1. $1-\cos 1+i\sin 1$的三角形式为 $2\sin\frac{1}{2}[\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2})]$.

2. $(1+i)^i$的幅角主值是 $\ln\sqrt{2}$ [scribbled out].

3. $f(z)=\sqrt{|xy|}$在$z=0$处(是、否) 不 可导.

$z=0$ 可微 .

4. 设 C 为 正 向 圆 周 $|\mu|=3$, $f(z)=\oint_C \frac{3\mu^2+7\mu+1}{\mu-z}d\mu$， 则 $f'(1+i)=$________.

2. $=e^{i\mathrm{Ln}(1+i)}=e^{i(\ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi))}=e^{-\frac{\pi}{4}-2k\pi}\cdot e^{\ln\sqrt{2}i}$

4. $f(z)=2\pi i\cdot(3z^2+7z+1)$

$f'(z)=2\pi i(6z+7)$

$f'(1+i)=2\pi(-6+13i)$

5.设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-3)^n$在z = 3 + 3i处收敛，但在z = 6处发散，则该级数的收敛半径R = 3

6. z =0为函数$f(z) = \frac{1}{z^3(e^z-1)}$的<u>4级</u>(可去,几级极点,本性)奇点.

3 + 1

7.积分$\int_{-\infty}^{+\infty} 2(t^3+4)\delta(1-t)dt =$ <u>$2(1^3+4)$</u>$=10$

8. $\text{Res}[\frac{z}{z^4-1},\infty] =$ <u>$-C_{-1}$</u>. $=0$

5. $\sum a_n t^n$ 在 $t=3i$ 收敛， $t=3$ 处发散 $\Rightarrow R=3$.

$|t|<3$ $|t|>3$

8. $\frac{z}{z^4-1} = z\cdot\frac{1}{z^4-1} = \frac{z}{z^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z^4}} = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^4}\right)^n$

$1<|z|<+\infty$

1、设复数z满足$\arg(z+2)=\frac{\pi}{3},\arg(z-2)=\frac{5}{6}\pi$，则z为(A)

$-1+\sqrt{3}i$　　B.$-\sqrt{3}+i$　　C.$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　D.$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}I$

2、函数$f(z)=u+iv$解析，则下列命题中错误的是(B)

A.u,v均是调和函数　　B.u是v的共轭调和函数

C.v是u的共轭调和函数　　D.-u是v的共轭调和函数

3、设C为正向单位圆周，则复积分$\oint_C \frac{z}{(2z+1)(z-2)}dz$的值为(A) .

$= \frac{1}{2}\oint_C \frac{z/(z-2)}{z+1/2}dz$.

A.$\frac{\pi}{5}i$ B.$\frac{2\pi}{5}i$ C.πi D.$\frac{6\pi}{5}i$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}-2} = \frac{\pi}{5}i$

4、下列说法正确的是(C)

A.每一个幂级数在它的收敛圆周上处处收敛；

B.每一个幂级数的和函数在收敛圆内可能有奇点；

C.每一个在z_0解析的函数一定可以在z_0的某一邻域内展开成幂级数

D.每一个在z_0连续的函数一定可以在z_0的某一邻域内展开成幂级数.

5、设$f(t)=e^{-t}\sin 5t$，则$\mathcal{L}[f(t)]=$(A)

$\mathcal{L}[\sin 5t] = \frac{5}{s^2+5^2}$

A.$\frac{5}{(s+1)^2+25}$ B.$\frac{s+1}{(s+1)^2+25}$ C.$\frac{5}{(s-1)^2+25}$ D.$\frac{s-1}{(s-1)^2+25}$

三、(7分)设函数$f(z) = a\ln(x^2+y^2) + i\arctan\frac{y}{x}$在$\mathrm{Re}z = x > 0$时解析，试确定a的值.

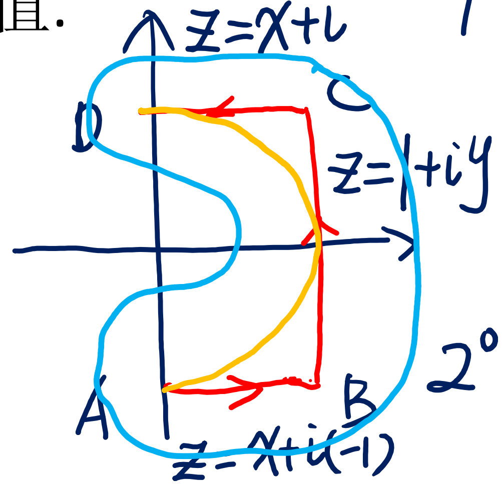
$u = a\ln(x^2+y^2)$ $\quad v = \arctan\frac{y}{x}$ 可偏

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a\cdot\frac{2x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = a\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

四、(7分)设路径C是沿四边形从(0,-1) (1,-1) (1,1) (0,1)，求$\int_C \frac{dz}{z}$的值.



$1^\circ \quad = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD}$.

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x-i} + \int_{-1}^{1} \frac{i\,dy}{1+iy} + \int_1^0 \frac{dx}{x+i} = \cdots\cdots$$

2° 在闭区域解析. 由牛顿—莱布尼兹公式有

$$\int_C \frac{dz}{z} = \operatorname{Ln} z \Big|_{z=-i}^{z=i} = \pi i.$$

3° …… 解析. 与路径无关. $z=e^{i\theta}$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{e^{i\theta}}\cdot i}{\cancel{e^{i\theta}}}\, d\theta = \pi i$$

五、(8分)设C为正向圆周$|z-1|=3$，求$\oint_C \frac{dz}{(z-2)^2 z^3}$的值

$$1^\circ = \oint_{|z|=\delta_1} \frac{\frac{1}{(z-2)^2}}{z^3} dz + \oint_{|z-2|=\delta_2} \frac{1/z^3}{(z-2)^2} dz.$$

$$= \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{1}{(z-2)^2}\right)''\bigg|_{z=0} + \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{1}{z^3}\right)'\bigg|_{z=2} = \frac{3}{8}\pi i + \left(-\frac{3}{8}\pi i\right) = 0.$$

$$2^\circ = 2\pi i\left\{\mathrm{Res}[\quad, 0] + \mathrm{Res}[\quad, 2]\right\}.$$

$$= \cdots\cdots$$

六、(6分)计算积分$\oint_{|z|=1} z^3 sin\frac{1}{z}dz$

$1^\circ = 2\pi i \, Res\left[z^3 \cdot \sin\frac{1}{z}, 0\right]$ $\quad z^3 \cdot \sin\frac{1}{z} = z^3\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \cdots\right)$

$= 0$

$2^\circ = \oint_{|z|=1}\left(z^2 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^2} - \cdots\right)dz$ $\quad \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$

$= 0 + 0 + \cdots + 0$

$= 0$

七、(8分)求拉普拉斯变换$\mathcal{L}[t\overbrace{\int_0^t e^{-3\tau}\sin2\tau d\tau}^{f(t)}]$

解: $\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)$, $\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{1}{s}F(s)$

即 原式 $= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\int_0^t e^{-3\tau}\sin 2\tau \, d\tau]$

$$= -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\mathcal{L}[e^{-3t}\cdot\sin 2t]\right]$$

$$= -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{2}{(s+3)^2+4}\right]$$

$$= \frac{6s^2+24s+26}{s^2[(s+3)^2+4]^2}$$

八、(10分)计算$f(x)=\frac{1}{x^2+2x+3}$的Fourier变换

$$\mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+3} e^{-i\omega x}\, dx$$

当 $\omega<0$，$$= 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[\frac{e^{-i\omega z}}{z^2+2z+3}, -1+\sqrt{2}i\right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}\omega} \cdot e^{i\omega}$$

当 $\omega>0$ $$= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2+2x+3} dx} = \overline{2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{i\omega z}}{z^2+2z+3}, -1+\sqrt{2}i\right]}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\omega} \cdot e^{i\omega}$$

当 $\omega=0$ $$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+3} = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2+2z+3}, -1+\sqrt{2}i\right]$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

九、(7分)若f(z)在分段光滑闭曲线C所围区域内除点z = a外解析，且a是f(z)的n级极点，求证：当$(z-a)^n f(z) = g(z)$时，$\oint_C f(z)dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} g^{(n-1)}(a)$

$\Downarrow$

$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}$　　g(z)解析且 $g(a) \neq 0$

$\oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{g(z)}{(z-a)^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} g^{(n-1)}(a)$ (高阶)

$= 2\pi i \, \mathrm{Res}\left[\frac{g(z)}{(z-a)^n}, a\right]$

1、设$z=\frac{1}{2}(1-3i)$，则$\arg z=$ $-\arctan 3$.

2、一复数对应的向量按逆时针方向旋转$\frac{2}{3}\pi$时对应的复数为$1+i$，则原复数为 $\sqrt{2}(\cos\frac{5}{12}\pi-i\sin\frac{5}{12}\pi)$. $z(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi)=1+i$

3、设$i^i=e^z$，则$\mathrm{Re}z=$ $-\frac{\pi}{2}-2k\pi$.

4、设 C 为单位圆的上半圆周且以 1 为起点、以-1 为终点，则$\int_C |z-1||dz|=$___

$z=e^{i\theta}$, $\theta: 0\to\pi$, $|dz|=|e^{i\theta}\cdot i d\theta|=d\theta$

原$=\int_0^\pi |\cos\theta+i\sin\theta-1|\,d\theta=\int_0^\pi\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}\,d\theta$.

$=4$.

5、 设 C 为正向圆周$|z| = \frac{1}{2}$，则$\oint_C \frac{z^2 cos\frac{1}{z-2}}{(1-z)^2} dz =$ ____0____.

6、设$\frac{e^{\frac{z}{z-i}} sinz}{(z^2+3z+1)e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$的收敛半径R = ____$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$____.

7、$z = \pi$为函数$f(z) = \frac{\sin z}{z-\pi}$的____可去____(可去、极点、本性)奇点.

5. $\oint_C \frac{z^2 \cos\frac{1}{z-2}}{(1-z)^2} dz$

6. $z=i$, $z = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

1、函数$f(z)=|z|^2$在$z=0$处(C)不成立

A. 连续　　B.可导　　C.解析　　D.C—R条件

2、设函数f(z)在区域 D 内解析，则与$f(z)\equiv$常数不等价的命题是(B)

A.$f'(z)\equiv 0$　　B.$\mathrm{Re}f(z)=\mathrm{Im}f(z)\equiv$常数　　C.$\overline{f(z)}$解析　　D.$|f(z)|\equiv$常数

3、下列论断中正确的是(D)

A.对于$\forall z(\neq 0,\infty)$, $\mathrm{Ln}|z|=\ln|z|$　　B.对于$\forall z(\neq\infty)$, $|\cos z|\leq 1$

C.对于$\forall z(\neq\infty)$, $e^z>0$　　D.当 C 为整数时，$(A^B)^C=A^{BC}$

4、设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散，则级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$的收敛半径为(B)

A.0　　B.1　　C.小于 1　　D.大于 1

5、下列级数中，绝对收敛的级数是(D)

A.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{i}{n})$　　B.$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{l_n n}$　　C.$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n})$　　D.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$

三、(10 分)设$v = e^{px}\sin y$，①求p的值使v为整个平面内的调和函数，②并求出解析函数$f(z) = u + iv$

① $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow p = \pm 1.$

② 当 $p=1$ 时，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \Rightarrow u = \int e^x \cos y\, dx = e^x \cos y + \varphi(y)$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y = -e^x \sin y + \varphi'(y)$

$\therefore \varphi(y) = C.$ 即 $f(z) = -e^x \cos y + c + i e^x \sin y$

$f(z) = (-e^{-x} \cos y + c) + i e^{-x} \sin y$

四、(6 分)判断函数$f(z) = 2x^3 + i3y^3$在何处可导？何处解析？

$y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} x$ 可导.　　　　处处不解析.

五、(8 分)写出函数$f(z)=\frac{1}{z(1-z)^2}$分别在圆环域$0<|z|<1, 0<|z-1|<1$内的 Laurent 级数.

$\sum a_n z^n$

$0<|z|<1$:

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-z}\right)'$$

$$=\frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot z^{n-2}$$

$0<|z-1|<1$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z-1)^{n-2}$$

六、(8 分)计算积分$\oint_C \frac{z^{13}}{(z^2+2)^3(z^2-1)^4}dz, C: |z| = 3$取正向.

$$= -2\pi i \, \mathrm{Res}\left[\qquad , \infty\right]$$

$$= 2\pi i \, \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(1+2z^2)^3(1-z^2)^4 \cdot z}, 0\right]$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{(1+2\cdot 0^2)^3(1-0)^4} = 2\pi i$$

七、(8 分)设$z = a$为解析函数$f(z)$的 m 阶零点，求$\mathrm{Res}[\frac{f'(z)}{f(z)}, a]$

$f(z) = (z-a)^m h(z)$

$= m$.

八、(10 分)解微分方程$y''' - 3y'' + 3y' - y = -1, y''(0) = y'(0) = 1, y(0) = 2.$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow y(t) = u(t) + e^{t}$$

九、(7 分)计算$\int_0^{+\infty} te^{-3t}sintdt$

1° $\mathcal{L}[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$, $\quad \mathcal{L}[t\sin t]=-\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$

$$\mathcal{L}[t\sin t] = \int_0^{+\infty} t\cdot\sin t\cdot e^{-st}\,dt$$

$\therefore$ 原 $=\mathcal{L}[t\sin t]\big|_{s=3}=\frac{3}{50}$

$s=i$

$\Uparrow$

2° $\mathcal{L}[t\cdot e^{-3t}]=\frac{1}{(s+3)^2}$ $\quad$ 记 $s=\alpha+i\beta$ $\quad$ $\alpha=0$, $\beta=1$.

$$\mathcal{L}[t\cdot e^{-3t}] = \int_0^{+\infty} t\cdot e^{-3t}\cdot e^{-st}\,dt=\int_0^{+\infty} t\cdot e^{-3t}\cdot e^{-\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t)\,dt.$$

$$\int_0^{+\infty} t\cdot e^{-3t}\cdot e^{-\alpha t}\cdot\sin\beta t\,dt=-\mathrm{Im}\{\mathcal{L}[t\cdot e^{-3t}]\}=-\mathrm{Im}\frac{1}{(s+3)^2}=\frac{3}{50}$$

3° $=\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}\left(t\cdot e^{(-3+i)t}-t\cdot e^{-(3+i)t}\right)dt=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(3-i)^2}-\frac{1}{(3+i)^2}\right)=\frac{3}{50}$

六．(20 分)设 $h(z)=\frac{1}{1-e^{-z}}-\frac{1}{z}-\frac{2z}{z^2+4\pi^2}$.

(1) (6 分) 判断 0 和 $\pm 2\pi i$ 作为 $h(z)$ 的奇点类型. 同理 可去.

(2) (7 分) 求出 $h(z)$ 在原点去心邻域上的 Laurent 级数（写出至少三项的系数），并指出该级数的收敛范围.

$z=0$: $\frac{1}{1-e^{-z}}-\frac{1}{z}=\frac{z-1+e^{-z}}{z(1-e^{-z})}$ 2 / 2 $\Rightarrow$ 可去.

1 + 1

(2) $0<|z|<2\pi$ $\sum a_n z^n$ $\frac{1}{z}$不动

$\frac{2z}{z^2+4\pi^2}=\frac{z}{2\pi^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z^2}{4\pi^2}}=\frac{z}{2\pi^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{z^2}{4\pi^2}\right)^n$

$\frac{1}{1-e^{-z}}=\frac{1}{z-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-\cdots}=\frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\frac{z}{12}-\frac{1}{4}z^2+\cdots$

$\therefore h(z)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{2\pi^2}\right)z+\left(\frac{1}{4\pi^3}-\frac{1}{4}\right)z^2+\cdots$

22号下午

13:30—15:30

理A二楼

教师活动中心