University of Tehran

School of Electrical and Computer Engineering

Dynamic Systems in Neuroscience

Instructor: Dr. Fariba Bahrami

Assignment 4

Sasan Keshavarz

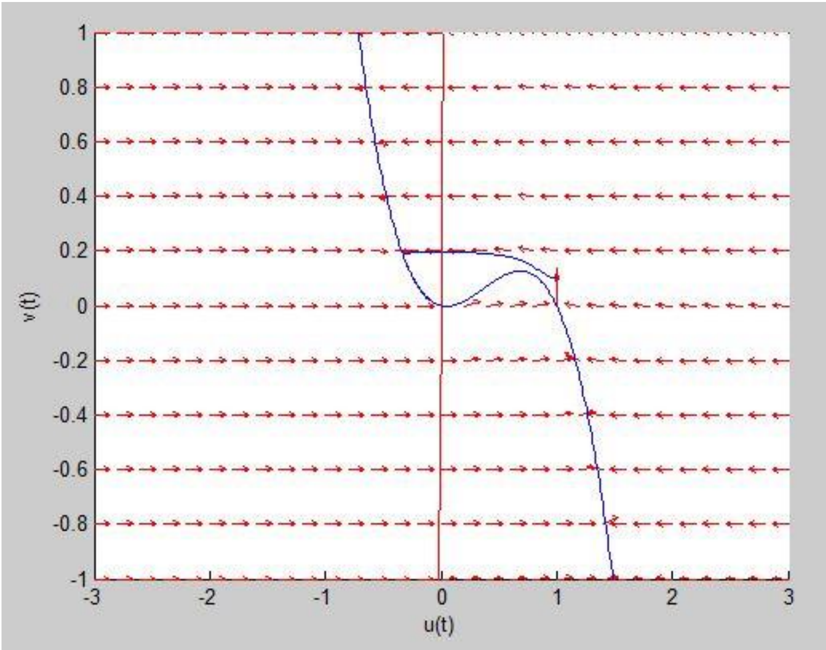
810199253

fall 2022

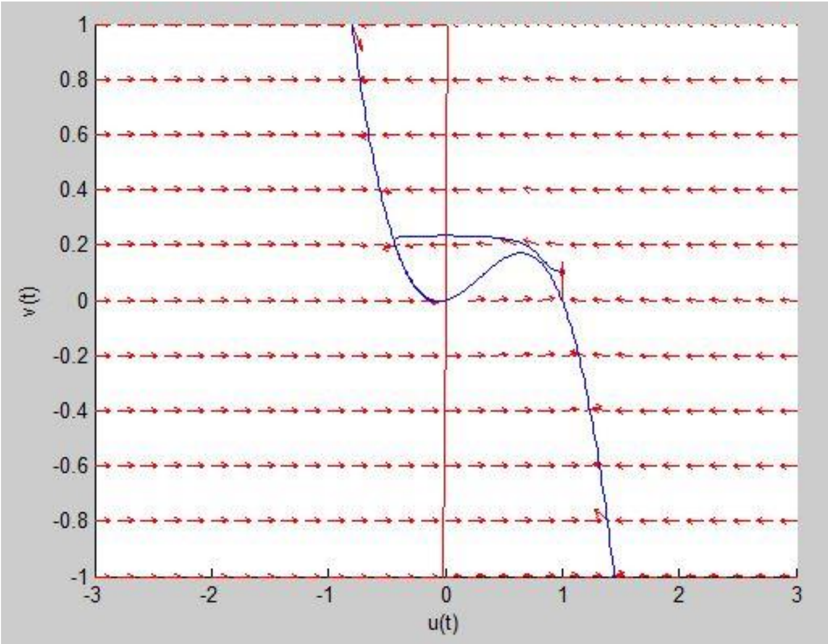
فهرست

سوال 3

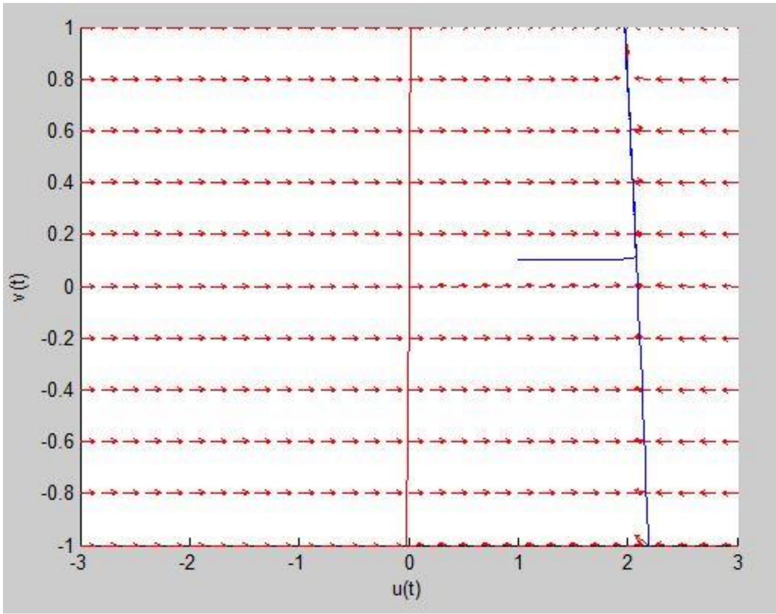
برای دسته اول پارامترها که در آن a مثبت است و جریان ورودی صفر است چرخه حدی در حال تشکیل شدن است. (یا شاید تشکیل شده است) برای دسته دوم پارامترها که مثل حالت قبل است و صرفا a منفی شده است، بین تغییرات v خود v فیدبک منفی ایجاد میشود که این منجر به تولید یک چرخه حدی شده است. برای دسته اخر پارامترها و I = 5 چرخه حدی تولید نشده است. کدهای مربوطه به پیوست ارسال میگردند.



نگاره فاز برای دسته اول پارامترها



نگاره فاز برای دسته دوم پارامترها



نگاره فاز برای دسته سوم پارامترها

سوال 6-5-2-1

سؤال ① تمرین 4.

بخش

I_K حل: $C\dot{V} = I - g_{Kir}\, h_\infty(V)\,(V-E_K) - g_K\, n\,(V-E_K)$

$$\dot{n} = \frac{n_\infty(V) - V}{\tau_n(V)} \quad , \quad h_\infty(V) = \frac{1}{1+e^{\left(\frac{V_{1/2}-V}{k}\right)}}$$

شرط بندیکسون: $\frac{\delta f(x,y)}{\delta x} + \frac{\delta g(x,y)}{\delta y} \neq 0 \longrightarrow$ no limit cycle

$$\frac{\delta \dot{V}}{\delta V} + \frac{\delta \dot{n}}{\delta n} = \left(-g_{Kir}\frac{\delta h_\infty(V)}{\delta V}(V-E_K) - g_{Kir}\, h_\infty(V) - g_K n\right) + \left(\frac{-1}{\tau_n}\right)$$

$$\frac{\delta h_\infty(V)}{\delta V} = \frac{-\left(\frac{-1}{k} e^{\frac{V_{1/2}-V}{k}}\right)}{\left(1+e^{\frac{V_{1/2}-V}{k}}\right)^2} = \frac{1}{k}\left(h_\infty(V) - h_\infty^2(V)\right)$$

$$\frac{\delta \dot{V}}{\delta V} + \frac{\delta \dot{n}}{\delta n} = \underbrace{-g_{Kir}\frac{1}{k}}_{(B)} \underbrace{\left(h_\infty(V) - h_\infty^2(V)\right)}_{(A)} \underbrace{(V-E_K)}_{(C)} \underbrace{- g_{Kir}\, h_\infty(V)}_{\leq 0} \underbrace{- g_K n}_{\leq 0} \underbrace{- \frac{1}{\tau_n(V)}}_{\leq 0}$$

$A: 0 < h_\infty(V) < 1 \rightarrow h_\infty(V) - h_\infty^2(V) \geq 0$ $\quad B: -g_{Kir}\frac{1}{k} < 0$ $\quad C: V \geq E_K \rightarrow V - E_K \geq 0$

$\longrightarrow ABC < 0$

پس همه ترم های $\frac{\delta \dot{V}}{\delta V} + \frac{\delta \dot{n}}{\delta n}$ منفی هستند.

$\frac{\delta \dot{V}}{\delta V} + \frac{\delta \dot{n}}{\delta n} < 0 \longrightarrow$ هیچ چرخه حدی نخواهیم داشت

I_A حل: $C\dot{V} = I - g_L(V-E_L) - g_A\, m\, h_\infty(V)\,(V-E_K)$ $\quad$ بخش دوم:

$$\dot{m} = \frac{m_\infty(V) - m}{\tau_m(V)}$$

$$\frac{\delta \dot{V}}{\delta V} + \frac{\delta \dot{m}}{\delta m} = -g_L - g_A m\, h_\infty'(V)\,(V-E_K) - g_A\, m\, h_\infty(V) - \frac{1}{\tau_m(V)}$$

$$= \underbrace{-g_L}_{<0} - \underbrace{g_A m}_{+} \underbrace{\left(\frac{1}{k}\right)}_{\mathrm{I}} \underbrace{\left(h_\infty - h_\infty^2\right)}_{+} \underbrace{(V-E_K)}_{\mathrm{II}} \underbrace{- g_A\, m\, h_\infty(V)}_{<0} \underbrace{- \frac{1}{\tau_m(V)}}_{<0}$$

if $V > E_K$, $k > 0 \longrightarrow \frac{\delta \dot{V}}{\delta V} + \frac{\delta \dot{m}}{\delta m} < 0 \rightarrow \frac{\delta \dot{V}}{\delta V} + \frac{\delta \dot{m}}{\delta m} \neq 0$

چرخه حدی نخواهیم داشت.

if $V < E_K$, $k > 0 \rightarrow$ نمی‌توان نظر داد. $\quad$ if $k < 0 \rightarrow$ نمی‌توان نظر داد.

سوال 2 تمرین 4

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x + \mu(1-x^2)y$$

$$\frac{\delta \dot{x}}{\delta x} + \frac{\delta \dot{y}}{\delta y} = 0 + \mu(1-x^2)$$

در درون ناحیه $r<1$: $r<1 \rightarrow x^2+y^2<1$, $|x|<1$, $x^2<1$ $\rightarrow (1-x^2)>0$

$$\frac{\delta \dot{x}}{\delta x} + \frac{\delta \dot{y}}{\delta y} = \mu(1-x^2) \begin{cases} \mu<0 \rightarrow \text{همیشه منفی} \\ \mu>0 \rightarrow \text{همیشه مثبت} \end{cases} \longrightarrow$$

چون تغییر علامت نمی‌دهد پس همیشه معادله متوازن

پس درون دایره با شعاع 1 هیچوقت چرخه حدی رخ نمی‌دهد.

درون ناحیه

$r<4 \longrightarrow 0<r<4 \rightarrow x^2+y^2<4$, $|x|<2$, $x^2<4$

$$\frac{\delta \dot{x}}{\delta x} + \frac{\delta \dot{y}}{\delta y} = \mu(1-x^2) \longrightarrow$$

که این عبارت به ازای $x=\pm1$ تغییر علامت می‌دهد پس $\frac{\delta \dot{x}}{\delta x} + \frac{\delta \dot{y}}{\delta y} = 0$ نمی‌شود و نمی‌توان برای داخل دایره با شعاع $r=4$ نظری در مورد چرخه حدی داد.

سوال 5 تمرین 4

$$\dot{x} = y + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2-2)$$
$$\dot{y} = -x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2-2)$$

برای اینکه حل سوال به مختصات قطبی نزدیک است تغییر متغیر می‌دهیم

$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$\dot{r} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\dot{x} + \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\dot{y}$$ $\xrightarrow{\dot{x}, \dot{y}}$ $\dot{x}$ و $\dot{y}$ را در این معادله گذاریم

$$\dot{r} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(y + \frac{x(x^2+y^2-2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2-2)\right)$$

ادامه سوال 5 تمرین 4

$$\dot r = \cancel{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}} + \frac{x^2(x^2+y^2-2)}{x^2+y^2} - \cancel{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}} + \frac{y^2(x^2+y^2-2)}{(x^2+y^2)}$$

$$\longrightarrow \dot r = \frac{(x^2+y^2-2)}{\cancel{(x^2+y^2)}}\cancel{(x^2+y^2)} = r^2-2$$

$$\dot\theta = \frac{\left(\frac{-y}{x^2}\right)\dot x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)\dot y}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)(+\dot y) + \left(\frac{-y}{x^2}\right)\dot x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\dot\theta = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)\left(-x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2-2)\right) - \left(\frac{y}{x^2}\right)\left(y + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2-2)\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

جایگذاری $\dot x$ و $\dot y$

$$\dot\theta = \frac{-1 + \cancel{\left(\frac{y}{x}\right)\frac{(x^2+y^2-2)}{\sqrt{x^2+y^2}}} - \frac{y^2}{x^2} - \cancel{\frac{y(x^2+y^2-2)}{x\sqrt{x^2+y^2}}}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\xrightarrow{\times x^2} \dot\theta = \frac{-x^2-y^2}{x^2+y^2} = -1$$

$$\begin{cases} \dot r = r^2-2 \to \dot r = 0 \to r = \sqrt{2} \\ \dot\theta = -1 \end{cases}$$

پس در $r=\sqrt{2}$ جواب پریودیک داریم

سوال 6 تمرین 4

$$C\dot v = I + k(v-v_r)(v-v_t) - u = f(u,v)$$

$$\dot u = \underbrace{a(b(v-v_r)-u)}_{=g(u,v)} \quad \text{if } v \geq v_{peak} \Rightarrow v \to v_{reset}, \quad u \to u+d$$

$C=50p$ $\quad v_r=-80m$ $\quad v_t=-25m$ $\quad k=1$ $\quad a=0/01$ $\quad b=-20$ $\quad v_{reset}=-55m$

$d=150$ $\quad v_{peak}=40\,mV$

الف) نقاط تعادل و پایداری برحسب I :

$$\dot v = 0 \to I + k\left(v^2 - (v_r+v_t)v + v_t v_r\right) - u = 0$$

$$\dot u = 0 \to a(bv - bv_r - u) = 0$$

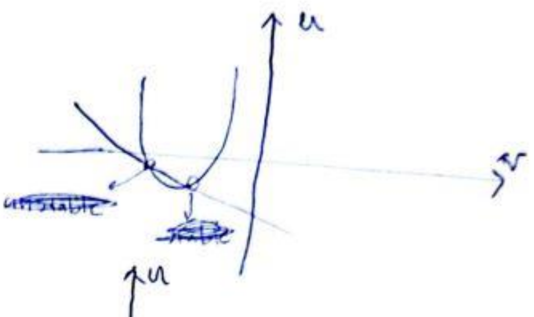
$\xrightarrow{\text{جایگذاری پارامترها}}$ $$\begin{cases} \dot v = 0 \to u = I + v^2 + 105v + 2000 \\ \dot u = 0 \to u = -20(v+80) \end{cases}$$

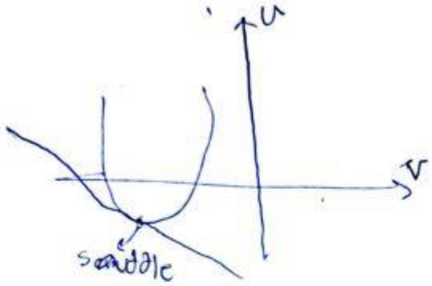
$u = I + v^2 + 105v + 2000 \longrightarrow v_{1,2} = \dfrac{-105 \pm \sqrt{(105)^2 - 4(2000 + I)}}{2}$

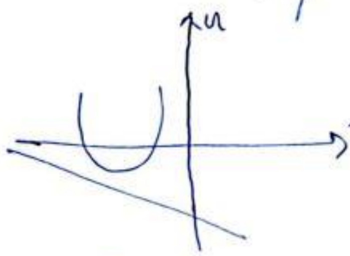
با توجه به رادیکال تعیین علامت می‌شود

$11025 - 8000 - 4I > 0 \longrightarrow I < 756.25$

$$\begin{cases} I < 756.25 \longrightarrow \text{۲ ریشه} \\ I = 756.25 \longrightarrow \text{۱ ریشه} \\ I > 756.25 \longrightarrow \text{هیچ ریشه} \end{cases}$$







$A_{eq} = \begin{bmatrix} f_v & f_u \\ g_v & g_u \end{bmatrix}_{eq} = \begin{bmatrix} 2v_{eq} + 105 & -1 \\ -0.2 & +0.01 \end{bmatrix}$

باید به ازای V_{eq} تعادل پیدا شده ماتریس A را حساب کرد و سپس در مورد پایداری ناپایداری نظر داد.

$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \longrightarrow \lambda_1 , \lambda_2$

ب