyczerpany)
- P4: 500.0 kg (Popyt Wyczerpany)

- **Wykorzystanie maszyn:**

- M1: 58.75 / 60 h (97.92%)
- M2: 60.0 / 60 h (100.0%)
- M3: 35.0 / 60 h (58.33%)

3 Zadanie 3: Produkcja i magazynowanie

3.1 Model Matematyczny

Problem minimalizacji kosztów produkcji i magazynowania w $K = 4$ okresach.

- **Zbiory:**

- $J = \{1, 2, 3, 4\}$: Zbiór okresów.

- **Parametry:**

- c_j, o_j : Koszt jednostkowy produkcji normalnej i ponadwymiarowej w j .
 - a_j, d_j : Limit produkcji ponadwymiarowej i popyt w j .
 - $P_{max} = 100$: Limit produkcji normalnej.
 - $M_{max} = 70$: Pojemność magazynu.
 - $k_m = 1500$: Koszt magazynowania jednostki przez 1 okres.
 - $m_0 = 15$: Stan początkowy magazynu.

- **Zmienne decyzyjne:**

- $x_j \geq 0$: Produkcja normalna w okresie j .
 - $y_j \geq 0$: Produkcja ponadwymiarowa w okresie j .
 - $m_j \geq 0$: Stan magazynu na koniec okresu j .

- **Funkcja celu (Minimalizacja kosztów):**

$$\min Z = \sum_{j \in J} (c_j x_j + o_j y_j + k_m m_j)$$

- **Ograniczenia:**

$$\begin{array}{ll} m_{j-1} + x_j + y_j = d_j + m_j & \forall j \in J \quad (\text{Bilans magazynu}) \\ 0 \leq x_j \leq P_{max} & \forall j \in J \quad (\text{Limit prod. normalnej}) \\ 0 \leq y_j \leq a_j & \forall j \in J \quad (\text{Limit prod. ponadwym.}) \\ 0 \leq m_j \leq M_{max} & \forall j \in J \quad (\text{Pojemność magazynu}) \end{array}$$

3.2 Wyniki i Interpretacja

Egzemplarz rozwiązano dla $K = 4$ i danych z tabeli.

- (a) **Minimalny łączny koszt:** \$3 842 500.
- **Optymalny plan:**
- (b) **Produkcja ponadwymiarowa:** Wystąpiła w okresach 1 (15.0), 2 (50.0) i 4 (50.0).
- (c) **Wyczerpanie magazynu:** Magazyn był w pełni wykorzystany (70 jednostek) na koniec okresu 2.

Okres	Prod. Normalna	Prod. Ponadwym.	Magazyn (koniec)
1	100.0	15.0	0.0
2	100.0	50.0	70.0
3	100.0	0.0	45.0
4	100.0	50.0	0.0

4 Zadanie 4: Najkrótsza ścieżka z ograniczeniem

4.1 Model Matematyczny

Problem znalezienia ścieżki o minimalnym koszcie, nie przekraczającej limitu czasu T . Jest to problem programowania całkowitoliczbowego (MIP).

- **Zbiory:**

- N : Zbiór miast (wierzchołków).
- A : Zbiór połączeń (łuków skierowanych).

- **Parametry:**

- c_{ij}, t_{ij} : Koszt i czas przejazdu łukiem $(i, j) \in A$.
- $s = i^\circ$: Wierzchołek startowy.
- $t = j^\circ$: Wierzchołek końcowy.
- T : Maksymalny dozwolony czas.

- **Zmienne decyzyjne:**

- $x_{ij} \in \{0, 1\}$: Zmienna binarna, 1 jeśli łuk (i, j) należy do ścieżki, 0 w p.p.

- **Funkcja celu (Minimalizacja kosztów):**

$$\min Z = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

- **Ograniczenia:**

$$\sum_{(i,j) \in A} t_{ij} x_{ij} \leq T \quad (\text{Limit czasu})$$

$$\sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = s \\ -1 & \text{dla } i = t \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases} \quad \forall i \in N \quad (\text{Zachowanie przepływu})$$

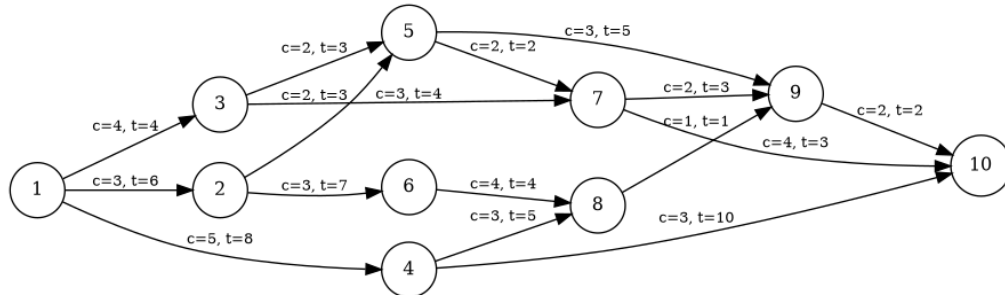
4.2 Wyniki i Interpretacja

- **Egzemplarz (a):** Dane z pliku 'graphA.csv', $s = 1, t = 10, T = 15$.

- **Wynik:** Minimalny koszt = 13.0, Całkowity czas = 15.0.
- **Ścieżka:** $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 10$.

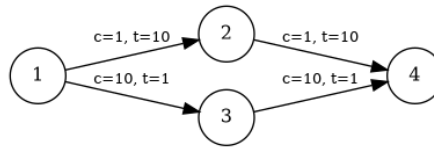
- **Egzemplarz (b):** Własny egzemplarz ('graphB.csv'), $s = 1, t = 10, T = 15$.

- **Wynik:** Minimalny koszt = 11.0, Całkowity czas = 11.0.
- **Ścieżka:** $1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 10$.



Graficzna reprezentacja grafu dla egzemplarza (b).

- (c) Czy ograniczenie całkowitoliczbowości jest potrzebne? Tak. W klasycznym problemie najkrótszej ścieżki (bez limitu czasu) relaksacja LP naturalnie daje wynik całkowitoliczbowy. Dodanie bocznego ograniczenia (jak $\sum t_{ij}x_{ij} \leq T$) psuje tę własność. Relaksacja LP mogłaby dać ułamkowe rozwiązanie (np. 0.5 jednej ścieżki i 0.5 drugiej), co nie jest poprawną ścieżką.



Powyższy graf ilustruje ten problem. Szukamy ścieżki z 1 do 4 przy limicie czasu $T = 11$.

- **Ścieżka A (1-2-4):** Jest bardzo tania (Koszt=2), ale niedopuszczalna (Czas=20 > 11).
- **Ścieżka B (1-3-4):** Jest bardzo droga (Koszt=20), ale dopuszczalna (Czas=2 ≤ 11).

Model MIP (całkowitoliczbowy) musi wybrać całą ścieżkę B, dając **Koszt = 20**.

Jednak model LP (bez ograniczeń całkowitoliczbowych) może "zmieszać" obie ścieżki. Optymalnym rozwiązaniem LP jest wzięcie 50% ścieżki A i 50% ścieżki B. Daje to:

- **Koszt LP:** $0.5 \times 2 + 0.5 \times 20 = 1 + 10 = 11$
- **Czas LP:** $0.5 \times 20 + 0.5 \times 2 = 10 + 1 = 11$

Rozwiązanie LP (Koszt=11) jest dopuszczalne czasowo i znacznie lepsze niż rozwiązanie MIP (Koszt=20). Jest ono jednak bezużyteczne, ponieważ $x_{12}, x_{24}, x_{13}, x_{34}$ mają ułamkowe wartości (0.5). To dowodzi, że ograniczenie całkowitoliczbowości jest niezbędne.

- (d) Czy po usunięciu ograniczenia na czasy przejazdu, ograniczenia na całkowitoliczbowość są nadal potrzebne? Nie. Usunięcie "bocznego" ograniczenia na czas ($\sum t_{ij}x_{ij} \leq T$) sprowadza nasz problem z powrotem do **klasycznego problemu najkrótszej ścieżki**. W takim przypadku, ograniczenia na całkowitoliczbowość ($x_{ij} \in \{0, 1\}$) nie są już konieczne. Dzieje się tak, ponieważ model programowania liniowego (LP) dla tego standardowego problemu (gdzie $x_{ij} \geq 0$) posiada gwarancję, że jego optymalne rozwiązanie i tak będzie całkowitoliczbowe. Można to uzasadnić następująco: Załóżmy, że rozwiązanie optymalne LP jest ułamkowe, tzn. "przepływ" ze startu do celu jest rozdzielony na dwie różne ścieżki (np. α dla Ścieżki A i β dla Ścieżki B, gdzie $\alpha, \beta > 0$). Niech koszt Ścieżki A to C_A , a Ścieżki B to C_B , i załóżmy bez straty ogólności, że $C_A \leq C_B$. Możemy wtedy

natychmiast skonstruować nowe, co najmniej tak samo dobre (a potencjalnie lepsze) rozwiązanie, przenosząc cały przepływ ułamkowy β z droższej Ścieżki B na tańszą Ścieżkę A. Nowe rozwiązanie będzie miało przepływ $\alpha + \beta$ na Ścieżce A i 0 na Ścieżce B. Koszt tego nowego rozwiązania będzie mniejszy lub równy poprzedniemu, ponieważ przenieśliśmy przepływ z droższej na tańszą opcję. Powtarzając ten proces, zawsze dojdziemy do rozwiązania, w którym cały przepływ (równy 1) znajduje się na jednej, najtańszej ścieżce, co jest rozwiązaniem binarnym.

5 Zadanie 5: Przydział radiowozów

5.1 Model Matematyczny

Problem minimalizacji łącznej liczby radiowozów przy spełnieniu ograniczeń.

- **Zbiory:**

- $I = \{p1, p2, p3\}$: Zbiór dzielnic.
- $J = \{1, 2, 3\}$: Zbiór zmian.

- **Parametry:**

- L_{ij}, U_{ij} : Min. i max. liczba radiowozów dla (dzielnica i , zmiana j).
- R_i : Min. łączna liczba radiowozów dla dzielnicy i .
- C_j : Min. łączna liczba radiowozów dla zmiany j .

- **Zmienne decyzyjne:**

- $x_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: Liczba radiowozów (dzielnica i , zmiana j).

- **Funkcja celu (Minimalizacja sumy):**

$$\min Z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij}$$

- **Ograniczenia:**

$$\begin{aligned} L_{ij} &\leq x_{ij} \leq U_{ij} \quad \forall i \in I, j \in J && \text{(Limity min/max dla komórki)} \\ \sum_{i \in I} x_{ij} &\geq C_j \quad \forall j \in J && \text{(Minimalna suma dla zmiany)} \\ \sum_{j \in J} x_{ij} &\geq R_i \quad \forall i \in I && \text{(Minimalna suma dla dzielnicy)} \end{aligned}$$

5.2 Wyniki i Interpretacja

Znaleziono optymalne rozwiązanie.

- **Optymalny przydział radiowozów:**

Dzielnica	Zmiana 1	Zmiana 2	Zmiana 3
p1	2	7	5
p2	3	6	5
p3	5	7	8

- **Całkowita liczba wykorzystywanych radiowozów: 48.**

6 Zadanie 6: Rozmieszczenie kamer

6.1 Model Matematyczny

Problem pokrycia zbioru (Set Cover). Należy pokryć wszystkie kontenery minimalną liczbą kamer.

- **Zbiory:**

- C : Zbiór współrzędnych (i, j) z kontenerami.
- E : Zbiór współrzędnych (i, j) pustych (możliwych lokalizacji kamer).

- **Parametry:**

- k : Zasięg kamery (w kwadratach).
- A_{ce} : Macierz binarna; $A_{ce} = 1$ jeśli kamera w $e \in E$ "widzi" (pokrywa) kontener $c \in C$ (zgodnie z zasięgiem k), 0 w p.p.

- **Zmienne decyzyjne:**

- $y_e \in \{0, 1\}$: Zmienna binarna, 1 jeśli kamera jest instalowana w $e \in E$, 0 w p.p.

- **Funkcja celu (Minimalizacja liczby kamer):**

$$\min Z = \sum_{e \in E} y_e$$

- **Ograniczenia:**

$$\sum_{e \in E} A_{ce} y_e \geq 1 \quad \forall c \in C \quad (\text{Każdy kontener pokryty})$$

6.2 Wyniki i Interpretacja

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Siatka 5x5 rozkładu kontenerów. 1 oznacza pole z kontenerem, 0 - puste.

- **Przypadek 1: $k = 1$**

- **Minimalna liczba kamer:** 5.
- **Lokalizacje (wiersz, kolumna):** [2, 2], [2, 5], [4, 3], [5, 2], [5, 5].

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & K & 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 1 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & K & 0 & 1 & K \end{pmatrix}$$

- **Przypadek 2: $k = 2$**

- Minimalna liczba kamer: 3.
- Lokalizacje (wiersz, kolumna): [2, 2], [3, 5], [5, 3].

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & K & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zwiększenie zasięgu kamer z $k = 1$ do $k = 2$ pozwoliło zredukować wymaganą liczbę kamer z 5 do 3 dla analizowanej siatki.