浙江工业大学 2019/2020 学年第一学期

《复变函数与积分变换》试卷

班级________________ 姓名______________ 学号_____________ 教师姓名________

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总评
计分									

一. 填空题（共 36 分，每空 3 分）

1. 若 $z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$，那么 $z^{2020}+z^{2019}+1=$____________

2. 对于 $0\le\theta<2\pi$，如果 $\left|e^{i\theta}-1\right|=2$ ，那么 $\theta=$___________

3. $\mathrm{Ln}(1-i)=$_________________

4. 判断：对任意的复数 z 均有 $|\cos z|\le 1$____________（正确打√，错误打 ×）

5. 积分 $\oint_{|z|=2}\frac{\bar{z}}{|z|}dz=$____________________（积分曲线取正向）

6. 幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin in\ z^n$ 的收敛半径 $R=$ ___________

7. 无穷远点 ∞ 是否为函数 $f(z)=\frac{1}{z(e^z-1)}$ 的孤立奇点___________(请填"是"或"否")

8. 留数 $Res[\frac{e^z}{(z-1)(z-2)},\infty]$ 的值为_________________

9. 设 $f_1(t)=\begin{cases}e^t, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$ ，$f_2(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$ 则卷积 $f_1(t)*f_2(t)$=_____________

10 设 $F(\omega)=2\pi\delta(\omega+\omega_0)$ 其中 ω_0 为常数，则 $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=$_____________

11. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |t|\le 1\\ 0, & t>1\end{cases}$，则其 Fourier 变换 $\mathcal{F}[f(x)]$=________________

12. 设 $F(s)=\frac{1}{s^2+a^2}$ 其中 a 为常数，则 $F(s)$ 的 Laplace 逆变换为_______________

二. 利用 Euler 公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 证明 $\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$。（4分）

三. 已知 $u(x,y)=e^x\cos y+e^{-x}\cos y$

(1) 验证 $u(x,y)$ 为调和函数；

(2) 求 $v(x,y)$ 使得函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为解析函数。（6 分）

四. 考虑 Fibonacci 数列，$a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, (n 为非负整数)。定义以 Fibonacci 数列为系数的幂级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ (称为 Fibonacci 数列的生成函数)。

(1) 对每个非负整数 n, 求 $Res[\frac{f(z)}{z^{n+1}}, 0]$;

(2) 验证 $(1 - z - z^2)f(z)$=1;

(3) 试利用 (1), (2) 的结论求 a_n 的通项公式。（10 分）。

五. 在圆环域 $0<|z-1|<1$ 中，分别将下列函数展开成洛朗级数（10 分）

(1) $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z-2)}$;　　　　(2) $f(z)=\sin\frac{z}{z-1}$

六. 计算下列积分（共 15 分，每题 5 分）

(1) $\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{e^z}{z^2+1}dz$

(2) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z^4} dz$

(3) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+sin^2\theta}\, d\theta$

七. 设函数 $f(t)=e^{-2|t|}\sin 2t$，其中 $-\infty < t <+\infty$.

(1) 求 $f(t)$ 的 Fourier 变换;

(2) 证明 $\int_0^{+\infty} \frac{\omega}{\omega^4+64}\sin\omega t\ d\omega = \frac{\pi}{16}e^{-2|t|}\sin 2t$. (10 分)

八. 利用 Laplace 变换求解微分方程 （9 分）

$$y''(t)+4y(t)=\sin t,\ y(0)=y'(0)=0.$$