Sprawozdanie z Listy nr 3

Sara Żyndul
279686

Spis treści

1 Zadanie 1

1.1 Opis

Celem zadania było zaimplementowanie funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą **bisekcji** (połowienia przedziału). Metoda ta opiera się na twierdzeniu Bolzano-Cauchy'ego. Algorytm dzieli przedział $[a, b]$ (wartości początkowe $[a, b]$ takie, że funkcja f ma różny znak na końcach) na połowy i wybiera ten podprzedział, na końcach którego funkcja przyjmuje wartości przeciwnych znaków, co gwarantuje istnienie miejsca zerowego wewnątrz.

Metoda bisekcji jest metodą zbieżną globalnie (o ile spełnione są założenia początkowe o zmianie znaku), jednak jej zbieżność jest liniowa, co oznacza stosunkowo wolne dochodzenie do wyniku w porównaniu do innych metod.

Rozwiązanie znajduje się w pliku `iterationRoots.jl`. Poprawność implementacji została zweryfikowana testami jednostkowymi w pliku `runTests.jl`.

1.2 Wyniki

Testy potwierdziły poprawność działania metody.

```
Test Summary:        | Pass  Total  Time
mbisekcji (bisekcji) |    8      8  0.1s
```

2 Zadanie 2

2.1 Opis

Zadanie polegało na zaimplementowaniu metody **Newtona** (stycznych). Metoda ta jest algorytmem iteracyjnym, w którym kolejne przybliżenie pierwiastka wyznaczane jest ze wzoru:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Metoda Newtona charakteryzuje się szybką zbieżnością (kwadratową) w bliskim otoczeniu pierwiastka. Wymaga jednak znajomości analitycznej postaci pochodnej oraz dobrego doboru punktu startowego x_0. Metoda wymaga podania funkcji oraz jej pochodnej.

Implementacja znajduje się w pliku `iterationRoots.jl`, a testy w `runTests.jl`.

2.2 Wyniki

```
Test Summary:        | Pass  Total  Time
mstycznych (Newtona) |    6      6  0.0s
```

3 Zadanie 3

3.1 Opis

Zadanie obejmowało implementację metody **siecznych**. Jest to modyfikacja metody Newtona, w której pochodna $f'(x_k)$ jest przybliżana ilorazem różnicowym na podstawie dwóch poprzednich punktów iteracji:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Metoda siecznych eliminuje konieczność obliczania pochodnej, jednocześnie posiadając rząd zbieżności nadliniowy (około 1.618). Jest to dobry kompromis między metodą bisekcji a metodą Newtona.

Kod źródłowy znajduje się w `iterationRoots.jl`, a testy w `runTests.jl`.

3.2 Wyniki

```
Test Summary:           | Pass  Total  Time
msiecznych (siecznych) |    5      5  0.0s
```

4 Zadanie 4

4.1 Opis

Zadanie polegało na znalezieniu pierwiastka równania:

$$f(x) = \sin(x) - (0.5x)^2 = 0$$

Należało zastosować metody bisekcji, Newtona i siecznych z zadanymi parametrami dokładności $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}, \epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$.

4.2 Wyniki

Poniższa tabela przedstawia wyniki uzyskane dla poszczególnych metod (gdzie r to przybliżony pierwiastek, a it to liczba iteracji).

Tabela 1: Porównanie metod dla funkcji z Zadania 4

Metoda	Wynik r	Wartość $f(r)$	Iteracje	Błąd
Bisekcji	1.933753967	-2.70×10^{-7}	16	0
Newtona	1.933753779	-2.24×10^{-8}	4	0
Siecznych	1.933753644	1.56×10^{-7}	4	0

4.3 Wnioski

- Wszystkie metody zbiegły do tego samego wyniku (w granicach błędu).
- Metody Newtona i siecznych wymagały znacznie mniejszej liczby iteracji (4) niż metoda bisekcji (16), co potwierdza ich wyższy rząd zbieżności.
- Metoda bisekcji, mimo wolniejszej zbieżności, zagwarantowała wynik w zadanym przedziale.

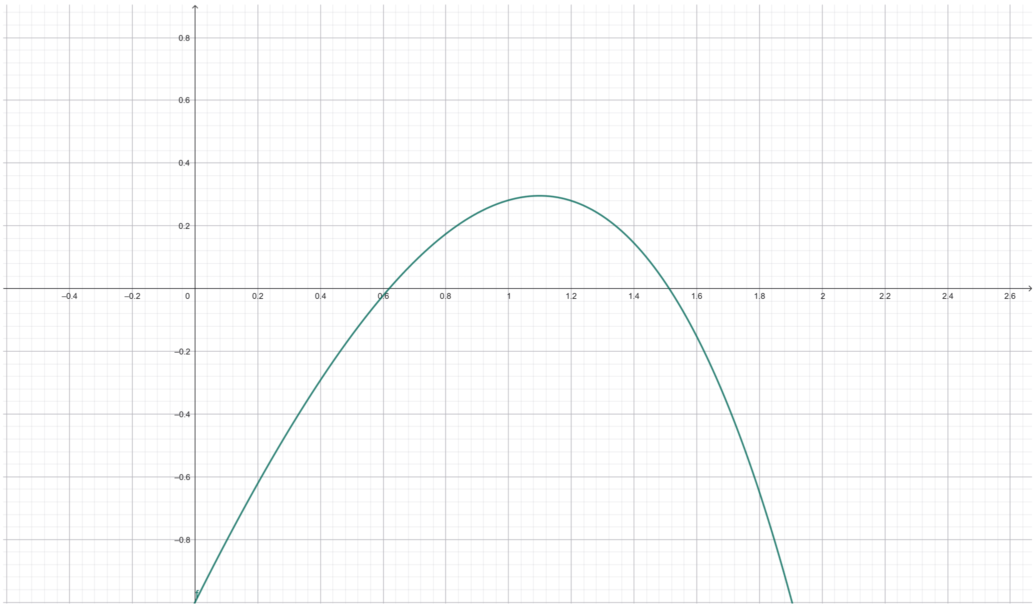
5 Zadanie 5

5.1 Opis

Celem zadania było wyznaczenie punktów przecięcia wykresów funkcji $y = 3x$ oraz $y = e^x$. Problem można sprowadzić do znalezienia miejsc zerowych funkcji:

$$g(x) = 3x - e^x$$

Przedziały poszukiwań ustalono na podstawie analizy wykresu funkcji. Zastosowano metodę bisekcji z dokładnością 10^{-4}.



Rysunek 1: Wizualizacja funkcji $g(x) = 3x - e^x$. Widzimy, że funkcja ma dwa pierwiastki, jeden w przedziale $[0.5, 1.0]$, a drugi w przedziale $[1.0, 2.0]$.

5.2 Wyniki

Znaleziono dwa punkty przecięcia w wybranych przedziałach.

Tabela 2: Miejsca zerowe funkcji $3x - e^x$

Przedział	Przybliżenie r	Wartość $g(r)$	Iteracje
$[0.5, 1.0]$	0.619140625	9.06×10^{-5}	8
$[1.0, 2.0]$	1.512084961	7.61×10^{-5}	13

5.3 Wnioski

Funkcja posiada dwa miejsca zerowe. Metoda bisekcji poradziła sobie z ich znalezieniem po odpowiednim dobraniu przedziałów startowych.

6 Zadanie 6

6.1 Opis

Zadanie polegało na znalezieniu miejsc zerowych funkcji:

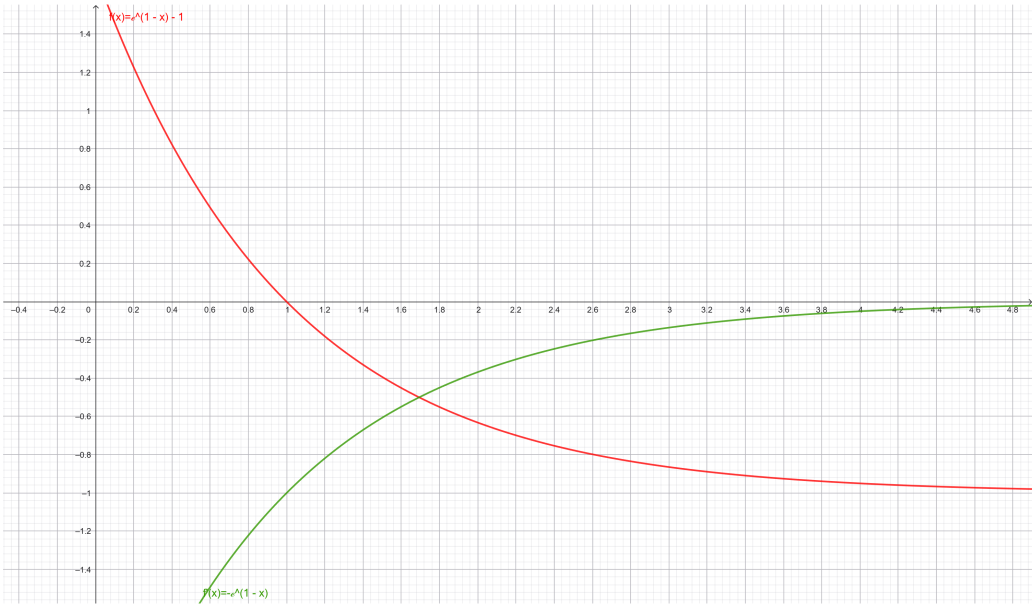
$$f_1(x) = e^{1-x} - 1$$

$$f_2(x) = xe^{-x}$$

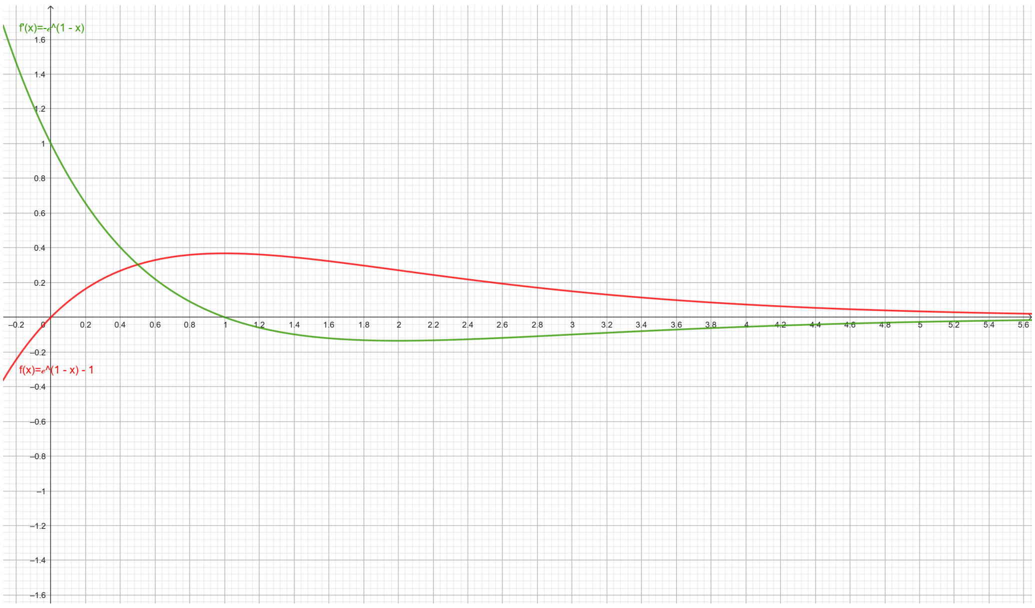
Wymagana dokładność wynosiła $\delta = 10^{-5}, \epsilon = 10^{-5}$.

Analiza funkcji:

- Funkcja $f_1(x)$ posiada jedno miejsce zerowe dla $x = 1$. Jest monotoniczna malejąca, a jej pochodna $f_1'(x) = -e^{1-x}$ dąży do 0 dla $x \to \infty$.



- Funkcja $f_2(x)$ posiada jedno miejsce zerowe dla $x = 0$. Posiada maksimum lokalne dla $x = 1$ (gdzie pochodna się zeruje). Dla $x \to \infty$ funkcja asymptotycznie zbliża się do zera od wartości dodatnich.



6.2 Wyniki

Funkcja $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ (miejsce zerowe $x = 1$)

W poniższej tabeli zestawiono wyniki dla różnych parametrów startowych, w tym przypadki skrajne (bardzo duże przedziały, punkty startowe dalekie od pierwiastka).

Tabela 3: Wyniki dla funkcji f_1

Metoda	Parametry	Wynik r	Iteracje	Uwagi
Bisekcji	$[-1, 3]$	1.0	1	Trafienie w punkt
Bisekcji	$[-1, 2]$	0.999992	17	
Bisekcji	$[-10^6, 10^6]$	1.000007	33	Duży przedział
Newtona	$x_0 = -1$	0.999992	5	
Newtona	$x_0 = 1$	1.0	0	Start w zerze
Newtona	$x_0 = 4$	0.999999	21	Wolniejsza zbieżność
Newtona	$x_0 = 8$	NaN	255	Błąd (przekroczono limit)
Newtona	$x_0 = 1000$	1000	0	Pochodna bliska 0
Siecznych	$[-2, 0]$	0.9999949	6	
Siecznych	$[-100, -90]$	0.999999	137	Bardzo wolna zbieżność
Siecznych	$[100, 1000]$	NaN	255	Błąd

Funkcja $f_2(x) = xe^{-x}$ (miejsce zerowe $x = 0$)
Tabela przedstawia zachowanie metod w pobliżu ekstremum oraz dla dużych argumentów.

Tabela 4: Wyniki dla funkcji f_2

Metoda	Parametry	Wynik r	Iteracje	Uwagi
Bisekcji	$[-1, 3]$	0.0	2	
Bisekcji	$[-1, 2]$	7.6×10^{-6}	17	
Bisekcji	$[-10^6, 2]$	0.000009	35	Stabilna zbieżność
Newtona	$x_0 = -1$	-3.06×10^{-7}	5	
Newtona	$x_0 = 1$	1.0	0	Błąd (dzielenie przez 0)
Newtona	$x_0 = 1.5$	14.7874	10	Zbieżność do fałszywego 0
Newtona	$x_0 = 8$	14.6368	6	Zbieżność do fałszywego 0
Newtona	$x_0 = 1000$	1000.0	0	Wartość f_2 bliska 0
Siecznych	$[-2, 0]$	0	1	
Siecznych	$[-100, 90]$	-2.3×10^{-6}	142	Wolna zbieżność
Siecznych	$[0.5, 10000]$	10000.0	1	Wartość f_2 bliska 0

6.3 Wnioski

Analiza wyników pozwala na sformułowanie następujących spostrzeżeń:

1. **Problem znikającej pochodnej (Metoda Newtona dla f_1):** Dla funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$, przy dużych wartościach x (np. $x = 1000$), wykres funkcji staje się płaski (asymptota pozioma $y = -1$). Pochodna funkcji $f'(x) = -e^{1-x}$ przyjmuje wartości bliskie zeru. Algorytm Newtona kończy działanie z błędem ('err=2'), ponieważ nie jest w stanie wyznaczyć kolejnego kroku aproksymacji (dzielenie przez wartość bliską zeru).

2. **Zjawisko fałszywego pierwiastka dla f_2:** Dla funkcji $f_2(x) = xe^{-x}$ sytuacja jest inna. Dla dużych argumentów dodatnich (np. $x = 1000$, a nawet $x \approx 14.6$), funkcja asymptotycznie zbliża się do osi OX. Wartości funkcji są tam na tyle małe (rzędu 10^{-6} lub mniej), że spełniają warunek stopu $|f(x)| < \epsilon$. Algorytm błędnie uznaje te punkty za miejsca zerowe ('err=0'), mimo że faktyczne miejsce zerowe znajduje się w $x = 0$. Jest to efekt ograniczonej precyzji arytmetyki oraz kształtu badanej funkcji.

3. $x_0 = 1$ **w metodzie Newtona:** Dla funkcji f_2 w punkcie $x_0 = 1$ pochodna wynosi dokładnie 0 (maksimum lokalne). Metoda Newtona zawodzi natychmiastowo z powodu dzielenia przez zero.

4. **Porównanie metod:** Metoda bisekcji okazała się najbardziej stabilna i przewidywalna – poprawnie zbiegała w każdym badanym przedziale, o ile zawierał on pierwiastek. Metoda siecznych wykazywała dużą wrażliwość na dobór punktów startowych – w przypadku f_1 na przedziale $[-100, -90]$ zbieżność była skrajnie wolna (137 iteracji) z powodu "płaskiego"przebiegu funkcji w tym rejonie.