ساسان وحیدی نیا ۹۷۳۳۲۴۹۹

① A)

$3\sqrt{n}+5 \in O(n) \xrightarrow{n\geq k} 3\sqrt{n}+5 \leq Cn$

$k=1 \xrightarrow{n\geq 1} \frac{3\sqrt{n}+5}{n} \leq \frac{Cn}{n} \Rightarrow$

$f(n)$, $g(n)$

$3\sqrt{n}+5 \leq Cn \Rightarrow$ $n\geq 1$ برای ، $C=8$

$\Rightarrow 3\sqrt{n}+5$ is $O(n)$ چون $3\sqrt{n}+5 \leq 8n$ $n\geq 1$

$n_0=1$

B) $2^n-100 \in \omega(n^3)$

$2^n-100 > Cn^3 \Rightarrow \frac{2^n-100}{n^3} > C$

$n^3 \geq 0$, $2^n-100 \geq 0 \Rightarrow 2^n \geq 100 \Rightarrow n\geq 7$

$c=\frac{128-100}{343}=\frac{28}{343}$

$2^n-100 > \frac{28}{343}n$ ، $n>7$ برای ، $c=\frac{28}{343}$

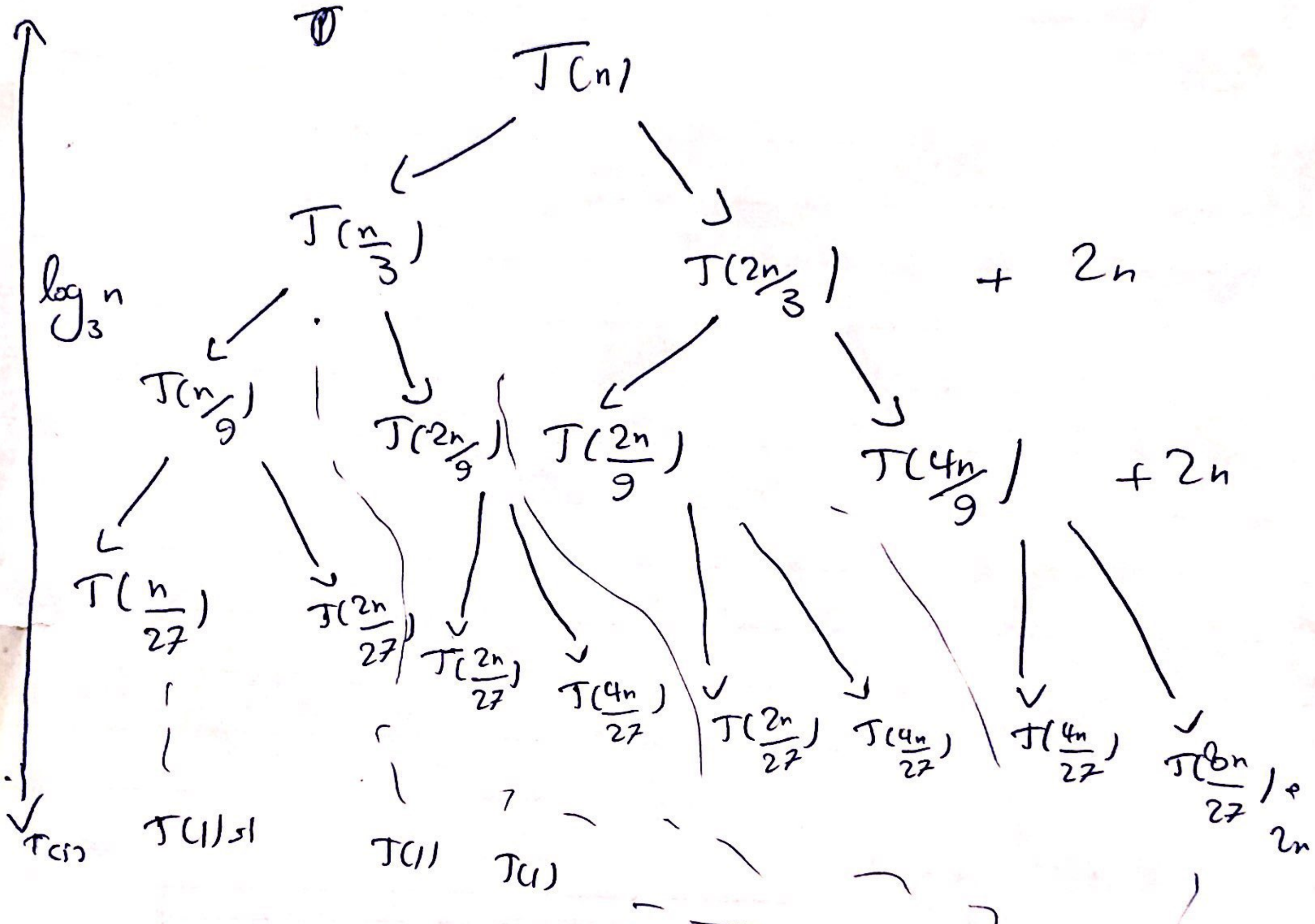
$\Rightarrow 2^n-100$ is $\omega(n^3)$ چون $2^n-100 > \frac{28}{343}n$

$n_0=8$,

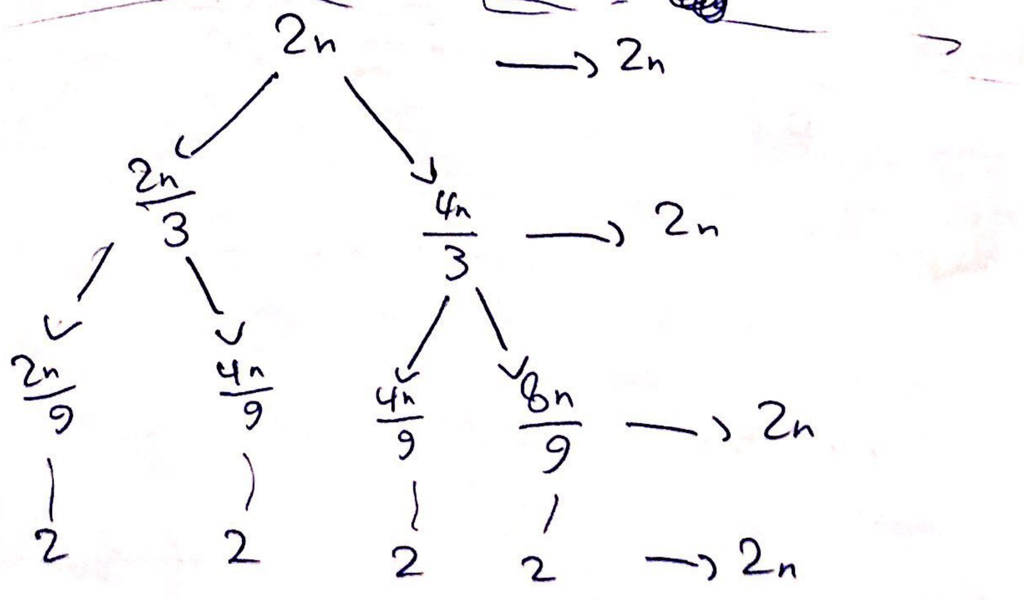
Scanned with CamScanner

2) A)

$T(n) = T(\frac{n}{3}) + T(\frac{2n}{3}) + 2n, T(1)=1, T(2)=1$



$\frac{n}{3^i}=1 \Rightarrow n=3^i \Rightarrow \log_3 n = i$ $T(1)$



$\Rightarrow i2n \Rightarrow 2n\log n$

2) A) حل: $T(n) = 2^{\log_3 n} + 2n\log_3 n$

$\Rightarrow T(n) = 2n\log_3 n = \Omega(n\log n)$

B)

$$F(n) = F(\tfrac{n}{2}) + \log(n) \quad F(1) = 1$$

$$\Rightarrow F(\tfrac{n}{2}) = F(\tfrac{n}{4}) + \log(\tfrac{n}{2})$$

$$\Rightarrow F(n) = F(\tfrac{n}{4}) + \log(\tfrac{n}{2}) + \log(n)$$

$$\Rightarrow F(\tfrac{n}{4}) = F(\tfrac{n}{8}) + \log(\tfrac{n}{8})$$

$$\Rightarrow F(n) = F(\tfrac{n}{8}) + \log(\tfrac{n}{4}) + \log(\tfrac{n}{2}) + \log(n)$$

$$F(\tfrac{n}{8}) = F(\tfrac{n}{16}) + \log(\tfrac{n}{8})$$

$$\Rightarrow F(n) = F(\tfrac{n}{16}) + \log(\tfrac{n}{8}) + \log(\tfrac{n}{4}) + \log(\tfrac{n}{2}) + \log(n)$$

$$\Rightarrow F(n) = F(\tfrac{n}{2^i}) + \log(\underbrace{\tfrac{n}{8} \times \tfrac{n}{4} \times \tfrac{n}{2} \times \dots \times \tfrac{n}{2^i}}_{\log n^i})$$

$$\frac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow n = 2^i \Rightarrow i = \log n$$

$$\Rightarrow \log n^i = \log n^{\log n} = \log^2 n \rightarrow \Theta(\log^2 n)$$

c) $G(n) = 9G\left(\frac{n}{3}\right) + n^2 \log_2 n \quad , \quad G(1) = 1$

$a = 9$

$b = 3$

$K = 2$

$P = 1$

$\log_b a = \log_3 9 = 2 = k \Rightarrow$ case 2

$\Rightarrow P > -1 \Rightarrow \Theta(n^k \log^{p+1} n)$

$\Rightarrow \Theta(n^2 \log^2 n)$

3) $\Theta(0) = 0$

الف) $\Theta(D_i)$: تعداد اعضای بیشتر در D_i ها

push: $\Theta(D_i) - \Theta(D_{i-1}) = 1 \rightarrow \hat{c}_i = 2$

$c_i = 1$

pop: $\Theta(D_i) - \Theta(D_{i-1}) = -1 \Rightarrow \hat{c}_i = 0$

$c_i = 1$

half pop: $\Theta(D_i) - \Theta(D_{i-1}) = \frac{size}{2} \rightarrow \hat{c}_i = 0$

$c_i = \frac{size}{2}$

برای n عملیات : $\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \leq n = \Theta(n)$

Scanned with CamScanner

31) 1) push(n, i, j) $= \Theta(D_i) - \Theta(D_{i-1}) = j - i + 1$

$c_i = i - j + 1$ $\Rightarrow \hat{c}_i = 2$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \leq 2n = \Theta(n)$

31) 2) push(n, j) $\Theta(D_i) - \Theta(D_{i-1}) = 1 - r \Rightarrow \hat{c}_i = 2$

$c_i = r + 1$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \leq 2n = \Theta(n)$

Scanned with CamScanner

(4) الف) برای انتخاب شدن man باید یک بار در $\frac{n}{3}$ ابتدای و یک بار $\frac{2n}{3}$ بعدی دیده شود. احتمال آن را محاسبه می‌کنیم:

$$P(\text{man in first } \tfrac{n}{3}) = \frac{1}{3}$$

man₁ → man₂

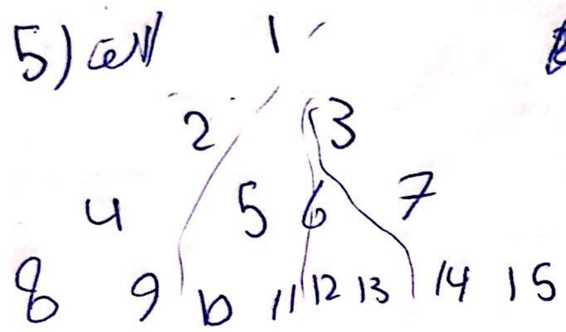
$(\frac{1}{3})$ in first $\frac{n}{3}$:
- $(\frac{1}{3})$ in first $\frac{1}{3}$ $= \frac{1}{9}$
- $(\frac{2}{3})$ in last $\frac{2}{3}$ $= \frac{2}{9}$ ✓

$(\frac{2}{3})$ in last $\frac{2n}{3}$:
- $(\frac{1}{3})$ in first $\frac{1}{3}$ $= \frac{2}{9}$ ✓
- $(\frac{2}{3})$ in last $\frac{2}{3}$ $= \frac{4}{9}$

$$P(\text{man}) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

Scanned with CamScanner

5) الف

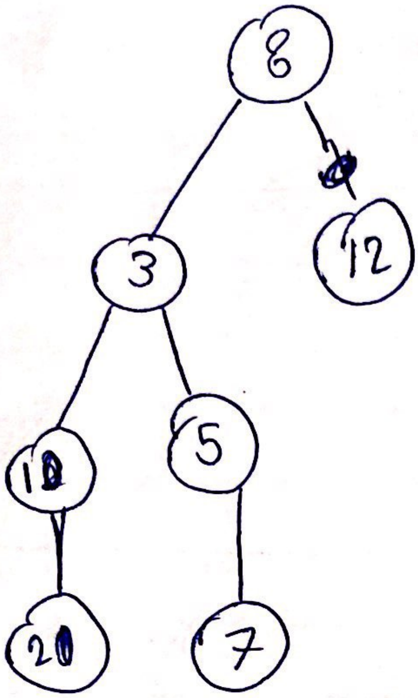


همانطور که در شکل می‌بینیم، index به فرم 2^k-1 است. $k = int[\log n + 1]$

حال اگر n به فرم 2^k-1 باشد، index برابر با n است. حال اگر به این فرم نباشد، برگ مورد نظر در لایه بالاتر است. به عبارتی بزرگترین 2^n کوچکتر است از n

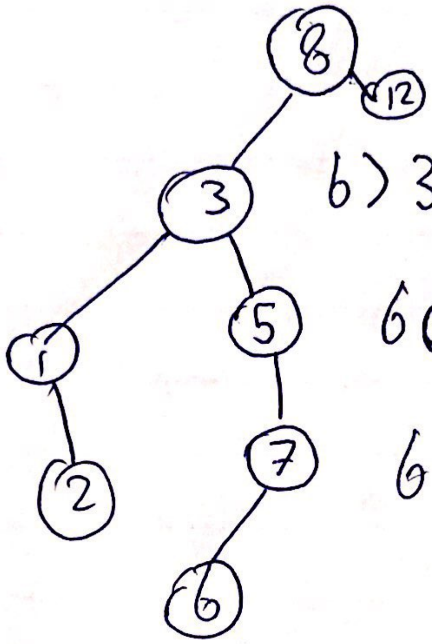
ب) عدد سمت راست ترین برگ را با دست چپ ترین برگ عوض می‌کنیم و همانند insertion برای هرکدام از این دو عدد آن‌ها را با پدر مقایسه می‌کنیم. اگر کوچکتر بود با پدر جابجا می‌کنیم و ممکن است تا ریشه برویم. مرتبه $\log n$ است چون دوبار این عملیات را برای هرکدام انجام می‌دهیم.

الف) b



ب)

$6 < 8$

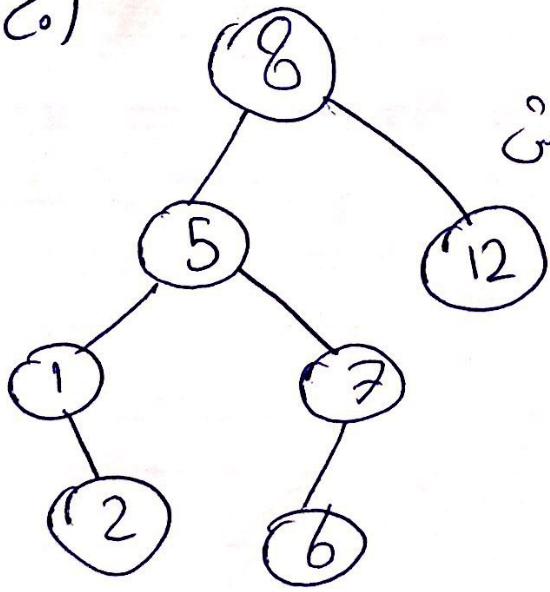


$6 > 3$

$6 > 5$

$6 < 7$

ج)



$3 < 8$

بعد از آنکه ۳ را یافتیم، بچه سمت راستش را جایگزین ۳ می کنیم.