Задание №11
Краевые задачи

Постановка задачи

Пусть дана система вида

$$\frac{d^2X}{dt^2} = f(t, X, \dot{X}),$$

где X — некая вектор-функция $X = X(t)$, $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^D$. Требуется найти решение задачи на интервале $t \in [a; b]$, для которого известны граничные условия $X(a) = X_a$ и $X(b) = X_b$.

Метод «пристрелки»

Существует два варианта метода («пристрелки слева» и «пристрелки справа»), опишем первый из них.

Дополним условия на левой границе интервала условием $\frac{d}{dt}X(a) = Y_a$, выбрав вектор Y_a произвольным образом. Тем самым решаемая задача превратится в задачу Коши с начальными условиями, заданными на левой границе. Ее можно решить каким-либо из методов, пригодных для решения задачи Коши, построив решение $\tilde{X}(t)$. В результате для $t = b$ будет получен некоторый вектор $\tilde{X}(b)$, вообще говоря, не совпадающий с X_b.

Поставим задачу о подборе такого Y_a, для которого $\tilde{X}(b) = X_b$. Если процедуру вычисления $\tilde{X}(b)$ по известному Y_a представить как нелинейную в общем случае функцию $\Phi(Y_a)$, то такая задача сводится к решению системы уравнений вида $\Phi(Y_a) - X_b = 0$, которое можно выполнить с использованием многомерного метода Ньютона. В результате (путем выбора при «пристрелке» все более удачного приближения для Y_a) будет построено решение исходной краевой задачи.

Метод «пристрелки справа» аналогичен описанному выше, но дополнительные условия выбираются на правой границе интервала, после чего производится интегрирование задачи Коши с отрицательным шагом.

Метод сеток

Производные, входящие в исходное уравнение, могут быть аппроксимированы конечными разностями на сетке по t с постоянным шагом. Таким образом, для каждого узла сетки, кроме двух крайних, соответствующих $t = a$ и $t = b$, может быть записано уравнение, связывающее между собой значения искомой функции в соседних узлах сетки. Дополнив систему из этих уравнений двумя уравнениями, соответствующими граничным условиям, получим нелинейную (в общем случае) систему алгебраических уравнений, которая может быть решена методом Ньютона или методом простой итерации.

Задание

Требуется построить решение краевой задачи на заданном интервале с постоянным шагом h, для чего реализовать методы пристрелки слева и справа для некоторой нетривиальной задачи, условие которой вы можете выбрать самостоятельно. После получения решений (которые, естественно, должны совпадать) решение той же задачи следует получить также методом сеток. Промежуточную систему алгебраических уравнений требуется явно выписать, поэтому элементом решения этого задания является отчет в LaTeX с описанием решаемой задачи, промежуточной системы уравнений для метода сеток и полученных результатов (графики приветствуются).

Ограничения на выбор задачи: количество интервалов разбиения не менее 10^2, решаемая система уравнений не должна быть линейной (хотя использовать такие системы для тестирования кода, безусловно, не возбраняется).