שאלה 1 - סעיף ד

טענה, R הנו יחס שקילות.

נסמן $K=\{1,2,3,4\}$

הוכחה:

על מנת להוכיח ש R הנו יחס שקילות נצטרך להוכיח כי הוא טרנזיטיבי, רפלקסיבי וסימטרי

הוכחת סימטריות: צ"ל $ARB \overset{?}{\Leftarrow} BRA$

$ARB \Leftarrow A\cap\{1,2\}=B\cap\{1,2\} \Leftarrow B\cap\{1,2\}=A\cap\{1,2\} \Leftarrow BRA$

מ.ש.ל   תכונת שוויון

הוכחת רפלקסיביות: צ"ל ARA לכל A

$A\cap\{1,2\}=A\cap\{1,2\} \Leftarrow ARA$ $\Leftarrow$ מכיון ברור ש ARA לכל A לפי תכונת שוויון

הוכחת טרנזיטיביות: נניח xRy ו yRz צ"ל כי xRz

$x\cap\{1,2\}=y\cap\{1,2\} \Leftarrow xRy$

$y\cap\{1,2\}=z\cap\{1,2\} \Leftarrow yRz$

לפי תכונת שוויון $x\cap\{1,2\}=y\cap\{1,2\}=z\cap\{1,2\} \Rightarrow xRz$ מ.ש.ל

הוכחנו כי היחס R הנו סימטרי, רפלקסיבי וטרנזיטיבי ולכן הוכחנו כי הוא יחס שקילות.

מציאת מחלקות שקילות של R:

$S_0=\{A / A\in P(K), A\cap\{1,2\}=\emptyset\}$

$S_1=\{A / A\in P(K), A\cap\{1,2\}=\{1\}\}$

$S_2=\{A / A\in P(K), A\cap\{1,2\}=\{2\}\}$

$S_3=\{A / A\in P(K), A\cap\{1,2\}=\{1,2\}\}$

נוכיח כי $P(K)=\bigcup_{i=0}^{3} S_i$ על מנת להראות כי כל המחלקות מעלה אכן מחלקות שקילות.

על מנת להוכיח שיוויון נצטרך להוכיח כי $P(K)$ מוכל ב $\bigcup_{i=0}^{3} S_i$ ו $\bigcup_{i=0}^{3} S_i$ מוכל ב $P(K)$:

$\bigcup_{i=0}^{3} S_i\subseteq P(K)$: כי ברור מכיוון שעבור כל $A\in S_i$ מתקיים $A\in P(K)$

$P(K)\subseteq\bigcup_{i=0}^{3} S_i$: ברור שעבור כל איבר A ב $P(K)$ שעבורו חיתוך עם $\{1,2\}$

יתקבל אחת מהקבוצות הבאות - $\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}$ ולכן $P(K)\subseteq\bigcup_{i=0}^{3} S_i$

מעבר להוכחה, שכל המחלקות שהראינו הנ"ל מרכיבות את $P(K)$ ואותן 3 צריכים גם

להוכיח כי הן אכן זרות אחת מהשניה.

נוכיח זרות: ברור שעבור $0\le i,j\le 3$ וגם $i\neq j$ S_i ו S_j זרות.

כלומר, $S_i\cap S_j=\emptyset$ בגלל שעבור כל איבר A ב $P(K)$ או ש $\{1\}$ מוכל בו או ש $\{2\}$

מוכל בו או ש $\{1,2\}$ מוכל בו. או שאף אחת מהקבוצות הללו אינה מוכלת בו.

כלומר שאם רק האיבר 1 קיים ב A הוא יהיה שייך למחלקה 1 אם רק האיבר 2 יהיה בתוך

הקבוצה הוא יהיה שייך לקבוצה 2. אם שניהם ש $\{1,2\}$ יהיה בה, בחלקה 3. אם אף

אחד מהם אז בחלקה 0.

נבדוק אם S הוא יחס שקילות: על מנת שהוא יהיה יחס שקילות הוא צריך להיות

טרנזיטיבי, רפלקסיבי וסימטרי

אם נבדוק את הרפלקסיביות של היחס נגלה כי אם נציב ASA כאשר $A\in P(K)$

נקבל כי $A\cap\{1,2\}\subset A\cap\{1,2\}$ לא מתקיים ולכן S הוא לא רפלקסיבי.

מכיוון שS הוא לא רפלקסיבי הוא לא יכול להיות יחס שקילות

ולכן S הוא לא יחס שקילות

שאלה 1 - סעיף 3

נבדוק עבור S:

על מנת לבדוק שהיא יחס הסדר חלקי צריך להוכיח שהוא אנטי-רפלקסיבי, טרנזיטיבי ומגיבי.

~~עבודה~~

~~נניח רפלקס~~

אנטי-רפלקסיביות: נניח כי S הוא לא אנטי רפלקסיבי - כלומר קיים $A \in P(A)$ כך ש ASA מתקיים. מהגדרה פשוטה ניתן לראות בבירור שזה לא יכול להתקיים כי $A\cap\{1,2\} \subset A\cap\{1,2\}$ היא סתירה. מכאן ניתן לראות כי ההנחה השגויה שלנו לא הייתה נכונה ולכן הוכחנו את דרך השלילה כי S הוא אכן אנטי-רפלקסיבי.

טרנזיטיביות: נניח כי קיים xSy ו ySz צריך להוכיח כי xSz גם מתקיים.

נשתמש בהגדרת היחס:

$$x\cap\{1,2\} \subset y\cap\{1,2\} \Leftarrow xSy$$

$$y\cap\{1,2\} \subset z\cap\{1,2\} \Leftarrow ySz$$

וכיוון כי הכלה היא טרנזיטיבית ולכן $x\cap\{1,2\} \subset y\cap\{1,2\} \subset z\cap\{1,2\}$

$$x\cap\{1,2\} \subset z\cap\{1,2\}$$

xSz שלכן

לכן S הוא טרנזיטיבי.

משוות =

בניסיון הוכחה כי S הוא יחס סדר מלא היה צריך להוכיח השוואה אבל אפשר להוכיח בדוגמה כי S אינו יחס משווה

$$\{1,3\} \not\subset \{1\} \Leftarrow \{1,3\}\cap\{1,2\} \not\subset \{1\}\cap\{1,2\}$$

$$\{1\} \not\subset \{1,3\} \Leftarrow \{1\}\cap\{1,2\} \not\subset \{1,3\}\cap\{1,2\}$$

מכאן ניתן לראות שיחס זה הוא יחס סדר חלקי כי הוא אנטי-רפלקסיבי וטרנזיטיבי אך לא משווה. ולא יחס סדר מלא

קבלת

שאלה 1. ~~A המשך~~

<u>איברים מינימליים ומקסימליים ב-$\leq$</u>

מקסימליים:

ניתן לראות את האיברים המקסימליים הם $A \in P(\mathbb{N})$ כך ש $1,2 \in A$ ~~באופן~~ כיוון

כל $\{1,2\} \subseteq A$ מתקיים $A \cap \{1,2\} = \{1,2\}$ ועבור כל $B \in P(\mathbb{N})$

$$B \cap \{1,2\} = \{1,2\}$$
או
$$B \cap \{1,2\} = \{1\}$$
או
$$B \cap \{1,2\} = \{2\}$$
או
$$B \cap \{1,2\} = \{\emptyset\}$$

עבור כל אחד מהמקרים הללו

$$A \cap \{1,2\} \not\subset B \cap \{1,2\}$$

<u>מציאת איברים מינימליים:</u>

האיברים המינימליים הם כל $A \in P(\mathbb{N})$ כך ש $1 \notin A$, $2 \notin A$

נניח ~~ש~~ בשלילה שמתקיים $B \in P(\mathbb{N})$ כך ש $B \leq A$ או במילים אחרות -

$A \cap \{1,2\} = \emptyset$ כי A הינו $\emptyset$

וניתן לראות שאם נעשה לבחון

$B \cap \{1,2\} \subset A \cap \{1,2\}$ לא מתקיים כי לא היינו מצאת קבוצה.

2א. נוכיח כי S היא יחס שקילות על ידי הוכחה שהוא טרנזיטיבי רפלקסיבי וסימטרי

<u>טרנזיטיביות</u>: נניח $x,y,z\in A$ כך ש xSy ו ySz נוכיח כי xSz

נניח $\frac{y}{x}=z^j$, $\frac{z}{y}z^k$ <= $z^{j+k}=\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{x}$ <= $\frac{z}{x}=z^{j+k}$ קיים מספר שלם $m=j+k$

כך ש $\frac{z}{x}=z^m$ <= xSz ולכן S טרנזיטיבי.

~~רפלקסיביות: $x\in A$ לא קיים i מספר שלם כך ש $\frac{x}{y}=z^i$ ולכן~~

רפלקסיביות: יהיה $x\in A$ קיים מספר שלם j כך ש $\frac{x}{x}=z^j$ <= $j=0$
ולכן S רפלקסיבי.

סימטריות: יהיה $x,y\in A$ כך ש xSy <= קיים j שלם כך ש $\frac{y}{x}=z^j$
~~אפשר בעזרת להגיד~~ שקיים מספר שלם k כך ש $k=-j$ ולכן $\frac{x}{x}=z^k$ <= ySx
ולכן S סימטרי.

הוכחנו כי S היא טרנזיטיבית סימטרית ורפלקסיבית ולכן היא יחס שקילות

<u>נראה ש R היא אינה יחס שקילות</u>: צריך להוכיח שהיא גם רפלקסיבית וגם סימטרית וגם טרנזיטיבית

רפלקסיביות: יהיה $x\in A$ לא קיים i מספר טבעי כך ש $\frac{x}{x}=z^i$
ולכן R ~~היא לא~~ היא לא רפלקסיבית.
מכיוון ש R היא לא רפלקסיבית היא גם לא יכולה להיות יחס שקילות.

מ.ש.

2.ב

$M=\{2n \mid n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$

מחלקות השקילות $S_k=\{k\cdot 2^i \mid i\in\mathbb{N}\} \quad \forall k\in M^c$

הוכחה לכך שכל שתי מחלקות שקילות הן זרות: נוכיח:

נניח כי קיים ~~m,k∈~~

$k,t\in M^c$ וגם $k\neq t$

צ"ל $\emptyset = S_k\cap S_t$

נניח בשלילה שקיים איבר כלשהו $a\in S_k\cap S_t$ (כלומר החיתוך היא לא קבוצה ריקה)

$\Downarrow$

$a\in S_k$ וגם $a\in S_t$

$\Downarrow$

קיימים $i,j\in\mathbb{N}$ כך ש $a=t\cdot 2^i$, $a=k\cdot 2^j$

$\Downarrow$

$k\cdot 2^j = a = t\cdot 2^i$

$\Downarrow$

$k\cdot 2^j=t\cdot 2^i \Rightarrow$

$k=t\cdot\frac{2^i}{2^j} \qquad k\cdot\frac{2^j}{2^i}=t$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$k=t\cdot 2^{i-j} \qquad k\cdot 2^{j-i}=t$

אם i שונה מ-j אחד מהם גדול יותר מהשני לכן
אז
$t=k\cdot 2^{j-i}\in M$
מה שמוביל אותנו לסתירה

אם $i=j$
נציב אותם ל
$k\cdot 2^0=t$
$k=t$
אבל לפי ההגדרה אנו
$k\neq t$ ולכן קיבלנו סתירה.

קיבלנו סתירות בשני המקרים מה שמוביל אותנו למסקנה כי הטענה שלנו כי מחלקות השקילות זרות נכונה על פי דרך השלילה.

נשאר להוכיח כי איחוד כל מחלקות השקילות שווה ל $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ או במילים אחרות

$$\bigcup_{k\in M^c} S_k=\mathbb{N}\setminus\{0\}$$

נוכיח זאת בעזרת הכלה דו-כיוונית.

$\subseteq$ טריוויאלי כי לכל $k\in M^c$ מתקיים $S_k\subseteq \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$\supseteq$ נוכיח $\bigcup_{k\in M^c} S_k \supseteq \mathbb{N}\setminus\{0\}$. יהי $a\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ונוכיח שקיים $k\in M^c$ בצורה כזאת ש $a\in S_k$

אם $a\in M^c$ נבחר $a=k$ ומתקיים $a\in S_a$

אם אחרת $a\in M$, a הוא כפולה של 2. קיימים $i\in\mathbb{N}$ $k\in M^c$

בצורה כזאת ש $a=k\cdot 2^i$ ← קיים k כך ש $a\in S_k$

הכן אלה הן מחלקות השקילות של היחס S.

שאלה 2.ג.

הוכחנו כבר כי היחס S היא יחס שקילות. מכאן בוודאי שלא יכול להיות

יחס סדר כי היא לא אנטי-רפלקסיבי

מה שמתאים אותו עם R. כעת נוכיח ש R הוא יחס סדר חלקי:

אנטי רפלקסיבי: נניח בשלילה כי קיים ביחס xRy כלשהו עבור $y=x$

או במילים אחרות xRx

$\frac{y}{x}=2^i \Rightarrow \frac{x}{x}=2^i \Rightarrow 1=2^i$ ונקבל כי i הוא מספר

טבעי מה שמוביל אותנו לכך שאין יכולה להיות חזקה של 2 במספר טבעי פעמים

כדי לקבל אחד. מכאן: לא קיים xRx ביחס

הוכחנו בדרך השלילה כי R הוא אנטי רפלקסיבי.

טרנזיטיבי: יהיו $x,y,z\in A$ צריך להוכיח כי R טרנזיטיבי יש להוכיח כי בהינתן

xRy וגם yRz אז xRz

$\frac{y}{x}=2^i$ ש $\frac{z}{y}=2^j$ ש

$\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{x}=2^{i+j} \Rightarrow \frac{z}{x}=2^{i+j}$ קיים מספר טבעי m כך ש $m=j+i$

כך ש $\frac{z}{x}=2^m \Rightarrow xRz$ מש"ל

הוכחנו כי R הוא אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי ולכן היא יחס סדר חלקי

שאלה 3.2

נמצא את האיברים המקסימליים והמינימליים

תחילה נמצא את המינימליים: ~~איבר~~ x מינימלי אם לא קיים $z\in A$ כך ש zRx

או במילים אחרות: לא קיים z כך ש $2^i=\frac{z}{x}$ כאשר $i\in\mathbb{N}$ ⟸ $z=x\cdot 2^i$

אין איברים מינימליים כי לכל x בקבוצה A ש $2x\in A$ כך ש $2xRx$

$2^1=\frac{2x}{x}$ כאשר $1\in\mathbb{N}$

נעבור למצוא איברים מקסימליים:

האיברים המקסימליים הם כל $b\in M\subseteq A$ כלומר כל $b\in A$ כך ש b אינו כפולה של 2.

נניח בשלילה שקיים $b\in M$ שאינו מקסימלי – קיים y כך ש bRy

כלומר שקיים $i\in\mathbb{N}$ כך ש $2^i=\frac{b}{y}$ <= $b=2^i y$ ⟵ קיבלנו ש b הוא כפולה של 2

כלומר $b\in M$ מה שסותר את ~~[illegible]~~. מכאן הוכחנו את הטענה על פי דרך השלילה.

כל $y\in M$ אינו מקסימלי כי קיים yRa

שאלה 3 ג.

נניח בשלילה כי f היא פונקציה לא חד-חד ערכית. לכן קיימים n,m כך ש

מכאן, $f(n)=f(m)$ ← $f[A_{m-1}]=f(0)\dots f(n)\dots \cancel{f(m)}$, $f(m)\in f[A_{m-1}]$ $\cancel{\cup f(m)}$

ו $f[A_m]=\{f(0)\dots f(m)\}=f[A_{m-1}]\cup f(m)$

← כיוון ש $f(m)=f(n)$ אז $f[A_m]=f[A_{m-1}]$ הוכחנו כי לא לכל $m,n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}$ $n\neq m$

$f[A_n]\neq f[A_m]$ אם f לא חד-חד ערכית. לכן נטען בכיוון השני.

נניח כי f היא חד חד ערכית ונראה כי לכל $n,m\in\mathbb{N}\cup\{-1\}$ $m\neq n$ מתקיים $f[A_n]\neq f[A_m]$

נניח כי $n<m$ בה"כ, $f[A_m]=\{f(0)\dots f(m)\}$ ← $f(m)\in f[A_m]$ ← כיוון ש f חח"ע

לא קיים x כך ש $f(x)=f(m)$ ← $f(m)\notin f[A_n]$ ← $f[A_n]\neq f[A_m]$

שאלה 3.ב.

נניח בשלילה שf אינה פונקציית על ונראה כי קיימים $n,m \in \mathbb{N}\cup\{-1\}$ $m\neq n$ כך ש $f^{-1}[A_m] = f^{-1}[A_n]$.

כיוון שf אינה פונקציית על קיים $y\in\mathbb{N}$ כך שלא קיים $x\in f^{-1}[A_y]$ כך ש $f(x)=y$

$f^{-1}[A_y] = f^{-1}[A_{y-1}] \cup f^{-1}(y)$. כיוון שלא קיים y כך ש$f(x)=y$ אז $f^{-1}[A_y] = f^{-1}[A_{y-1}]$

כעת, נניח כי f היא פונקציית על ונראה כי לכל $n,m\in\mathbb{N}\cup\{-1\}$ $m\neq n$ מתקיים $f^{-1}[A_n] \neq f^{-1}[A_m]$ נניח בה"כ כי $n<m$ גם מתקיים כי $f^{-1}[A_m] = f^{-1}[A_n]$ היא מכיל גם את המקור של t (והוא לא היה ב $f^{-1}[A_n]$) וזה בסתירה להנחה שf היא פונקציית על.

שאלה ג.ו.א.

הוכחה ש f היא חד-חד ערכית:

נניח ש $f\langle m,n\rangle = f\langle a,b\rangle$ כך ש $\langle m,n\rangle, \langle a,b\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ונוכיח ש $\langle m,n\rangle = \langle a,b\rangle$

$$f\langle m,n\rangle = f\langle a,b\rangle$$

$$\langle 2m+3n, 3m+2n\rangle = 2a+3b, 3a+2b$$

$$\begin{cases} 2m+3n = 2a+3b & /\cdot 3 \\ 3m+2n = 3a+2b & /\cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6m+9n = 6a+9b \\ 6m+4n = 6a+4b \end{cases} -$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{2m}\ 5n = 5b$$

$$\underline{n=b}$$

$$2a+3\cancel{n} = 2m+3\cancel{n}$$

$$2a = 2m$$

$$\underline{a=m}$$

לכן $\langle m,n\rangle = \langle a,b\rangle$

הוכחה ש f היא לא פונקציית על:

f לא על כי קיים $\langle 1,1\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ללא מקור $\langle m,n\rangle$ כך שיתקיים $f\langle m,n\rangle = 1,1$

נניח בשלילה שקיים מקור אז:

$$\begin{cases} 2m+3n = 1 & /\cdot 3 \\ 3m+2n = 1 & /\cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6m+9n = 3 \\ 6m+4n = 2 \end{cases} -$$

$$5n = 1$$

$$n = \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$$

<u>סתירה</u>

שאלה 4.ב.

$$\pi_1\circ f=\pi_1(f\langle m,n\rangle)=\pi_1(2m+3n,3m+2n)=2m+3n$$

נוכיח כי $\pi_1\circ f$ היא לא חח"ע ע"י דוגמה נגדית

$$\pi_1\circ f(\langle 0,2\rangle)=2\cdot 0+3\cdot 2=6$$

$$\pi_1\circ f(\langle 3,0\rangle)=2\cdot 3+3\cdot 0=6$$

$$\Downarrow$$

$$\langle 0,2\rangle\neq \cancel{\langle 0,3}\ \langle 3,0\rangle$$

$\pi_1\circ f$ לא חד חד ערכית $\Leftarrow$ $\pi_1\circ f(0,2)=\pi_1\circ f(3,0)$

הוכחה ש $\pi_1\circ f$ היא פונקציית על:

~~נראה כי $\pi_1\circ f$ היא פונקציית על עבור ($\pi_1\circ f$)~~

נניח $a\in\mathbb{Z}$. צריך שקיים $\langle m,n\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ כך ש $\pi_1\circ f\langle m,n\rangle=a$

$2m+3n=a$. נבחר $m=-a\in\mathbb{Z}$ $n=a\in\mathbb{Z}$ ומתקיים $\pi_1\circ f\langle m,n\rangle=a$

שאלה 4.ג.

הוכחה כי g היא פונקציה על.

נניח $\langle a,b\rangle \in Q\times Q$ נוכיח שקיים $\langle m,n\rangle \in Q\times Q$ כך ש $g\langle m,n\rangle = \langle a,b\rangle$

$$\langle 2m+3n,\ 3m+2n\rangle = \langle a,b\rangle$$

$$\begin{cases} 2m+3n=a & /\cdot 3 \\ 3m+2n=b & /\cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6m+9n=3a \\ 6m+4n=2b \end{cases} -$$

$$5n=3a-2b \Rightarrow \quad n=\frac{3a-2b}{5}\in Q \qquad m=\frac{9b-6a}{15}\in Q$$

הוכחתי חד חד ערכיות של הפונקציה בדומה להוכחה בסעיף א.

מציאת הפונקציה g^{-1}

מרשק הוכחת על:

$$g^{-1}(y)=x$$

$$g^{-1}\langle x,y\rangle = \left\langle \frac{3y-2x}{3},\ \frac{3x-\overset{2y}{\cancel{2y}}}{3}\right\rangle$$