One-sided crossing minimization

Бывальцева Анна, БПИ211

15 июня 2024 г.

Дано A bipartite graph $G = ((A\dot{\cup}B), E)$ and a linear order of A. $m = |B|$.

MILP

Я пробовала только MILP.

Необходимо минимизировать пересечения ребер в двудольном графе, где одна доля зафиксирована:

$$\text{minimize} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} \sum_{k \in N(i)} \sum_{l \in N(j) \setminus k} q_{kl}^1 + q_{ij}^2 - 2C_{klij},$$

$$\text{subject to} \begin{cases} \forall 1 \leq i < j \leq m, k \in N(i), l \in N(j) \setminus k: & C_{klij} - q_{kl}^1 \leq 0, \\ \forall 1 \leq i < j \leq m, k \in N(i), l \in N(j) \setminus k: & C_{klij} - q_{ij}^2 \leq 0, \\ \forall 1 \leq i < j < k \leq m: & 0 \leq q_{ij}^2 + q_{jk}^2 - q_{ik}^2 \leq 1, \\ & q_{ij}^2, C_{klij} \in 0, 1. \end{cases}$$

Где q_{kl}^1 — это константа, которая равна 1, если вершина k левее l ($k, l \in A$) и наоборот равна 0, когда k $>$ l.

q_{ij}^2 — бинарная переменная, которая равна 1, если вершина номиналом i находится левее вершины j в финальной перестановке B ($\pi_B(i) < \pi_B(j)$), иначе 0.

C_{ijkl} — равна 1, если ребра iEk и jEl не пересекаются и $\pi_B(i) < \pi_B(j)$, иначе 0. То есть по сути $C_{ijkl} = q_{kl}^1 \cdot q_{ij}^2$.

$N(i)$ — множество смежных вершин вершине i.

Целевая функция означает, что мы минимизируем кол-во пар ребер, где в доле A вершины k и l находятся не в таком же порядке, что вершины i и j в доле B. (минимизируем кол-ва случаев $\pi_B(i) < \pi_B(j)$, $\pi_A(k) > \pi_A(l)$ и случай $\pi_B(i) > \pi_B(j)$, $\pi_A(k) < \pi_A(l)$)

Первые 2 неравенства говорят о том, что если $\pi_B(k) > \pi_B(l)$, то C_{ijkl} не может быть 1.

Третье неравенство задает порядок вершин доли B. Оно говорит о том, если вершина i левее вершины j, а вершина j левее k, то i тоже левее и т.д.

Заметим, что $q_{jk}^2 = 1 - q_{kj}^2, k \neq j$, поэтому можно задать q^2 только для $k < j$.