2

# 浙江工业大学2014/2015(二)期末考试试卷

## 《复变函数与积分变换》 A卷 2015.06

学院__________ 班级__________ 学号__________ 姓名________

任课教师__________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | |

一、填空题(本题满分30分, 每小题3分)

1. 设 $z=1-\sqrt{3}i$, 则 $\arg(2-z)=$_________.

2. $(1+i)^{1+i}=$_________.

3. 设 $z=x-iy$, 则 $\mathrm{Im}(e^{\frac{1}{z}})=$_________.

4. $\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z}dz=$_________.

5. 设 $C$ 为正向圆周 $|z|=2$ , 则 $\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}dz=$_________.

6. $\frac{1}{z(4-3z)}$ 在 $z_0=1+i$ 处展开成泰勒级数的收敛半径为_________.

7. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-i)^n(1+\sin\frac{1}{n})^{-n^2}z^n$ 的收敛半径 $R=$_________.

8. 设 $f(z)=\frac{1-e^{2z}}{z^4}$, 则 $\mathrm{Res}[f(z),0]=$_________.

9. $\mathscr{F}[tu(t)]=$_________, 其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数.

10. 设 $f(t)=e^{-3t}\sin 2t$, 则 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $F(s)=$_________.

二、单项选择题(本题满分15分, 每小题3 分)

1. 下列叙述正确的是 (　　)

(A) 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在且有限, 则$z_0$ 是$f(z)$ 的可去奇点;

(B) $\lim\limits_{z\to 0} z\sin\frac{1}{z} = 0$;

(C) 若 $f(z)$ 在区域 $D$ 内解析，则 $|f(z)|$ 也在 $D$ 内解析;

(D) 若 $u$ 是 $D$ 内的调和函数, 则 $f = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ 是 $D$ 内的解析函数.

2. 下列级数为绝对收敛的是 (　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$　　(B) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$

(C) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(6+5i)^n}{8^n}$　　(D) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}$

3. $z=0$ 是 $\frac{z-\sin z}{z^6}$ 的 (　　)

(A) 可去奇点　(B) 3 级极点　(C) 4 级极点　(D) 5 级极点

4. 设 $C$ 为正向圆周 $|z| = 3$, 则 (　　)

(A) $\oint_C \frac{3}{z-2} dz = 0$　　(B) $\oint_C \frac{3(z-1)}{z-2} dz = 0$

(C) $\oint_C \frac{3}{(z-2)^2} dz = 0$　　(D) $\oint_C \frac{3(z-1)}{(z-2)^2} dz = 0$

5. 设 $f(t) = \delta(2-t) + e^{jw_0 t}$, 则 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $\mathscr{F}[f(t)]$ 为: (　　)

(A) $e^{-2wj} + 2\pi\delta(w - w_0)$　　(B) $e^{2wj} + 2\pi\delta(w - w_0)$

(C) $e^{-2wj} + 2\pi\delta(w + w_0)$　　(D) $e^{2wj} + 2\pi\delta(w + w_0)$

三、(6分) 设 $x^2+axy+by^2+(cx^2+dxy+y^2)i$ 为解析函数, 试确定 $a$、$b$、$c$、$d$ 的值.

四、(10分) 将函数 $f(z)=\frac{1}{z(1-z)^2}$ 分别在圆环 $0<|z|<1$ 以及 $0<|z-1|<1$ 内展开成洛朗级数.

五、(6分) 已知 $v(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$, 求一解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, 并使 $f(2)=0$.

六、(本题满分15分, 每小题5分) 计算以下积分的值(积分圆周均取正向).

1. $\oint_{|z|=2}\frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}dz$

2. $\oint_{|z|=2}\frac{z}{(z^4-1)(z-3)}dz$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+9)} dx$

七、(10分) 求函数 $f(t) = e^{-|t|}\cos t$ 的 Fourier 变换, 并证明:

$$\int_0^{+\infty} \frac{w^2+2}{w^4+4} \cos(wt) dw = \frac{\pi}{2} e^{-|t|} \cos t.$$

八．(8分) 利用 Laplace 变换解如下的微分方程:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -2.$$