

1- دو مجموعه  $n$  تایی از اعداد داریم. الگوریتمی با زمان اجرای بهینه طراحی کنید که تعداد عناصر مشترک این دو مجموعه را محاسبه کند. الگوریتم خود را توضیح دهید و زمان اجرای آن را محاسبه کنید. (1 نمره)

2- در الگوریتم جست و جوی سطلی (bucket sort) به طور معمول برای مرتب کردن  $n$  عدد، بازه ی اعداد به  $n$  زیر بازه ( $n$  buckets) تقسیم می شود. حال فرض کنید در این الگوریتم برای مرتب کردن  $n$  عدد به جای استفاده از  $n$  زیر بازه از  $k$  زیربازه استفاده کنیم که  $k$  از  $n$  کمتر است. فرض کنید که اعداد ورودی به طور مستقل و با احتمال مساوی از بازه ی  $[0, 1]$  انتخاب شوند (uniformly at random and independently). زمان اجرای متوسط این الگوریتم را برحسب  $k$  و  $n$  حساب کنید. روش محاسبه ی خود را توضیح دهید. (1 نمره)

3- تعدادی بیمار زن و مرد یکی یکی وارد بیمارستان می شوند یا از آن خارج می شوند و ما دمای بدن هر بیمار را اندازه می گیریم. فرض کنید دمای بدن هیچ یک از بیمارها در مدتی که در بیمارستان هستند تغییر نمی کند. داده ساختاری برای نگهداری دمای بدن این بیمارها طراحی کنید که هر یک از اعمال زیر را در زمان  $O(\log n)$  انجام دهد.

- Insert\_Female( $x$ ) بیمار زنی با دمای  $x$  وارد بیمارستان شد
- Delete\_Female( $x$ ) بیمار زنی با دمای  $x$  از بیمارستان خارج شد
- Insert\_male( $x$ ) بیمار مردی با دمای  $x$  وارد بیمارستان شد
- Delete\_male( $x$ ) بیمار مردی با دمای  $x$  از بیمارستان خارج شد
- Query ( $i$ ) این تابع در صورتی که در بین  $i$  نفر با بیشترین دمای بدن که هم اکنون در بیمارستان هستند تعداد مردها بیشتر بود 1 برمی گرداند و در غیر این صورت 0 برمی گرداند.

توجه: نیازی به نوشتن کد یا شبه کد نیست. الگوریتم خود را به دقت توضیح دهید، درستی آن را اثبات کنید و زمان اجرای آن را محاسبه کنید. (2 نمره)

4- یک تابع درهم سازی (Hash function) داریم که هر عدد را به طور مستقل (independent) به یکی از  $s$  خانه ی جدول درهم سازی نسبت می دهد. هر چند احتمال نسبت داده شدن به خانه های مختلف جدول یکسان نیست (NOT Uniform). احتمال این که یک عدد به یک خانه از  $r$  خانه اول نسبت داده شود  $p/r$  و احتمال این که این عدد به یکی از  $s-r$  خانه ی آخر نسبت داده شود  $(1-p)/(s-r)$  می باشد. به عبارت دیگر

$$\text{If } i \leq r \text{ then } \Pr\{h[k] = i\} = p/r$$

$$\text{If } i > r \text{ then } \Pr\{h[k] = i\} = (1-p)/(s-r)$$

توجه کنید که در این صورت داریم  $\Pr\{h[k] \leq r\} = p$  و  $\Pr\{h[k] > r\} = 1-p$ .

ما از این تابع درهم سازی در یک جدول درهم سازی (Hash Table) که در آن تداخل ها به روش زنجیره ای حل شده اند (collisions are resolved by chaining) استفاده کرده ایم. متوسط زمان لازم برای یک جست و جوی ناموفق چقدر است؟ متوسط زمان لازم برای یک جست و جوی موفق چقدر است؟ جواب خود را اثبات کنید. (1.5 نمره)

5- با روش Disjoint-set forests به همراه union by rank و path compression اعمال زیر را به ترتیب از چپ به راست انجام داده و درخت های نهایی را بکشید. هر گاه در ادغام دو درخت آزادی انتخاب داشتید سعی کنید عدد کمتر در ریشه قرار بگیرد (1 نمره)

Make-set(1), Make-set(2), Make-set(3), Make-set(4), Make-set(5), Make-set(6), Make-set(7)

Union(1,2), Union(3,4), Union(4,5), Union(2,3), Union(6,7), Union(6,4)

Find-set(7)