浙江工业大学 2018/2019 学年

第 一 学期试卷

课程________________________班级____________________

姓名____________学号______________教师姓名__________

题序	一	二	三	四	五	六	七	总评
计分								

一．填空题（每空 3 分，共 33 分）

1. 设 $z=2019-2018i$，则 $\arg(z)=$ $-\arctan\frac{2018}{2019}$。

2. $(1+i)^{1+i}$ 的模为 $2e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)},k\in Z$。

3. 判断命题真假：$\lim\limits_{z\to 0} z\sin\frac{1}{z}=0$。 × (对打√，错打×)

4. 设 C 为正向圆周 $|z|=2017$，则 $\oint\frac{z^2\cos\frac{1}{z-2019}}{(2018-z)^2}dz=$ 0。

5. $z=0$ 是函数 $f(z)=\frac{z-\sin z}{z^{2019}}$ 的 2016 级极点。

6. 函数 $\frac{1}{z(2019-2017z)}$ 在 $z_0=1+i$ 处展开成泰勒级数的收敛半为：$\frac{\sqrt{2017^2+4}}{2017}$。

7. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+i)^n z^n$ 的收敛半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。

8. 设函数 $f(z)=\frac{1}{z^2\sin z}$，则 $\mathrm{Res}\left[f(z),0\right]=$ $\frac{1}{6}$。

9. 设 $u=\frac{-x}{x^2+y^2}$ 是解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的实部，则 $f'(2)=$ $\frac{1}{4}$。

10. 设 $f(t)=\delta(2019-t)+e^{j\omega_0 t}$，则 $f(t)$ 的 Fourier 变换 F $[f(t)]=$ $e^{-2019\omega i}+2\pi\delta(\omega-\omega_0)$。

11. 设 $f(t)=e^{-2019t}\delta(t)-2019e^{-2019t}u(t)$，则 $f(t)$ 在半平面 $\mathrm{Re}(s)>-2019$ 内的 Laplace 变换 $F(s)=$ $\frac{s}{s+2019}$。

二. 单项选择题（每题 3 分，共 6 分）。

1. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+1)^n$在$z=2018$处发散，则它必在 （ C ）

A. $z=-2019$收敛 B. $z=-2020$收敛 C. $z=-2021$发散 D. 以上全不正确

2. $z=\infty$是$f(z)=\frac{\cos z}{z}$的 （ C ）

A. 可去奇点 B. 一级极点 C. 本性奇点 D. 非孤立奇点

三. (本题 8 分) 设$u(x,y)=y^3-3x^2y$，

(1). 验证$u(x,y)$是调和函数；(2). 求$u(x,y)$的共轭调和函数$v(x,y)$.

解 (1) $u_{xx}=-6y$, $u_{yy}=6y \Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$

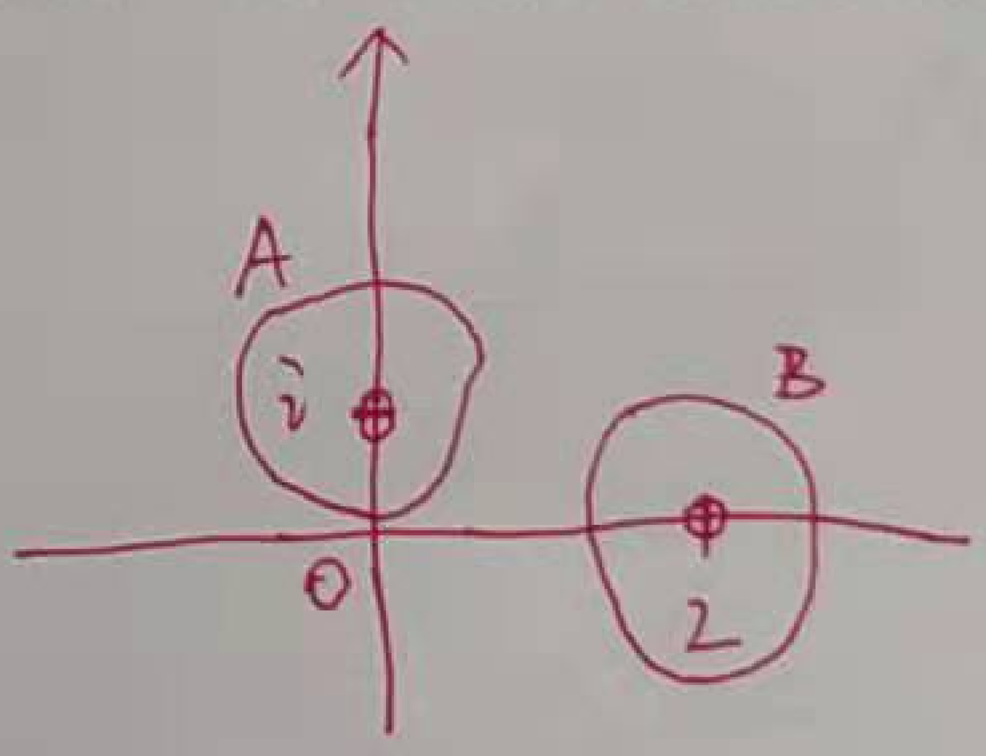
(2) $\begin{cases} u_x=v_y=-6xy \\ u_y=-v_x=3y^2-3x^2 \end{cases} \Rightarrow v(x,y)=-3xy^2+f(x)$

$v_x=-3y^2+f'(x)=-(3y^2-3x^2)$

故 $f'(x)=3x^2$, $f(x)=x^3+C$, $v(x,y)=x^3-3xy^2+C$

四. (本题 12 分) 求函数$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-i)}$在孤立奇点处的去心邻域内的洛朗级数。

解: 奇点: 2, i, ∞?



(A): $f(z)=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z-i+i-2}$

$=(z-i)^{-1}\cdot(i-2)^{-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-i}{i-2}}$

$=(z-i)^{-1}\cdot(i-2)^{-1}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-i}{2-i}\right)^n$

∞ ∈ ?

(B): $f(z)=(z-2)^{-1}\cdot\frac{1}{2-i+z-i}$

$=(z-2)^{-1}\cdot(2-i)^{-1}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{z-i}{2-i}\right)}=(z-2)^{-1}(2-i)^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-i}{i-2}\right)^n$

五.（每小题 7 分，共 21 分）计算以下积分的值（积分闭曲线均取正向）。

(1) $\oint_{|z|=3} \frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)} dz$　孤立奇点：$\pm i$，± 2 全落在 $|z|=3$ 内．因此

解：$I = -2\pi i \times \mathrm{Res}[f(z), \infty] = +2\pi i \times \mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2}, 0]$

$= 2\pi i \times \mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)(1-4z^2)}, 0\right]$ （0不为奇点）.

$= 0$

(2) $\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-2)^{2019}} dz$

解：奇点：$z=2$．2019级极点．

$I = 2\pi i \times \frac{1}{2018!} \lim\limits_{z \to 2} \left[(z-2)^{2019} \times \frac{e^z}{(z-2)^{2019}}\right]^{(2018)}$

$= \frac{2\pi i e^2}{2018!}$

(3) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{5}{4}+\sin x} dx$

解：令 $z=e^{ix} \Rightarrow dx = \frac{1}{iz} dz$ 则：

$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{\frac{5}{4}+\frac{z-z^{-1}}{2i}} \cdot \frac{1}{iz} dz = \oint_{|z|=1} \frac{4}{(2z+i)(z+2i)} dz$

$= 2\pi i \times \{\mathrm{Res}\left[\frac{4}{(2z+i)(z+2i)}, -\frac{i}{2}\right]$

$= \frac{16\pi}{3}$

二. 单项选择题 浙江工业大学考试命题

六. (10 分) 求 $f(t)=e^{-2019|t|}$ 的 Fourier 变换，并证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(wt)}{2019^2+w^2}dw=\frac{\pi}{4038}e^{-2019|t|}$$

解：(1) $\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iwt}dt=\int_0^{+\infty}e^{-2019t}e^{-iwt}dt+\int_{-\infty}^{0}e^{2019t}e^{-iwt}dt=\frac{1}{2019+iw}+\frac{1}{2019-iw}=\frac{4038}{2019^2+w^2}=F(w).$

(2) 对 $F(w)$ 求逆变换：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4038}{2019^2+w^2}\cdot e^{iwt}dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4038\times(\cos wt+i\sin wt)}{2019^2+w^2}dw=f(t)$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\cos wt}{2019^2+w^2}dw=\frac{\pi}{4038}e^{-2019|t|}$$

七. (本题 10 分)：利用 Laplace 变换求下列微分方程的解：

$$y''-3y'+2y=e^{3t},\quad y(0)=y'(0)=0.$$

解：设 $\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$，对方程两边取 Laplace 变换，利用初始条件：

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-3(sY(s)-y(0))+2Y(s)=\frac{1}{s-3}$$

$$\Rightarrow s^2Y(s)-3sY(s)+2Y(s)=\frac{1}{s-3}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s^2-3s+2)(s-3)}=\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{s-1}+\frac{-1}{s-2}+\frac{\frac{1}{2}}{s-3}$$

$\therefore$ $y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{2}e^{t}-e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t}$