ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Факультет прикладної математики та інформатики

Колоквіум

з курсу «Методи комп'ютерних обчислень»

Студента групи ПМі-34

Сорочинського М.О.

Львів 2020

Сорочинського Михайла
Група ПМі-34

$$\begin{cases} -u''(x)+2u'(x)+3u(x)=4, \forall x \in (0,2) & (\mathrm{I}) \\ u(0)=0, \quad u'(2)=0 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

---

① Перше рівняння домножуємо на будь-яку довільну ф-цію і потім інтегруємо по області Ω.
Отримали: Нехай $v=v(x)$ – довільна ф-ція.

$$0=\int_0^2 (-u''(x)+2u'(x)+3u(x)-4)v\,dx =$$

$$=-\int_0^2 u''(x)v(x)dx + \int_0^2 (2u'(x)+3u(x)-4)v\,d$$

$$=\int_0^2 (u'(x)v'(x)+2u'(x)v(x)+3u(x)v(x)-$$

$$-4v(x))dx - u'(x)\,v(x)\Big|_0^2 .$$

Визначаємо умови за яких будуть існувати вищенаведені інтеграли, виходячи з нерівності Коші - Буняковського, вище, яка вказує, що умовою регулярності ф-ції $u(x)$ та $v(x)$ є належність до простору $H^1(\Omega)$, тому простір допустимих ф-цій є підпростором простору Соболева. ($V \subset H^1(\Omega)$).

Додатковою умовою виступає крайова умова Діріхле (що умову задовольняє розв'язок $u(x)$).

Звідси випливає:

$V := \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = 0\}$, тому наше рівняння матиме такий вигляд:

$$\int_0^2 (u'(x)v'(x) + 2u'(x)\,v(x) + 3u(x)v(x))\,dx = 4\int_0^2 v(x)\,dx \quad \forall v \in V.$$

Можна зробити висновок, що задача допускає варіаційне формулювання:

знайти $u \in V$ такий, що $a(u,v) = <l, v>$,
з такими елементами:

$$\begin{cases} V := \{ v \in H^1(\Omega) : v(0) = 0 \} \\ a(v,u) := \int_0^2 (u'(x)v'(x) + 2u'(x)v(x) + 3u(x)v(x))dx \\ <l, v> := 4\int_0^2 v(x)dx, \forall u, v \in V \end{cases}$$

② Щоб показати, що білінійна форма неперервна, а V - еліптична, треба довести, що вони задовільняють умовам теореми Лакса - Мільграма:

$$a^2(u,v) = \left(\int_0^2 u'(x)v'(x) + 2u'(x)v(x) + 3u(x)v(x)dx \right)^2$$

Використовуємо нерівність такого вигляду:

$$2cd \le c^2 + d^2 \quad \forall c, d \in \mathbb{R}:$$

$$a^2(u,v) \le 3\left(\left(\int_0^2 u'(x)v'(x)dx\right)^2 + \left(\int_0^2 2u'(x)v(x)dx\right)^2 + \left(\int_0^2 3u(x)v(x)dx\right)^2\right).$$

Використовуючи нерівність Шварця, оцінимо кожен доданок зверху:

$$\left(\int_0^2 u'(x)v'(x)\,dx\right)^2 \le \int_0^2 (u'(x))^2dx \int_0^2 (v'(x))^2dx.$$

$$\left(\int_0^2 3u(x)v(x)\,dx\right)^2 \le 9\int_0^2 u^2(x)\,dx \int_0^2 v^2(x)\,dx.$$

$$\left(\int_0^2 2u'(x)v(x)\,dx\right)^2 \le 4\int_0^2 (u'(x))^2dx \int_0^2 v^2(x)\,dx.$$

Перепишемо нерівність з оцінками зверху:

$$a^2(u,v) \le 3\Big(\int_0^2 (u'(x))^2dx \int_0^2 (v'(x))^2dx +$$
$$4\int_0^2 (u'(x))^2dx \int_0^2 v^2(x)\,dx + 9\int_0^2 u^2(x)\,dx \,\times$$
$$\times \int_0^2 v^2(x)\,dx\Big) \le 3\Big(9\int_0^2 (u'(x))^2dx \,\times$$
$$\times \int_0^2 (v'(x))^2dx + 9\int_0^2 (u'(x))^2dx \int_0^2 v^2(x)\,dx +$$
$$+ 9\int_0^2 u^2(x)\,dx \int_0^2 v^2(x)\,dx + 9\int_0^2 (v'(x))^2dx \,\times$$

$\times \int_0^2 u^2(x)\,dx)$.

Маємо:

$a^2(u,v) \le 27\, \|u(x)\|_1^2\, \|v(x)\|_1^2$,

де $\|u(x)\|_1^2 = \int_0^2 u^2(x) + (u'(x))^2\,dx$.

Доведено неперервність білінійної форми.

Аналогічно доведемо неперервність $<l, v>$.

$$<l,v>^2 = 16\left(\int_0^2 v(x)\,dx\right)^2$$

За нерівністю Шварца:

$$\left(\int_0^2 1\, v(x)\,dx\right)^2 \le \int_0^2 1^2\,dx \int_0^2 v^2(x)\,dx =$$

$$= 2\int_0^2 v^2(x)\,dx, \text{ тоді:}$$

$$<l,v>^2 \le 32 \int_0^2 v^2(x)\,dx \le 32 \int_0^2 v^2(x) +$$

$$+ (v'(x))^2\,dx = 32\, \|v(x)\|_1^2.$$

Лінійна форма неперервна.

Доведемо, що білінійна форма є V-еліптичною, тобто

$$a(u,v) \geq \alpha \|u\|_1^2$$

Запишемо:

$$a(u,u) = \int_0^2 \left((u'(x))^2 + 2u'(x)u(x) + 3u^2(x)\right)dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\,u'(x) + \sqrt{\sqrt{2}+1}\,u(x)\right)^2 dx + (2-\sqrt{2})\int_0^2 \left((u'(x))^2 + u^2(x)\right)dx.$$

Після відкидання першого невід'ємного доданку у правій частині отримаємо:

$$a(u,u) \geq (2-\sqrt{2})\|u\|_1^2$$

Отже, білінійна форма є V-еліптичною, де $\alpha = 2-\sqrt{2}$.

3) Щоб задача була коректно сформульована повинні виконуватись умови:

1) $a(\cdot,\cdot): U \cdot U \to R$ – неперервна

2) $a(\cdot,\cdot): U \cdot U \to R$ – U-еліптичні.

3) $\ell: U \to R$ – неперервна на U.

Ми вже довели, що білінійна та лінійна ~~форми~~ задовольняють умови теореми Лакса-Мільграма, що означає, що вона є коректно сформульована.

(4)

$$\|v\|_a := \sqrt{a(v,v)} = \sqrt{\int_0^2 (v'(x))^2 + 2v'(x)v(x) + 3v^2(x)\,dx}, \quad \forall v \in \mathring{V}.$$

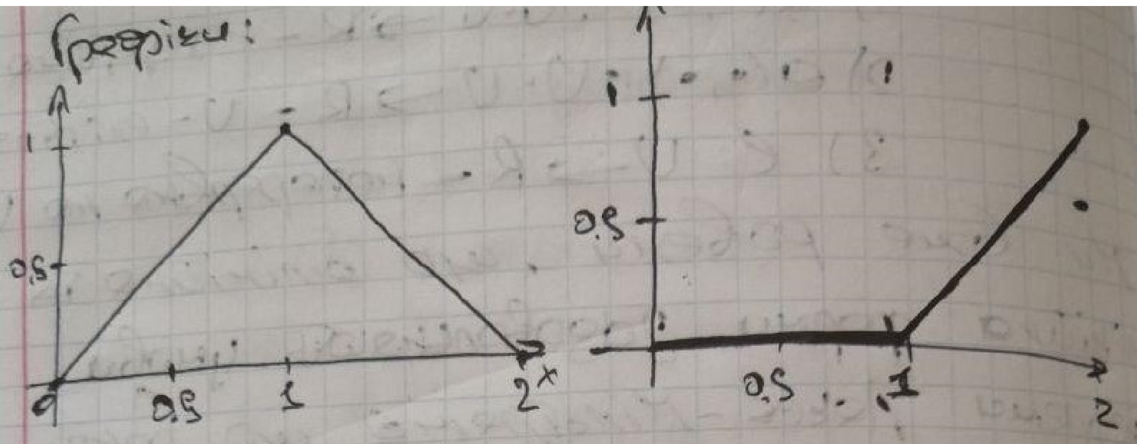
(5) $\|u\|_V \le \frac{C}{\alpha} = \frac{4\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 4(1+\sqrt{2})$.

(6) Базисні функції простору V_h мають вигляд:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;1] \\ 2-x, & x \in (1;2]. \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1] \\ x-1, & x \in (1,2]. \end{cases}$$

Графіки:



⑦ Виразимо кусково-лінійну апроксимацію $u_h(x)$ як лінійну комбінацію цих ф-цій

$$u_h(x) = q_1 \varphi_1(x) + q_2 \varphi_2(x)$$

Підставимо кусково-лінійну апроксимацію у варіаційну задачу і приймемо $v = \varphi_i$, $i = 1,2$ та отримаємо:

$$a(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2, \varphi_i) = a(\varphi_1, \varphi_i) q_1 + a(\varphi_2, \varphi_i) q_2 = \langle l, \varphi_i \rangle$$

Обчислимо коефіцієнти:

$$a(\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^2 ((\varphi_1'(x))^2 + 2\varphi_1'(x)\varphi_1(x) + 3\varphi_1^2(x))dx = 4.$$

$$a(\varphi_2, \varphi_1) = \int_0^2 \varphi_1'(x)\varphi_2'(x) + 2\varphi_2'(x)\varphi_1(x) +$$

$$+ 3\varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = 1/2.$$

$$a(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^2 (\varphi_1'(x)\varphi_2'(x) + 2\varphi_1'(x)\varphi_2(x) +$$

$$+ 3\varphi_1(x)\varphi_2(x))dx = -3/2.$$

$$a(\varphi_2, \varphi_2) = \int_0^2 ((\varphi_2'(x))^2 + 2\varphi_2'(x)\varphi_2(x) +$$

$$+ 3\varphi_2^2(x)dx)dx = 3.$$

$$\langle \ell, \varphi_1 \rangle = 4\int_0^2 \varphi_1 dx = 4\left(\int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2-x)dx\right) =$$

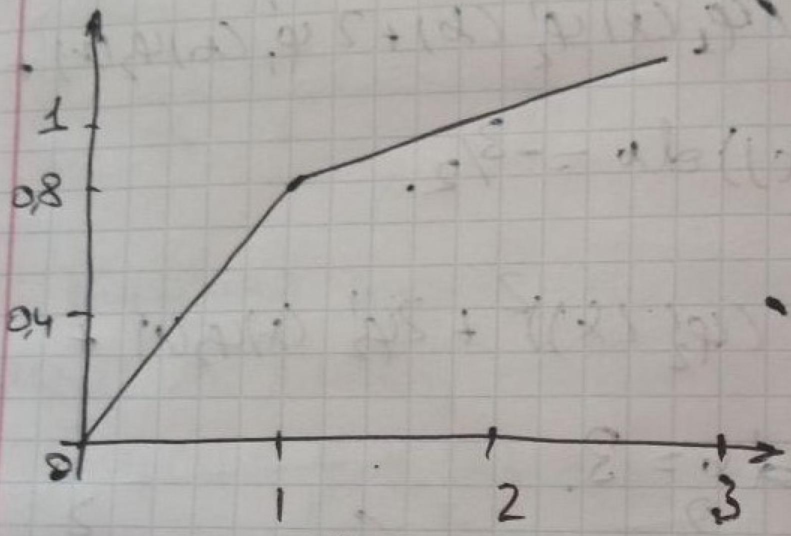
$$\langle \ell, \varphi_2 \rangle = 4\int_0^2 \varphi_2 dx = 4\left(\int_1^2 (x-1)dx\right) = 2$$

Система р-нь тепер набуває вигляду:

$$\begin{cases} 4q_1 + 1/2\, q_2 = 4 \\ -3/2\, q_1 + 3q_2 = 2. \end{cases}$$

(8) Розвʼязавши систему, маємо:

$$q_1 = \frac{44}{51}, \quad q_2 = \frac{56}{51}.$$

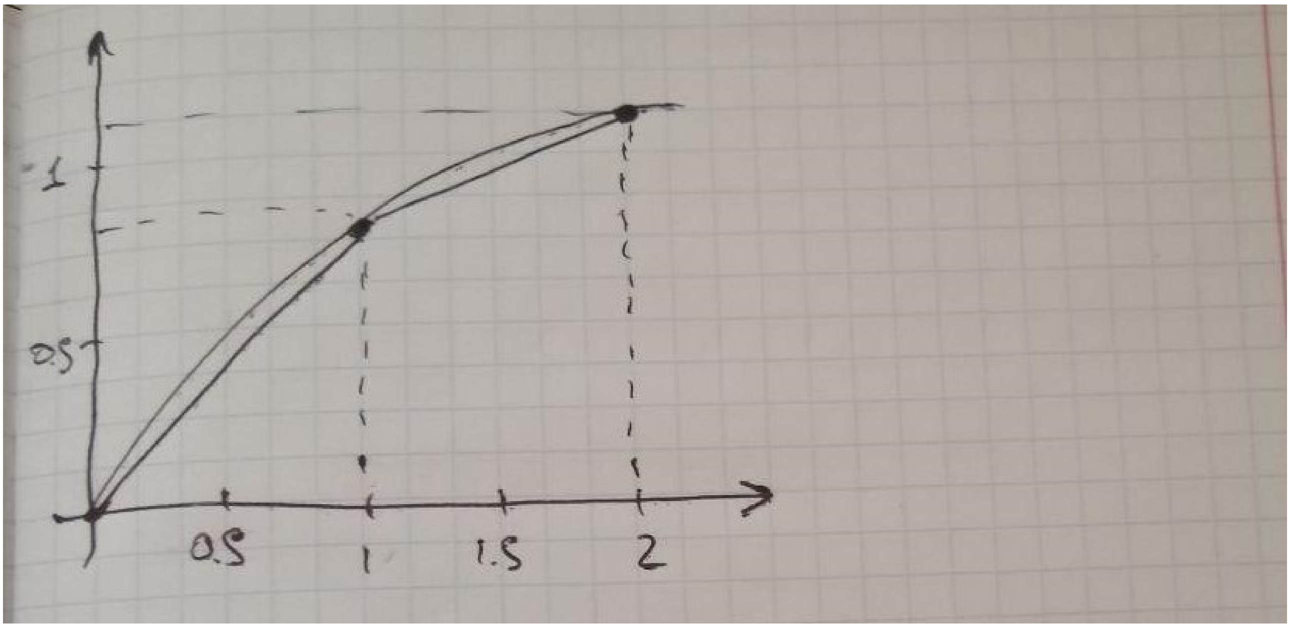


Точним розвʼязком є:

$$\frac{\left(-12 \cdot e^{(8-x)} - 4 \cdot e^{(3 \cdot x)} + 4 + 12e^{8}\right)}{3 + 9 \cdot e^{8}} \{0 \le x \le 2\}.$$

(9) Розвʼязком є ф-ція:

$$u(x) = \frac{-12e^{8-x} - 4e^{3x} + 4 + 12e^{8}}{3 + 9e^{8}}.$$


1
0.5
0.5
1
1.5
2