球面調和関数

S

2021 年 1 月 29 日

概要

量子力学 II 演習のプリントを参考にしました．

目次

1 球座標での角運動量演算子

1 粒子の空間運動に由来する角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{l}}$ は直交座標系で次にように表される：

$$\hat{\boldsymbol{l}} = \sum_{\alpha=x,y,z} \hat{l}_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=x,y,z} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{r}_\beta \hat{p}_\gamma \boldsymbol{e}_\alpha \tag{1}$$

任意の状態 $|\Psi\rangle$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle x,y,z|\hat{l}_x|\Psi\rangle &= \langle x,y,z|(\hat{r}_y\hat{p}_z - \hat{r}_z\hat{p}_y)|\Psi\rangle \\
&= y\,\langle x,y,z|\hat{p}_z|\Psi\rangle - z\,\langle x,y,z|\hat{p}_y|\Psi\rangle \\
&= y\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}\langle x,y,z|\Psi\rangle - z\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}\langle x,y,z|\Psi\rangle \\
&= \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\langle x,y,z|\Psi\rangle
\end{aligned} \tag{2}$$

が成り立つ．y,z 成分も同様に計算でき，まとめると

$$\begin{cases}
\langle x,y,z|\hat{l}_x|\Psi\rangle = \dfrac{\hbar}{i}\left(y\dfrac{\partial}{\partial z} - z\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\langle x,y,z|\Psi\rangle \\
\langle x,y,z|\hat{l}_y|\Psi\rangle = \dfrac{\hbar}{i}\left(z\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\langle x,y,z|\Psi\rangle \\
\langle x,y,z|\hat{l}_z|\Psi\rangle = \dfrac{\hbar}{i}\left(x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\langle x,y,z|\Psi\rangle
\end{cases} \tag{3}$$

となる．ここで $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$ によって球座標系に変換する．

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\
\dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\cos\varphi}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\
\dfrac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}
\end{cases} \tag{4}$$

（導出略）を用いると

$$
\begin{aligned}
\langle r,\theta,\varphi|\hat{l}_x|\Psi\rangle &= \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\langle r,\theta,\varphi|\Psi\rangle \\
&= \frac{\hbar}{i}\left\{r\sin\theta\sin\varphi\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right. \\
&\qquad\left. -r\cos\theta\left(\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right\}\langle r,\theta,\varphi|\Psi\rangle \\
&= \frac{\hbar}{i}\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\langle r,\theta,\varphi|\Psi\rangle
\end{aligned}
\tag{5}
$$

同様に y,z 成分も計算でき，まとめると

$$
\begin{cases}
\langle r,\theta,\varphi|\hat{l}_x|\Psi\rangle = \dfrac{\hbar}{i}\left(-\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right)\langle r,\theta,\varphi|\Psi\rangle \\
\langle r,\theta,\varphi|\hat{l}_y|\Psi\rangle = \dfrac{\hbar}{i}\left(+\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right)\langle r,\theta,\varphi|\Psi\rangle \\
\langle r,\theta,\varphi|\hat{l}_z|\Psi\rangle = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\langle r,\theta,\varphi|\Psi\rangle
\end{cases}
\tag{6}
$$

となる．角運動量の昇降演算子 $\hat{l}_\pm$，大きさの演算子 $\hat{\boldsymbol{l}}^2$ を次のように定義する：

$$
\begin{cases}
\hat{l}_\pm := \hat{l}_x \pm i\hat{l}_y \\
\hat{\boldsymbol{l}}^2 := \hat{l}_x^2+\hat{l}_y^2+\hat{l}_z^2
\end{cases}
\tag{7}
$$

すると

$$
\begin{aligned}
\langle r,\theta,\varphi|\hat{l}_\pm|\Psi\rangle &= \langle r,\theta,\varphi|\hat{l}_x|\Psi\rangle \pm i\langle r,\theta,\varphi|\hat{l}_y|\Psi\rangle \\
&= \frac{\hbar}{i}\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\langle r,\theta,\varphi|\Psi\rangle \pm i\frac{\hbar}{i}\left(+\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\langle r,\theta,\varphi|\Psi\rangle \\
&= \pm\hbar e^{\pm i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\langle r,\theta,\varphi|\Psi\rangle
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle r,\theta,\varphi|\hat{\boldsymbol{l}}^2|\Psi\rangle &= \langle r,\theta,\varphi|\hat{l}_x^2|\Psi\rangle + \langle r,\theta,\varphi|\hat{l}_y^2|\Psi\rangle + \langle r,\theta,\varphi|\hat{l}_z^2|\Psi\rangle \\
&= \left[\left\{\frac{\hbar}{i}\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right\}^2+\left\{\frac{\hbar}{i}\left(+\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right\}^2\right. \\
&\qquad\left.+\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2\right]\langle r,\theta,\varphi|\Psi\rangle \\
&= -\hbar^2\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}\langle r,\theta,\varphi|\Psi\rangle
\end{aligned}
\tag{9}
$$

となる．(6)，(8)，(9) から角運動量演算子を球座標で表現すると動径方向に関する微分演算がまったく現れないことがわかる．よって球座標を用いた角運動量の取り扱いにおいては動径方向 r と角度方向 (θ,φ) の 2 つの物理系の座標であるかのように分解することができる．すると考えている粒子の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ は動径部分の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\text{radial}}$ と角度部分の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\text{angle}}$ のテンソル積になる：

$$
\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{radial}} \otimes \mathcal{H}_{\text{angle}}
\tag{10}
$$

したがって球座標で表した位置座標の固有状態 $|r,\theta,\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ は $|r\rangle \in \mathcal{H}_{\text{radial}}$ と $|\theta,\varphi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{angle}}$ の直積である：

$$
|r,\theta,\varphi\rangle = |r\rangle \otimes |\theta,\varphi\rangle
\tag{11}
$$

また，角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{l}}$ は $\mathcal{H}_{\mathrm{angle}}$ 上の演算子と考えることができる．よって上で導いた $\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z, \hat{l}_\pm, \hat{\boldsymbol{l}}^2$ に関する式は任意の角度部分の状態 $|\Psi_{\mathrm{angle}}\rangle \in \mathcal{H}_{\mathrm{angle}}$ に関する次の等式に書き直せる：

$$\begin{cases} \langle\theta,\varphi|\hat{l}_x|\Psi_{\mathrm{angle}}\rangle = \dfrac{\hbar}{i}\left(-\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right)\langle\theta,\varphi|\Psi_{\mathrm{angle}}\rangle \\ \langle\theta,\varphi|\hat{l}_y|\Psi_{\mathrm{angle}}\rangle = \dfrac{\hbar}{i}\left(+\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right)\langle\theta,\varphi|\Psi_{\mathrm{angle}}\rangle \\ \langle\theta,\varphi|\hat{l}_z|\Psi_{\mathrm{angle}}\rangle = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\langle\theta,\varphi|\Psi_{\mathrm{angle}}\rangle \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} \langle\theta,\varphi|\hat{l}_\pm|\Psi_{\mathrm{angle}}\rangle = \pm\hbar e^{\pm i\varphi}\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot\theta\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right)\langle\theta,\varphi|\Psi_{\mathrm{angle}}\rangle & (13) \\ \langle\theta,\varphi|\hat{\boldsymbol{l}}^2|\Psi_{\mathrm{angle}}\rangle = -\hbar^2\left\{\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}\langle\theta,\varphi|\Psi_{\mathrm{angle}}\rangle & (14) \end{cases}$$

2 球面調和関数

定義（球面調和関数）

球面調和関数 $Y_l^m(\theta,\varphi)$ は角運動量の同時固有状態 $|l,m\rangle$ を角度座標 (θ,φ) を用いて座標表示した関数である．つまり

$$Y_l^m(\theta,\varphi) \coloneqq \langle\theta,\varphi|l,m\rangle \tag{15}$$

以下でこの具体的表式を計算する．方針としては，まず最高ウエイトの状態 $|l,l\rangle$ に対する球面調和関数 $Y_l^l(\theta,\varphi)$ の表式を求め，そこに下降演算子を作用させることで $Y_l^m(\theta,\varphi)$ を求める．

2.1 $Y_l^l(\theta,\varphi)$ の計算

最高ウエイトの状態に上昇演算子 $\hat{l}_+$ を作用させると

$$\hat{l}_\pm|l,m\rangle = \sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)}\hbar|l,m\pm1\rangle \tag{16}$$

より

$$\hat{l}_+|l,l\rangle = 0 \tag{17}$$

がわかる．(13) の上昇演算子の方の等式で $|\Psi_{\mathrm{angle}}\rangle$ を $|l,l\rangle$ とすると (17) から左辺は 0 となり，右辺に $Y_l^l(\theta,\varphi)$ が現れる．この等式から $Y_l^l(\theta,\varphi)$ は

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)Y_l^l(\theta,\varphi) = 0 \tag{18}$$

を満たすことがわかる．(12) の 3 つ目の等式で $|\Psi_{\mathrm{angle}}\rangle$ を $|l,l\rangle$ とすると $\hat{l}_z|l,l\rangle = l\hbar|l,l\rangle$ から

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} - l\right)Y_l^l(\theta,\varphi) = 0 \tag{19}$$

が成り立つことがわかる．この微分方程式の解は θ の関数 $\Theta(\theta)$ を用いて

$$Y_l^l(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)e^{il\varphi} \tag{20}$$

と表せる．これを (18) に代入すると $\Theta(\theta)$ が満たす微分方程式

$$\Theta'(\theta) - l\cot\theta = 0 \tag{21}$$

が得られる．この解は定数 c_l を用いて

$$\Theta(\theta) = c_l \sin^l \theta \tag{22}$$

と表せるから

$$Y_l^l(\theta, \varphi) = c_l \sin^l \theta e^{il\varphi} \tag{23}$$

がわかる．球面調和関数 $Y_l^l(\theta,\varphi)$ は角運動量の同時固有状態 $|l,l\rangle$ を角度座標表示した波動関数だった．どんな波動関数は一価関数でなければならないから $Y_l^l(\theta,\varphi+2\pi) = Y_l^l(\theta,\varphi)$ が成り立たなければならない．(23) に代入すると $e^{i2\pi l} = 1$．量子数 l が取ることのできる値は非負の整数または半整数だったが，この式から半整数は許されないことがわかる．次に規格化条件 $\langle l,l|l,l\rangle = 1$ から定数 c_l を決定する．$\mathcal{H}_{\mathrm{angle}}$ 上の単位演算子 $\hat{1}_{\mathrm{angle}}$ の分解は

$$\hat{1}_{\mathrm{angle}} = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \sin\theta \, |\theta,\varphi\rangle \langle\theta,\varphi| \tag{24}$$

だから規格化条件は

$$\begin{aligned}
1 = \langle l,l|l,l\rangle &= \langle l,l|\hat{1}_{\mathrm{angle}}|l,l\rangle \\
&= \langle l,l| \left(\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \sin\theta \, |\theta,\varphi\rangle \langle\theta,\varphi| \right) |l,l\rangle \\
&= \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \sin\theta \, \langle l,l|\theta,\varphi\rangle \langle\theta,\varphi|l,l\rangle \\
&= \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \sin\theta \big| Y_l^l(\theta,\varphi) \big|^2
\end{aligned} \tag{25}$$

となる．実際に (23) を代入すると

$$\begin{aligned}
1 &= |c_l|^2 \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \sin^{2l+1}\theta \\
&= 2\pi |c_l|^2 \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \, \sin^{2l+1}\theta \\
&= 2\pi |c_l|^2 \left(\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \, \sin^{2l+1}\theta + \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \, \cos^{2l+1}\theta \right) \\
&= 2\pi |c_l|^2 \left(\frac{1}{2} B(l+1, 1/2) + \frac{1}{2} B(1/2, l+1) \right) \\
&= 2\pi |c_l|^2 B(l+1, 1/2) \\
&= 2\pi |c_l|^2 \frac{\Gamma(l+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(l+3/2)} \\
&= 2\pi |c_l|^2 \frac{l!\,\Gamma(1/2)}{(l+3/2)(l+1/2)\cdots(1/2)\Gamma(1/2)} \\
&= 4\pi |c_l|^2 \frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!}
\end{aligned} \tag{26}$$

となるから c_l は実定数 γ_l を用いて

$$c_l = e^{i\gamma_l} \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{(2l+1)!}{2^{2l}(l!)^2} \right\}^{1/2} \tag{27}$$

と表せる．$\gamma_l = \pi l$ と選ぶと

$$c_l = (-1)^l \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{(2l+1)!}{2^{2l}(l!)^2} \right\}^{1/2} \tag{28}$$

となり，球面調和関数 $Y_l^l(\theta,\varphi)$ は

$$Y_l^l(\theta,\varphi) = (-1)^l \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{(2l+1)!}{2^{2l}(l!)^2} \right\}^{1/2} \sin^l \theta e^{il\varphi} \tag{29}$$

と表されることがわかった．

2.2　$Y_l^m(\theta,\varphi)$ の計算

前節の結果を用いて $Y_l^m(\theta,\varphi)$ の表式を求める．最高ウエイトの状態 $|l,l\rangle$ に下降演算子を $l-m$ 回作用させると (16) から

$$\begin{aligned}
\hat{j}_-^{\,l-m}|l,l\rangle &= \sqrt{(l+l)(l-l+1)}\hbar\,\hat{j}_-^{\,l-m-1}|l,l-1\rangle \\
&= \sqrt{2l\cdot 1}\sqrt{\{l+(l-1)\}\{l-(l-1)+1\}}\hbar^2\,\hat{j}_-^{\,l-m-2}|l,l-2\rangle \\
&= \sqrt{2l(2l-1)\cdot 1(1+1)}\hbar^2\,\hat{j}_-^{\,l-m-2}|l,l-2\rangle \\
&\ \ \vdots \\
&= \sqrt{2l(2l-1)\cdots(l+m+1)}\sqrt{(l-m)!}\,\hbar^{l-m}|l,m\rangle \\
&= \left\{\frac{(2l)!(l-m)!}{(l+m)!}\right\}^{1/2}\hbar^{l-m}|l,m\rangle
\end{aligned} \tag{30}$$

となる．つまり

$$|l,m\rangle = \left\{\frac{1}{(2l)!}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\right\}^{1/2}\left(\frac{\hat{l}_-}{\hbar}\right)^{l-m}|l,l\rangle \tag{31}$$

が成り立つ．左から $\langle\theta,\varphi|$ をかけると左辺は球面調和関数 $Y_l^m(\theta,\varphi)$ になり，右辺は (13) から計算でき

$$\begin{aligned}
Y_l^m(\theta,\varphi) &= \left\{\frac{1}{(2l)!}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\right\}^{1/2}\frac{1}{\hbar^{l-m}}\langle\theta,\varphi|\hat{l}_-^{\,l-m}|l,l\rangle \\
&= \left\{\frac{1}{(2l)!}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\right\}^{1/2}\left\{-e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right\}^{l-m}Y_l^l(\theta,\varphi)
\end{aligned} \tag{32}$$

となる．ここに (29) を代入すると

$$\begin{aligned}
Y_l^m(\theta,\varphi) &= \left\{\frac{1}{(2l)!}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\right\}^{1/2}\left\{-e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right\}^{l-m}(-1)^l\left\{\frac{1}{4\pi}\frac{(2l+1)!}{2^{2l}(l!)^2}\right\}^{1/2}\sin^l\theta e^{il\varphi} \\
&= (-1)^m\left\{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\right\}^{1/2}\frac{1}{2^l l!}\left\{e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right\}^{l-m}\sin^l\theta e^{il\varphi}
\end{aligned} \tag{33}$$

となる．この右辺の微分について

$$\begin{aligned}
e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\sin^l\theta e^{il\varphi} &= e^{i(l-1)\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+l\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\sin^l\theta \\
\left\{e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right\}^2\sin^l\theta e^{il\varphi} &= e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)e^{i(l-1)\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+l\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\sin^l\theta \\
&= e^{i(l-2)\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(l-1)\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+l\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\sin^l\theta
\end{aligned} \tag{34}$$

と順番に考えていくと

$$\begin{aligned}
&\left\{e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right\}^{l-m}\sin^l\theta e^{il\varphi} = \\
&\qquad e^{im\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(m+1)\cot\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(m+2)\cot\theta\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+l\cot\theta\right)\sin^l\theta
\end{aligned} \tag{35}$$

が成り立つことがわかる．この右辺に次の恒等式を用いる：

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+k\cot\theta\right)f(\theta) = \frac{1}{\sin^k\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^k\theta f(\theta)) \tag{36}$$

この恒等式は右辺の微分を実行することで示すことができる：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^k\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\sin^k\theta f(\theta)\big) &= \frac{1}{\sin^k\theta}\big(k\sin^{k-1}\theta\cos\theta f(\theta)+\sin^k\theta f'(\theta)\big) \\
&= f'(\theta)+k\cot\theta f(\theta) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial\theta}+k\cot\theta\right)f(\theta) \qquad (37)
\end{aligned}
$$

(35) に用いると

$$
\begin{aligned}
&e^{im\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(m+1)\cot\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(m+2)\cot\theta\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+l\cot\theta\right)\sin^l\theta \\
&= e^{im\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(m+1)\cot\theta\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(l-1)\cot\theta\right)\frac{1}{\sin^l\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin^{2l}\theta \\
&= e^{im\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(m+1)\cot\theta\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(l-2)\cot\theta\right)\frac{1}{\sin^{l-1}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^{l-1}\theta\frac{1}{\sin^l\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin^{2l}\theta\right) \\
&= e^{im\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(m+1)\cot\theta\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(l-2)\cot\theta\right)\frac{1}{\sin^{l-1}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin^{2l}\theta\right) \\
&= e^{im\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(m+1)\cot\theta\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(l-3)\cot\theta\right)\frac{1}{\sin^{l-2}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin^{l-2}\theta\frac{1}{\sin^{l-1}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin^{2l}\theta\right)\right\} \\
&= e^{im\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(m+1)\cot\theta\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+(l-3)\cot\theta\right)\frac{1}{\sin^{l-2}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin^{2l}\theta\right)\right\} \\
&\quad\vdots \\
&= e^{im\varphi}\frac{1}{\sin^m\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^{l-m}\sin^{2l}\theta \\
&= e^{im\varphi}\frac{1}{\sin^m\theta}\frac{1}{\sin^m\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\frac{\partial}{\partial(\cos\theta)}\right)^{l-m}\sin^{2l}\theta \\
&= (-1)^{l-m}e^{im\varphi}\frac{1}{\sin^m\theta}\left(\frac{\partial}{\partial(\cos\theta)}\right)^{l-m}\sin^{2l}\theta \\
&= (-1)^{l-m}e^{im\varphi}(1-\cos^2\theta)^{-m/2}\left(\frac{\partial}{\partial(\cos\theta)}\right)^{l-m}(1-\cos^2\theta)^l \\
&= (-1)^m e^{im\varphi}2^l l! P_l^{-m}(\cos\theta) \qquad (38)
\end{aligned}
$$

となる．ここで $P_l^{-m}(x)$ は Legendre 培関数である：

$$
P_l^{-m}(x) \coloneqq \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{-m/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{l-m}(x^2-1)^l \qquad (39)
$$

よって (33) に代入すると

$$
Y_l^m(\theta,\varphi) = \left\{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\right\}^{1/2}P_l^{-m}(\cos\theta)e^{im\varphi} \qquad (40)
$$

を得る．また Legendre 培関数に関する等式

$$
P_l^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x) \qquad (41)
$$

を用いると球面調和関数は次のように表せる．

球面調和関数の具体的表式

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \left\{ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \right\}^{1/2} P_l^{-m}(\cos\theta) e^{im\varphi} \tag{42}$$

$$= (-1)^m \left\{ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right\}^{1/2} P_l^{m}(\cos\theta) e^{im\varphi} \tag{43}$$