浙江工业大学2014/2015(二)期末考试试卷

《复变函数与积分变换》 A卷 2015.06

学院__________ 班级__________ 学号__________ 姓名________

任课教师__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、填空题(本题满分30分, 每小题3分)

1. 设 $z = 1 - \sqrt{3}i$, 则 $\arg(2 - z) =$ $1+\sqrt{3}i$ $\boxed{\frac{\pi}{3}}$.

2. $(1+i)^{1+i} =$ $e^{(1+i)[\ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)]} = \boxed{e^{\ln\sqrt{2}-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi)}}$ $k\in\mathbb{Z}$.

3. 设 $z = x - iy$, 则 $\mathrm{Im}(e^{\frac{1}{z}}) =$ $e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cdot\sin\frac{y}{x^2+y^2}$. $e^{\frac{1}{x-iy}} = e^{\frac{x+iy}{x^2+y^2}}$

4. $\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z}dz =$ $\frac{1}{2}e^{2z}\Big|_{-\pi i}^{3\pi i} = 0$.

5. 设 C 为正向圆周 $|z| = 2$, 则 $\oint_C \frac{\cos\pi z}{(z-1)^5}dz =$ $2\pi i\cdot\frac{1}{4!}(\cos\pi z)^{(4)}\big|_{z=1} = -\frac{\pi^5}{12}i$.

6. $\frac{1}{z(4-3z)}$ 在 $z_0 = 1 + i$ 处展开成泰勒级数的收敛半径为 $\frac{\sqrt{10}}{3}$. $1+i$ 0 $\frac{4}{3}$

7. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-i)^n(1+\sin\frac{1}{n})^{-n^2}z^n$ 的收敛半径 $R =$ e.

8. 设 $f(z) = \frac{1-e^{2z}}{z^4}$, 则 $\mathrm{Res}[f(z), 0] =$ $-\frac{2^3}{3!} = -\frac{4}{3}$. $\mathscr{F}[u(t)] = \frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$

9. $\mathscr{F}[tu(t)] =$ $-\frac{1}{\omega^2}+\pi\delta'(\omega)i$, 其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数. $-\frac{1}{i\omega^2}+\pi\delta'(\omega)$

10. 设 $f(t) = e^{-3t}\sin 2t$, 则 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $F(s) =$ $\frac{2}{(s+3)^2+4}$.

二、单项选择题(本题满分15分, 每小题3 分)

1. 下列叙述正确的是 (D)

(A) 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在且有限, 则z_0 是$f(z)$ 的可去奇点;

(B) $\lim\limits_{z\to 0} z\sin\frac{1}{z}=0$;

(C) 若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则 $|f(z)|$ 也在 D 内解析;

(D) 若 u 是 D 内的调和函数, 则 $f=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$ 是 D 内的解析函数.

2. 下列级数为绝对收敛的是 (C)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ (B) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$

(C) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(6+5i)^n}{8^n}$ (D) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$

3. $z=0$ 是 $\frac{z-\sin z}{z^6}$ 的 (B)

(A) 可去奇点 (B) 3 级极点 (C) 4 级极点 (D) 5 级极点

4. 设 C 为正向圆周 $|z|=3$, 则 (C)

(A) $\oint_C \frac{3}{z-2}dz=0$ (B) $\oint_C \frac{3(z-1)}{z-2}dz=0$

(C) $\oint_C \frac{3}{(z-2)^2}dz=0$ (D) $\oint_C \frac{3(z-1)}{(z-2)^2}dz=0$

5. 设 $f(t)=\delta(2-t)+e^{jw_0t}$, 则 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $\mathscr{F}[f(t)]$ 为: (A)

(A) $e^{-2wj}+2\pi\delta(w-w_0)$ (B) $e^{2wj}+2\pi\delta(w-w_0)$

(C) $e^{-2wj}+2\pi\delta(w+w_0)$ (D) $e^{2wj}+2\pi\delta(w+w_0)$

三、(6分) 设 $x^2+axy+by^2+(cx^2+dxy+y^2)i$ 为解析函数, 试确定 a、b、c、d 的值.

四、(10分) 将函数 $f(z)=\frac{1}{z(1-z)^2}$ 分别在圆环 $0<|z|<1$ 以及 $0<|z-1|<1$ 内展开成洛朗级数.

三. 解: 方法1. 设 $f(z)=x^2+axy+by^2+(cx^2+dxy+y^2)i$

$\because f(z)$ 解析

$\therefore f(z)=z^2+cz^2i$

$=(x+iy)^2+ci(x+iy)^2$

$=x^2+2xyi-y^2+ci(x^2-y^2)-2cxy$

$=x^2-y^2-2cxy+i[2xy+cx^2-cy^2]$ 4分

$\therefore b=-1 \quad c=-1 \quad d=2. \quad a=-2c=2.$ 6分

方法2. 设 $u=x^2+axy+by^2$, $v=cx^2+dxy+y^2$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=2x+ay. \quad \frac{\partial v}{\partial y}=dx+2y. \quad \Rightarrow d=2. \quad a=2$ 2分

$\frac{\partial u}{\partial y}=ax+2by. \quad \frac{\partial v}{\partial x}=2cx+dy.$ 4分 $\quad c=-\frac{a}{2}=-1. \quad b=-\frac{d}{2}=-1.$

四. 解: (1) 在 $0<|z|<1$ 上.

$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{1-z}\right]^2=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{1-z}\right)'$

$=\frac{1}{z}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot z^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n\,z^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{n-1}$

$=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)z^n$ 5分

在 $0<|z-1|<1$ 上.

$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{z}$

$=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1+z-1}$

$=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z-1)^{n-2}=\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$

$=\sum_{n=-2}^{\infty}(-1)^{n+2}(z-1)^n$

$=\sum_{n=-2}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$ 6分

五、(6分) 已知 $v(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$, 求一解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, 并使 $f(2)=0$.

六、(本题满分15分, 每小题5分) 计算以下积分的值(积分圆周均取正向).

1. $\oint_{|z|=2}\frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}dz$

2. $\oint_{|z|=2}\frac{z}{(z^4-1)(z-3)}dz$

五. 解: $\because\ v(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$

$\therefore\ \frac{\partial v}{\partial x}=y\cdot -(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2x=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\therefore\ f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

$=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+i\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$=\frac{1}{z^2}.$ 4分

$\therefore\ f(z)=-\frac{1}{z}+C$

$\because\ f(2)=0.\ \therefore\ C=\frac{1}{2}.$

$\therefore\ f(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{x^2+y^2}\right)+i\frac{y}{x^2+y^2}.$ 6分

六. 解: 1. $\oint_{|z|=2}\frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}dz=2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[\frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)},1\right]\right)$

$=2\pi i\left(\frac{d}{dz}\left(\frac{\sin^2 z}{z-1}\right)\Big|_{z=0}+\frac{\sin^2 z}{z^2}\Big|_{z\to 1}\right)$ 3分

$=2\pi i\left(0+\frac{\sin^2 1}{1}\right)$

$=2\pi i\cdot\sin^2 1$ 5分

$+\frac{1}{4(3-i)}+\frac{1}{4(3+i)}$

$\frac{6}{40}$

2. $\oint_{|z|=2}\frac{z}{(z^4-1)(z-3)}dz=-2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z^4-1)(z-3)},\infty\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z^4-1)(z-3)},3\right]\right)$

$=-2\pi i\left(-\mathrm{Res}\left[\frac{\frac{1}{z}}{(\frac{1}{z^4}-1)(\frac{1}{z}-3)}\frac{1}{z^2},0\right]+\frac{z}{z^4-1}\Big|_{z=3}\right)$ 3分

$=-2\pi i\cdot\left(0+\frac{3}{80}\right)$

$=-\frac{3\pi}{40}i.$ 5分

$=2\pi i\left(\frac{z}{(\ )(z-3)}\Big|_{z=1}+\frac{z}{(\ )(\ )}\Big|_{z=-1}+\frac{z}{(\ )}\Big|_{z=\pm i}\right)$

$=2\pi i\left(\frac{1}{2\cdot 2\cdot -2}+\frac{-1}{2(-2)(-4)}+\frac{i}{-2\cdot 2i(i-3)}\right.$

$\left.-\frac{1}{8}\quad -\frac{1}{16}\quad+\frac{-i}{-2\cdot -2i(-i-3)}\right)$

$=2\pi i\left(\frac{-10-5+12}{80}\right)=-\frac{3\pi}{40}i.$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+9)} dx$

七、(10分) 求函数 $f(t) = e^{-|t|}\cos t$ 的 Fourier 变换, 并证明:

$$\int_0^{+\infty} \frac{w^2+2}{w^4+4}\cos(wt)dw = \frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t.$$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+9)}dx = 2\pi i \cdot \left(Res\left[\frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+9)}, 2i\right] + Res\left[\frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+9)}, 3i\right] \right)$

$= 2\pi i \cdot \left(\frac{z^2}{(z+2i)(z^2+9)}\Big|_{z=2i} + \frac{z^2}{(z^2+4)(z+3i)}\Big|_{z=3i} \right)$ 3分

$= 2\pi i \cdot \left(\frac{-4}{4i\cdot 5} + \frac{-9}{-5\cdot 6i} \right)$

$= 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{10} \right)$

$= \frac{\pi}{5}.$ 5分

七. 解: $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{0} e^{t}\cos t \cdot e^{-i\omega t} dt$

$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \cdot e^{-(1+i\omega)t} dt + \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \cdot e^{(1-i\omega)t} dt$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(1+i(\omega-1))t}}{-(1+i(\omega-1))} + \frac{e^{-(1+i(\omega+1))t}}{-(1+i(\omega+1))} \right]_{t=0}^{+\infty}$

$+ \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(1-i(\omega-1))t}}{1-i(\omega-1)} + \frac{e^{(1-i(\omega+1))t}}{1-i(\omega+1)} \right]_{t=-\infty}^{0}$

$1+(\omega-1)^2$
$+(\omega+1)^2 + (\omega^2-1)^2$

$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{1+i(\omega-1)} + \frac{1}{1+i(\omega+1)} \right]$

$+ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-i(\omega-1)} + \frac{1}{1-i(\omega+1)} \right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{1+(\omega-1)^2} + \frac{2}{1+(\omega+1)^2} \right]$

$= \frac{1+(\omega+1)^2 + 1+(\omega-1)^2}{[1+(\omega-1)^2][1+(\omega+1)^2]} = \frac{2\omega^2+4}{\omega^4+4}$ 5分

由 Fourier 积分定理

$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(\omega^2+2)}{\omega^4+4}(\cos\omega t + i\sin\omega t) d\omega$

$= \frac{1}{\pi}\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2+2}{\omega^4+4} \cdot \cos\omega t\, d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cdot \cos\omega t\, d\omega$

∴ 由 $f(t)$ 的 [illegible]: $\int_0^{+\infty} \frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\, d\omega = \frac{\pi}{2} f(t) = \frac{\pi}{2} e^{-|t|}\cos t.$ 10分

八. (8分) 利用 Laplace 变换解如下的微分方程:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2e^t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -2.$$

解：设 $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$.

则

$$[s^3Y(s) - s^2 + 2] - 3[s^2Y(s) - s] + 3[sY(s) - 1] - Y(s) = \frac{2}{(s-1)^3}$$ 3分

$$\therefore Y(s) = \frac{\frac{2}{(s-1)^3} + s^2 - 2 - 3s + 3}{s^3 - 3s^2 + 3s - 1} = \frac{2}{(s-1)^6} + \frac{\overset{(s-1)^2-(s-1)-1}{s^2-3s+1}}{(s-1)^3}$$

$$= \frac{2}{(s-1)^6} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3}.$$ 5分

$$\therefore y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

$$= 2\cdot\frac{t^5}{5!}\cdot e^t + e^t - te^t - \frac{t^2}{2!}\cdot e^t.$$

$$= \frac{t^5}{60}e^t + e^t - te^t - \frac{t^2}{2}e^t.$$ 8分