מתמטיקה בדידה – מטלת מנחה 11

אלכסנדר טקצ'יוב סמסטר 2020א

שאלה 1

א. נכון ב. לא נכון ג. לא נכון ד. לא נכון ה. נכון ו. לא נכון ז. נכון ח. נכון

שאלה 2

נתון A B C קבוצות

שאלה 2.א

צ"ל: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

הוכחה

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (B \setminus C)^C = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (B \cap C^C)^C = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (B^c \cup (C^c)^c) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (B^c \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^C) \cup (A \cap C)$$

$$\mathbf{A} \cap (\mathbf{B}^{\mathbf{c}} \cup \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cap (\mathbf{B}^{\mathbf{C}} \cup \mathbf{C})$$

מ.ש.ל

שאלה 2. ב

<u>נתון</u>: $\{A\} \subseteq P(B)$

<u>צ"ל</u>: $P(A) \subseteq P(B)$

הוכחה

טענת עזר א: אם $X \epsilon P(Y)$ אז $X \subseteq Y$

הוכחה: מהגדרת super set $P(Y) = \{X|X \subseteq Y\}$ מכאן $X \subseteq Y$ משל.

לפי <u>טענת עזר א</u> : $\{A\} \subseteq P(B) \Leftarrow A\epsilon P(B) \Leftarrow A \subseteq B$

טענת עזר ב: אם $A \subseteq B$ אז $P(A) \subseteq P(B)$

הוכחה: יהי x איבר בתוך קבוצה $P(A)$

נניח כי $P(A) \nsubseteq P(B)$ כלומר $\exists_x(x \in P(A) \wedge \neg(x \in P(B)))$

לפי <u>טענת עזר א</u>: $\exists_x(x \in P(A) \wedge \neg(x \in P(B))) = \exists_x(x \subseteq A \wedge \neg(x \subseteq B))$

ידוע כי $x \subseteq A$ וגם $A \subseteq B$. מכיוון שהכלה טרנזיטיבית נובע כי $x \subseteq A \subseteq B$ או $x \subseteq B$.
מכיוון ש $x \subseteq B$ אנחנו מקבלים כי הביטוי $\exists_x(x \subseteq A \wedge \neg(x \subseteq B))$ הוא סטירה מהצורה $t \wedge \neg(t)$

כי לפי הנתונים $t = x \subseteq A$ וגם $t = x \subseteq B$

ומכאן נובע כי ההנחה שלנו $P(A) \nsubseteq P(B)$ לא נכונה ומוביל אותנו להוכחה כי אם $A \subseteq B$ אז $P(A) \subseteq P(B)$ על דרך השלילה. מ.ש.ל <u>טענת עזרת ב</u>

המשך הוכחת הטענה המרכזית

הוכחנו עד כה כי מ $\{A\} \subseteq P(B) \Leftarrow A \subseteq B$

$A \subseteq B \Leftarrow P(A) \subseteq P(B)$

ולכן אם $\{A\} \subseteq P(B)$ אז $P(A) \subseteq P(B)$ **<u>מ.ש.ל</u>**

שאלה 2. ג

<u>נתון</u>: $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

<u>צ"ל</u>: $B \subseteq A \vee A \subseteq B$

הוכחה

טענת עזר א: עבור כל זוג קבוצות X ו Y $\exists_k(K \subseteq X \to K \subseteq Y)$

הוכחה נניח שהטענה הזאת לא נכונה, כלומר $\neg\exists_k(K \subseteq X \to K \subseteq Y)$ נציב $K = \emptyset$
ונראה כי קיבלנו סטירה <u>מה שמוכיח את טענת עזר א על דרך השלילה</u>

<u>נגדיר</u>

$A = M \cup a$ ו $B = M \cup b$ כאשר M קבוצה המכילה את כל האיברים המשותפים בין A לB (הוכחנו שקבוצה שמוכלת גם בA וגם ב B קיימת בטענת עזר א)

a מוגדרת כי קבוצת כל האיברים שקיימים בA ולא בM (יכולה להיות קבוצה ריקה) כך ש a ו M זרות

b מוגדרת כי קבוצת כל האיברים שקיימים בB ולא בM (יכולה להיות קבוצה ריקה) כך ש b ו M זרות

טענת עזר ב: a ו b זרות

הוכחה נניח כי כן לא זרות, כלומר שיש איברים שקיימים בa וb . לפי ההנחה הזאת האיברים הקיימים היו קיימים גם בM (כי M זאת קבוצת האיברים המשותפים בין A ו B) אבל אף איבר בM לא קיים בa ולא בb. קיבלנו סטירה. <u>ולכן a ו b זרות על דרך השלילה</u>

המשך הוכחת הטענה המרכזית

נניח כי הצ"ל שלנו לא נכון: $\neg(A \subseteq B \vee B \subseteq A) \Leftarrow A \not\subseteq B \wedge B \not\subseteq A$

מההנחה הזאת נובע כי <u>קיימים איברים</u> בA אשר לא קיימים בB, אחרת A הייתה מוכלת בB
וגם <u>קיימים איברים</u> בB אשר לא קיימים בA אחרת הקבוצה הייתה מוכלת בA.

לכן $a \neq \emptyset \wedge b \neq \emptyset$

(המשך בדף הבא)

מהנתון $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

$$\{x|x \in P(A \cup B)\} = \{x|x \in P(A)\} \cup \{x|x \in P(B)\}$$

$$\{x|x \subseteq A \cup B\} = \{x|x \subseteq A\} \cup \{x|x \subseteq B\}$$

$$\{x|x \subseteq M \cup a \ \cup M \cup b\} = \{x|x \subseteq M \cup a\ \} \cup \{x|x \subseteq M \cup b\}$$

$$\{x|x \subseteq M \cup a \ \cup b\} = \{x|x \subseteq M \cup a\ \} \cup \{x|x \subseteq M \cup b\}$$

$$\{x|x \subseteq M \cup a \ \cup b\} = \{x|x \subseteq M \cup a \ \vee x \subseteq M \cup b\}$$

אנחנו יודעים שקיימת קבוצה $K = \{a_1, b_1\}$ כאשר a_1 או איבר כלשהו בקבוצה A

(ידוע $a \neq \emptyset$) ו b_1 הוא איבר כלשהו בקבוצה b (ידוע $b \neq \emptyset$)

לפי כללי איחוד אנחנו יודעים ש $K \subseteq \{x|x \subseteq M \cup a \ \cup b\}$ אבל אם נבדקות אם K נמצאת באגף השמאלי נקבל שהוא לא $K \nsubseteq \ \{x|x \subseteq M \cup a \ \vee x \subseteq M \cup b\}$
כי a ו b זרות לפי <u>טענת עזר ב</u>, b ולא יכול להיות מצב שבו $x \subseteq M \cup a$ כי b_1 לא שייך לא לa ולא לM ולא נוכל להגיע למצב ש$x \subseteq M \cup b$ כי a_1 לא שייך לא לb ולא לM

$$\{x|x \subseteq M \cup a \ \vee x \subseteq M \cup b\} = \{x|x \subseteq M \cup a \ \cup b\} = S$$

$$k \subseteq s \wedge k \nsubseteq s$$

$$k \subseteq s \wedge \neg(k \subseteq s)$$

קיבלנו סטירה מהצורה

$$t \wedge \neg(t)$$

לפיכח **ההנחה שלנו כי $\mathbf{A \nsubseteq B \wedge B \nsubseteq A}$ היא לא נכונה והטענה $\mathbf{A \subseteq B \vee B \subseteq A}$ נכונה על פי דרך השלילה <u>מ.ש.ל</u>**

שאלה 3

נתון: $A \subseteq U, B \subseteq U, C \subseteq U$

שאלה 3. א

נתון: $(A \cap B)^C \subseteq A$

הוכחה

$$(A \cap B)^C \subseteq A$$

לפי משפט 1.25

$$A^C \subseteq ((A \cap B)^C)^C$$

$$A^C \subseteq A \cap B$$

לפיכך אם ורק אם קיים x כלשהו ב A^C אז הביטוי הבא נכון

$$x \in A^C \ \wedge \ x \in (A \cap B)$$

$$x \in A^C \ \wedge (x \in A \wedge x \in B)$$

טענת עזר א: אם $x \in A^C$ אז $x \notin A$

הוכחה: לפי משפט 1.23 בספר ידוע $A \cap A^C = \emptyset$
כלומר, לא קיים איבר שקיים בA וב A^C ולכן $x \in A^C$ אז $x \notin A$

המשך הוכחת הטענה המרכזית

מכאן שאם איבר שייך לA^C הוא בוודאות לא יהיה שייך לA כי אין ביניהם איברים משותפים .

מכאן

$$x \notin A \wedge x \in A \wedge x \in B$$

$$\neg(x \in A) \wedge x \in A \wedge x \in B$$

(המשך בדף הבא)

טענת עזר ב: ביטוי מהצורה $\neg p \wedge p \wedge q$ הוא סטירה

הוכחה

$\neg p \rightarrow p \wedge q$	q	p
0	0	0
0	1	0
0	0	1
0	1	1

לפי <u>טענת עזר ב</u> הביטוי

$$\neg(x \in A) \wedge x \in A \wedge x \in B$$

הוא סטירה. משמע לא קיים x בתוך A^C כלומר, $A^C = \emptyset$

ידוע כי $\emptyset = U^C$ (עמ 45) **ולכן** $\mathbf{A = U}$ **<u>מ.ש.ל</u>**

שאלה 3. ב

<u>נתון</u>: $A^C \Delta B = 4\Delta C$

<u>צ"ל</u>: $C = B^C$

הוכחה

$$A^C \Delta B = A\Delta C$$

$$A\Delta(A^C \Delta B) = A\Delta(A\Delta C)$$

$$(A\Delta A^C)\Delta B = A\Delta(A\Delta C)$$

לפי עמוד 47

$$A\Delta A^C = U$$

$$B\Delta U = B^C$$

$$B^C = A\Delta(A\Delta C)$$

$$B^C = (A\Delta A)\Delta C$$

לפי עמוד 43 $A\Delta A = \emptyset$

$$B^C = (\emptyset)\Delta C$$

לפי עמוד 43 $C\Delta\emptyset = C$

$$\mathbf{B^C = C}$$

<u>מ.ש.ל</u>

שאלה 3. ג

נתון: $x \in (A \cap B) \setminus C$

צ"ל: $x \notin A \Delta B \Delta C$

הוכחה

נגדיר $S = (A \cap B) \setminus C$

$$S = (A \cap B) \setminus C = \{x |\ x \in A\ \land\ x \in B\ \land x \notin C\}$$

נניח כי הטענה $x \in A \Delta B \Delta C$ נכונה

כלומר

1. או ש x שייך לA ולא לB ולא לC
2. או שx שייך לB ולא לA ולא לC
3. או ש x שייך לC ולא לB ולא לC

נבדוק כלפי $\{x |\ x \in A\ \land\ x \in B\ \land x \notin C\}$

1. אם נציב את אחד נגלה כי $x \notin S$ מכיוון שלפי S X חייב להיות שייך לB אבל ההנחה סוטרת את זה
2. אם נציב את שתיים נגלה כי $x \notin S$ מכיוון שלפי S X חייב להיות שייך לA אבל ההנחה סוטרת את זה
3. אם נציב את שתיים נגלה כי $x \notin S$ מכיוון שלפי S אסור שX יהיה שייך לC אבל ההנחה סוטרת את זה

מכאן שההנחה שלנו $x \in A \Delta B \Delta C$ לא נכונה ולכן הטענה $x \notin A \Delta B \Delta C$ נכונה ע"פ דרך השלילה <u>מ.ש.ל</u>

שאלה 4

שאלה 4. א

עבור n=0 $\mathrm{A}_0 = \{0\}$ והקבוצה המשלימה היא $A_0^C = \{1,2,3,\ldots\}$ הקבוצה לאחריה תכיל $A_1^C = \{2,3,4\ldots\}$ מכאן אפשר לראות שהאיחוד בין כל הקבוצות יכיל לפחות את A_0^C כלומר מספרים מ 1 והילך. שזה בגדול N בלי 0, או במילים אחרות - $N \setminus \{0\}$

שאלה 4. ב

אפשר להגיד ש $A_0, A_1, A_2 \cdots A_\infty$ ואפשר להגיד ש$A_\infty = N$ וידוע ש$\mathrm{A}_0 = \{0\}$ לכן חיתוך בין שתי הקבוצות האלה מוביל אותנו ל $\{0\}$ כי $\mathrm{A}_0 \subseteq \mathrm{N}$ לכן התשובה היא שהמשוואה יוצאת $\{0\}$

שאלה 4. ג

נבדוק אם הקבוצה שווה לN -
נציב 0 ונגלה שהקבוצה שקיבלנו היא קבוצה ריקה

נציב n=1 נגלה כי $A_2 = \{0,1,2\}$ $A_1 = \{0,1\}$ החיסור בין הקבוצות מוביל אותנו ל {2}

נציב n=2 ונגלה כי $A_4 = \{0,1,2,3,4\}$ ו $A_2 = \{0,1,2\}$ כך שהחיסור בין הקבוצות מובל ל{3,4}.

נציב n=3 ונגלה כי הקבוצה שקיבלנו היא 4,5,6.
כפי שניתן לראות יש פה חוקיות שהמספרים שאנחנו רואים הולכים וגדלים ככל שn גדל.
ואפשר להשיק מזה שלא נראה אף פעם את 0 או את 1 שהיו חסרים בקבוצות הראשונות.
מכאן זה לא N כי חסרים 0 ו 1

וזה לא קבוצה ריקה כי יש לפחות 2

וזה לא N/{0} כי חסר 1

שאלה 4. ג

$$n = 0 \Rightarrow \{0,1\} \cap \{1,2,3 \dots\} = \{1\}$$

$$n = 1 \Rightarrow \{0,1,2\} \cap \{2,3,4 \dots\} = \{2\}$$

$$n = 2 \Rightarrow \{0,1,2,3\} \cap \{3,4,5 \dots\} = \{3\}$$

$$\dots$$

$$n = x \Rightarrow \{x + 1\}$$

מכאן איחוד כל הקבוצות יוביל ל $\{1,2,3 \dots\}$ או במילים אחרות - $N \setminus \{0\}$