Тест Грэйнджера на каузальность (причинность)

обычно применяемый к элементам векторного случайного процесса для ответа на вопрос: может ли одна из входящих в вектор переменных быть причиной изменения другой переменной (принятое обозначение $z \to y$). При тестировании выясняют, какую часть дисперсии текущего значения переменной y можно объяснить прошлыми значениями самой переменной y и может ли добавление прошлых значений переменной z уточнить эти значения. Переменную z называют причиной y если z обеспечивает уменьшение дисперсии при прогнозе y.

Тест Грэйнджера на каузальность (причинность)

Изменяемый вектор z считается причиной изменения вектора y, если коэффициенты при лагах z статистически значимы. Лагами, или лаговыми переменными, называют прошлые значения наблюдаемых векторов. При существовании двухсторонней причинной связи, когда z является причиной y, а y является причиной z, скорее всего, существует третий независимый вектор, влияющий на z и y.

Причинность (по Грейнджеру) для двух переменных связана с проверкой возможности математического описания случайных процессов в виде

$$z_t = \sum_{j=1}^{p} a_j z_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} b_j y_{t-j} + \varepsilon_{1t}, \quad y_t = \sum_{j=1}^{p} c_j z_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} d_j y_{t-j} + \varepsilon_{2t}.$$

Отсутствие причинной связи $z \to y$, т.е. когда прошлые значения z не влияют на y, означает, что $c_j = 0$ при $j = 1,\ldots,p$. Отсутствие причинной связи $y \to z$ означает, что $b_j = 0$ при $j = 1,\ldots,p$.

Тест Грэйнджера на каузальность (причинность)

Гипотезы о причинной связи проверяют с помощью F-статистики Фишера в виде суммы квадратов отклонений оценки от среднего значения $ESS = \sum_{t=1}^{n} (\hat{z}_t - \bar{z})^2$, деленной на остаточную сумму квадратов,

$$F = \frac{ESS/(m-1)}{RSS/(T-m)},$$

где $\bar{z}$ – среднее значение z, $\hat{z}$ – расчетные значения, $RSS = \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t$ – сумма квадратов остатков в модели, m – число переменных.

Выдвигают нулевую гипотезу, по которой одна из изучаемых переменных не является причиной (по Грейнджеру) для другой переменной. Для проверки справедливости гипотезы сравнивают фактическое F и критическое (табличное) Fк.з. значения F-статистики с $(m-1)$ и $(n-m)$ степенями свободы. Нулевая гипотеза отвергается при значениях F, превышающих критическое значение при заданном уровне α значимости

$$F = \frac{ESS/(m-1)}{RSS/(T-m)} > F_{1-\alpha}(m-1, T-m).$$

Тест Грэйнджера на каузальность (причинность)

Вероятность ошибочного отвержения гипотезы H_0 равна α. В таблице 1 приведены значения F-статистик и соответствующих им P-значений, т.е. результат оценки вероятность $P\{F(m-1,T-m) > F\}$. Если P-значение меньше заданного уровня значимости (здесь α = 0.05), то считают, что исследуемая переменная является причиной (по Грейнджеру) для другой.

Таблица 1 – Результаты теста Грейнджера

$H_o: z$ не является причиной по Грейнджеру для y		$lags = 2$		$lags = 3$		$lags = 4$		$lags = 5$		$lags = 6$	
z	y	F-статистика	P-значение	F-статистика	P-значение	F-статистика	P-значение	F-статистика	P-значение	F-статистика	P-значение
PT_t	RT_t	9.813	0.000	7.590	0.000	5.454	0.001	4.306	0.002	4.278	0.001
RT_t	PT_t	2.247	0.112	2.942	0.038	2.739	0.035	1.551	0.185	1.771	0.118
WT_t	RT_t	3.343	0.040	1.581	0.201	1.354	0.258	1.508	0.198	1.189	0.323
RT_t	WT_t	4.838	0.010	4.081	0.010	2.960	0.025	2.194	0.064	1.723	0.129
RW_t	RT_t	0.783	0.460	0.402	0.752	0.296	0.879	0.476	0.793	1.043	0.405
RT_t	RW_t	13.656	0.000	7.881	0.000	5.247	0.001	4.603	0.001	4.915	0.000
WT_t	PT_t	5.789	0.004	4.405	0.007	3.822	0.007	2.342	0.050	2.364	0.039
PT_t	WT_t	10.726	0.000	10.678	0.000	8.498	0.000	6.798	0.000	5.617	0.000
RW_t	PT_t	3.994	0.022	2.103	0.107	2.339	0.063	1.114	0.361	1.319	0.261
PT_t	RW_t	5.552	0.006	5.435	0.002	3.754	0.008	2.890	0.020	2.578	0.026
RW_t	WT_t	0.674	0.513	0.578	0.631	0.392	0.814	0.398	0.849	0.459	0.836
WT_t	RW_t	10.379	0.000	4.276	0.008	2.829	0.031	2.193	0.064	2.585	0.026

Тест Грэйнджера на каузальность (причинность)

Тест Грэйнджера чувствителен к количеству лагов в уравнении регрессии, поэтому его проводят для их различных значений (табл.1, 2). Интерпретация результатов теста Грейнджера в работе заключается в указании направлений причинно-следственной зависимости между показателями, характеризующими различные элементы грузовой транспортной системы (табл. 2).

Здесь результаты теста устойчивы и не зависят от значений лагов.

Таблица 2 – Интерпретация результатов теста Грейнджера

$lags = 2$	$lags = 3$	$lags = 4$	$lags = 5$	$lags = 6$
$PT_t \rightarrow RT_t$	$PT_t \leftrightarrow RT_t$	$PT_t \leftrightarrow RT_t$	$PT_t \rightarrow RT_t$	$PT_t \rightarrow RT_t$
$WT_t \leftrightarrow RT_t$	$RT_t \rightarrow WT_t$	$RT_t \rightarrow WT_t$	нет связи	нет связи
$RT_t \rightarrow RW_t$	$RT_t \rightarrow RW_t$	$RT_t \rightarrow RW_t$	$RT_t \rightarrow RW_t$	$RT_t \rightarrow RW_t$
$WT_t \leftrightarrow PT_t$	$WT_t \leftrightarrow PT_t$	$WT_t \leftrightarrow PT_t$	$WT_t \leftrightarrow PT_t$	$WT_t \leftrightarrow PT_t$
$PT_t \leftrightarrow RW_t$	$PT_t \rightarrow RW_t$	$PT_t \rightarrow RW_t$	$PT_t \rightarrow RW_t$	$PT_t \rightarrow RW_t$
$WT_t \rightarrow RW_t$	$WT_t \rightarrow RW_t$	$WT_t \rightarrow RW_t$	нет связи	$WT_t \rightarrow RW_t$

Тест Дики-Фуллера

Все случайные процессы могут быть описаны моделями

$$X_t = \mu_0 + \mu t + \sum_{j=1}^{p} \varphi_j X_{t-j} + \varepsilon_t \;, \qquad (1)$$

содержащими постоянное слагаемое μ_0, коэффициент μ, характеризующий его устойчивое систематическое изменение в течение всего периода наблюдения; прошлые значения с постоянными коэффициентами φ_j (p – количество членов авторегрессии), а также нормально распределенные стационарные случайные процессы ε_t .

Тест Дики-Фуллера

Темпы прироста, или первые разности, всех процессов $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ (Δ – разностный оператор) стационарны. Такие процессы X_t называют интегрированными порядка 1 [7, 8]. Математическое описание новых скалярных процессов

$$\Delta X_t = \mu_0 + \mu t + \alpha X_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j \Delta X_{t-j} + \varepsilon_t \qquad (2)$$

соответствует известному расширенному критерию Дики-Фуллера [9, 13, 14], где α, α_j – константы, $\alpha = -(1 - \sum_{j=1}^{p} \phi_j)$.

Тест Дики-Фуллера

Для уточнения структуры новой модели (2) проверяется нулевая гипотеза $H_o: \alpha = 0$ против альтернативной гипотезы $H_1: \alpha \neq 0$. Для этого используется случайная функция (статистика) $\dfrac{\hat{\alpha}}{\hat{\sigma}_\alpha}$, подчиняющаяся распределению Дики-Фуллера, здесь $\hat{\alpha}$ – оценка коэффициента α, $\hat{\sigma}_\alpha$ - выборочное среднеквадратическое отклонение. Если принимается нулевая гипотеза, уравнение (2) имеет единичный корень, т.е. описывает нестационарный случайный процесс, или интегрированный временной ряд первого порядка (обозначается как $I(1)$). Если нулевая гипотеза отвергается, то ряд считается интегрированным нулевого порядка ($I(0)$), т.е. стационарным.

Тест Дики-Фуллера

В таблице 4 проанализированы возможные модели вида (2): с константой и с константой и трендом. Первые разности DRT, DPT, DWT, DRW являются стационарными, т.е. имеют порядок интегрированности $I(0)$, а исследуемые случайные процессы нестационарными с порядком интегрированности $I(1)$.

Таблица 4

Определение порядка интегрированности процессов

Параметры (1)	Лаг, p (2)	Т-статис-тика (без тренда) (3)	к.з. (1%) (4)	Лаг, p (5)	Т-статистика (с трендом) (6)	к.з. (1%) (7)	Порядок интегриров. (8)
RT	0	-3.399	-3.508	0	-3.360	-4.068	I(1)
PT	9	-0.525	-3.518	0	-3.608	-4.068	I(1)
WT	9	-0.053	-3.518	10	0.078	-4.083	I(1)
RW	1	-3.474	-3.509	6	-3.592	-4.068	I(1)
DRT	0	-9.154	-3.509	0	-9.087	-4.070	I(0)
DPT	1	-4.848	-3.510	8	-4.818	-4.071	I(0)
DWT	0	-7.622	-3.509	0	-7.575	-4.070	I(0)
DRW	0	-11.117	-3.509	0	-11.178	-4.070	I(0)

Статистика Дурбина-Уотсона

Для оценки адекватности модели реальному процессу используют статистику Дурбина-Уотсона:

$$DW = 2 - 2\rho$$

ρ - коэффициент корреляции между значениями случайной переменной, т.е.

$$\rho = \text{cov}[\varepsilon(k)] = E[\varepsilon(k)\varepsilon(k-1)]$$

При полном отсутствии корреляции между ошибками

$$DW = 2$$

Статистика Льюнга-Бокса-Пирса

Для первых известных m автокорреляций: $\rho_1, \ldots, \rho_m$

статистика Льюнга-Бокса-Пирса имеет вид:

$$Q(\rho) = T(T+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{\rho_k^2}{T-k}$$

и асимптотическое распределение χ_m^2. Нулевая гипотеза в Q-критерии заключается в том, что случайный процесс представляет собой белый шум. Используем стандартную процедуру проверки: если расчетное значение Q-статистики больше заданного квантиля распределения χ_m^2, то нулевую гипотезу отвергаем и признаем наличие автокорреляции до m-го порядка в исследуемом процессе.

Результаты оценки адекватности полученных моделей

Параметры	DW	SBC	Число степеней свободы	Q	$\chi^2_{0.95}(20)$
ge	2,079	10,232	20	11,38	31,41
H	2,019	9,917	20	26,90	31,41
CH	1,703	9,637	20	20,05	31,41

Значения статистики Дарбина-Уотсона приблизительно равны 2, что говорит об отсутствии автокорреляции ошибок оценивания всех коэффициентов модели.

Статистики Льюнга-Бокса-Пирса для уточненных моделей абсолютно приемлемы, т.к. они сравнимы с табличным значением распределения

$$\chi^2_{0.95}(20) = 31.41$$