**Министерство образования и науки Российской Федерации**
**Севастопольский государственный университет**

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению лабораторных работ по дисциплине

«Теория принятия решений»

для студентов дневного и заочного отделения по направлению 09.03.02

«Информационные системы и технологи»

(Часть I)

**Севастополь**

**2014**

УДК 519.2

Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Теория принятия решений» для студентов дневного и заочного отделения по направлению 09.03.02 «Информационные системы и технологии». Часть I. /Сост. К.В.Кротов. – Севастополь: Изд-во СевГУ, 2014. – 54с.

Методические указания составлены в соответствии с требованиями программы дисциплины «Теория принятия решений» для студентов направления 09.03.02 и утверждены на заседании кафедры информационных систем, протокол № ___ от ____________ 2014 года.

Допущено учебно-методическим центром СевГУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Брюховецкий А.А. , кандидат технических наук, доцент кафедры Кибернетики и вычислительной техники

## СОДЕРЖАНИЕ

# ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

## 1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Цель настоящих лабораторных работ состоит в исследовании методов теории принятия решений для реализации задач выбора эффективных альтернатив в различных предметных областях. Задачами выполнения лабораторных работ являются: 1) углубленное изучение основных теоретических положений дисциплины; 2) получение практических навыков написания программ, реализующих методы теории принятия решений.

## 2. ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ

Объектом исследования в лабораторных работах являются методы и алгоритмы решения задач теории принятия решений, реализации методов с использованием современных программных средств. Инструментом исследования методов и алгоритмов теории принятия решений является ЭВМ. Программным средством исследования является язык С++, для разработки программ используется среда Visual studio. Выполнение работы предусматривает создание проекта в среде Visual studio, разработку и отладку программы на языке С++ на основе методов и алгоритмов теории принятия решений, рассматриваемых в данных методических указаниях.

## 3. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчеты по лабораторной работе оформляются каждым студентом индивидуально. Отчет должен включать: название лабораторной работы; цель работы; краткие теоретические сведения; постановку задачи; текст программы, реализующей задание; распечатку результатов выполнения программы.

## 4.ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ

Задание выбирается в соответствии с вариантом, назначаемым преподавателем.

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ АППАРАТА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫБОРА АЛЬТЕРНАТИВ

**1. Цель работы:** исследовать применение аппарата бинарных отношений при принятии решений по выбору альтернатив

### 2. Теоретическое введение

### 2.1. Общие понятия бинарных отношений

**Бинарные отношения** – это отношения, которые могут выполняться или не выполняться между элементами одного множества. Если $X$ — множество решений (альтернатив), тогда отношение $R$ на множестве $X$ - это подмножество $R \subseteq X * X$, т.е. $R$ - множество пар $(x_i, x_j)$, определённые на декартовом произведении $X * X$ ($X^2$), для которых выполняется определённое (заданное) свойство.

**Обозначение для отношения $R$.**

Если пара $(x_i, x_j) \in R$, то $x_i R x_j$ ($x_i$ находится в отношении $R$ с $x_j$). Множество $X$ – область задания отношений (отношения $R$).

**Способы задания отношений:**

**1. Задание матрицей.** Если множество $X$ состоит из $n$ элементов, то элементы $x_i \in X$ могут быть проидентифицированы индексами $i$ такими, что $i = \overline{1,n}$; тогда для решений $x_i \in X$ может быть введена в рассмотрение матрица $A$ размерности $n \times n$.

При этом если $x_i R x_j$, то, $a_{ij}=1$; если $x_i R x_j$ не является верным (т.е. $(x_i, x_j) \notin R$), то $a_{ij}=0$, тогда общее правило определения элементов матрицы $A$ следующее ($(a_{ij}) = A$):

$$a_{ij}(A) = \begin{cases} 1, если\ x_i R x_j\ ; \\ 0, если\ x_i R x_j\ не\ верно; \end{cases}$$

при этом $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,n}$.

**Пример 1.** Задание вида матрицы $A$ ( при $n = 4$ ).

$$A = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Заметим, что $a_{ii}=0$, (т.е. в данном (общем) рассматриваемом случае $(x_i, x_i) \notin R$).

**2. Задание графом.** Графом $G$ называется пара $G(X, \Gamma)$, где $X$ – конечное множество вершин, $\Gamma$ (гамма) – конечное подмножество произведения $X^2$, множество дуг, соединяющих вершины; дугу, соединяющую вершину $x_i$ с вершиной $x_j$, обозначим как $(x_i, x_j)$.

Если множество решений (альтернатив) $X$ однозначно соответствует множеству вершин графа $X$, тогда дуга $(x_i, x_j)$ соединяет две вершины $x_i$ и $x_j$ в том случае, если выполнено отношение $x_i R x_j$.

Если задан граф $G$ с $n$ вершинами (где $|X| = n$), нумерация вершин $G$ соответствует нумерации решений (альтернатив) из $X$, тогда на графе $G$ (для элементов множества $X$) задаётся отношение $R$ такое, что при $x_i R x_j$ на графе определяется дуга (формируется дуга) $(x_i, x_j)$.

**Пример 2.** Задание графа отношения $G(R)$ (Рисунок 1).

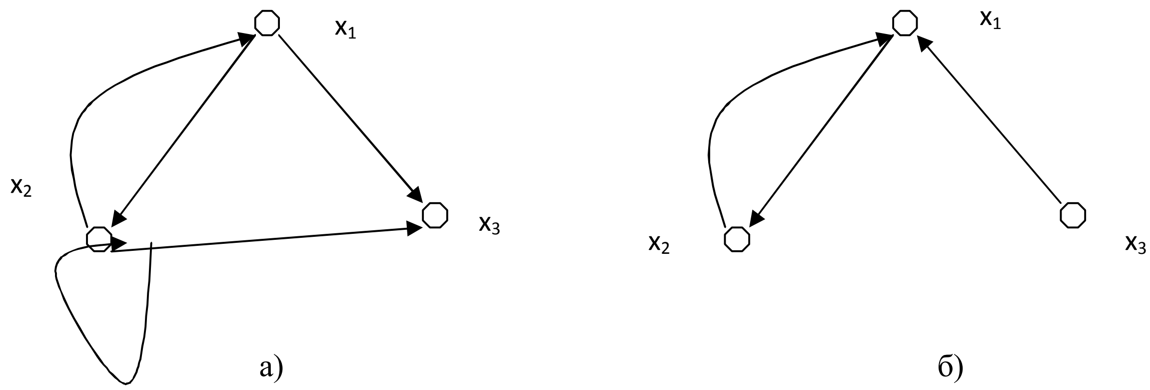



Рисунок 1 – Виды графов отношений $G(R)$

**3. Задание сечением.** Верхнее сечение множества (отношения) $R$ обозначается как $R^+(x_i)$ (т.е. определяется для каждого элемента $x_i$ множества $X$) и формируется в соответствии с выражением вида:

$$(x_i, x_j) \in R : R^+(x_j) = \{x_i \in X | x_i R x_j\}.$$

Если $R$ – отношение предпочтения (доминирования), то для элемента $x_j$ верхнее сечение $R^+(x_j)$ отношения $R$ – это те решения $x_i$, которые предпочтительнее, чем рассматриваемое решение $x_i$. Нижнее сечение отношения $R$ определяется аналогичным образом:

$$(x_i, x_j) : R^-(x_i) = \{x_j \in X | x_i R x_j\}$$

Таким образом, $R^+(x_j)$ – те элементы (решения) $x_i$, которые находятся с элементом $x_j$ в отношении $R$; $R^-(x_i)$ – те элементы $X$ (решения $x_j$), с которыми фиксированный элемент $x_i$ находится в отношении $R$.

**Отношения специального вида.**

1. Пустое отношение. Отношение называется пустым Ø, если оно не выполняется ни для одной пары $(x_i, x_j) \in X^2$. Тогда матрица $A(\varnothing)$ такая, что $a_{ij}(\varnothing) = 0$ для всех $i, j$ граф $G(\varnothing)$ не имеет дуг, сечения $R^+(x) = R^-(x) = \varnothing$.

2. Полное отношение. Отношение называется полным, если оно выполняется для всех пар $(x_i, x_j) \in X^2$. Полное отношение обозначается $\boldsymbol{P}$. Тогда $A(P)$ такая, что $a_{ij}(P) = 1$ для всех индексов $i, j$; граф $G(P)$ такой, что дуги соединяют любую пару вершин; $R^+(x) = R^-(x) = X \setminus \{x\}$ для любого $x \in X$.

**Операции над отношениями.**

1. Вложение отношений. Отношение $R_1$ вложено или включено в отношение $R_2$ (обозначается $R_2 \succ R_1$), если множество пар $(x_i, x_j)$, для которых выполнено отношение $R_1$, содержится в множестве пар, для которых выполнено отношение $R_2$. Если $R_2 \succeq R_1$, то либо $R_2 = R_1$, либо $R_2 \succ R_1$.

2. Дополнение отношения $R$. Отношение $\overline{R}$ называется дополнением отношения $R$, если оно выполняется для тех пар $(x_i, x_j)$, для которых не выполняется отношение $R$. Таким образом, если $(x_i, x_j) \notin R$, то $(x_i, x_j) \in \overline{R}$ (т.е. $\overline{R} = X \setminus R$). Тогда $a_{ij}(\overline{R}) = 1 - a_{ij}(R)$, граф $G(\overline{R})$ содержит те дуги, которые отсутствуют в графе $G(R)$.

3. Обратное отношение. Обратным к отношению $R$ называется отношение $R^{-1}$, определяемое условием:

$$x_i R^{-1} x_j \iff x_j R x_i .$$

Если $R$ – отношение «меньше» на множестве действительных чисел, то обратное отношение $R^{-1}$ – «больше». Для обратного отношения справедливо:

1) $a_{ij}(R^{-1}) = a_{ji}(R)$ при $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$;

2) граф $G(R^{-1})$ получается из графа $G(R)$ изменением направления дуг.

**Свойства отношений**

**1. Рефлексивность.** Отношение $R$ называется рефлексивным, если $x_i R x_i$. Тогда:

а) в матрице $A(R)$ рефлексивного отношения $R$ на главной диагонали заданы 1;

б) в графе $G(R)$ при каждой вершине имеется петля.

Соответственно, если отношение $R$ антирефлексивно, то выражение вида $x_i R x_i$ не является верным, в этом случае диагональные элементы матрицы $A(R)$ равны 0.

**2. Симметричность.** Отношение $R$ - симметрично, если из $x_i R x_j$ вытекает $x_j R x_i$. Тогда:

а) матрица $A(R)$ отношения $R$ симметрична, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.

б) каждая вершина $x_i$ графа $G(R)$ имеет исходящую дугу $(x_i, x_j)$ и входящую дугу $(x_j, x_i)$.

**3. Асимметричность.** Для пары $(x_i, x_j)$ выполняется либо $x_i R x_j$, либо $x_j R x_i$, т.е. если $x_i R x_j$ выполняется, то $x_j R x_i$ нет. В этом случае граф $G(R)$ не может содержать одновременно дуги $(x_i, x_j)$ и $(x_j, x_i)$ (содержит одну из этих дуг).

**4. Антисимметричность**. Для антисимметричного отношения $R$ выражения $x_i R x_j$ и $x_j R x_i$ справедливы тогда, когда $x_i = x_j$. Для антисимметричного отношения $R$ граф $G(R)$ не может одновременно содержать дуги $(x_i, x_j)$ и $(x_j, x_i)$ при $i \neq j$.

**5. Транзитивность.** Из $xRz$ и $zRy$ следует $xRy$.

**6. Ацикличность.** Из $x_i R x_j$, $x_j R x_k, \ldots$, $x_{k+l} R x_m$ следует, что $x_i \neq x_m$ (т.е. путь на графе не является циклом).

**Виды отношений, используемых в ТПР**

**1. Отношение эквивалентности** $\sim$ (вид отношения, связывающего пару решений $(x_i, x_j)$ – $(x_i \sim x_j)$. Свойства отношения: рефлексивно ($x_i \sim x_i$), симметрично ($x_i \sim x_j$ и $x_j \sim x_i$), транзитивно ($x_i \sim x_j$, $x_j \sim x_k$, $x_i \sim x_k$). Отношение эквивалентности $\sim$ определяет, что два решения $x_i$ и $x_j$ эквивалентны.

2. **Отношение нестрогого (частичного) порядка** $x_i \succeq x_j$ определяет, что решение $x_i$ не хуже, чем решение $x_j$ (т.е. лучше или эквивалентно). Таким образом для пары решений выполняется либо $x_i \succ x_j$ либо $x_i \sim x_j$. Свойства отношения: рефлексивность ($x_i \succeq x_i$), антисимметричность (если $x_i \succeq x_j$ и $x_j \succeq x_i$, то $x_i \sim x_j$), транзитивность (если $x_i \succeq x_j$ и $x_j \succeq x_k$, то $x_i \succeq x_k$). Таким образом, отношение $\succeq$ позволяет реализовывать упорядоченность решений при возможной их эквивалентности.

3. **Отношение строгого порядка** $x_i \succ x_j$ (т.е. решение $x_i$ строго лучше, чем $x_j$). Свойства отношения: антирефлексивность ($x_i \succ x_j$ не является верным), антисимметричность (если верно $x_i > x_j$, то $x_j \succ x_i$ - не верно и наоборот). Отношение $\succ$ также соответствует отношению строгого предпочтения (доминирования). Т.е. при $x_i \succ x_j$ решение $x_i$ строго предпочтительнее решения $x_j$, решение $x_i$ доминирует решение $x_j$.

Тогда с использованием отношений $\succ$ и $\sim$ может быть определён порядок (предпочтительность, доминирование) решений.

**Пример** 3. Задание вида порядка решений.

$x_i \succ x_j \sim x_k \succ x_l$

**2.2. Выбор эффективных решений, порождённый бинарными отношениями**

Если $X$ - множество решений, тогда в нём может быть определено подмножество $C(X)$ решений, называемых предпочтительными элементами (решениями) в $X$. Для определения в множестве $X$ подмножества $C(X)$ в рассмотрение введена функция отображения $C$, составляющая множеству $X$ его подмножество $C(X)$, т.е. $C : X \to C(X)$.

Функция выбора – это способ построения подмножества предпочтительных решений $C(X)$ на основе множества решений $X$. Если на множестве решений $X$ определено (задано) бинарное отношение $R$ (в частности, отношение строгого предпочтения $\succ$), то этому отношению может быть поставлена в соответствие функция выбора $C$. Тогда с использованием функции выбора на основе бинарного отношения $R$ $(\succ)$ может быть определено множество предпочтительных решений.

В случае, если для каждой пары $(x_i, x_j) \in X^2$ выполнено (задано) отношение $R$ (т.е. задано $x_i R x_j$, $x_i \succ x_j$), тогда при определении подмножества $C(X) \subseteq X$ могут быть использованы следующие рассуждения:

1) если $x_i \succ x_j$, то при определении выбора решения $x_i, x_j \in X$ из $X$ считается, что $x_j \notin C(X)$;

2) если $x_i \succ x_j$, то $x_i$ может быть включен в $C(X)$.

Если $\succ$ – отношение предпочтения ($x_i \succ x_j, x_i$ предпочтительнее $x_j$), $\overline{\succ}$ - отсутствие предпочтения ($x_i \overline{\succ} x_j$, $x_i$ не предпочтительнее $x_j$), тогда из отношения $\succ$ $(x_i \succ x_j)$ вытекают два способа формирования множества $C(X)$.

**Первый способ.**

Множество $C^R(X)$ образуется теми решениями $x_i$, для которых условие предпочтительности ими других решений (решений $x_j$) не выполняется (т.е. $\forall x_j \in x$ не предпочтительнее решений $x_i \in C^R(X)$). Данная формулировка может быть представлена следующим выражением:

$$C^R(X) = \{x_i \in X \mid \forall x_j \in X ,\ x_j \overline{\succ} x_i\}. \quad (1)$$

Тогда $C^R(X)$ - это те решения $x_i$, для которых все возможные решения $x_j \in X$ не предпочтительнее их.

**Второй способ.**

Решения $x_i$, формирующие $C_R(X)$, предпочтительнее любого решения $x_j \in X$.

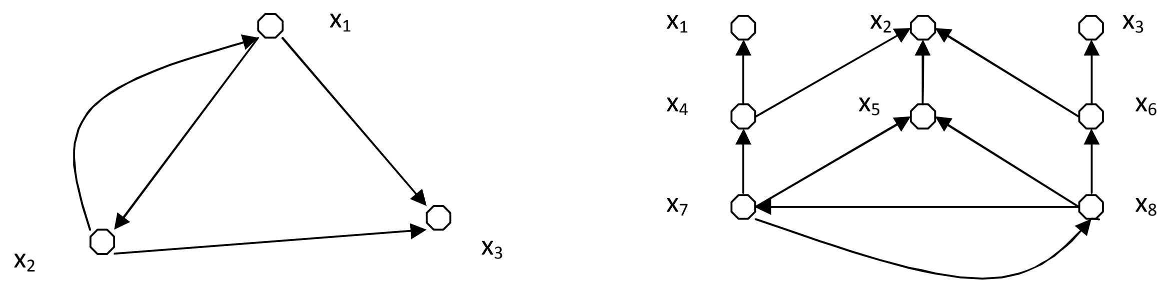
Данная формулировка формализована в виде выражения:

$$C_R(X) = \{x_i \in X \ \ \forall x_j \in X, x_i \succ x_j\}. \quad (2)$$

Условие для определения $C^R(X)$ называется условием блокировки, условие для определения $C_R(X)$ - условие предпочтения.

Таким образом, решения $x_i$, входящие в множество $C^R(X)$ или $C_R(X)$, определяемые выражениями (1), (2), являются наилучшими решениями, т.к. они непосредственно либо транзитивно (вследствие свойства транзитивности отношения $\succ$) доминируют (являются предпочтительными) остальные решения $x_j$.

Пример определения наилучших (предпочтительных) решений на основе графовой модели представления бинарных отношений приведён на Рисунке 2.



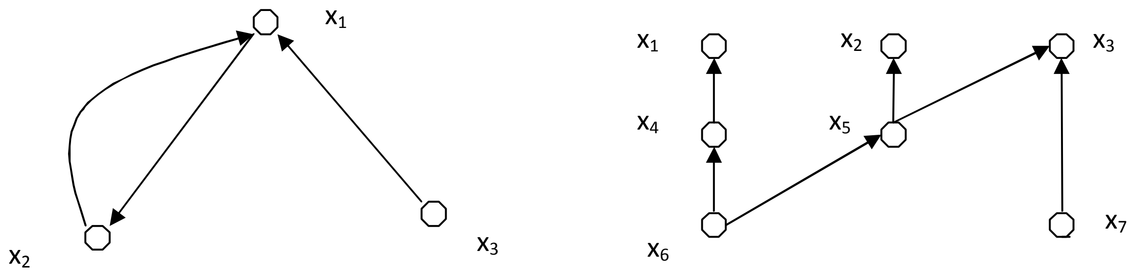

а) б)

Рисунок 2 – Виды графовых моделей для определения наилучших (предпочтительных) решений.

На Рис. 2а) решения $x_1, x_2 \in C(X)$, так как при $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $x_1 \succ x_2$ и $x_1 \succ x_3$, а также $x_2 \succ x_1$ и $x_2 \succ x_3$. На Рис. 2б) решения $x_7$ и $x_8$ являются наилучшими, так как они непосредственно либо транзитивно доминируют все остальные решения.

Полученные таким образом предпочтительные (наилучшие) решения ($x_1$ и $x_2$ на Рис. 2а), $x_7, x_8$ на Рис. 2б)) с точки зрения теории множеств могут быть определены как наибольшие элементы множества решений $X$. Являющиеся наилучшими (“наибольшими”) решениями, $x_1, x_2$ и $x_7, x_8$ доминируют все остальные элементы соответствующих множеств решений. Определение предпочтительных решений $x_i \in X$, доминирующих остальные решения множества $X$, на основе графовых моделей рассмотрено ниже.

Наличие наилучших решений в множестве $X$ с отношением $\succ$ при условии доминирования ими остальных решений не является обязательным. Возможны случаи, когда введенные условия не выполняются и множество $X$ не содержит наилучших решений. Такие случаи представлены на Рис.3.




а) б)

Рисунок 3 – Виды графовых моделей отношений, для которых не выполняются условия для наилучший решений

На Рис.3а) решение $x_1$, не может быть выбрано в качестве предпочтительного, так как доминируется решением $x_3$ (без доминирования $x_3$ со стороны $x_1$), решения $x_2$ и $x_3$ являются несравнимыми друг с другом (между ними бинарное отношение $\succ$ не установлено). Поэтому на Рис. 3а) могут быть рассмотрены только решения $x_2$ и $x_3$, но они не являются наилучшими. На Рис. 3б) решением $x_7$ доминируются не все решения множества $X$

$((x_7, x_1) \notin R, (x_7, x_6) \notin R$, где $R$ - отношение предпочтения $\succ$). При этом решения $x_6$ и $x_7$ являются не сравнимыми (между ними отношение $\succ$ не установлено). Так как решения $x_j (j = \overline{1,5})$ являются непосредственно или транзитивно доминируемыми решениями (не могут входить в $C(X)$), то в качестве эффективных могут быть рассмотрены только решения $x_6$ и $x_7$, которые являются не сравнимыми между собой.

В результате для множества $X$ может быть сформировано множество максимальных элементов обозначенное как $Max_R X$, среди которых могут быть выбраны эффективные решения. Для включения элемента (решения) $x_i$ множества $X (x_i \in X)$ в множество максимальных элементов $Max_R X$ (где $R$ - отношение предпочтения/доминирования $\succ$) должно выполняться одно из следующих условий:

1) $\forall x_j : x_i \succ x_j$ ($x_i$ предпочтительнее $x_j$ для всех $x_j$), тогда если элемент $x_j$ доминируем , то он не включается в $Max_R X$;

2) решения $x_i$ и $x_j$ эквивалентны ($x_i \sim x_j$);

3) решения $x_i$ и $x_j$ не сравнимы.

Реализация третьего условия предполагает, что:

а) решения $x_i$ и $x_j$ не связаны отношением предпочтения (т.е. не сравнимы), тогда между ними нет стрелки на графе $G(R)$;

б) для пары элементов $(x_i, x_j) \in R$ (где $R$ - отношение предпочтения $\succ$) выполняется условие $x_i \succ x_j$ и условие $x_j \succ x_i$, тогда между ними имеются две разнонаправленные стрелки.

Тогда $x_i \in X$ является максимальным элементом в модели $< X, R >$ если:

$$\forall x_j \in X : (x_i, x_j) \in R <=> (x_j, x_i) \in R .$$

Первому условию соответствуют решения $x_6, x_7$ на Рис. 3б), второму условию – решения $x_1, x_2$ на Рис. 3а).

Таким образом, основное понятие для принятия решений с использованием бинарного отношения предпочтения $\succ$ – это максимальный элемент и множество максимальных элементов $Max_R X$. Тогда формирование множества $Max_R X$ – это выделение наилучших элементов $x_i \in X$ по бинарному отношению $\succ$.

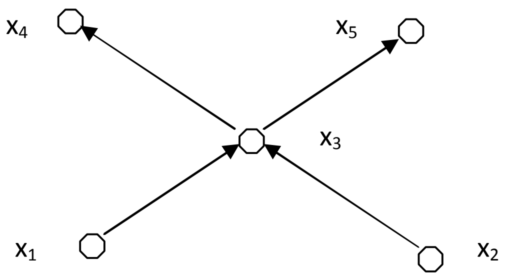
**Определение.** Множество $Max_R X$ называется внешне устойчивым, если для любого элемента $x_j \in X \setminus Max_R X$ найдется такой элемент $x_i \in Max_R X$ , что $x_i R x_j$ .

Если множество $Max_R X$ внешне устойчиво, то выбор эффективных решений $x_i$ производится только в пределах $Max_R X$ . Множество $Max_R X$ называется ядром множества $X$ .

Тогда под задачей принятия решений с использованием бинарных отношений подразумевается задача выделения ядра $Max_R X$ их множества $X$ . На Рис. 3а) множество $Max_R X$ имеет вид: $Max_R X = \{x_2, x_3\}$, при этом оно является устойчивым т.к. $x_2 \succ x_1$ и $x_3 \succ x_1$, при этом элементы $x_1$ и $x_2$ являются не сравнимыми между собой и $x_1$ $Max_R X$ . На Рис. 3б) множество $Max_R X$ имеет вид: $Max_R X = \{x_6, x_7\}$, но при этом оно не является внешне устойчивым, т.е. в нем не могут быть выбраны эффективные решения.

Особенности построения алгоритма формирования множества $Max_R X$ далее прокомментированы на примерах.

**Пример 4.** Вид графа $G(R)$ и матрицы отношения (Рис. 4).




$$(a_{ij}) = \begin{array}{c|ccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Рисунок 4 – Вид графовой модели и матрицы отношений, для которых формируется множество $Max_R X$

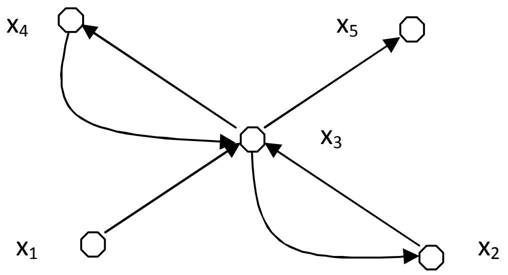
Матрица $(a_{ij})$ отображает непосредственное (не транзитивное) предпочтение решения $x_i$ над решением $x_j$ $(x_i R x_j)$.

Так как элементы $x_i$ строго упорядочены с точки зрения отношения $\succ$, то $a_{ij} \neq a_{ji}$. Решения $x_1$ и $x_2$ доминируют все остальные решения (предпочтительнее всех остальных решений) поэтому в столбцах $j=1$, $j=2$ $a_{ij}=0$ для всех $i$.

Для рассматриваемого примера синтаксис определения состава множества $Max_R X$ (в рассмотрение введен массив $MaxR$) имеет следующий вид:

```
Цикл i=1 до 5
  MaxR[i]=1;
 Цикл j=1 до 5
   Цикл i=1 до 5
    Если a[i,j]=1 то
            MaxR[j]=0;
```

**Пример 5**. Вид графа $G(R)$ и матрицы парных сравнений для отношения $\succ$(Рисунок 5).




$$(a_{ij}) = \begin{array}{c|ccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Рисунок 5 – Вид графовой модели и матрицы отношений, для которых формируется множество $Max_R X$

Предлагаемый код программы для формирования множества $Max_R X$ (вектора $MaxR$) следующий:

```
Цикл i=1 до 5
  MaxR[i]=1;
 Цикл i=1 до 5
   Цикл j=1 до 5
    Если a[i,j]=1 то
      Если a[j,i]=0 то
           MaxR[j]=0;
      Если (a[j,i]=1)&( MaxR[i]=0) то
            MaxR[j]=0;
```

Подобный синтаксис определения элементов множества $Max_R X$ (массива $Max\_X$) может быть применен и для вида графа $G(R)$ в Примере 6 (Рисунок 6).

**Пример 6.** Вид графа $G(R)$ бинарных отношений для множества решений $X$.

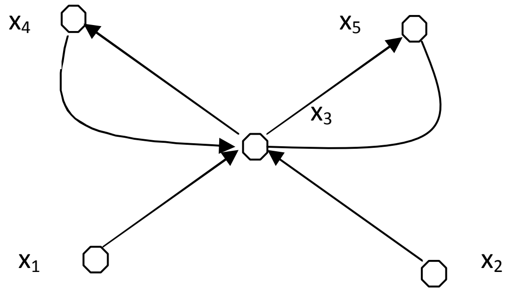



Рисунок 6 – Вид графовой модели отношений, для которой формируется множество $Max_R X$

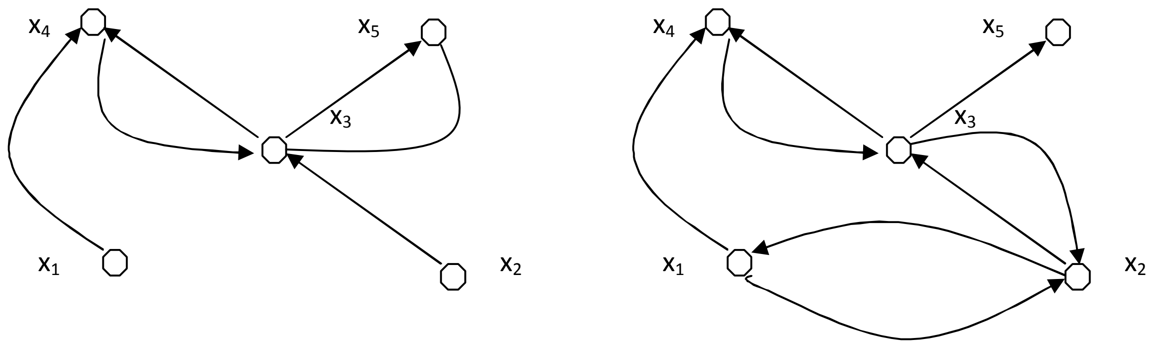
Понятно, что в результате должно быть получено множество $Max_R X$ в виде: $Max_R X = \{x_1 x_2\}$. Таким образом условиями включения/не включения элемента $x_i \in X$ в множество $Max_R X$ являются:

1) $x_i \succ x_j \Rightarrow x_j \notin Max_R X$;

2) если $\forall x_j : x_i \succ x_j \Rightarrow x_i \in Max_R X$;

3) если $x_i \succ x_j$ и $x_j \succ x_i \Rightarrow x_i \in Max_R X$ и $x_j \in Max_R X$ .

**Задание. Выполнить проверку применимости приведенного программного кода для графов отношений следующего вида (Рис.7).**




**а)** **б)**

Рисунок 7– Виды графовых моделей отношений, для которых формируются множества $Max_R X$

## 2.3.Определение порядка решений для графовых моделей бинарных отношений

Бинарные отношения между решениями могут быть представлены в виде графовой модели $G(R)$, дуги на графе соединяют вершины $x_i$ и $x_j$ если бинарное отношение $R$ связывает решения $x_i$ и $x_j$.

**Задание**. На графе $G(R)$, определяющем бинарные отношения и представленным на Рис.8, идентифицировать сравнимые и несравнимые решения.

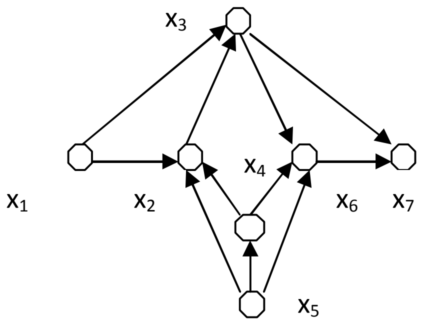


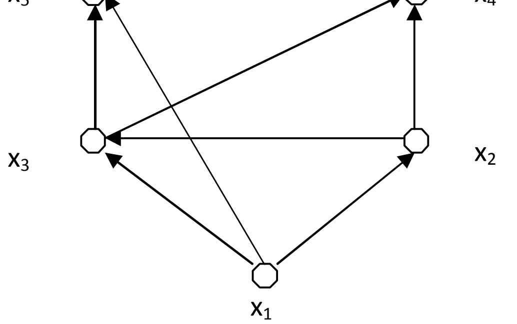

Рисунок 8 – Вид графовой модели $G(R)$ бинарных отношений

Если граф не содержит контуров, то все его вершины могут быть упорядочены таким образом, что направления всех дуг будут совпадать. В результате вершины графа $G(R)$ (решения $x_i$) могут быть распределены по ярусам. В вершины $x_j$ яруса $k$ входят дуги из вершин $x_i$ ($k-1$)-го яруса если $x_i R x_j$, из вершин $x_j$ $k$-го яруса вы ходят дуги в вершины $x_h$ $(k+1)$-го яруса в том случае, если $x_j R x_h$. Формирование распределения вершин $x_i$ по ярусам для графовой модели $G(R)$ позволяет определить порядок этих вершин (порядок решений) и, соответственно, выделить лучшие решения. Для определения порядка (упорядочивания) решений (вершин графа $G(R)$) может быть реализован следующий алгоритм. На $i$-ой итерации алгоритм реализует выделение вершин источников (т.е.вершин. в которые не входят стрелки). Решения, соответствующие этим вершинам, ставятся на $i$-е место в последовательности решений $\Pi$, после чего выбранные вершины отбрасываются. Обобщенный порядок шагов алгоритма, реализующего определение последовательности решений с точки зрения бинарного отношения предпочтения, следующий:

1) $i=1$;
2) выбрать варианты–источники (вершины, решения). Если таковые отсутствуют – переход на шаг 7;
3) выбранные вершины отнести к $i$-ому ярусу;
4) $i=i+1$;
5) выбранные на втором шаге вершины – источники удаляются из графа (в дальнейшем не рассматриваются);
6) переход к шагу 2;
7) конец.

**Пример реализации данного алгоритма** ориентирован на работу с матрицей инциденций. Элемент матрицы $(a_{ij})=1$ в случае, если из вершины $x_i$ в вершину $x_j$ идет направленная дуги. Если вершина является источником, то отсутствуют дуги, идущие в неё. Тогда весь $j$-ый столбец, соответствующий вершине-источнику $x_i$, должен содержать нулевые элементы (т.к. данная вершина не зависит от других и в неё не ведут дуги).

Реализацию алгоритма построим на примере графа $G(R)$, представленного на Рис. 9, и соответствующей ему матрицы инциденций.




$$a_{ij} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

Рисунок 9 – Вид графовой модели $G(R)$ бинарных отношений и соответствующая ей матрица отношений

```
/ обозначение параметров, используемых при реализации алгоритма
// К - количество элементов, добавленных в массив Max[i]
// MaxR[i] - массив решений, упорядоченных с точки зрения убывания предпочтения
// счётчик – текущее количество решений, которые могут быть проанализированы
Счётчик =5;    К =0;  К1=1;

Пока счётчик >=5
   // определение исключаемых элементов
      Цикл j = 1 до 5
        Сумма =0;
        Цикл i = 1 до 5
          Сумма=Сумма + a[i, j];
          Если Сумма =0 то
              К = К +1;
              MaxR[K] = j;
      Цикл q = K1 до К
        // обнуление элементов в a_ij, зависящих только от решений,
        // находящихся в массиве MaxR.
        Цикл j = 1 до 5
          a[MaxR[q], j] = 0;
        // исключение элементов, добавленных в MaxR
      Цикл q = K1 до К
        Цикл i = 1 до 5
          a[j, MaxR[q]] = 1;;

      K1=K+1; Счетчик=5-К;
Конец цикла пока;
```

В результате реализации приведенного фрагмента программы все решения будут упорядочены, при этом лучшее решение будет являться первым в массиве $MaxR$.

Аналогичный подход может быть реализован и при анализе вершин-приемников, т.е вершин, в которые идут стрелки. Тогда самыми первыми в упорядоченном массиве решений $MaxR$ будут являться те вершины, из которых не выходят стрелки, а самым лучшим решением в их последовательности будет являться последнее решений.

### 3. Программа выполнения работы

3.1. Для Варианта 1 задания на работу, связанного с формированием подмножества максимальных элементов $MaxR$ множества X, необходимо по заданному варианту графа отношений предпочтения между решениями сформировать матрицу A отношения $R$ (где R– отношение $\succ$). При этом убедиться, что первый элемент множества X является строго независящим от других решений.

3.2. Выполнить формирование множества $MaxR$ вручную для заданного вида графа и соответствующего ему вида матрицы $A$.

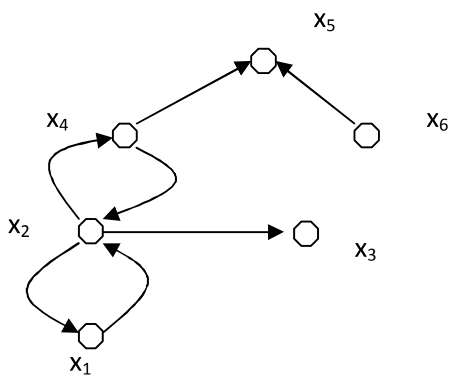
3.3. Выполнить формирование программного кода соответствующей процедуры определения множества $MaxR$, при этом возможно руководствоваться ориентировочным видом процедуры определения этого множества, предложенным в теоретическом введении данной лабораторной работы.

3.4. Выполнить вывод результатов работы процедуры и сравнить полученные в процедуре результаты с результатами, сформированными аналитически.

3.5. Изменить исходные данные программы, используя графы отношений из примера 5 (Рис 7). Проверить получаемые с использованием процедуры результаты с аналитическим результатами, формируемыми для этих графов.
3.6. Варианты 2 и 3 задания на работу, связаны с построением упорядоченного множества решений, формируемого на основе задаваемого множества X и отношений между его элементами, представленными в виде графа. Для реализации задания необходимо на основе графа заданного вида сформировать матрицу A отношений между решениями $x_i$ .
3.7. Для полученного вида матрицы A аналитически выполнить определение порядка решений– множества упорядоченных решений $MaxR$ . Упорядочить рассматриваемые решения по ярусам. Определить количество элементов на первом (либо последнем) ярусе формируемой схемы, эти элементы (решения) являются эффективными.
3.8. В соответствии с предложенным возможным синтаксисом процедуры определения упорядоченного множества решений $MaxR$ выполнить формирование программы, которая в соответствии с видом матрицы отношений $A$ реализует определение множества $MaxR$ . Предусмотреть при написании программы указание номера яруса схемы, на котором находятся соответствующие решения. Руководствуясь нумерацией ярусов определить эффективные решения (на первом либо последнем ярусах).
3.9. Выполнить сравнение полученных с использованием процедуры результатов с результатами, полученными аналитически.
3.10. Изменить в реализуемой программе исходные данные, изменив их на данные Рис.9. Выполнить аналитическое построение множества $MaxR$ для этих данных и сравнить его с результатами, полученными с использованием процедуры.
3.11. В отчете представить графы отношений между решениями в соответствии с вариантом задания, виды матриц $A$ отношений между решениями, аналитические виды решений поставленной задачи, распечатки результатов решения задачи с использованием разработанной программы.

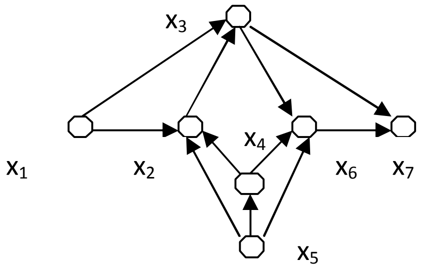
## 4. Варианты заданий

**Вариант 1.** Выполнит разработку программы, реализующей определение множества максимальных элементов $MaxR$ , руководствуясь заданной формой графа отношений. При разработке программы использовать приведенные в теоретическом введении правила формирования множества $MaxR$ . При разработке программы использовать следующий вид графа отношений между решениями множества $X$.




Применить разработанную процедуру к графам на Рис. 7.

**Вариант 2.** Выполнит разработку программы, реализующей определение упорядоченного множества решений $MaxR$ для множества $X$, руководствуясь заданной формой графа отношений. При разработке программы использовать приведенные в теоретическом введении правила формирования множества $MaxR$ с учетом рассмотрения вершин-источников на каждом шаге алгоритма. При формировании упорядоченного множества решений указывать номер яруса, на котором находятся решения. Определить эффективные решения. При разработке программы использовать следующий вид графа отношений между решениями множества *X*.




Реализовать определение эффективных решений для графа на Рис.9.

**Вариант 3.** Выполнит разработку программы, реализующей определение упорядоченного множества решений *MaxR* для множества *X*, руководствуясь заданной формой графа отношений. При разработке программы использовать приведенные в теоретическом введении правила формирования множества *MaxR* с учетом рассмотрения вершин-приемников на каждом шаге алгоритма (задача, обратная рассматриваемой для Варианта 2). При формировании упорядоченного множества решений указывать номер яруса, на котором находятся решения. Определить эффективные решения. При разработке программы использовать вид графа отношений между решениями множества *X*, аналогичный варианту 2. Реализовать определение эффективных решений для графа на Рис.9.

### 5. Контрольные вопросы.

5.1. Что такое бинарные отношения и что они характеризуют?
5.2. Каковы способы задания бинарных отношений?
5.3. Каковы свойства бинарных отношений и операции над ними?
5.4. Что такое функция выбора для предпочитаемых элементов и каким образом выбор предпочитаемых элементов формализуется?
5.5. Что такое условия блокировки и предпочтения и как они формализуются?
5.6. Что такое наилучшие элементы множества решений и каким образом реализуется из определение?
5.7. Что такое подмножество максимальных элементов $Max_R X$ в множестве решений X и каковы условия принадлежности решения этому множеству?
5.8. Что такое внешняя устойчивость множества $Max_R X$ и как она определяется (каковы условия внешней устойчивости множества $Max_R X$ )?
5.9. Какой вид может иметь примерный синтаксис программы определения элементов в $Max_R X$ при выполнении условия эквивалентности (несравнимости) решений?
5.10. Какие условия для вершин графа $G(R)$ должны выполняться, чтобы решения могли быть упорядочены?
5.11. Что из себя представляет алгоритм упорядочивания решений при рассмотрении вершин-источников на графе $G(R)$?
5.12. Что из себя представляет алгоритм упорядочивания решений при рассмотрении вершин-приемников на графе $G(R)$?
5.13. Какой вид имеет примерный синтаксис программы для упорядочивания решений при рассмотрении вершин-источников на графе $G(R)$?
5.14. Какой вид имеет примерный синтаксис программы для упорядочивания решений при рассмотрении вершин-приемников на графе $G(R)$?
5.15. Каким образом будут сформированы (какой вид имеют) множества $Max_R X$ для графов отношений $G(R)$ на Рис.7?
5.15. Каким образом будут сформированы (какой вид имеют) упорядоченное множество решений для множества X и для графа отношений $G(R)$ на Рис.9?

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ АППАРАТА ТЕОРИИ ПОЛЕЗНОСТИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ ПРИ ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ

**1. Цель работы:** исследовать применение аппарата теории полезности при принятии решений по выбору альтернатив

## 2. Теоретическое введение

### 2.1. Общие понятия теории полезности и связь полезности с бинарными отношениями

В основу использования теории полезности при принятии решений при полной определенности положено утверждение о том, что каждой альтернативе (решению $x_i$) в множестве возможных решений $X$ может быть поставлено в соответствие некоторое значение (значение функции полезности, соответствующее альтернативе). При этом для любых двух альтернатив (решений) если одна из них предпочтительнее других (т.е. $x_i \succ x_j$), тогда полезность одной альтернативы больше полезности другой альтернативы. Обозначим через $U(x_i)$ функцию полезности для решений множества $X$. В рассматриваемом случае предполагается, что множество альтернатив $X$ является счетным и конечным.

Таким образом, использование функции полезности предполагает определение числовых значений, характеризующих решения, связанные отношением предпочтения. Т.е. значения функции полезности $U(x_i)$ и $U(x_j)$ вытекают из отношения предпочтения между альтернативами $x_i$ и $x_j$ в множестве альтернатив $X$

Если решение $x_i$ характеризуется одним параметром, тогда сравнение решений выполняется с использованием непосредственно отношения предпочтения, в результате для каждого $x_i$ формируется единственное значение функции $U(x_i)$. Тогда предпочтение для решений (отношение предпочтения $\succ$ для пары решений ($x_i, x_j$)) может быть охарактеризовано функцией полезности (предпочтение альтернатив может быть охарактеризовано соотношением значений функции полезности $U(x_i)$). В этом случае эффективным решением $x_i^*$ (эффективной альтернативой $x_i^* \in X$) является та альтернатива, для которой выполняется условие вида:

$$x_i^* = arg \max_{1 \leq i \leq N} U(x_i).$$

В случае, когда альтернативы (решения) $x_i$ могут быть рассмотрены как системы нескольких признаков (факторов, свойств, критериев), тогда общие предпочтения для альтернатив (решений) могут быть представлены как системы предпочтений (как совокупность предпочтений) по различным факторам. Таким образом формируются предпочтения для решений по каждому фактору (признаку, критерию), выраженные в виде значений функции полезности $U_j(x_i)$, где $j$ - индекс критерия (фактора), по которому формируются предпочтения для решений $x_i$ ($j - я$ функция полезности). Затем на основе $U_j(x_i)$ формируется система предпочтений по всем факторам (аддитивная функция полезности). Использование аддитивной функции полезности для сравнения альтернатив $x_i \in X$ предполагает, что полезность целого представлена в виде суммы полезностей частей (определенных отдельных факторов).

Таким образом, в теории полезности рассматривается использование функции полезности для идентификации эффективных среди решений, каждое из которых характеризуется единственным параметром (фактором, критерием), а также для идентификации эффективных решений, характеризующихся группой (совокупностью) параметров (факторов, критериев). При этом для упорядочения решений используется аддитивная функция полезности.

При определении функции полезности $U(x_i)$ для альтернатив (решений) $x_i$ множества $X$ должны быть решены следующие вопросы:

1) существование функций полезности $U(x)$ на множестве альтернатив, сохраняющих (функции полезности сохраняют) упорядочение альтернатив (решений), основанное на бинарном отношении строгого предпочтения;

2) способы определения значений функции принадлежности;

3) для аддитивной функции полезности должны быть введены условия для того, чтобы функции полезности для нескольких факторов (аддитивные функции полезности), сохраняющие упорядочение по бинарному отношению предпочтения, могут быть представлены в виде комбинаций функций полезности отдельных факторов; в результате должно быть определено, каким условиям должны удовлетворять предпочтения для того, чтобы функция полезности, сохраняя упорядочивание альтернатив, была представлена в виде комбинации (суммы) функций полезности отдельных факторов.

Таким образом, функция полезности – это некоторая числовая характеристика решения, являющаяся вещественно значной, значения которой определяются для каждого решения $x_i$ в соответствии с бинарным отношением строгого предпочтения $\succ$ (т.е. из $x_i \succ x_j$). При этом функция полезности сохраняет порядок решений, такой же, какой был сформирован бинарным отношением предпочтения $\succ$ (т.е. упорядочивающая альтернативы (решения) из множества $X$ таким же образом, как и бинарные отношения – бинарное отношение предпочтения $\succ$).

Перед тем, как сформулировать условия, выполнение которых позволяет устанавливать связь между альтернативами $x_i \in X$ $(i=\overline{1,n})$ и соответствующими им значениями функции полезности, необходимо напомнить основные сведения, касающиеся отношения безразличия ~ (эквивалентности). В первую очередь отношение ~ является отношением безразличия (в общем случае) и лишь затем являются отношением эквивалентности (в частном случае). В общем случае отношение безразличия ~ определятся как отсутствие предпочтений между двумя решениями $x_i$ и $x_j$, т.е.: $x_i \sim x_j$ <=> $(x_i \overline{\succ} x_j$ и $x_j \overline{\succ} x_i)$.

Отношение безразличия может быть определено в соответствии со следующими предпосылками:

1) лицо, принимающее решения (ЛПР), рассматривая решения $x_i$ и $x_j$, не видит между ними разницы, т.е. решения являются эквивалентными, т.е. $x_i \sim x_j$ (где ~ – отношение безразличия (эквивалентности));

2) ЛПР не может определить, какое из решений $x_i$ и $x_j$ является для него более предпочтительным (т.е. он не уверен в выборе решения $x_i$ или $x_j$ в качестве наиболее предпочтительного), в этом случае отношение ~ – это отношение безразличия, а сами решения $x_i$ и $x_j$ являются несравнимыми (в смысле отношения строгого предпочтения $\succ$,т.е. $x_i \sim x_j$).

В общем случае отношение безразличия ~ может не быть транзитивным, т.е. из несравнимости $x_i$ с $x_j$ и $x_j$ с $x_k$ не следует несравнимость $x_i$ с $x_k$. Тогда из $x_i \sim x_j$ и $x_j \sim x_k$ ≠> $x_i \sim x_k$. Однако, если рассматривать отношение ~ как отношение эквивалентности, то свойство транзитивности отношений должно выполняться. Действительно, если $x_i \sim x_j$ и $x_j \sim x_k$ (где ~ – отношение эквивалентности), то $x_i \sim x_k$. Т.к. в дальнейшем отношение ~ для решений $x_i$ и $x_j$ рассматривается как эквивалентность, то предполагается его транзитивность. Понятно, что из отношений $\succ$ и ~ вытекает отношение нестрогого предпочтения $\succeq$ (т.е. $x_i \succeq x_j$ – решение $x_i$ не хуже решения $x_j$).

После уточнения рассматриваемых отношений $\succ$, ~ и $\succeq$ могут быть сформированы условия существования функции полезности $U(x_i)$ для решений $x_i$ множества $X$.

Условия, определяющие возможность сопоставления альтернативам $x_i$ и $x_j$ соответствующих им значений $U(x_i)$ и $U(x_j)$, рассматриваемых как значения функции полезности, формируются следующим образом:

1) конечность и счетность множества альтернатив $X$; множество $X$ является счетным, если количество $n$ элементов в нем является задаваемым и ограниченным;

2) отношение предпочтения $\succ$ позволяет реализовать слабое упорядочивание элементов $x_i$ множества $X$; если наряду с отношением $\succ$, определенном на множестве $X$, на этом же множестве определено отношение эквивалентности ~, то отношение $\succ$ позволяет на множестве $X$ определить слабый порядок элементов $x_i$ этого множества (решений $x_i$) с учетом возможной эквивалентности между решениями $x_i, x_j \in X$.

В случае выполнения введенных выше условий элементам $x_i, x_j$ множества $X$ (решениям $x_i, x_j \in X$) могут быть поставлены в соответствие числа $U(x_i)$ и $U(x_j)$ такие, что:

$$x_i \succ x_j <=> U(x_i) > U(x_j),$$

где числа $U(x_i)$, $U(x_j)$ могут быть проинтерпретированы как значения дискретной функции полезности $U(x)$ (функции полезности, характеризующие дискретные решения счетного множества $X$).

Для введенного в рассмотрение понятия слабого упорядочивания элементов $x_i \in X$ (решений $x_i \in X$) может быть сформулирована следующая теорема.

**Теорема 1**. Предположим, что отношение $\succ$ является слабым упорядочением на $X$, т.е. ассиметрично и отрицательно транзитивно, тогда:

а) для любых пар решений $x_i, x_j \in X$ выполняется одно из трех соотношений:

$$x_i \succ x_j,\ x_j \succ x_i,\ x_i \sim x_j;$$

б) отношение $\succ$ является транзитивным ;

в) отношение ~ является эквивалентностью (т.е. рефлексивно, симметрично, транзитивно);

г) $(x_i \succ x_j$ и $x_k \sim x_j) => x_i \succ x_k$ либо

$(x_i \succ x_j$ и $x_i \sim x_k) => x_k \succ x_j$;

$(x_i \sim x_j$ и $x_k \succ x_j) => x_k \succ x_i$ либо

$(x_i \sim x_k$ и $x_k \succ x_j) => x_i \succ x_j$;

д) отношение $\succeq$ (вытекающее из отношений $\succ$ и ~) транзитивно и связно (т.е. с помощью отношения $\succeq$ могут быть связаны любые два решения $x_i, x_j \in X$).

Так как предварительно было задано, что на множестве решений $X$ определены отношения $\succ$ и ~ (и, соответственно, может быть определено отношение $\succeq$), т.е. выполняются пункты а)-е) сформулированной теоремы, тогда отношение $\succ$ позволяет формировать слабый порядок (т.е. выполнение пунктов а)-е) свидетельствует об определении с помощью отношения $\succ$ слабого порядка между решениями $x_i, x_j \in X$).

В дополнение к свойствам отношения $\succ$, формирующего слабый порядок на множестве решений $X$, рассмотренным (сформулированным) в **Теореме 1**, могут быть введены в рассмотрение следующие аксиомы полезности (аксиомы теории полезности решений):

1) если $\succ$ – отношение предпочтения (ассиметричное), ~ – отношение безразличия, то для любых $x_i$, $x_j$ имеет место одно из событий: $x_i \succ x_j,\ x_j \succ x_i,\ x_i \sim x_j$;

2) $x_i \sim x_j$, т.е. исход не отличим от самого себя;

3) $x_i \sim x_j, x_j \sim x_k => x_i \sim x_k$ – транзитивность отношения безразличия (следовательно, отношение безразличия являются отношением эквивалентности);

4) $x_i \succ x_j, x_j \succ x_k => x_i \succ x_k$;

5) $x_i \succ x_j, x_j \sim x_k => x_i \succ x_k$; $x_i \sim x_j, x_j \succ x_k => x_i \succ x_k$;

Если заданные в аксиомах полезности условия выполняются, то в рассмотрение может быть введена функция полезности, характеризующая предпочтительность решений. В этом случае для пары альтернатив $(x_i, x_j) \in X^2$ могут быть определены значения $U(x_i)$ и $U(x_j)$, которые интерпретируются как значения функции полезности для рассматриваемых альтернатив и при этом $x_i \succ x_j \Leftrightarrow U(x_i) > U(x_j)$, что также может быть сформулировано для отношения $\succeq$ в виде: $x_i \succeq x_j \Leftrightarrow U(x_i) \geq U(x_j)$.

Так как выполняются условия, позволяющие интерпретировать отношение $\succ$ (при определенном на множестве $X$ отношение эквивалентности ~) как слабый порядок и определяющие возможность сопоставления решениям $x_i$ значений $U(x_i)$, вытекающие из бинарных отношений $x_i$ с другими решениями $x_j$, тогда должен быть определен способ формирования значений $U(x_i)$ рассматриваемой дискретной функции полезности $U(x)$.

Таким образом, если на множестве $X$ определены отношения $\succ$, $\succeq$ и ~, само множество $X$ является счетным и конечным, тогда может быть определена функция $U : X \to R$ (функция полезности, представляющая отношения $\succ$, $\succeq$ и ~) и для пары $(x_i, x_j) \in X^2$ решений из множества $X$ выражение $x_i \succ x_j$ $(x_i \succeq x_j)$ выполняются в том случае, когда $U(x_i) > U(x_j)$ $(U(x_i) \geq U(x_j))$. Для формулировки способа определения значения функции полезности $U(x_i)$ для некоторого $x_i$ предполагаем, что элементы множества $X$ связаны отношением нестрогого предпочтения ($\succeq$). В этом случае алгоритм формирования значения $U(x_i)$ предполагает выполнение рассматриваемых ниже шагов.

Пусть значения функции полезности $U(x_i)$ присвоены $n$ альтернативам. Таким образом, является сформированным множество $X^n$ альтернатив (в виде $X^n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$), для которых определены значения функции полезности $U(x_i)$. Тогда на текущем шагу алгоритма рассматривается альтернатива $x_{n+1}$, для которой должно быть определено значение $U(x_{n+1})$. Для альтернативы (решения) $x_{n+1}$ и множества $X^n$ могут быть сформированы множества $X_+^n$ и $X_-^n$ следующим образом:

$$X_+^n = \{x_i \in X^n \mid x_i \succeq x_{n+1}\}$$

$$X_-^n = \{x_i \in X^n \mid x_{n+1} \succeq x_i\}$$

Таким образом, множество $X_+^n$ представляет собой решения $x_i$, которые являются не худшими, чем рассматриваемое решение $x_{n+1}$ (т.е. связаны с решением $x_{n+1}$ следующим образом: $x_i \succeq x_{n+1}$). Множество $X_-^n$ представляет собой решения $x_i$, для которых решение $x_{n+1}$ является не худшим (предпочтительнее им эквивалентно – в виде $x_{n+1} \succeq x_i$).

Через $x_i'$ обозначим такой элемент множества $X_+^n$, что $x_l \succeq x_i'$ для всех $x_l \in X_+^n$. Т.е. элемент (решение) $x_i'$ представляет собой "наименьший" элемент множества $X_+^n$. Через $x_i''$ обозначим такой элемент множества $X_-^n$, что $x_i'' \succeq x_l$ для всех $x_l \in X^n$. Таким образом, элемент (решение) $x_i''$ – это "наибольший" элемент множества $X_-^n$.

Т.е. элемент (решение) $x_i'$ – это то решение, у которого $U(x_i')$ является минимальным среди всех значений $U(x_l)$ ( при $x_l \in X_+^n$), решение $x_i''$ – это то решение, у которого значение $U(x_i')$ является наибольшим среди значений $U(x_l)$ элементов $x_l$ множества $X_-^n$. Если элементов $x_i'$ и $x_i''$ несколько (в каждом из множеств $X_+^n$, $X_-^n$), то выбирается любой из них.

Выполняется анализ сформированных множеств $X_+^n$ и $X_-^n$. Возможны следующие варианты состава этих множеств:

1. $X_+^n = \varnothing$ (тогда $X_-^n \neq \varnothing$);

2. $X_-^n = \varnothing$ (тогда $X_+^n \neq \varnothing$);

3. $X_+^n \neq \varnothing$, $X_-^n \neq \varnothing$; $X_+^n \cap X_-^n = \varnothing$;

4. $X_+^n \neq \varnothing$, $X_-^n \neq \varnothing$; $X_+^n \cap X_-^n \neq \varnothing$.

В случае 1 значение $U(x_{n+1}) = U(x_i') + 1$; во втором случае $U(x_{n+1}) = U(x_i') - 1$, в третьем случае $U(x_{n+1}) = [U(x_i') + U(x_i'')] / 2$; в четвертом случае принимается, что $U(x_{n+1}) = U(x_i)$, где $x_i$ - любой (произвольный) элемент множества $X_+^n \cap X_-^n$ (элементы множества $X_+^n \cap X_-^n$ имеют одинаковую полезность).

Для реализации приведенного (изложенного) алгоритма должны быть заданы начальные условия в следующем виде: $X^1 = \{x_1\}$ и $U(x_1) = 0$.

Реализация приведенного алгоритма позволяет выполнить следующее свойство функции полезности: $x_i \succeq x_j \Leftrightarrow U(x_i) \geq U(x_j)$, и в итоге определить альтернативу, для которой $x_i^* = arg \max\limits_{1 \leq i \leq N} U(x_i)$. Таким образом, от предпочтений (отношений $\succ$ или $\succeq$), связывающих пары решений $(x_i, x_j)$, выполняется переход к числовым значениям $U(x_i)$, $U(x_j)$, характеризующим рассматриваемые альтернативы, и определение (в завершении) эффективного решения $x_i^*$. Рассматриваемый выше подход предполагает, что возможная эквивалентность решений $x_i$ и $x_j$ ($x_i \sim x_j$) учитываются непосредственно в отношении «не хуже» ($\succeq$) и на основе этого определяется значение функции полезности $U(x_i)$ и $U(x_j)$ (при этом $U(x_i) = U(x_j)$).

**Пример**. Определение значений функции полезности с использованием (формированием) множеств $X_+^n$ и $X_-^n$.

Исходный вид матрицы отношений $\succeq$ ($x_i \succeq x_j$) следующий:

$$A_1 = \begin{array}{c|ccccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Прокомментируем вычисление значений функции полезности $U(x_i)$ по шагам.

1) Решение $x_1$, $U(x_1) = 0$;

2) Решение $x_2$:

$X_+^1 = \varnothing$ ; $X_-^1 = \{x_1\}$; $U(x_2) = 1$;

3) Решение $x_3$:

$X_+^2 = \{x_2\}$ ; $X_-^2 = \varnothing$; $U(x_3) = 0$;

4) Решение $x_4$:

$X_+^3 = \{x_3\}$ ; $X_-^3 = \{x_2\}$; $U(x_4) = (U(x_3) + U(x_2)) / 2 = 1/2$;

5) Решение $x_5$:

$X_+^4 = \{x_4\}$ ; $X_-^4 = \{x_2\}$; $U(x_5) = (U(x_4) + U(x_2)) / 2 = 3/4$;

6) Решение $x_6$:

$X_+^5 = \{x_4\}$ ; $X_-^5 = \{x_1, x_4\}$; $X_+^5 \cap X_-^5 = \{x_4\}$; $U(x_6) = U(x_4) = 1/2$;

7) Решение $x_7$:

$X_+^6 = \{x_3\}$ ; $X_-^6 = \{x_3, x_6\}$; $X_+^6 \cap X_-^6 = \{x_3\}$; $U(x_7) = U(x_3) = 0$.

Таким образом, эффективным решение является решение $x_2$.

Альтернативный подход к определению значений функции полезности $U(x)$ для различных решений $x_i \in X$ при условии наличия в множестве $X$ эквивалентных решений $x_j (x_i \sim x_j)$ связан с определением классов эквивалентности, множества классов эквивалентности и последующего определения значений функции полезности для классов эквивалентности в их множестве. Определение значений функции полезности для каждого класса эквивалентности позволяет упорядочить эти классы, выделить среди них эффективные и, соответственно, определить эффективные решения, принадлежащие этим классам.

Ход изложения метода определения значений функции полезности возможно прокомментировать с использованием примера. Предположим, что каждому решению $x_i \in X$ соответствует хотя бы одно (т.е. возможно и более) эквивалентное решение. Тогда должны быть определены два отношения – отношение строгого предпочтения $\succ$ (его матрицу обозначим как $A_1$) и отношение эквивалентности $\sim$ (его матрицу обозначим как $A_2$). Для вводимого в рассмотрение примера вид матриц отношений $A_1$ (для $\succ$) и $A_2$ (для $\sim$) следующий:

$$A_1 = \begin{array}{c|ccccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} ; \quad A_2 = \begin{array}{c|ccccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} .$$

Эквивалентность решений на множестве $X$ определяет его разбиение на непересекающиеся непустые классы элементов (непустые непересекающиеся подмножества), два элемента (или более) принадлежат одному из классов в том случае, когда они эквивалентны. Формируемые на основе отношения $\sim$ классы элементов (решений $x_i \in X$) называются классами эквивалентными.

Через $R(x_i)$ обозначим класс эквивалентности, порожденный элементом $x_i$. Тогда определение $R(x_i)$ будет выполнено следующим образом:

$$R(x_i) = \{x_j \mid x_j \in X \text{ и } x_j R\, x_i\},$$

где $R$ - отношение эквивалентности $\sim$.

Для рассматриваемого примера множества $X$ вида: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ и заданных видов матриц $A_1$ и $A_2$ классы эквивалентности имеют вид:

$R(x_1) = \{x_1, x_3, x_6\}$;

$R(x_2) = \{x_2, x_5\}$;

$R(x_3) = \{x_1, x_3, x_6\}$;

$R(x_4) = \{x_4, x_7\}$;

$R(x_5) = \{x_2, x_5\}$;

$R(x_6) = \{x_1, x_3, x_6\}$;

$R(x_7) = \{x_4, x_7\}$.

Видно, что $R(x_i) = R(x_j)$ в том случае, если $x_i \sim x_j$. Тогда любые два класса эквивалентности $R(x_i)$ и $R(x_j)$ либо совпадают, либо не пересекаются. Т.к. реализация рассматриваемого алгоритма предполагает упорядочивание классов эквивалентности (множеств $R(x_i)$), то совпадающие классы могут не рассматриваться.

Для идентификации различных классов эквивалентности (не пересекающихся классов эквивалентности) введен в рассмотрение параметр $k_l$, где $l$ - номер класса (в рассматриваемом случае $l=\overline{1,3}$). Если отношение $R$ есть отношение эквивалентности, определенное на множестве $X$, то множество классов эквивалентности $R(x_i)$, порождаемых отношением $R$ обозначено как $X/\sim$ (таким образом $X/\sim$ – множество классов эквивалентности множества $X$). В результате после выполненных преобразований получим множество $X/\sim$ в виде:

$k_1 \to \{x_1, x_3, x_6\};$

$k_2 \to \{x_2, x_5\};$

$k_3 \to \{x_4, x_7\}.$

Для реализации дальнейших рассуждений в рассмотрение введено отношение $R'$, обозначенное как $\succ'$. Отношение $\succ'$ определяет строгое предпочтение класса эквивалентности, обозначенного как $k_i$ (множество эквивалентных решений, соответствующего параметру $k_i$), над классом эквивалентности, обозначенным как $k_j$ (над множеством эквивалентных решений, соответствующих параметру $k_j$). Тогда обозначение $k_i \succ' k_j$ соответствует строгому предпочтению класса эквивалентности, обозначенного как $k_i$, над классом эквивалентности, обозначенным как $k_j$.

В соответствии с введенным обозначением отношения строго предпочтения $\succ'$ для классов эквивалентности, сформированная выше теорема 1 о свойствах отношения $\succ$, реализующего (при определенном на множестве $X$ отношении эквивалентности $\sim$) слабое упорядочивание альтернатив $x_i$, может быть дополнена еще одним пунктом.

**Теорема 1 (Продолжение).** Если отношение $\succ$ является слабым упорядочением на $X$ (отношение ассиметрично и отрицательно транзитивно), тогда если на множестве $X/\sim$ (множестве классов эквивалентности на $X$ в смысле отношения $\sim$) определено отношение $\succ'$, то:

$$k_h \succ' k_p <=> \exists x_i \in k_h \text{ и } x_j \in k_p \text{ такие, что } x_i \succ x_j .$$

В соответствии с введенной в рассмотрение формулировкой **Теоремы 1** из отношения предпочтения для пары решений $(x_i, x_j)$ (т.е. $x_i \succ x_j$) следует строгое предпочтение $\succ'$ между классами эквивалентности решений $k_h$ и $k_p$ (т.е. $k_h \succ' k_p$), при этом отношение $\succ'$ является строгим упорядочиванием. С другой стороны, если реализуется упорядочивание классов эквивалентности решений, то это обеспечивает и упорядочивание решений в множестве $X$.

Таким образом, введение в рассмотрение классов эквивалентности, обозначенных как $k_l$, и отношения строгого предпочтения $\succ'$ для классов эквивалентности позволяет устранить свойство нестрогого (частичного) упорядочения, вытекающее из отношений $\succ$ (при определении на множестве $X$ отношения эквивалентности), и перейти к строгому упорядочению классов эквивалентности, обеспечиваемому отношением $\succ'$ (т.е. эквивалентность классов не рассматривается, она исключена). Тогда переход от слабой упорядоченности решений, обеспечиваемой отношением $\succ$ совместно с отношением $\sim$, к строгому порядку, обеспечиваемому отношением $\succ'$, реализуется путем формирования классов эквивалентности решений (множества $X/\sim$) и исключении отношения $\sim$ при рассмотрении этих классов (т.е. классы не могут быть эквивалентными).

Свойства введенного в рассмотрение отношения $\succ'$:

1) асимметрия: если $k_l \succ' k_h$ и $k_h \succ' k_l$, то найдутся такие $x_i, x_j$ и $x_i', x_j'$, что $x_i \succ x_j$ и $x_j' \succ x_i'$, при этом $x_i \sim x_i'$ и $x_j \sim x_j'$;

2) отрицательная транзитивность: если $k_l \succ' k_h$ при $x_i \in k_l$ и $x_j \in k_h$, тогда $x_i \succ x_j$; в этом случае для любого $k_p \in X/\sim$ и любого $x_s \in k_p$ следует, что либо $x_i \succ x_s$ (и в этом случае $k_l \succ' k_p$) либо $x_s \succ x_j$ (в этом случае $k_p \succ' k_h$).

Возможность упорядочения классов эквивалентности, идентифицируемых параметрам $k_l$, путем определения значений функции полезности для каждого класса, обосновывается следующей теоремой.

**Теорема 2.** Если отношение $\succ$ на $X$ реализует слабое упорядочивание решений (при условии наличия для множества $X$ отношения эквивалентности), а множество $X/\sim$ является счетным, то существует функция $U$ на $X$ такая, что $x_i \succ x_j \Leftrightarrow U(x_i) > U(x_j)$ для $x_i, x_j \in X$.

В соответствии с формулировками теорем 1 и 2: упорядочивание элементов $x_i$ и $x_j$ множества $X$ вытекает из упорядочения классов эквивалентности, идентифицируемых параметром $k_l$; в случае счетности множества $X/\sim$ каждому классу эквивалентности может быть поставлено в соответствие значение функции полезности $U(k_l)$, которое в дальнейшем может быть отождествлено со значением функции полезности элементов $x_i, x_j$, входящих в этот класс, т.е. $U(k_l) = U(x_i) = U(x_j)$ при $x_i, x_j \in R(x_i)$ либо $x_i, x_j \in R(x_j)$ (т.к. классы эквивалентности $R(x_i)$ и $R(x_j)$ в случае $x_i \sim x_j$ совпадают (т.е. $R(x_i) = R(x_j)$ при $x_i \sim x_j$)).

Исходя из формулировок теорем 1 и 2 должны быть определены значения функции полезности для классов эквивалентности множества $X/\sim$ (идентифицируемых параметром $k_l$), т.е. значения $U(k_l)$. Затем значение функции полезности класса $k_l$ должно быть сопоставлено функции полезности отдельных элементов (решений) $x_i$, образующих этот класс эквивалентности. Таким образом, если $x_i \in R(x_i)$, то $U(x_i) = U(k_l)$, где $k_l$– идентификатор (индекс, номер) уникального класса эквивалентности, соответствующего $R(x_i)$. При формировании значений $U(k_l)$ в рассматриваемом ниже алгоритме используется перечисление множества рациональных чисел в виде: $r_1, r_2, r_3, \ldots$. Напомним, что рациональными являются числа вида:

$$\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\frac{1}{6};\frac{1}{7};\ldots;$$

$$\frac{2}{1};\frac{2}{2};\frac{2}{3};\frac{2}{4};\frac{2}{5};\frac{2}{6};\frac{2}{7};\ldots;$$

$$\frac{3}{1};\frac{3}{2};\frac{3}{3};\frac{3}{4};\frac{3}{5};\frac{3}{6};\frac{3}{7};\ldots;$$

Таким образом, в рассмотрение введены значения рациональных чисел, которые в дальнейшем могут быть использованы при инициализации значений функции полезности $U(k_l)$ классов эквивалентности $k_l$. Тогда через $k_1, k_2, k_3, \ldots$ обозначены элементы множества $X/\sim$, через $r_1, r_2, r_3, \ldots$ – некоторое перечисление множества рациональных чисел (некоторая упорядоченная цепочка рациональных чисел). В качестве начального условия для реализации алгоритма определения функции полезности $U$ для элементов $X/\sim$ примем, что $U(k_1) = 0$. Алгоритм формирования значений функции полезности для оставшихся элементов множества $X/\sim$ базируется на анализе свойств отношения $\succ'$ и имеет следующий порядок шагов:

1) рассматривается некоторый «текущий» класс эквивалентности $k_m$ в предположении, что всем «предшествующим» *(m-1)*-ому классу эквивалентности присвоены значения $U(k_1), \ldots, U(k_{m\ 1})$.

2) для рассматриваемого $k_m$-го класса эквивалентности возможна одна из трех рассматриваемых ниже ситуаций:

а) $k_m \succ' k_h$ для всех $h < m$ (понятно, что отношение $k_m \succ' k_h$ вытекает из отношения $x_i \succ x_j$, где $x_i \in R_{k_m}(x), x_j \in R_{k_h}(x)$), в этом случае $U(k_m) = m$;

б) $k_h \succ' k_m$ для всех $h < m$ (аналогично отношение $k_h \succ' k_m$ вытекает из отношения $x_j \succ x_i$, где $x_j \in R_{k_h}(x),\ x_i \in R_{k_m}(x)$); в этом случае $U(k_m) = -m$;

в) $k_h \succ' k_m \succ' k_l$ для некоторых $h$ и $l < m$, и ни для какого $s < m$ и отличного от $h$ и $l$ не выполняется $k_h \succ' k_s \succ' k_l$, тогда значение $U(k_m)$ принимается равным первому в перечислении $r_1, r_2, r_3, ...$ числу $r_k$ такому, что $U(k_h) > r_k > U(k_l)$.

После того, как значения функции полезности $U(k_l)$ для классов эквивалентности $k_l$ множества $X/\sim$ сформированы, этими значениями инициализируется функция полезности $U(x_i)$ решений $x_i \in X$, входящих в соответствующие классы: $U(x_i) = U(k_l)$ при $x_i \in R(x_i)$, где $R(x_i)$ –класс эквивалентности, для которого используется идентификатор (индекс, номер класса $k_l$). В случае, если для решений $x_i \in X$ вычислены значения функции полезности $U(x_i)$, определяется эффективное решение в соответствии с условием $x_i^* = arg \max_{1 \le i \le N} U(x_i)$.

## 2.2. Использование теории многомерной полезности для принятия решений

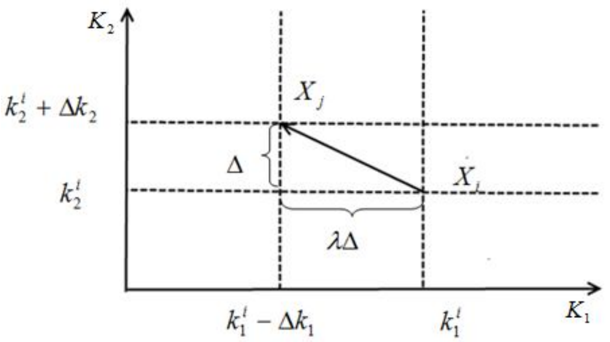
При реализации принятия решений в случае многих критериев (свойств, характеристик, решений) используется многомерная функция полезности, т.е. функция полезности, учитывающая для каждого решения его полезности по каждому критерию. Подход, определяющий использование многомерной полезности, рассмотрим на примере двух критериев (свойств, характеристик решений). Обозначим через $K_1$ и $K_2$ множества возможных значений каждого из критериев, $k_1^i, k_2^i$ - соответственно значения каждого из критериев для некоторого решения $x_i$ (т.е. $k_1^i \in K_1; k_2^i \in K_2, i = \overline{1, n}$). Понятно, что множества значений $K_1$ и $K_2$ соответствующих критериев являются счетными и конечными. Если через $x_i$ обозначено некоторое $i$-е решение $(x_i \in X)$, тогда это решение характеризуется парой значений ($k_1^i, k_2^i$). В соответствии с постановкой задачи необходимо определить то решение $x_i^*$, которое будет являться эффективным с точки зрения его общей полезности.

Основное понятие многокритериальной теории полезности (теории многомерной полезности) – это понятие замещения по полезности или просто замещения. Понятие замещения по полезности (в дальнейшем замещения) связано с предположением о том, что приращение по одному критерию $(\Delta k_2)$ может быть скомпенсировано путем уступки по другому критерию $(\Delta k_1)$. Для увеличения оценки полезности по второму критерию на $\Delta k_2$ требуется выполнить уступку по первому критерию - $\Delta k_1$ (т.е. для первого критерия найдется такая уступка - $\Delta k_1$, которая обеспечит увеличение второго критерия на $\Delta k_2$). Если $x_i$ и $x_j$ - некоторые решения, тогда $(k_1^i, k_2^i)$ – значения критериев, соответствующие решению $x_i$, а ($k_1^i - \Delta k_1, k_2^i + \Delta k_2$) (или же ($k_1^j, k_2^j$)) – значения критериев, соответствующие решению $x_j$.

Если существует возможность уступки по первому критерию (уступки $-\Delta k_1$) для решения $x_i$ с целью получения нового решения $x_j$ с увеличением для него на $\Delta k_2$ значения критерия $K_2$, тогда решение $x_i$ эквивалентно решению $x_j$ с точки зрения общей полезности (полезность решения $x_i$ равна полезности решения $x_j$, решение $x_i$ эквивалентно решению $x_j$, $x_i \sim x_j$). Данный факт может быть обозначен следующим образом: $(k_1^i, k_i^2) \sim (k_1^i - \Delta k_1, k_2^i + \Delta k_2)$, либо если $k_1^j = k_1^i - \Delta k_1, k_2^j = k_2^i + \Delta k_2$, то $(k_1^i, k_2^i) \sim (k_1^j, k_2^j)$. Аналогичным образом может быть выполнен переход из точки $x_j$ с координатами $(k_1^j, k_2^j)$ в точку $x_l$ с координатами

$(k_1^l = k_1^j - \Delta k_1^{'}, k_1^l = k_2^j + \Delta k_2^{'})$, где $\Delta k_1^{'}$ и $\Delta k_2^{'}$ - уступки и приращение, соответствующие переходу отрешения $x_j$ к решению $x_l$. При этом $x_j \sim x_l$ и $(k_1^j, k_2^j) \sim (k_1^l, k_2^l)$. Тогда могут быть сформированы все возможные замещения для каждого решения $x_i$ (полученные точки $x_j$, $x_l$ и т.д.) т.е. получено множество точек критериального пространства $K_1 \times K_2$, которые эквивалентны решению $x_i$ с точки зрения общей полезности (полезности по двум критериям). Точки такого (одного) множества образуют одну кривую, называемую кривой безразличия. Точки, лежащие на разных кривых безразличия, имею разную полезность (обладают разной полезностью).

Понятия замещения для решений $x_i$ и $x_j$, а также кривых безразличия прокомментированы на Рис.1.



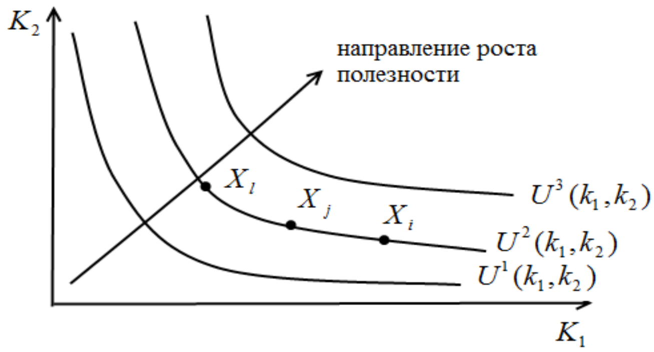




Рисунок 1 – Замещение по полезности и кривые безразличия для двух критериев
а) замещение по полезности; б) кривые безразличия для двух критериев

Обозначив $U(k_1, k_2)$ общую полезность решения $(x_i, x_j, x_{l,...})$ (многомерную функцию полезности) имеем, что $U^1(k_1, k_2) = const$, $U^2(k_1, k_2) = const$, $U^3(k_1, k_2) = const$, т.е. полезность решений при переходе по кривой безразличия $U^h(k_1, k_2) = const \quad (h = \overline{1,3})$ не изменяется. Решения $x_i, x_j, x_l$, которым соответствуют $(k_1^i, k_2^i)$, $(k_1^j, k_2^j)$, $(k_1^l, k_2^l)$ являющиеся эквивалентными, лежат на одной кривой безразличия.

Кривые безразличия – это линии одинаковых значений двумерной функции полезности $U(k_1, k_2)$, согласованных с предпочтениями ЛПР (с предпочтениями ЛПР согласуются значения двумерной функции полезности $U(k_1, k_2)$). Под согласованностью следует понимать выполнение следующих условий, связанных с кривыми безразличия:

$$(x_i \succeq x_j) \Leftarrow\Rightarrow (k_1^i, k_2^i) \succeq (k_1^j, k_2^j) \Leftarrow\Rightarrow U(k_1^i, k_2^i) \geq U(k_1^j, k_2^j),$$

где $U(k_1^i, k_2^i)$ и $U(k_1^j, k_2^j)$ - разные кривые безразличия, соответствующие решениям $x_i$ и $x_j$, лежащим на них.

Т.к. понятие замещения связано с приращением одного критерия за счет уступок по другому критерию, то в рассмотрение должен быть введен коэффициент замещения, обозначенный через $\lambda$. Если в точке $(k_1^i, k_2^i)$ за $\Delta$ единиц критерия $K_2$ можно уступить $\lambda$ $\Delta$ единиц критерия $K_1$, тогда предельный коэффициент замещения в точке $(k_1^i, k_2^i)$ равен $\lambda$ (Рис. 1а)). Тогда при наличии кривых безразличия могут быть вычислены локальные коэффициенты замещения $\lambda$ в каждой точке. Понятно, что коэффициент $\lambda$ в общем виде не является постоянным, а зависит от вида кривой безразличия и выбора точки $(k_1^i, k_2^i)$ на этой кривой. Т.е. при использовании даже одной кривой безразличия и разных точек на ней могут быть получены разные коэффициенты $\lambda$.

Для формирования вида многомерной (двумерной) функции полезности $U(k_1, k_2)$ необходимо выполнить априорное задание свойств предпочтений (условий, которым должны удовлетворять предпочтения), которые приводят к удобным видам функции полезности. Таким образом, должно быть определено условие, обеспечивающее существование простых (в частном случае, аддитивных) функций полезности $U(x)$, т.е. предпочтения по каждому из критериев (предпочтения по группе критериев) должны быть такими, чтобы обеспечивать существование аддитивной функции полезности. В общем виде аддитивная функция полезности имеет форму:

$$U(k_1, k_2, ..., k_h) = \sum_{j=1}^{n} U_j(k_j),$$

где $U_j$ – $j$-я функция полезности для $j$-го критерия. В частном случае двух критериев $K_1$ и $K_2$ аддитивная функция полезности имеет вид: $U(k_1, k_2) = U_1(k_1) + U_2(k_2)$.

Условием, определяющим существование аддитивной (в частном случае, двумерной) функции полезности является условие соответственных замещений. Условие соответственных замещений может быть прокомментировано следующим образом на основе Рис. 2. Для формулировки условия рассматриваются четыре точки (решения): $x_1$ с координатами $(k_1^1, k_2^1)$, $x_2$ с координатами $(k_1^1, k_2^2)$, $x_3$ с координатами $(k_1^2, k_2^1)$ и $x_4$ с координатами $(k_1^2, k_2^2)$. В точке $x_1$ $(k_1^1, k_2^1)$ за увеличение $K_2$ на $b$ единиц необходимо заплатить (уступка) $a$ единиц, в точке $x_2$ $(k_1^1, k_2^2)$ за увеличение $K_2$ на $c$ единиц необходимо заплатить $a$ единиц, в точке $x_3$ $(k_1^2, k_2^1)$ за увеличение $K_2$ на $b$ единиц необходимо заплатить $d$ единиц. Сколько необходимо заплатить в точке $x_4$ $(k_1^2, k_2^2)$, чтобы получить увеличение $K_2$ на $c$ единиц.

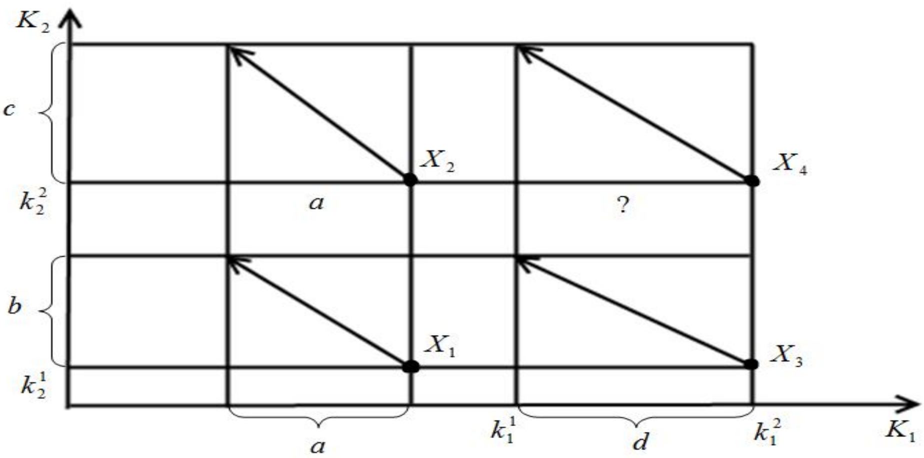



Рисунок 2 – Изменение значений критериев для условия соответственных замещений

Условие соответственных замещений предполагает, что если при заданных условиях для точек $x_1, x_2, x_3$, значениях $a, b, c, d$ получим, что для приращения в точке $x_4$ дополнительно по критерию $K_2$ $c$ единиц необходимо заплатить (уступка) $d$ единиц по критерию $K_1$, то условие замещения выполняется. Таким образом, условие соответственных замещений выполняются, если для точки (решения) $x_4$ при увеличении $K_2$ на $c$ единиц необходимо заплатить (уступка) $d$ единиц по $K_1$. Выполнение условия соответственных замещений гарантирует аддитивный вид функции полезности: $U(k_1, k_2) = U_1(k_1) + U_2(k_2)$. Существование аддитивной функции полезности $U(k_1, k_2)$ обосновывается в соответствующей теореме Льюиса-Тьюки (формулируемой ниже), в доказательстве которой сформулирован способ (алгоритм) построения изолиний функции полезности (линий одинаковых значений функции полезности), определения на их основе вида функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$. При этом данный алгоритм обеспечивает выполнение условия соответственных замещений для формируемых изолиний аддитивной функции полезности $U(k_1, k_2)$ и вида функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$. Т.е. реализация алгоритма обеспечивает определение $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$, изолиний $U(k_1,k_2)$ при выполнении условия соответственных замещений.

**Теорема о существовании аддитивной функции полезности** (Льюиса-Тьюки). Структура предпочтений аддитивна, т.е. аддитивная функция полезности $U(k_1,k_2)=U_1(k_1)+U_2(k_2)$ существует тогда, когда выполняется условие соответственных замещений.

**Доказательство.**

**Доказательство необходимости** выполним на основе Рис.2. Т.к. точки $(k_1^1,k_2^1)$ и $(k_1^1-a,k_2^1+b)$ лежит на одной кривой безразличия (изолинии функции полезности), то для них выполняется условие (с учетом предположения об аддитивности $U(k_1,k_2)$):

$$U_1(k_1^1)+U_2(k_2^1)=U_1(k_1^1-a)+U_2(k_2^1+b).$$

Аналогичные условия выполняются для точек $x_2(k_1^1,k_2^2)$ и $x_3(k_1^2,k_2^1)$:

$$U_1(k_1^1)+U_2(k_2^2)=U_1(k_1^1-a)+U_2(k_2^2+b);$$

$$U_1(k_1^2)+U_2(k_2^1)=U_1(k_1^2-a)+U_2(k_2^1+b).$$

Складывая второе и третье равенства и вычитая из полученной суммы первое, получим, что для точки $x_4(k_1^2,k_2^2)$ выполняются:

$$U_1(k_1^2)+U_2(k_2^2)=U_1(k_1^2-d)+U_2(k_2^2+c)$$

т.е. условие соответственных замещений выполняется.

**Доказательство достаточности** выполним с точки зрения обоснования способа определения функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ в предположении, что условие соответственных замещений выполняется. Т.е. при обосновании процедуры, которая носит название процедуры совместного шкалирования (процедуры определения $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$), проконтролируем выполнение условия соответственных замещений. Доказательство достаточности и обоснование процедуры определения функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ выполним с использованием Рис. 3.

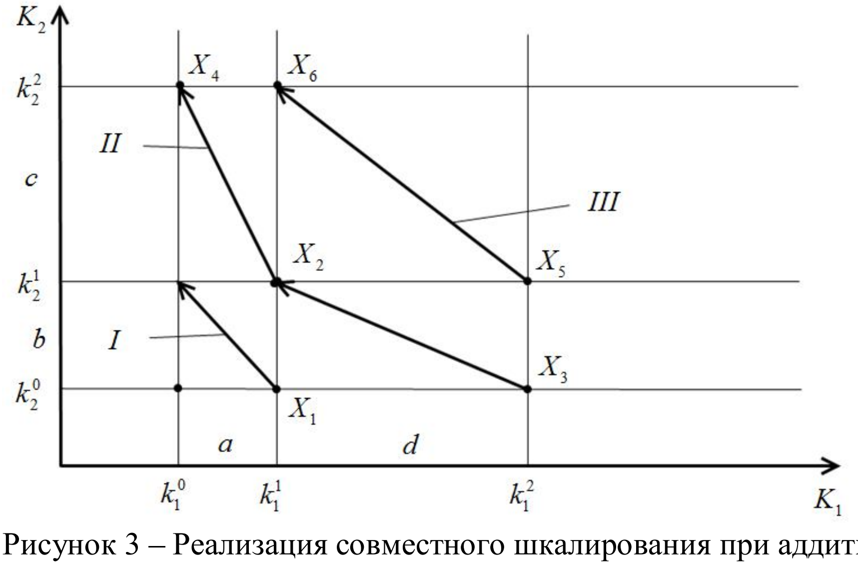



Рисунок 3 – Реализация совместного шкалирования при аддитивной структуре предпочтений.

I– первая кривая безразличия;

II– вторая кривая безразличия;

III– третья кривая безразличия.

Алгоритм формирования значений $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ имеет следующие шаги:

1) пусть $k_1^0$ и $k_2^0$ - наименьшие значения оценок соответствующих критериев $K_1$ и $K_2$; для координат $k_1^0$, $k_2^0$ (решения с координатами $(k_1^0,k_2^0)$) предполагается, что $U(k_1^0,k_2^0)=U_1(k_1^0)=U_2(k_2^0)=0$;

2) для значения $k_1^1$ параметра $k_1$ ($k_1^1 > k_1^0$) задается, что $U(k_1^1) = 1$; это будет первая кривая безразличия, которая характеризуется значением $U(k_1, k_2) = 1$; при этом $k_2 = 0$; т.е. $U(k_1^1, k_2^0) = 1$ (при $k_2^0 = 0$)

3) определим такое значение второго критерия $K_2$, что $(k_1^1, k_2^0) \sim (k_1^0, k_2^1)$ (т.е. решение с координатами $(k_1^0, k_2^1)$ лежит на одной кривой безразличия с решением $(k_1^1, k_2^0)$), тогда $U_2(k_2^1) = 1$; т.к. коэффициенты $k_1^1, k_2^1$ известны, то они соответствуют решению $x_2$, которое не находится (не лежит) на кривой безразличия с $U(k_1, k_2) = 1$ (т.е. $x_2(k_1^1, k_2^1)$ не принадлежит кривой безразличия с $U_2(k_1^1) = 1$ и $U_2(k_2^1) = 1$);

4) т.к. решение $x_2(k_1^1, k_2^1)$ является известным, тогда определяются решения $x_3(k_1^2, k_2^0)$ и $x_4(k_1^0, k_2^2)$, которые лежат на одной кривой безразличия с $x_2$; таким образом для решений $x_2, x_3, x_4$ выполняется условие $x_2 \sim x_3 \sim x_4$ (или $(k_1^1, k_2^1) \sim (k_1^2, k_2^0) \sim (k_1^0, k_2^2)$); при этом значение $U(k_1, k_2)$ и $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$ задается следующим образом: $U(k_1^1, k_2^1) = U(k_1^2, k_2^0) = U(k_1^0, k_2^2) = 2$; $U_1(k_1^2) = 2$; $U_2(k_2^2) = 2$;

5) реализация предшествующих шагов процедуры позволяет определить, что в соответствии с условием соответственных замещений $k_2^1 - k_1^1 = d$, тогда решения $x_5$ и $x_6$ являются одинаковыми (эквивалентными) по предпочтительности (т.е. $x_5 \sim x_6$) и принадлежит одной кривой безразличия;

6) т.к. значения критериев $K_1$ и $K_2$ для решений $x_5$ и $x_6$ определены, должны быть идентифицировать значения $k_1^3$ и $k_2^3$ такие, что для них выполняется условие:

$$(k_1^3, k_2^0) \sim (k_1^2, k_2^1) \sim (k_1^1, k_2^2) \sim (k_1^0, k_2^3),$$

т.е. выбираются такие значения $k_1^3, k_2^3$, для которых и формулируется приведенное условие; для решений с координатами $(k_1^3, k_2^0), (k_1^2, k_2^1), (k_1^1, k_2^2), (k_1^0, k_2^3)$ задается значение функции полезности $U(k_1, k_2) = 3$; откуда значения одномерных функций полезности определяются следующим образом $U_1(k_1^3) = 3; U_2(k_2^3) = 3$; итоги реализации данного шага является определение координат $(k_1^1, k_2^3), (k_1^2, k_2^2), (k_1^3, k_2^1)$ тех решений, которые лежат на следующей кривой безразличия с $U(k_1, k_2) = 4$; при этом для решений с рассматриваемыми значениями критериев $K_1$ и $K_2$ выполняется условие эквивалентности (вытекающее из условия соответственных замещений) $(k_1^1, k_2^3) \sim (k_1^2, k_2^2) \sim (k_1^3, k_2^1)$;

7) продолжая действия подобным образом, должны быть получены значения $k_1^j$ и $k_2^j$ $(j = \overline{4, n})$, которые входят в пары $(k_1^j, k_2^0)$, $(k_1^0, k_2^j)$; эти значения (при условии присвоения соответствующих решениям значений $U(k_1, k_2)$) используются при определении значений одномерных функций полезности $U_1(k_1^j)$, $U_2(k_2^j)$ $(j = \overline{4, n})$.

Итогом рассмотренной процедуры являются дискретные значения одномерных дискретных функций полезности решений по каждому критерию $U_1(k_1^h)$, $U_2(k_2^h)$ где $h = \overline{1, n}$.

После формирования вида функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ с использованием введенного в рассмотрение метода необходимого выполнить агрегирование этих функций для получения многомерной (двумерной) функции полезности $U(k_1, k_2)$. Агрегирование функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ (получение обобщенной многомерной функции полезности $U(k_1, k_2)$) используется выражение $U(k_1, k_2) = jU_1(k_1) + (1 - j)U_2(k_2)$, где $j$ - коэффициент шкалирования. Для определения шкалирующего коэффициента необходимо:

1) на основе заключений ЛПР определить два эквивалентных решения $x_i$ и $x_j$ (т.е. $(k_1^i, k_2^i) \sim (k_1^j, k_2^j)$), лежащие на одной кривой безразличия;
2) вычислить значение $j$ путем решения уравнения вида $jU_1(k_1^i) + (1-j)U_2(k_2^i) = jU_1(k_1^j) + (1-j)U_2(k_2^j)$.

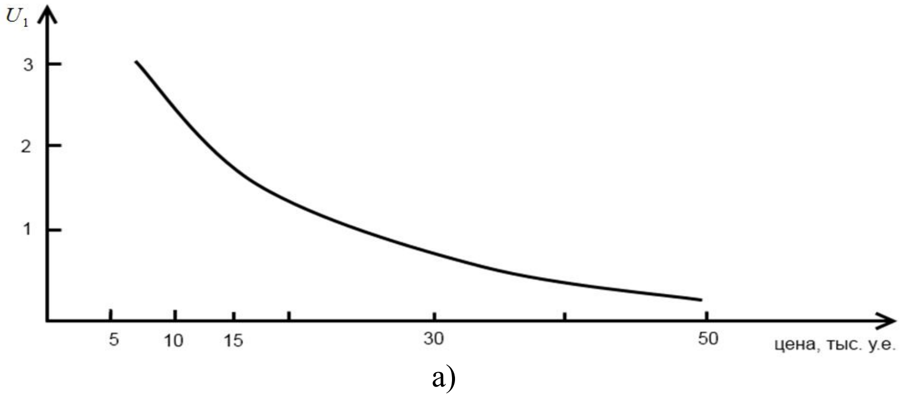
**<u>Пример</u>** реализации принятия решения на основе аппарата теории многомерной полезности.

Рассматривается задача покупки автомобиля. Параметрами, характеризующими решение (модель автомобиля), являются цены и пробег. Т.к. известно, что по мере роста цены на некоторый предмет (объект, приобретение и т.д.) полезность этого предмета (и в конечном итоге решения) стремится к 0. Т.е. при достаточно большой цене предмет (решение) становятся бесполезным. Наоборот, при небольшой цене полезность предмета (решения) является более значительной. Поэтому с точки зрения параметра «цена» полезность решения будет минимальный при большом значении этого параметра и максимальный при малом значении параметра. Поэтому в качестве критерия $K_1$ (свойства, характеристики решения) следует рассматривать критерий вида $K_1 = 1/\text{цена}$. Аналогичные рассмотрения могут быть выполнены с точки зрения параметра «пробег». Если пробег минимальный, то полезность решения будет являться значительной, если пробег значительный, то полезность решения наоборот будет являться минимальной. Поэтому в качестве второго критерия $K_2$ следует рассматривать критерий вида $K_2 = 1/\text{пробег}$.

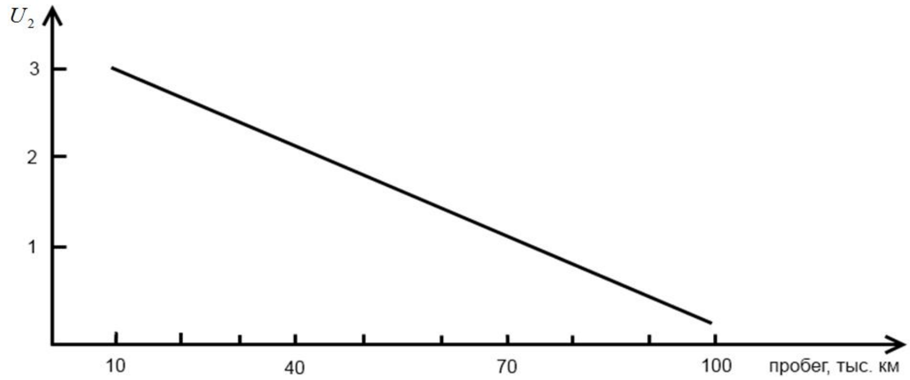
Диапазон значений для первого параметра решения (цена), на основании которого определяется критерий $K_1$, заданы равным $[5\text{ тыс};50\text{тыс}]$ или в единицах тысяч - $[5;50]$. Для определения многомерной функции полезности $U(k_1, k_2)$ и одномерных функций $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$ на интервале $[5;50]$ определим следующие значения (дискретные значения), для некоторых значения функций будут вычисляться: 5, 10, 20, 50. Соответственно при переходе к критерию $(K_1 = 1/\text{цена})$ его значения будут определены на интервале $[0.02;0.2]$, а значения $K_1$, которые будут рассматриваться следующие: 0.02; 0.05; 0.1; 0.2.

Аналогичным образом строятся рассуждения относительно критерия $K_2$. Диапазон значений параметра «пробег», на основании которых определяются значения критерия $K_2$, задан в виде $[10;100]$ (измеряется в тысячах километров). Дискретные значения, для которых определяются значения функций $U(k_1, k_2)$, $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$ заданы следующими: 10,40,70,100. Тогда при переходе к критерию $K_2 = 1/\text{пробег}$ диапазон значений получен в виде $[0.01;0.1]$, а дискретные значения критерия следующие: 0,01; 0,0143; 0,025; 0,1.

В результате для диапазонов $[0.02;0.2],[0.01;0.1]$ (значений 0,02; 0,05; 0,1; 0,2 и 0,01; 0,0143; 0,025; 0,1) сформирована двумерная функция полезности (в соответствии с приведенным алгоритмом) $U(k_1, k_2)$ и одномерные функции полезности $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$. При переходе от значений критериев $K_1 = 1/\text{цена}$ и $K_2 = 1/\text{пробег}$ к указанным выше значениям параметров «цена» и «пробег» одномерные функции полезности каждого из параметров получены в виде, представленном на Рис.4.




а)




б)

Рисунок 4 – Виды сформированных функций полезности $U_1$ и $U_2$

а) функция полезности для параметра «цена»;

б) функция полезности для параметра «пробег»;

Так как дискретные значения функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ получены, тогда должны быть определены аналитические формы этих функций (для постановки в них произвольных значений рассматриваемых параметров, характеризующих решения). Т.к. в большинстве случаев функции являются нелинейными, то для них может быть задана следующая аналитическая форма: $U_1 = a_1k_1 + b_1(k_1)^2; U_2 = a_2k_2 + b_2(k_2)^2$. Для определения коэффициентов $a_i, b_i (i = \overline{1,2})$ в приведенных аналитических функциях $U_1, U_2$ применимы методы аппроксимации (данный в рабках лабораторной работы необходимо выполнить самостоятельно).

Т.к. вид двумерной функции полезности $U(k_1, k_2) = jU_1(k_1) + (1-j)U_2(k_2)$, тогда должен быть определен коэффициент масштабирования $j$. Для этого должны быть определены два решения, являющиеся эквивалентными (лежащими на одной кривой безразличия), т.е. $(k_1^i, k_2^i) \sim (k_1^j, k_2^j)$. Допустим, что равноценными являются решения с $k_1^i = 10$, $k_2^i = 90$ и $k_1^j = 40$, $k_2^j = 10$ (пробег – 90 тыс. км, цена – 10 тыс. у.е.; пробег – 10 тыс. км, цена – 40 тыс. у.е.). Тогда получим $jU_1(10) + (1-j)U_2(90) = jU_1(40) + (1-j)U_2(10)$. В итоге значение $j = 0.59$.

Т.к. аналитические формы выражений для $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ получены, значение $j$ вычислено, тогда могут быть определены значения $U(k_1, k_2)$ при любых значениях входных параметров $k_1$ и $k_2$. Результаты сравнения четырех вариантов решений сведены в Таблицу 1.

Таблица 1. Двумерная функция полезности в задаче выбора решения.

| Вариант | Цена | Пробег | $U_1(k_1)$ | $U_2(k_2)$ | $U(k_1, k_2)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 40 | 10 | 0,5 | 3 | 1,525 |
| 2 | 10 | 80 | 2 | 0,8 | 1,508 |
| 3 | 18 | 40 | 1,5 | 2 | ***1,708*** |
| 4 | 25 | 60 | 1,3 | 1,3 | 1,3 |

В результате эффективным решением является третье, у которого обобщенная функция полезности $U$ имеет максимальное значение.

**3. Программа выполнения работы**

Для первого варианта задания предусматривается следующий порядок действий по выполнению лабораторной работы:

1) реализовать объявление и инициализацию матрицы отношений между решениями в соответствии с вариантом задания;

2) реализовать процедуру определения для каждого рассматриваемого решения $x_{n+1}$ соответствующих ему множеств $X_+^n$ и $X_-^n$, которые определяют для решения $x_{n+1}$ не худшие по отношению к нему решения (множество $X_+^n$) и не лучшие по отношению к нему решения (множество $X_-^n$); при определении множества $X_+^n$ необходимо выполнять просмотр *(n+1)*-го столбца матрицы отношений, при определении множества $X_-^n$ необходимо выполнять просмотр *(n+1)*-ой строки матрицы отношений, для рассматриваемого элемента $x_{n+1}$ выполнить вывод множеств $X_+^n$, $X_-^n$;

3) реализовать процедуру выполнения условий $X_+^n = \varnothing$ ($X_+^n \neq \varnothing$), $X_-^n = \varnothing$ ($X_-^n \neq \varnothing$), $X_+^n \cap X_-^n = \varnothing$, $X_+^n \cap X_-^n \neq \varnothing$; тем самым определяется способ вычисления значений функции полезности для решения $x_{n+1}$; реализовать вывод информации о выполняющемся условии;

4) реализовать процедуру вычисления значения функции полезности для текущего рассматриваемого решения $x_{n+1}$;

5) реализовать процедуру управления процессом вычисления значений функции полезности для каждого элемента множества *X* (решения множества *X*); реализовать в рассматриваемой процедуре определение максимального значения функции полезности и соответствующего ему решения; выполнить вывод всех решений $x_i \in X$ и соответствующих им значений функции полезности.

Для второго варианта задания предусматривается следующий порядок действий по выполнению лабораторной работы:

1) реализовать инициализацию матриц отношений строго предпочтения $A_1$ и эквивалентности $A_2$;

2) реализовать процедуру, формирующую на основе матрицы отношения эквивалентности $A_2$ классы эквивалентности $R(x_i)$ ($x_i \in X$);

3) реализовать процедуру, выполняющую сравнение полученных классов эквивалентности $R(x_i)$ ($x_i \in X$), исключение повторяющихся классов, формирующую множество $X/\sim$ уникальных классов эквивалентности решений $k_l$;

4) реализовать процедуру, выполняющую упорядочивание классов эквивалентности $k_l$ с определение соответствующих им значений функции полезности $U(k_l)$;

5) реализовать процедуру, которая выполняет инициализацию значений функции полезности элементов (решений) $U(x_i)$ множества *X*, входящих в соответствующие классы эквивалентности $k_l$, значениями функции полезности этих классов $U(k_l)$; разрабатываемая процедура также выполняет упорядочивание решений $x_i \in X$ с точки зрения значений их функции полезности и определяет решение $x_i^* \in X$, для которого значение функции полезности является максимальным;

6) реализовать вывод исходных данных, промежуточных и конечных результатов: матриц отношений $A_1$ и $A_2$, классов эквивалентности $R(x_i)$ ($x_i \in X$), множества $X/\sim$ не повторяющихся ("уникальных") классов эквивалентности, полученных значений функции полезности $U(k_l)$ для каждого класса $k_l$, значений функции полезности для решений $x_i \in X$, соответствующих этим классам, эффективных решений с максимальным значением функции полезности.

Для третьего варианта задания предусматривается следующий порядок действий по выполнению лабораторной работы:

1. Для введенных диапазонов изменения параметров решений (критериев решений) и соответствующих значений этих критериев реализовать процедуру построения двумерную функцию полезности $U(k_1,k_2)$, в которой выполнить определение дискретных значений одномерных функций полезности $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ для соответствующих критериев (реализовать процедуру формирования значений $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$).

2. Выполнить построение линий безразличия для двумерной функции полезности $U(k_1,k_2)$, которые в дальнейшем будут использоваться для определения эквивалентных решений, лежащих на одной из этих линий. Координаты этих решений будут использованы при вычислении коэффициента масштабирования *j*.

3. Реализовать процедуру аппроксимации полученных дискретных значений одномерных функций полезности $U_1(k_1)$и $U_2(k_2)$ с использованием полиномов второй степени $U_1 = a_1k_1 + b_1(k_1)^2; U_2 = a_2k_2 + b_2(k_2)^2$, результатом реализации этой процедуры являются коэффициенты этих аналитических кривых $a_1, b_1, a_2, b_2$.

4. Выполнить формирование процедуры вычисления значения коэффициента масштабирования *j*, при реализации которой используются координаты $(k_1^i, k_2^i)$ и $(k_1^j, k_2^j)$ соответствующих эквивалентных решений $x_i$ и $x_j$, лежащих на одной кривой безразличия (т.е. в качестве исходных данных для этой процедуры использованы координаты $(k_1^i, k_2^i)$ и $(k_1^j, k_2^j)$ решений $x_i$ и $x_j$, выбранных на одной кривой безразличия, сформированной в пункте 2).

5. Для задаваемых в варианте характеристик решений с использованием определенных ранее (процедурой в пункте 3) аналитических функций $U_1 = a_1k_1 + b_1(k_1)^2; U_2 = a_2k_2 + b_2(k_2)^2$ реализовать процедуру вычисления значений одномерных функций полезности $U_1(k_1)$и $U_2(k_2)$, а затем двумерной функции полезности $U(k_1,k_2)$ с учетом коэффициента масштабирования *j*. В разрабатываемой процедуре выполнить определение эффективного решения с максимальным значением двумерной функции полезности (передаваемыми в реализуемую процедуру наряду с исходными данными являются параметры $a_1, b_1, a_2, b_2$).

6. Выполнить вывод: а) линий безразличия, б) полученных значений одномерных функций полезности $U_1(k_1)$и $U_2(k_2)$, в) видов аппроксимирующих функций $U_1 = a_1k_1 + b_1(k_1)^2;$ $U_2 = a_2k_2 + b_2(k_2)^2$, г) значений одномерных и двумерной функций полезности для решений, указанных в варианте задания, д) эффективных решений $x_i^*$с максимальным значением двумерной функции полезности $U(k_1,k_2)$.

## 4.Задание на работу

**Задание по лабораторной работе выполняется бригадой из двух студентов, которые разрабатывают совместный проект.**

**Вариант 1.** Используя метод, реализующий формирование множеств $X_+^n$ и $X_-^n$, а также их последующий анализ (с точки зрения $X_+^n = \varnothing$ ($X_+^n \neq \varnothing$), $X_-^n = \varnothing$ ($X_-^n \neq \varnothing$), $X_+^n \cap X_-^n = \varnothing$, $X_+^n \cap X_-^n \neq \varnothing$) , выполнить для заданного вида матрицы отношения предпочтения $A_1$ определение значений функции полезности $U(x_i)$ решений и определение по формируемым значениям функции полезности эффективных решений $x_i^* \in X$. Матрица отношения предпочтения имеет следующий вид:

$$A_1 = \begin{array}{c|ccccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

**Вариант 2.** Используя метод, реализующий формирование классов эквивалентности $R(x_i)$ ($x_i \in X$), формирование множества $X/\sim$ неповторяющихся классов эквивалентности $k_l$, выполнить разработку программы, определяющей значения функции полезности $U(k_l)$ для этих классов и значения функции $U(x_i)$ для решений $x_i \in X$, с последующим определением эффективных решений, для которых $x_i^* = arg \max\limits_{1 \le i \le N} U(x_i)$. Вид матриц отношений предпочтения и эквивалентности следующий:

$$A_1 = \begin{array}{c|ccccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}; \qquad A_2 = \begin{array}{c|ccccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

**Вариант 3.** Задача состоит в выборе одной из альтернатив, представляющих собой выставленные на продажу автомобили. Критериями (характеристиками) решений являются: $K_1 = 1/цена$ и $K_2 = 1/пробег$. Используя метод, реализующий построение и исследование двумерной функции полезности, для заданных диапазонов значений критериев и их (критериев) дискретных оценок выполнить: формирование линий безразличия $U(k_1, k_2)$, определение на их основе дискретных значений оценок одномерных функций полезности для каждого из критериев $k_1$ и $k_2$, аппроксимацию дискретных значений одномерных функций полезности с использованием полиномов второй степени, вычисление коэффициента масштабирования $j$ на основе выбираемых ЛПР по кривым безразличия решениям. С использованием сформированных промежуточных решений выполнить для задаваемых характеристик альтернатив вычисление значений одномерных функций полезности, двумерной функции полезности и реализовать выбор эффективного решения. Выполнить вывод исходных данных, всех промежуточных и конечных результатов. Исходными данными для решаемой задачи являются: параметр "цена" изменяется в диапазоне $[25, 100]$, параметр "пробег" в диапазоне $[20, 60]$. Шаг дискретизации первого параметра задан равным 25, шаг дискретизации второго параметра задан равным 20. Соответственно, для первого критерия диапазон изменения его значений задан в виде $[0{,}001; 0{,}04]$, для второго критерия диапазон задан в виде $[0{,}016; 0{,}05]$. Выбор двух эквивалентных решений на одной из кривых безразличия, сформированных программно, выполнить самостоятельно.

Данные, на основании которых выбирается эффективное решение, имеют следующие значения:

| Вариант | Цена | Пробег |
|---|---|---|
| 1 | 30 | 45 |
| 2 | 50 | 30 |
| 3 | 80 | 20 |
| 4 | 25 | 55 |

**5. Контрольные вопросы**

5.1. Что означает понятие функции полезности ?

5.2. В чем заключается условие определения эффективного решения с использованием функции полезности?

5.3. В чем состоит связь системы предпочтений ЛПР и определяемых значений двумерной функции полезности?

5.4. Как интерпретируется понятие отношения безразличия для пары решений и какие причины обуславливают его использование?

5.5. Как формулируются условия существования двумерной функции полезности?

5.6. Каким образом отношение $\succ$ интерпретируется как условие слабого упорядочивания решений, какие условия должны выполняться для того, чтобы отношение $\succ$ интерпретировалось как условие слабого упорядочивания решений?

5.7. В чем заключаются аксиомы полезности, используемые при принятии решений (условия существования функции полезности)?

5.8. Какой порядок действий при реализации алгоритма определения значений одномерной функции полезности с использованием множеств $X_+^n$ и $X_-^n$ (каким образом с использованием множеств $X_+^n$ и $X_-^n$ для текущего рассматриваемого решения $x_{n+1}$ может быть вычислено значение его функции полезности)?

5.9. В чем заключается понятие класса эквивалентности $R(x_i)$ $(x_i \in X)$ при определении значений функции полезности $U(x_i)$?

5.10. Каковы свойства отношения предпочтения $\succ'$ для классов эквивалентности?

5.11. Какой порядок действий в алгоритме определения значений функции полезности для эквивалентности $k_l$ множества $X/\sim$ ?

5.12. Каким образом выполняется вычисление значений $U(x_i)$ при найденных значениях функции полезности $U(k_l)$ классов эквивалентности $k_l$?

5.13.Что такое многомерная функция полезности?

5.14. В чем заключается понятие замещения по полезности, уступки и приращения?

5.15. Каким образом используется принцип замещения при построении функции полезности

5.16. Что такое кривая безразличия с точки зрения функции полезности?

5.17. Каким образом предпочтения ЛПР интерпретируются с точки зрения кривых безразличия

5.18. В чем заключается условие соответственных замещений и что оно определяет?

5.19. Какой порядок действий алгоритма формирования кривых безразличия и вычисления значений оценок одномерных функций полезности $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$?

5.20. В чем заключается способ вычисления коэффициента масштабирования $j$?

5.21. Каков общий порядок действий при определении эффективных решений с использованием двумерной функции полезности?

5.22. Каким образом и для каких целей в алгоритме принятия решений на основе двумерной функции полезности выполняется определение эквивалентных решений $x_i$ и $x_j$ ?

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫБОРА АЛЬТЕРНАТИВ

1. **Цель работы:** исследовать применение аппарата теории важности критериев при принятии решений по выбору альтернатив

## 2. Теоретическое введение

### 2.1. Общие понятия теории важности критериев

Основное понятие, используемое при решении многокритериальных задач – это понятие относительной важности критериев. С точки зрения важности критериев определены понятия «один критерий важнее другого», «критерии равноважны» (имеют одинаковую важность), на основе этих понятий сформулирована качественная теория важности критериев. Развитие качественной теории важности критериев определило количественное сравнение важности критериев (т.е. «во сколько раз один критерий важнее другого»).

Математическая модель задачи принятия решений при многих критериях и учете их (критериев) важности имеет вид: $X$ – множество решений; $K$ – векторный критерий; $\succ, \sim$ – отношения предпочтения и безразличия ЛПР соответственно; $x_i$ - некоторое $i$-е решение, характеризуется значениями критериев $K_j (j = \overline{1,m})$; $K_j$ – некоторый частный критерий. Тогда векторный критерий $K$ имеет вид $K = (K_1, K_2, ..., K_m)$, т.е. векторный критерий $K$ – это упорядоченный набор критериев. Тогда решение $x_i$ характеризуется векторный его оценкой в виде $K(x_i) = (K_1(x_i), K_2(x_i), ..., K_m(x_i))$. Через $K^j$ может быть обозначено множество возможных значений критерия $K^i$, тогда $K^X = \mathop{X}\limits_{i=1}^{m} K^j$ - множество всех векторных оценок, соответствующих возможным решениям, где $X$ – декартово произведение множеств.

**Пример** постановки задачи многокритериального принятия решений.

Определено (задано) множество из 7 студентов, каждый из которых получил оценки по 4 предметам, тогда $|X|=7$, количество критериев равно 4, $k_{ij}$ – оценки $j$-го критерия для $i$-го студента (т.е. оценка для $i$-го студента по $j$-му предмету). Таким образом, $X = \{x_1, x_2, ..., x_7\}$, шкала для каждого критерия имеет вид $\{2,3,4,5\}$. Полученные данные сведены в Таблицу 1.

Таблица 1. Скалярные оценки $k_{ij}$ критериев $K_j$ для решений $x_i$ ($i = \overline{1,7}$, $j = \overline{1,4}$)

| Варианты | Критерии | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ |
| $x_1$ | 3 | 5 | 5 | 4 |
| $x_2$ | 4 | 4 | 4 | 5 |
| $x_3$ | 5 | 4 | 3 | 3 |
| $x_4$ | 3 | 5 | 3 | 5 |
| $x_5$ | 4 | 2 | 4 | 5 |
| $x_6$ | 3 | 5 | 3 | 5 |
| $x_7$ | 5 | 3 | 4 | 3 |

Требуется выбрать лучшего по успеваемости студента из семи претендентов, учитывая оценки по четырем предметам. Наряду с приведенными векторными оценками $K(x_i)$ вариантов могут быть указаны возможные векторные оценки, тогда $K^X = \underset{j=1}{\overset{4}{X}} K^j$, $|K^X| = 256$. Сравнение вариантов осуществляется на основе их векторных оценок. Варианты $x_4$ и $x_6$ являются эквивалентными ($x_4 \sim x_6$).

Если через $\succ$ обозначено отношение предпочтения, тогда для $x_2$ и $x_5$ является верным: $(4,4,4,5) \succ (4,2,4,5)$, т.к. для оценок $k_{2j} \geq k_{5j} (j = \overline{1,4})$, а по критерию $k_2$ решение $x_2$ строго лучше решения $x_5$ ($k_{22} > k_{52}$). Таким образом, решение $x_2$ является предпочтительнее решения $x_5$, так как по всем оценкам $k_{2j} \geq k_{5j}$, а по одной оценке вариант $x_2$ строго лучше $x_5$ ($k_{22} > k_{52}$), тогда $x_2 \succ x_5$. Для векторных оценок $(3,5,5,4)$ и $(4,4,4,5)$ отношение $\succ$ не реализуется, так как однозначно для них введенные условия предпочтения не выполняются. Таким образом, $(3,5,5,4) \overline{\succ} (4,4,4,5)$ и $(4,4,4,5) \overline{\succ} (3,5,5,4)$ в итоге $x_1 \overline{\succ} x_2$, $x_2 \overline{\succ} x_1$ и векторные оценки для решений $x_1, x_2$ и сами эти решения являются несравнимыми с использованием отношения $\succ$. Аналогичные выводы могут быть сделаны для пар решений: $(x_1,x_3), (x_1,x_4), (x_1,x_5), (x_1,x_6), (x_1,x_7), (x_2,x_3), (x_2,x_4), (x_2,x_6), (x_2,x_7), (x_3,x_4), (x_3,x_5), (x_3,x_6), (x_3,x_7), (x_4,x_5), (x_4,x_7), (x_5,x_6), (x_5,x_7), (x_6,x_7)$. Таким образом, приведенные в парах решения являются несравнимыми по отношению $\succ$. Так для решений $x_1$ и $x_6$ вектора оценок имеют вид: $(3,5,5,4)$ и $(3,5,3,5)$, для критерия $K_4$ имеем $k_{64} > k_{14}$, хотя $k_{1j} \geq k_{6j} (j = \overline{1,3})$, поэтому $x_1$ и $x_6$ – несравнимы.

Если $x_i \succ x_j$ выполняется, то решение $x_j$ является доминируемым и не может быть выбрано наилучшим.

Решение $x_i^*$ такое, что $\forall x_j \in X$, $x_j \overline{\succ} x_i^*$ называется недоминируемым (оптимальным по Эджворту-Парето). Множество таких решений – множество Эджворта-Парето обозначим как $X^*$. Решение $x_5$ доминируется решением $x_2$, а все остальные решения являются несравнимыми с использованием отношения $\succ$, то для рассматриваемого случая имеем $X^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ при этом $x_4 \sim x_6$. Т.к. $|X^*| > 1$, то не может быть выбрано решение $x_i^*$ являющееся наилучшим, поэтому должна быть привлечена дополнительная информация о предпочтениях ЛПР. Для этого могут быть использованы следующие виды дополнительной информации: 1) сведения об относительной важности критериев; 2) сведения о шкалах критериев. Вид дополнительной информации обозначим как $\Omega$, тогда $\sim_\Omega$ и $\succ_\Omega$ – отношения, вытекающие из этой информации.

Простейший способ скаляризации оценок критериев $K_j$ - это формирование обобщенного критерия на основе аддитивной свертки следующим образом:

$$\Phi = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots + \alpha_m K_m, \tag{1}$$

где $\Phi$ – обозначение оценки обобщенного (агрегированного) критерия, $\alpha_i (i = \overline{1,m})$ – коэффициенты важности (веса) критериев, $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$.

В случае одинаковой важности критериев $\alpha_i = 1/m$, а значение $\Phi$ для рассматриваемого примера представляет собой средний балл. Т.к. в рассматриваемом случае разные дисциплины могут иметь разную значимость, следовательно должна быть определена относительная важность критериев и значения $\alpha_i$ в выражении (1). Таким образом, базовые методы анализа (и решения) многокритериальных задач основаны на свертывании набора исходных критериев в один обобщенный (агрегированный, в частности используется аддитивная свертка) критерий, имеющий вид взвешенный при помощи коэффициентов важности суммы исходных критериев. Однако данные методы обладают рядом недостатков, ограничивающих их использование.

При многокритериальном принятии решений должна быть учтена информация о предпочтениях ЛПР (какой из критериев является более предпочтительным), выраженная в виде сведений об относительной их (критериев) важности. При этом сведения об относительной важности критериев должны быть строго формализованы.

### 2.2. Использование качественной теории важности критериев при принятии решений

Определение важности критериев возможно в случае их (критериев) однородности, т.е. критерии должны иметь сопоставимый вид. Условиями однородности критериев являются: 1) наличие единой (общей) шкалы; 2) каждая градация шкалы должна отражать одинаковый уровень предпочтений для каждого критерия.

Требованиями для градаций шкалы (требованиями к шкале) являются: 1) градации нумеруются в порядке возрастания предпочтительности оценок критериев, для работы с которыми используются шкалы; 2) номера градаций шкалы отражают упорядоченность оценок критерия по предпочтениям; 3) с номерами градаций не могут быть выполнены какие-либо арифметические операции для получения оценок предпочтений; 4) решения (для реализации требования их однородности) оцениваются по всем критериям в единой бальной шкале, при этом градации шкалы (отражающие степень предпочтения одного решения перед другим) для всех критериев являются одинаковыми.

В этом случае используемая для определения оценок критерия (критериев) шкала (шкалы) является качественной, все критерии являются однородными, т.е. имеют единую порядковую шкалу. В случае неоднородных критериев (вес, стоимость, площадь) перед сравнением этих критериев по важности их нужно привести к единой порядковой шкале с одинаковым числам градаций $q$. Т.е. критерии не нормализуются по формуле $k_i / k_{max}$, а их исходная шкала разделяется на $q$ частей таким образом, чтобы некоторый *l*-ый интервал исходной шкалы соответствовал *l*-ой градации обобщенной шкалы. Тогда любое значение $k_{ij}$ критерия $K_j$, принадлежащее *l*-му интервалу, интерпретируется как *l*-я градация формируемой единой шкалы.

Качественными оценками важности критериев являются суждения вида: «Критерий $K_i$ важнее критерия $K_j$». Для формализации важности критерия $K_i$ по отношению (по сравнению) с критерием $K_j$ также как и для решений может быть использовано отношение предпочтения $\succ$ и безразличия (эквивалентности) $\sim$. Т.е. выражение вида $K_i \succ K_j$ означает, что критерий $K_i$ важнее (предпочтительнее) критерия $K_j$, а $K_i \sim K_j$ – что критерии являются эквивалентными. Если $K_1 \succ K_2$ и $K_2 \sim K_3$, то критерий $K_1$ важнее критерия, а критерии $K_2$ и $K_3$ эквивалентны.

Обозначим через $K(x)$ некоторую векторную оценку для решения $x$. Вид векторной оценки: $K(x) = (K_1(x), K_2(x), .., K_m(x))$. Через $K^{ij}(x)$ обозначим векторную оценку решения $x$, полученную из оценки $K(x)$ путем перестановки в ней *i*-ой и *j*-ой компонент (т.е. $k_i$ и $k_j$).

**Пример** формирования векторных оценок $K^{ij}(x)$. Исходная векторная оценка: $K(x) = (5,4,3,4)$, $K^{14}(x) = (4,4,3,5)$, $K^{23}(x) = (5,3,4,4)$.

Критерии $K_i$ и $K_j$ равно важны (эквивалентны с точки зрения важности) если две векторные оценки $K(x)$ и $K^{ij}(x)$ одинаковы по предпочтению. Т.е. если перестановка значений *i*-го и *j*-го критериев в векторной оценке $K(x)$ позволяет получить векторную оценку $K^{ij}(x)$ эквивалентную $K(x)$.

**Пример** перестановки в векторе оценок критериев для равно важных критериев $K_i$ и $K_j$. Исходная векторная оценка имеет вид $K(x) = (5,4,3,4)$. Критерии $K_2$ и $K_3$ являются равно важными (т.е. $K_2 \overline{\succ} K_3$ и $K_3 \overline{\succ} K_2$).

Тогда формируемая векторная оценка $K^{23}(x)=(5,3,4,4)$ будет являться эквивалентной оценке $K(x)$, т.е. $(5,4,3,4)\sim(5,3,4,4)$ при $K_2\sim K_3$ (где $\sim$ – отношение эквивалентности, т.е. критерии не различаются с точки зрения их важности и векторные оценки тоже не могут быть сравнимы с использованием отношения $\succ$, векторные оценки фактически не изменились при перестановке значений критериев). Т.е. перестановка оценок $k_i$ и $k_j$ соответствующих критериев позволяет получить для дальнейшего анализа вектор оценок $K^{ij}(x)$, который эквивалентен исходному вектору $K(x)$.

**Пример** перестановки в векторе оценок критериев при условии разной важности критериев.

Критерий $K_1$ является более важным, чем критерий $K_2(K_1\succ K_2)$. Исходная оценка имеет вид $K(x)=(5,4,3,4)$. Тогда оценка $K^{12}(x)=(4,5,3,4)$. При этом полученная оценка не является эквивалентной исходной оценке $K(x)$, т.к. рассматриваемые критерии не равны по важности. Т.к. критерий $K_1$ более важный, чем критерий $K_2$, то получаемая оценка $(4,5,3,4)$ является худшей, чем исходная оценка $(5,4,3,4)$ по значению первого (более важного критерия). Таким образом, исходная оценка $K(X)=(5,4,3,4)$, оценка $K^{12}(x)=(4,5,3,4)$. При этом $(5,4,3,4)\overline{\sim}(4,5,3,4,)$, т.к. $K_1\succ K_2$, то $(5,4,3,4)\succ(4,5,3,4)$.

Таким образом, с точки зрения качественной теории важности критериев возможны следующие ситуации: $K_i\succ K_j$, $K_j\succ K_i$, $K_i\sim K_j$, $K_i$ и $K_j$ являются несравнимыми по важности $(K_i\overline{\succ}K_j, K_j\overline{\succ}K_i, K_i\overline{\sim}K_j)$.

Введем в рассмотрение обозначения: $\sim_{ij}$ – отношение эквивалентности векторных оценок, вторая из которых получена путем перестановки *i*-го и *j*-го элементов в первой; $\succ_{ij}$– отношение предпочтения векторных оценок, вторая из оценок получена путем перестановки *i*-го и *j*-го элементов в первой. Тогда в рассмотренных примерах $(5,4,3,4)\sim_{23}(5,3,4,4)$ и $(5,4,3,4)\succ_{12}(4,5,3,4)$. Т.е. предпочтение векторных оценок вида $(3,5,4,5)\succ(3,5,3,5)$– это предпочтение, полученное в результате сравнения значений скалярных оценок критериев на соответствующих позициях, а $(3,5,5,4)\succ_{34}(3,5,4,5)$ - предпочтение первой векторной оценки перед второй, полученной в результате перестановки скалярных оценок в 3-ей и 4-ой позициях при условии разной важности критериев $K_3$ и $K_4(K_3\succ K_4)$, при этом по критерию $K_3$ в полученной оценке меньшее значение.

Дополнительной информацией $\Omega$ для определения предпочтений ЛПР с точки зрения важности критериев, используемой для принятия решений, является информация о предпочтительности (важности) критериев или их эквивалентности (безразличии при анализе оценок для соответствующих критериев). Пример дополнительной информации о предпочтениях ЛПР, используемой в рассуждениях выше, имеет вид: $\Omega=\{k_1\succ k_2, k_2\sim k_3, k_3\succ k_4\}$.

Таким образом, комбинируя отношения $\succ_{ij}$, $\sim_{ij}$ и отношение $\succ$ для векторных оценок (соответственно, решений), можно выполнить сравнение по предпочтению всех векторных оценок с использованием информации $\Omega$.

Тогда могут быть определены (сформированы) новые отношения $\succ$, порождаемые информацией о предпочтениях ЛПР с точки зрения важности критериев $\Omega$. Обозначим отношение предпочтения $\succ$, формируемое для векторных оценок решений *x* с использованием дополнительной информации $\Omega$ через $\succ_\Omega$.

**Пример** использования качественной информации о важности критериев $\Omega$ при решении двухкритериальной задачи. Вид информации $\Omega=\{K_1\succ K_2\}$, даны две векторные оценки $K(x_1)=(5,3)$, $K(x_2)=(2,4)$.

Т.к. векторные оценки не сравнимы между собой (т.е. $(5,3)\overline{\succ}(2,4)$ и $(2,4)\overline{\succ}(5,3)$ и $x_1\overline{\succ}x_2$, $x_2\overline{\succ}x_1$) тогда при отсутствии предпочтений ЛПР с точки зрения важности критериев эффективное решение не может быть определено.

При учете информации $\Omega = \{K_1 \succ K_2\}$ о важности критериев в векторной оценке $K(x_1) = (5,3)$ выполнена перестановка скалярных оценок (в позициях 1 и 2, соответствующих информации $\Omega$). В результате получена модифицированная векторная оценка $K^{12}(x_1) = (3,5)$. Т.к. для критериев $K_1$ и $K_2$ выполняется $K_1 \succ K_2$, тогда для оценок $K(x_1)$ и $K^{12}(x_1)$ выполняется $K(x_1) \succ_{12} K^{12}(x_1)$ (т.к. значение по первому критерию является более важным, чем значении по второму), т.е. $(5,3) \succ_{12} (3,5)$. Полученная оценка $K^{12}(x_1)$ может быть соотнесена с оценкой $K(x_2)$, при этом $(3,5) \succ (2,4)$ или $K^{12}(x_1) \succ K(x_2)$. В итоге получены две пары отношений: для $K(x_1)$, $K^{12}(x_1)$ и $K^{12}(x_1)$, $K(x_2)$ в виде: $(5,3) \succ_{12} (3,5)$ и $(3,5) \succ (2,4)$ (либо $K(x_1) \succ_{12} K^{12}(x_1)$ и $K^{12}(x_1) \succ K(x_2)$), которые в сокращенной форме могут быть записаны в виде последовательности отношений: $(5,3) \succ_{12} (3,5) \succ (2,4)$.

Т.к. через $\succ_\Omega$ обозначено отношение предпочтения, полученное с использованием дополнительной информации $\Omega$ о важности критериев, тогда $(5,3) \succ_\Omega (2,4)$, $K(x_1) \succ_\Omega K(x_2)$.

**Пример** использования дополнительной информации $\Omega$ о равной важности критериев $K_1$ и $K_2$ при выборе эффективного решения.

Вид информации $\Omega = \{K_1 \sim K_2\}$, вид векторных оценок $K(x_1) = (5,3)$, $K(x_2) = (2,4)$. Тогда $(5,3) \bar{\succ} (2,4)$, $(2,4) \bar{\succ} (5,3)$, $x_1 \bar{\succ} x_2$, $x_2 \bar{\succ} x_1$, $(5,3) \sim (2,4)$ (где $\sim$ – отношение безразличия (не сравнимости) двух векторных оценок и, соответственно, решений). Использование информации $\Omega$ о равной важности критериев для ЛПР позволяет на основе оценки $K(x_1) = (5,3)$ сформировать оценку $K^{12}(x_1)$ в виде: $K^{12}(x_1) = (3,5)$. При этом $K(x_1) \sim_{12} K^{12}(x_1)$, так как при этом $K^{12}(x_1) \succ K(x_2)$, то следовательно $K(x_1) \succ_\Omega K(x_2)$ и $x_1 \succ_\Omega x_2$.

Вариант (решение) $x_i^*$, такой, для которого не существует решений $x_j$ таких, что $x_j \succ_\Omega x_i^*$ называется не доминируемым (по отношению $\succ_\Omega$), т.е. $\forall x_j \mid x_j \bar{\succ}_\Omega x_i^*$. Таким образом, решение $x_i^*$ является не доминируемым по отношению $\succ_\Omega$, т.е. с учетом дополнительной информации о важности критериев. Тогда может быть сформировано множество $X_\Omega$ не доминируемых решений: $X_\Omega = \{x_i \mid \forall x_j, x_j \bar{\succ}_\Omega x_i\}$. Только среди этих решений может быть выбрано эффективное.

**Алгоритм формирования множества** $X_\Omega$ содержит рассматриваемую ниже последовательность шагов:

1) сформировать первоначальный вид множества не доминируемых решений следующим образом: $X_\Omega = \{x_i \mid i = \overline{1,n}\}$, где $n$ - общее количество решений;

2) выполнить проверку условия доминирования решением $x_i$ решения $x_l$ (условие вида $k_{ij} \geq k_{lj}$ для всех $j$ и $k_{ij'} > k_{lj'}$ для одного $j'$), при этом $l = \overline{1,n}$; если условие доминирования решения $x_l$ решением $x_i$ выполняется, то исключить $x_l$ из множества не доминируемых решений $X_\Omega : X_\Omega = X_\Omega \setminus x_l$;

3) шаг 2 повторить для каждого решения $x_i$ ($i = \overline{1,n}$), исключая из множества $X_\Omega$ на каждом шаге доминируемые решения $x_l$;

4) для решения $x_i$ в соответствии с информацией о важности критериев $\Omega$, содержащей отношение предпочтения для критериев $K_j \succ K_h$, сформировать на основе векторной оценки $K(x_i)$ новую векторную оценку $K^{jh}(x_i)$, получаемую в результате перестановок значений скалярных критериев $K_j$ и $K_h$ (значения $k_{ij}$ и $k_{ih}$);

5) проверить выполнение условия доминирования для векторных оценок $K(x_i)$ и $K^{jh}(x_i)$, если условие $K(x_i) \succ_{jh} K^{jh}(x_i)$ выполняется, тогда выполнить проверку условия доминирования векторных оценок $K(x_l)$ векторной оценкой $K^{jh}(x_i)$ (при этом проверка выполняется последовательно для каждого $l$-го решения, где $l = \overline{1,n}$); если условия доминирования оценки $K(x_l)$ оценкой $K^{jh}(x_i)$ выполняется (т.е. $K^{jh}(x_i) \succ K(x_l)$ и, соответственно, $K(x_i) \succ_\Omega K(x_l)$), то решение $K(x_l)$ исключается из множества $X_\Omega$ как доминируемое : $X_\Omega = X_\Omega \setminus x_l$;

6) изменение индекса текущего рассматриваемого решения $x_i$ (переход к следующему решению), доминирование которым остальных решений $x_l$ ($l = \overline{i+1,n}$) в соответствии с отношением $\succ_\Omega$ будет исследоваться (при учете текущей информации о важности критериев $K_j \succ K_h$); если решение $x_i$, для которого исследуется доминирование им остальных решений $x_l$ ($l = \overline{i+1,n}$), имеется в наличии $(i \le n)$, тогда выполнить переход к шагу 4;

7) если для всех решений $x_i \in X_\Omega$ выполнена проверка доминирования ими (текущим рассматриваемым решением $x_i$) других решений $x_l$ ($l = \overline{i+1,n}$) в соответствии о текущей информацией о важности критериев $K_j \succ K_h$, то в $\Omega$ выполнить переход к следующей информации о важности критериев ($K_{j'} \succ K_{h'}$), если $|X_\Omega| > 1$ и в $\Omega$ имеется информация о важности критериев $K_{j'} \succ K_{h'}$, то выполняется переход к шагу 4;

8) если в $\Omega$ дополнительная информация о предпочтительности критериев ($K_{j'} \succ K_{h'}$) отсутствует, то выполняется переход к информации об эквивалентности критериев $K_j \sim K_h$;

9) в соответствии с информацией об одинаковой важности критериев $K_j$ и $K_h$ для некоторого решения $x_i$ на основе его векторной оценки $K(x_i)$ формируется новая векторная оценка $K^{jh}(x_i)$, где $j$ и $h$ - позиции в векторе критериев, являющихся одинаковыми по важности; полученная оценка $K^{jh}(x_i)$ в силу равной важности критериев $K_j$ и $K_h$($K_j \sim K_h$) является эквивалентной исходной оценке $K(x_i)$ (т.е. проверять условие доминирования $K(x_i) \succ_{jh} K^{jh}(x_i)$ не требуется, $K(x_i) \sim K^{jh}(x_i)$);

10) проверка выполнения условия доминирования векторных оценок $K(x_l)$ ($l = \overline{i+1,n}$) полученной векторной оценкой $K^{jh}(x_i)$; если условие доминирования оценки $K(x_l)$ оценкой $K^{jh}(x_i)$ (условие $K^{jh}(x_i) \succ K(x_l)$) выполняется, тогда реализуется $K(x_i) \succ_\Omega K(x_l)$ (т.е.

доминирование с учетом дополнительной информации о равной важности критериев); тогда решение $x_l$ исключается из $X_\Omega$ как доминируемое : $X_\Omega = X_\Omega \setminus x_l$;

11) изменение индекса рассматриваемого решения $x_i$ (переход к следующему решению), т.е. выполняется переход к решению, доминирование которым остальных решений $x_l$ $(l=\overline{i+1,n})$ будет исследоваться (при учете дополнительной информации об одинаковой (равной) важности критериев $K_j$ и $K_h$ $(K_j \sim K_h)$); при наличии решения $x_i$ (условие $i \le n$), доминирование которым решений $x_l$ при учете $K_j \sim K_h$ будет исследоваться, выполняется переход к шагу 9;

12) в случае, если проверка для всех $x_i$ $(i=\overline{1,n})$ условия доминирования ими решений $x_l$ $(l=\overline{i+1,n})$ (с учетом текущей рассматриваемой дополнительной информации $K_j \sim K_h$) выполнена, тогда при условии $|X_\Omega|>1$ в $\Omega$ выделяется информация, касающаяся эквивалентности других критериев $(K_{j'} \sim K_{h'})$, индекс текущего рассматриваемого решения задается равным $1(i=1$, рассматривается решение $x_1)$, выполняется переход к шагу 9.

**Примечание**. Необходимость исключения решений $x_l$ из множества $X_\Omega$ исследуется первоначально с точки зрения разной важности критериев $K_j$ и $K_h$ (предпочтений для критериев $K_j$ и $K_h$ – $K_j \succ K_h$), а затем с точки зрения одинаковой важности критериев $(K_j \sim K_h)$. Это объясняется тем, что дополнительная информация $\Omega$, используемая при принятии решений, представляется в виде двух матриц – первая матрица $A_1$ предпочтений для критериев ($a_{jh}=1$ если $K_j \succ K_h$ и $a_{jh}=0$, если $K_j \bar{\succ} K_h, j=\overline{1,n}, h=\overline{1,n}$), вторая матрица $A_2$ «эквивалентных» критериев (критериев, имеющих одинаковую важность, $K_j \sim K_h$).

**Пример** матрицы предпочтений критериев и матрицы отношения эквивалентности критериев (с одинаковой (равной) важностью).

$$A_1 = \begin{array}{c} \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \end{array}; \qquad A_2 = \begin{array}{c} \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \end{array}.$$

**Пример применения алгоритма многокритериального поиска эффективных решений при учете важности критериев для задачи ранжирования студентов.**

Информация о важности критериев имеет следующий вид: $\Omega = \{K_1 \succ K_2, K_2 \sim K_3, K_3 \succ K_4\}$. Векторные оценки $K(x_i)$ для каждого решения $x_i$ приведены в Таблице 1. Рассматривается решение $x_1$. Т.к. $K_3 \succ K_4$, то на основе векторной оценки $K(x_1)=(3,5,5,4)$ может быть сформирована модифицированная векторная оценка $K^{34}=(3,5,4,5)$. Однако оценка $K(x_1)=(3,5,5,4)$ предпочтительной оценки $K^{34}(x_1)=(3,5,4,5)$ в силу важности: критериев ($K(x_1) \succ_{34} K^{34}(x_1)$ или $(3,5,5,4) \succ_{34} (3,5,4,5)$). Сравниваем векторную оценку $K^{34}=(3,5,4,5)$ с векторной оценкой $K(x_4)=(3,5,3,5)$ с точки зрения выполнения условия $k_{1j} \ge k_{4j}$ для всех $k_{ij}$ $(i=\overline{1,4})$ и для одного $k_{13} > k_{43}$. Т.к. эти условия выполняются, то $x_4 \notin X_\Omega$, при этом т.к. $x_4 \sim x_6$, то $x_6 \notin X_\Omega$. Таким образом:

$$(3,5,5,4) \succ_{34} (3,5,4,5) \succ_\Omega (3,5,3,5)\ ;\ K(x_1) \succ_{34} K^{34}(x_1) \succ_\Omega K(x_4) \sim K(x_6).$$

Для решения $x_1$ выполним модификацию его векторной оценки $K(x_1)$ следующим образом: $K(x_1)=(3,5,5,4)$, $K^{12}(x_1)=(5,3,5,4)$. Если бы оценка $K(x_1)$ доминировала оценку $K^{12}(x_1)$, тогда при $K^{12}(x_1)\succ_\Omega K(x_7)$ имели: $K(x_1)\succ_\Omega K(x_7)$, но т.к. $K(x_1)\overline{\succ}_\Omega K^{12}(x_1)$, то $K(x_1)\overline{\succ}_\Omega K(x_7)$, следовательно, решение $x_7$ не может быть исключено из множества $X_\Omega$. Рассмотренным действием была учтена важность критериев вида $K_1 \succ K_2$ в $\Omega$. Проинтерпретируем информацию об одинаковой важности $K_2$ и $K_3$ в $\Omega$. Для $K_1$ и $K_2$ изменение позиций оценок $k_{12},k_{13}$ и $k_{22},k_{23}$ не имеет смысла т.к. оценки $K(x_1)$ и $K(x_2)$ при этом не изменяются, $x_4,x_5,x_6$ исключены из рассмотрения, поэтому информация $K_2 \sim K_3$ может быть применена только к решениям $x_3$ и $x_7$. Для решения $x_3$ на основе его векторной оценки $K(x_3)$ при учете ($K_2 \sim K_3$) может быть сформирована новая векторная оценка $K^{23}(x_3)=(5,3,4,3)$, т.к. $K_2 \sim K_3$, то $K(x_3)\sim K^{23}(x_3)$. Сравнение $K^{23}(x_3)$ с $K(x_7)$ показывает, что $K^{23}(x_3)\sim K(x_7)$. Тогда может быть сформирована следующая цепочка: $K(x_3)\sim K^{23}(x_3)\sim K(x_7)$, поэтому в итоге $K(x_3)\sim K(x_7)$ и $x_3 \sim x_7$. Поэтому множество недоминируемых решений $X_\Omega$, сформированное с учетом информации о различной и одинаковой важности критериев, будет иметь вид: $X_\Omega=\{x_1,x_2,x_3,x_7\}$.

### 2.3. Использование количественной теории важности критериев при принятии решений

При использовании количественной теории важности критериев для принятии решений используются следующие формы задания их (критериев) важности:

1) степень превосходства в важности одних критериев над другими (критерий $K_i$ в $h$ раз важнее критерия $K_j$), степень превышения важности критерия $K_i$ относительно критерия $K_j$ обозначается через $h$, где $h>0$, понятно, что при $h>1$ критерий $K_i$ в $h$ раз важнее критерия $K_j$, при $h<1$ (для $K_i \succ K_j$) критерий $K_j$ в $1/h>1$ раз важнее критерия $K_i$, при $h=1$ критерии $K_i$ и $K_j$ равно важны (эквивалентны по важности, т.е. $K_i \sim K_j$);

2) задание абсолютного значения важности критериев, количественно измеряемой по общей шкале важности, в этом случае важность критерия $K_i$ имеет величину $\beta_i$, $\beta_i>0$.

Первый способ задания важности критериев связан со вторым способом с помощью следующей формулы: $h=\beta_i/\beta_j$, где $h$ - степень превосходства важности $\beta_i$ критерия $K_i$ над важностью $\beta_j$ критерия $K_j$.

Утверждение о степени превосходства важности критерия $K_i$ над важностью критерия $K_j$ в $h$ раз обозначается следующим образом: $K_i \succ^h K_j$. Для обозначения количественной информации о степенях превосходства важностей критериев $K_i$ введен в рассмотрение символ $\Theta$ (т.е. $\Theta$ – информация о важности критериев, характеризующая предпочтения ЛПР). Для использования количественной информации о важности критериев выполняется расширение исходной модели «качественной» важности критериев до так называемой $N$-кратной модели ($N$-модели). Способ построения $N$-модели может быть рассмотрен на основе примера, введенного в рассмотрение выше (определение студентов, наиболее предпочтительных с точки зрения успеваемости).

Для упомянутого примера качественная информация о важности критериев $K_1,K_2,K_3,K_4$ имеет вид: $\Omega=\{K_1 \succ K_2, K_2 \sim K_3, K_3 \succ K_4\}$. Допустим, что на основе качественной информации $\Omega$ получена количественная информация $\Theta$ в следующем виде:

$$\Theta=\{K_1 \succ^{3/2} K_2, K_2 \sim K_3, K_3 \succ^2 K_4\}.$$

С точки зрения изучаемых дисциплин, каждой из которых соответствует свой критерий $K_i$, введенную в рассмотрение дополнительную информацию $\Theta$ о важности критериев можно прокомментировать следующим образом. Предмет 3 (критерий $K_3$) состоит из двух разделов, каждый из которых эквивалентен предмету 4 (критерий $K_4$). Т.к. предмет 3 содержит два раздела, а предмет 4 один раздел, то $K_3 \succ^2 K_4$. Предмет 1 (критерий $K_1$) состоит из трех разделов, каждый из которых имеет одинаковую важность с одним из двух разделов второго предмета (критерий $K_2$), поэтому $K_1 \succ^{3/2} K_2$. Рассмотрим для принятия решений на основе качественной информации о важности критериев полученное в предыдущем разделе множество $X_\Omega$. Расширенная модель принятия решений введена в рассмотрение следующим образом:

1) Исходное множество решений $X_\Omega$, для которого формируется расширенная $N$-модель имеет вид $X_\Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_7\}$;
2) для каждого решения $x_i$ ($i \in \{1,2,3,7\}$) его векторная оценка формируется путем повторения скалярной оценки $k_{ij}$ (где $i$ – индекс решения, $j$ – индекс критерия) такое количество раз, сколько равноважных разделов содержит соответствующий $j$-ый предмет;
3) сформированная расширенная модель с учетом количественной важности критериев примет в этом случае следующий вид (формируются новые векторные оценки):

$$K^\Theta(x_1) = (\underbrace{3,3,3,}_{\substack{1\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{5,5,}_{\substack{2\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{5,5,}_{\substack{3\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{4}_{\substack{4\text{–ый}\\ \text{предмет}}});$$

$$K^\Theta(x_2) = (\underbrace{4,4,4,}_{\substack{1\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{4,4,}_{\substack{2\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{4,4,}_{\substack{3\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{5}_{\substack{4\text{–ый}\\ \text{предмет}}});$$

$$K^\Theta(x_3) = (\underbrace{5,5,5,}_{\substack{1\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{4,4,}_{\substack{2\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{3,3,}_{\substack{3\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{3}_{\substack{4\text{–ый}\\ \text{предмет}}});$$

$$K^\Theta(x_4) = (\underbrace{5,5,5,}_{\substack{1\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{3,3,}_{\substack{2\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{4,4,}_{\substack{3\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{3}_{\substack{4\text{–ый}\\ \text{предмет}}}).$$

Полученные векторные оценки $K^\Theta(x_i)$ могут быть проинтерпретирована как состоящие из восьми критериев с одинаковой важностью. Число повторений для критериев $K_i$ определяется на основе значений $\Theta_i$, соответствующих этим критериям: для критерия $K_1$: $n_1 = 3$; для $K_2$: $n_2 = 2$; для $K_3$: $n_3 = 2$; для $K_4$: $n_4 = 1$. Тогда $N$-модель представляет собой совокупность количества повторений скалярных оценок для каждого критерия, т.е. $N$-модель представляет собой вектор $N = (n_1, n_2, ..., n_m)$, где $m$ - количество критериев, который содержит количество повторений скалярных оценок $k_{ij}$ каждого из критериев $K_j$. Таким образом, $N$-модель – это модель с $n_1 + n_2 + ... + n_m$ скалярными оценками, где первые $n_1$ оценок – это повторение $n_1$ раз оценки $k_{i1}$ в исходном векторе $K_j$, вторые $n_2$ оценок – это повторение $n_2$ раз оценки $k_{i2}$ в исходном векторе $K_j$ и т.д. Если $N$-модель в виде $N = (n_1, n_2, ..., n_m)$

сформирована, то отдельный коэффициент $\alpha_i$ в аддитивной многокритериальной модели (аддитивная свертка) может быть определен следующим образом: $\alpha_i = n_i / \sum_{i=1}^{m} n_i$ .

Таким образом $N$ - модель – это совокупность чисел $n_i$, каждое из которых определяет число повторений скалярной оценки $k_{ij}$ из исходной векторной оценки в формируемом новом векторе значений.

**Определение.** Критерий $K_i$ в $h$ раз важнее критерия $K_j$, если на основе $N$-модели коэффициент важности $h$ может быть определен следующим образом: $n_i / n_j = h$. При этом каждая из $n_i$ оценок критерия $K_i$ в формируемом векторе $K^{\Theta}(x_l)$ имеет равную важность с любой из $n_j$ оценок критерия $K_j$ в этом же векторе.

В соответствии с сформированным определением и введенным выше выражением вида $h = \beta_i / \beta_j$ приходим к выводу, что $h = n_i / n_j = \beta_i / \beta_j$, где $\beta_i$ и $\beta_j$ - коэффициенты важности критериев. Владея информацией о значениях $\beta_i$ и $\beta_j$ может быть выполнен переход к значениям $n_i$ и $n_j$, формирование $N$-модели и ее использование для принятия решений.

Один из способов определения коэффициентов важности критериев $\beta_i (i = \overline{1,m})$ предполагает из попарное сравнение по абсолютной важности. В ходе использования данного метода строится матрица $A = (a_{ij})_{m \times m}$ парных сравнений критериев $K_1,...,K_m$ по важности. ЛПР указывает свои предпочтения относительно важности критериев следующим образом: $a_{ij} = 1$ если $K_i \succeq K_j$ и $a_{ij} = 0$, если $K_i \prec K_j$. Тогда важность *i*-го критерия $K_i$ (выраженная коэффициентомх $\beta_i$), определяется формулой $\beta_i = a_i / m$ ($a_i \neq 0$), где $a_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ . Если значения $\beta_i$ являются дробными (если дробная часть $\beta_i$ не равна 0), а значения $n_i$ должно быть строго целым, то для приведения $\beta_i$ к требуемому виду их необходимо умножить на соответствующее натуральное число. Рассмотрим пример для двух критериев.

**Пример** приведения дробных значений коэффициентов важности $\beta_o$ к целому виду :

1) $\beta_i = 0{,}2$ ; $\beta_j = 0{,}4$, следовательно, коэффициенты должны быть умножены на 10, тогда $n_i = 2$; $n_j = 4$;

2) $\beta_i = 0{,}25$; $\beta_j = 0{,}45$ , следовательно, коэффициенты должны быть умножены на 100, тогда $n_i = 25$; $n_j = 45$;

Таким образом, если получены значения $n_1, n_2, ..., n_m$, то $N$-модель может быть представлена в следующем виде: $N = (n_1, n_2, .., n_m)$. Например, если $n_1 = 2$, а $n_2 = 4$ то $N$-модель имеет вид $N = (2{,}4)$.

**Пример** построения $n_i$-оценок для соответствующих $N$-моделей.

1) если $m = 2$, исходная векторная оценка $K(x_i)$ имеет вид $(2{,}5)$, а $N$-модель имеет вид $(3{,}4)$, тогда $K^{\Theta}(x_i)$ - оценка будет представлена в виде $K^{\Theta}(x_i) = (2{,}2{,}2{,}5{,}5{,}5{,}5)$;

2) если $m = 2$, исходная векторная оценка $K(x_i)$ имеет вид $(3{,}6)$, а $N$ - модель имеет вид $(3{,}5)$, тогда $K^{\Theta}(x_i)$ - оценка будет представлена в виде $K^{\Theta}(x_i) = (3{,}3{,}3{,}6{,}6{,}6{,}6{,}6)$.

**Использование количественной информации о важности критериев для поиска решения в многокритериальной задаче**

В силу того, что в построенной $N$- модели (соответственно, в оценках $K^{\Theta}(x_i)$ ($i = \overline{1,m}$)) все критерии являются одинаково важными, тогда для определения не доминируемых решений (решений $x_i \in X_\Theta$, где $X_\Theta$ - множество не доминируемых решений, сформированное на основе количественной информации $\Theta$ о важности критериев) используются введенные выше условия вида: $k_{ij} \geq k_{il}$ и $k_{ij'} > k_{il'}$ хотя бы для одной оценки $k_{ij'}$. Таким образом, формирование *N*-модели должно обеспечивает приведение всех критериев к одинаковой степени важности (все оценки в $K^\Theta(x_i)$ являются равными по важности). Для удобства выполнения действий по сравнению оценок $k_{ij}^\Theta$ вектора $K$ эти оценки могут быть предварительно упорядочены по убыванию. Таким образом, выполняется сравнение непосредственное сравнение оценок $k_{ij}^\Theta$ для соответствующих решений, устанавливается отношение предпочтения (доминирования) $\succ$ между оценками $K^\Theta(x_i)$ и $K^\Theta(x_l)$, и, соответственно, между самими решениями (т.е. $x_i \succ x_l$).

**Пример** выбора недоминируемых решений $x_i^* \in X_\Theta$ на основе множества $X_\Omega$, полученного путем анализа качественной информации о важности критериев.

В процессе решения рассматриваются альтернативы $X_1, X_2, X_3, X_7$. Оценки $K(x_i)$ для них приведены в Таблице 1. Информация $\Theta$ о степенях важности критериев имеет вид: $\Theta = \{K_1 \succ^{3/2} K_2, K_2 \sim K_3, K_3 \succ^2 K_4\}$, т.е. $N$ -модель, имеет вид: $N = (3,2,2,1)$. Оценки $K^\Theta(x_i)$ в соответствии с $N$ - модели следующие: $K^\Theta(x_1) = (3,3,3,5,5,5,5,5,4)$; $K^\Theta(x_2) = (4,4,4,4,4,4,4,4,5)$; $K^\Theta(x_3) = (5,5,5,4,4,3,3,3,3)$; $K^\Theta(x_7) = (5,5,5,3,3,4,4,4,3)$. Для удобства дальнейших действий полученные оценок отсортированы по убыванию. В итоге имеем: $K_\downarrow^\Theta(x_1) = (5,5,5,5,5,4,3,3,3)$ ; $K_\downarrow^\Theta(x_2) = (5,4,4,4,4,4,4,4,4)$; $K_\downarrow^\Theta(x_3) = K_\downarrow^\Theta(x_7) = (5,5,5,4,4,3,3,3,3)$.

Сточки зрения введенных условий для недоминирования (предпочтения) и доминирования решений имеем: $K_\downarrow^\Theta(x_1) \succ K_\downarrow^\Theta(x_3)$, $K_\downarrow^\Theta(x_1) \succ K_\downarrow^\Theta(x_7)$. Т.е. решения $x_3$ и $x_7$ не могут быть включены в множество недоминируемых решений $X_\Theta$ (т.е. $X_\Theta = X_\Theta \setminus \{x_3, x_7\}$). Сравнение оценок $K_\downarrow^\Theta(x_1)$ и $K_\downarrow^\Theta(x_2)$ показывает, что $K_\downarrow^\Theta(x_1) \bar{\succ} K_\downarrow^\Theta(x_2)$ и $K_\downarrow^\Theta(x_2) \bar{\succ} K_\downarrow^\Theta(x_1)$, т.е. оценки $K_\downarrow^\Theta(x_1)$ и $K_\downarrow^\Theta(x_2)$ являются несравнимыми с использованием отношения $\succ$. В итоге имеем $x_1 \succ_\Theta x_3$, $x_1 \succ_\Theta x_7$, $x_1 \bar{\succ}_\Theta x_2$, $x_2 \bar{\succ}_\Theta x_1$, где $\succ_\Theta$ – отношение предпочтения, формулируемое с учетом количественной информации $\Theta$ о важности критериев.

Понятно, что приведенный подход может быть применен непосредственно к множеству решений $X$ без выделения множества $X_\Omega$ недоминируемых решений с использованием качественной информации о важности критериев.

### 2.4. Использование теории относительной важности критериев при принятии решений

При реализации выбора эффективных решений (в частности, в случае двух критериев) возможными стратегиями, которыми руководствуется ЛПР, являются: 1) стратегия компенсации; 2) стратегия исключения.

Стратегия компенсации предполагает, что незначительное уменьшение значения по одному из критериев компенсируется более значительным увеличением второго критерия. Стратегия исключения предполагает удаление из рассмотрения решения, которые не удовлетворяют введенным в рассмотрение ограничивающим условиям. По аналогии с рассмотренным ранее подходом теории важности критериев принятые обозначения имеют вид: $K = (K_1, K_2, ..., K_m)$ - векторный критерий, $X$ - множество возможных решений, $\succ (x_i \succ x_j)$ –

отношение предпочтения, заданное на множестве векторных оценок $K(x_i)$. Понятно, что $K(x_i) \succ K(x_j) <=> (x_i \succ x_j)$.

В основе теории относительной важности критериев положено следующее определение уступки и приращения для рассматриваемых критериев (в нашем случае, $m = 2$). Пусть $i$ и $j$ - два различных номера критериев. Тогда критерий $K_i$ важнее критерия $K_j$ с заданными положительными параметрами $w_i$ и $w_j$, если для двух векторов $K(x_l)$ и $K(x_h)$ вида:

$$K(x_l) = (K_1(x_l), K_2(x_l), .., K_i(x_l), .., K_j(x_l), .., K_m(x_l)),$$

$$K(x_h) = (K_1(x_h), K_2(x_h), .., K_i(x_h), .., K_j(x_h), .., K_m(x_h))$$

имеет место $K(x_h) \succ K(x_l)$, при этом $k_{h,i} = k_{l,i} + w_i; k_{h,j} = k_{l,j} - w_j$ и $k_{hs} = k_{ls}$ при $s = 1,2,...,m$ и $s \neq i$, $s \neq j$.

В силу введенного в рассмотрение определения векторы $K(x_l)$ и $K(x_h)$ отличаются только $i$-ой и $j$-ой компонентами (т.е. значениями $k_{h,i}$, $k_{h,j}$, $k_{l,i}$, $k_{l,j}$).

Таким образом, в соответствии с введенными определением $K(x_h) \succ K(x_l)$, тогда ЛПР может выполнить уступки $w_j$ по критерию $K_j$, для того, что получить приращение $w_i$ по критерию $K_i$ ($k_{h,i} > k_{l,i}$ на величину $w_i$, а $k_{h,j} > k_{l,j}$ на величину $w_j$). Т.е. если для критерия $K_j$ может быть выполнения уступка $w_j$ для получения приращения $w_i$ критерия $K_i$ (а в результате решение $x_h$ предпочтительнее решения $x_l$), то критерий $K_i$ является более важным, чем критерий $K_j$. Т.к. в результате $x_h \succ x_l$, то $K_i \succ K_j$.

Степень важности критерия $K_i$ по сравнению с критерием $K_j$ определяется как $w_i / w_j$. Для того, чтобы важность критерия $K_i$ по сравнению с критерием $K_j$ была пронормирована, должен быть использован коэффициент относительной важности критерия $K_i$, вычисляемый следующим образом:

$$\Theta_{ij} = \frac{w_j}{w_i + w_j}.$$

Если $\Theta_{ij} \to 1$, то за небольшое приращение $w_i$ критерия $K_i$ должна быть реализована значительная уступка $w_j$ по критерию $K_j$ (т.е. $w_i < w_j$). В этом случае критерий $K_i$ имеет высокую степень важности по сравнению с критерием $K_j$. Если $\Theta_{ij} \to 0$, то потери $w_j$ по критерию $K_j$ должны обеспечивать значительное приращение $w_i$ по критерию $K_i$. В этом случае критерий $K_j$ является более важным, чем критерий $K_i$ и $w_i > w_j$. Если $w_i = w_j$, то $\Theta_{ij} = 1/2$. Таким образом, определение относительной важности критериев $K_i$ и $K_j$ реализуется путем задания значений уступок $w_j$ и приращений $w_i$ для соответствующих критериев $K_j$ и $K_i$. Использование относительной важности критериев (коэффициента относительной важности $\Theta_{ij}$) в процедуре принятия решений для выявления эффективных альтернатив основывается на понятии инвариантности отношения предпочтения.

Бинарное отношение $R$, заданное на пространстве $R^m$, называется инвариантным относительно линейного положительного преобразования, если для произвольных двух векторов $K(x_l)$ и $K(x_h)$ из выражения $K(x_l) \succ K(x_h)$ следует соответствие $(\alpha K(x_l) + C) \succ (\alpha K(x_h) + C)$, где $C$ - задаваемый вектор значений, $\alpha$ - положительный коэффициент $(\alpha > 0)$. Для задач многокритериального выбора отношение предпочтения $\succ$ может считаться инвариантным относительно линейного положительного преобразования. Из свойств инвариантности отношения $\succ$ вытекают свойства аддитивности и однородности этого отношения, т.е.: из $K(x_l) \succ K(x_h) => (K(x_l)+C) \succ (K(x_h)+C)$; из $K(x_l) \succ K(x_h)$ => $\alpha K(x_l) \succ \alpha K(x_h)$. Т.е. к векторам значений критериев $K(x_l)$ и $K(x_h)$ может быть прибавлен вектор $C$ и при этом отношение предпочтения не изменится. Вектора $K(x_l)$ и $K(x_h)$ могут быть умножены на положительное число $\alpha$ и при этом отношение предпочтения также не изменится.

**Использование понятия относительной важности критериев для сужения множества эффективных решений в многокритериальной задаче**

Рассмотрение механизма использования относительной важности критериев для сужения множества выбираемых (эффективных) решений предварим формулировками аксиом ЛПР, которыми он руководствуется в процессе выбора. Для вводимых в рассмотрение аксиом определим следующие обозначения: $C(X)$ – множество эффективных (выбираемых) решений, $C(K)$ – множество соответствующих этим решениям векторов значений критериев.

**Аксиома 1.** Для всякой пары векторов $K(x_l)$ и $K(x_h)$, для которых имеет место $K(x_l) \succ K(x_h)$, выполняется $K(x_h) \notin C(K)$. Аналогично, для всякой пары допустимых решений $x_l$ и $x_h$, для которых имеет место соотношение $x_l \succ x_h$, выполняется $x_h \notin C(X)$.

**Аксиома 2.** Иррефлексивное отношение предпочтения $\succ$, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, является транзитивным бинарным отношением.

**Аксиома 3.** Каждый из критериев $K_1, K_2, ..., K_m$ согласован с отношением предпочтения $\succ$ (при прочих равных значениях критериев $K_j$ $(j=\overline{1,m})$ сравнение решений может быть выполнено с использованием одного критерия $K_i$ (при $i \neq j$)); данное свойство выполняется для каждого критерия.

Тогда при условии, что для задачи многокритериального принятия решений выполняются аксиомы 1-3 и условие инвариантности отношения $\succ$, при условии большей важности критерия $K_i$ по сравнению с критерием $K_j$ на основе множества $C(X)$ и множества $C(K)$ (выбираемых решений и выбираемых критериев) могут быть сформулированы новые множества $C'(X)$ и $C'(K)$, где множество $C'(X)$ является сужением исходного множества $C(X)$, а множество векторов $C'(K)$ определяется в соответствии с изложенной ниже процедурой.

Если критерий $K_i$ является более важным, чем критерий $K_j$ с параметрами $w_i$ и $w_j$, то модифицированная оценка $K_j'$ менее важного критерия может быть определена следующим образом:

$$K_j' = w_j K_i + w_i K_j,$$

$$K_s' = K_s \text{, при } s = 1,2,...,m \text{ и } s \neq j.$$

В результате для некоторого решения $x_h$ формируется вектор модифицированных значений критериев $K'(x_h) = (K_1'(x_h), K_2'(x_h), .., K_j'(x_h), .., K_m'(x_h))$. В результате на основе полученных модифицированных векторов $K'(x_h)$ критериев $K_s'(x_h)$ $(s=\overline{1,m})$ для решений $x_h \in C(X)$ должна быть выполнена проверка выполнения отношения строгого предпочтения. Те решения $x_h$, для которых выполняется условие $x_l \succ x_h$ (при $K'(x_l) \succ K'(x_h)$), в множество $C'(X)$ включены быть не могут. Тем самым количество элементов в $C'(X)$ может быть уменьшено (т.е. $|C'(X)| < |C(X)|$). Для введенного в рассмотрение выражения, с использованием которого вычисляется оценка $K_j'$, могут быть выполнены следующие преобразования. Вследствие инвариантности отношения $\succ$ (и множества $C(X)$ соответственно) правую часть выражения для критерия $K_j'$ разделим на $w_i + w_j$, оставив для

$K_j'$ тоже обозначение. Получим $K_j' = \Theta_{ij} K_i + (1 - \Theta_{ij}) K_j$, где критерий $K_i$ более важен, чем критерий $K_j$, $\Theta_{ij}$ - коэффициент важности критерия. В дальнейшем с целью сужения множества $C(X)$ при получении векторных оценок $K'(x_h)$ должна быть использована полученная формула.

Таким образом, «новый» векторный критерий $K'$ получен из «старого» критерия $K$ заменой менее важного скалярного критерия $K_j$ на линейную комбинацию критериев $K_i$ и $K_j$ с коэффициентами $w_i$ и $w_j$ (коэффициентом $\Theta_{ij}$). Все остальные скалярные критерии $K_s$ сохраняются (при $s = 1,2,...,m$ и $s \neq j$).

**Пример** сужения множества выбираемых решений C(X) на основе относительной важности критериев с коэффициентами $w_i$ и $w_j$.

Заданными являются значения коэффициентов $w_1$ и $w_2$: $w_1 = 1$; $w_2 = 2$. Т.е. уступка по критерию $K_1$ в одну единицу должно обеспечивать приращение по критерию $K_2$ в две единицы (критерий $K_1$ является более важным, чем критерий $K_2$). Тогда $\Theta_{ij} = 0.33$, а $(1 - \Theta_{ij}) = 0.67$. Исходное множество решений X имеет вид: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, значения критериев $K_i$ $(i = \overline{1,4})$ для соответствующих значений сведены в Таблицу 2.

Таблица 2. Значения критериев $K_i$ $(i = \overline{1,4})$ для решений $x_l$ $(l = \overline{1,})$

| $K_i$ / $x_l$ | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 3 | 5 | 5 | 4 |
| $x_2$ | 4 | 4 | 3 | 5 |
| $x_3$ | 5 | 4 | 4 | 3 |
| $x_4$ | 2 | 5 | 3 | 5 |
| $x_5$ | 4 | 2 | 4 | 5 |
| $x_6$ | 3 | 5 | 3 | 2 |
| $x_7$ | 4 | 3 | 4 | 5 |

Решение $x_5$ доминируется решением $x_7$ ($x_7 \succ x_5$), поэтому $x_5 \notin C(X)$, решение $x_6$ доминируется решением $x_1$, поэтому $x_6 \notin C(X)$ при $x_1 \succ x_6$. Решения $x_1, x_2, x_3, x_4, x_7$ являются не сравнимыми между собой, поэтому $C(X) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7\}$. Значения $K'(x_l)$ определены в соответствии с введенной в рассмотрение формулой и сведены в Таблицу 3.

Таблица 3. Значения критериев $K_i'$ $(i = \overline{1,4})$ для решений $x_l$ $(l = \overline{1,})$

| $K_i$ / $x_l$ | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 3 | 4.34 | 5 | 4 |
| $x_2$ | 4 | 4 | 3 | 5 |
| $x_3$ | 5 | 4.33 | 4 | 3 |
| $x_4$ | 2 | 4.01 | 3 | 5 |
| $x_7$ | 4 | 3.33 | 4 | 5 |

Из анализа значений $K'_i$ $(i=\overline{1,4})$ видно, что $x_2 \succ x_7$, $x_3 \succ x_4$, поэтому сформированное множество $C'(X)$ будет иметь вид: $C'(X)=\{x_1,x_2,x_3\}$. Решения, входящие в это множество, являются эффективными.

### 3. Программа выполнения работы

Для первого варианта задания предусматривается следующий порядок действий по выполнению лабораторной работы:
1) на основе информации $\Omega$ о качественной важности критериев сформировать матрицы $A1$ и $A2$ отношений предпочтения и эквивалентности для критериев $K_i$ $(i=\overline{1,n})$;
2) разработать процедуру определения доминируемых решений, выполняющую для каждого решения $x_l$ сравнение его значений скалярных оценок $k_{li}$ вектора $K(x_l)$ с такими же скалярными оценками $k_{hi}$ решений $x_h$; тем самым должны быть определены решения $x_h$, доминируемые текущим рассматриваемым решением $x_l$ (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$); результатом выполнения процедуры является множество $X_\Omega$ не сравнимых между собой с использованием отношения предпочтения $\succ$ решений;
3) разработать процедуру, использующую информацию $\Omega$ о важности критериев, входными данными для которой будет являться матрица $A_1$ отношения предпочтения для критериев; разрабатываемая процедура должна выполнять следующие операции:
а) для решений $x_l$ (при $l=\overline{1,n}$) формировать новые векторные оценки $K^{ji}(x_l)$ путем перестановки скалярных компонент $k_{li}$ и $k_{lj}$ в исходной векторной оценке $K(x_l)$ (индексы $i$ и $j$ соответствуют критериям $K_i$ и $K_j$, связанным отношением предпочтения в следующем виде: $K_i \succ K_j$);
б) для каждого решения $x_l$ для его модифицированных векторных оценок $K^{ji}(x_l)$ проконтролировать выполнение условия доминирования им других решений $x_h$ для их векторных оценок $K^{ji}(x_h)$ (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$) (т.е. выполняется поэлементное сравнение оценок $k_{li}$ и $k_{hi}$ из соответствующих векторов $K^{ji}(x_l)$ и $K^{ji}(x_h)$); при выполнении условия $x_l \succ x_h$, процедура реализует исключение решения $x_h$ из множества $X_\Omega$: $X_\Omega = X_\Omega \setminus x_h$;
в) результатом выполнения разрабатываемой программы является определение множества не сравнимых решений $X_\Omega$, сформированного на основе информации $\Omega$ о предпочтениях критериев вида $K_i \succ K_j$;
4) разработать процедуру, использующую информацию $\Omega$ о важности критериев, входными данными для которой будет являться матрица $A_2$ отношения эквивалентности для критериев; разрабатываемая процедура должна выполнять следующие операции:
а) для решений $x_l$ (при $l=\overline{1,n}$) формировать новые векторные оценки $K^{ji}(x_l)$ путем перестановки скалярных компонент $k_{li}$ и $k_{lj}$ в исходной векторной оценке $K(x_l)$ (индексы $i$ и $j$ соответствуют критериям $K_i$ и $K_j$, связанным отношением эквивалентности в следующем виде: $K_i \sim K_j$);
б) для модифицированных векторных оценок $K^{ji}(x_l)$ каждого решения $x_l$ (при $l=\overline{1,n}$) проконтролировать выполнение условия доминирования им других решений $x_h$ для их векторных оценок $K^{ji}(x_h)$ (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$) (т.е. выполняется поэлементное сравнение оценок $k_{li}$ и $k_{hi}$ из соответствующих векторов $K^{ji}(x_l)$ и $K^{ji}(x_h)$); при выполнении условия $x_l \succ x_h$, процедура реализует исключение решения $x_h$ из множества $X_\Omega$: $X_\Omega = X_\Omega \setminus x_h$;
в) результатом выполнения разрабатываемой программы является определение множества не сравнимых решений $X_\Omega$, сформированного на основе информации $\Omega$ об эквивалентности критериев вида $K_i \sim K_j$;

5) выполнить вывод множества $X_{\Omega}$, полученного в результате исключения из него доминируемых решений $x_h$ при учете дополнительной информации $\Omega$ о предпочтениях и эквивалентности критериев.

Для второго варианта задания предусматривается следующий порядок действий по выполнению лабораторной работы:

1) на основе информации $\Theta$ о количественной важности критериев сформировать *N*-модель в виде вектора, каждый *i*-ый элемент которого соответствует *i*-му критерию и определяет число повторений исходных скалярных оценок $k_{li}$ в формируемом векторе $K^{\Theta}(x_l)$ (при $l=\overline{1,n}$);

2) разработать процедуру определения доминируемых решений, выполняющую для каждого решения $x_l$ сравнение его значений скалярных оценок $k_{li}$ вектора $K(x_l)$ с такими же скалярными оценками $k_{hi}$ решений $x_h$; тем самым должны быть определены решения $x_h$, доминируемые текущим рассматриваемым решением $x_l$ (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$); результатом выполнения процедуры является множество $X_{\Theta}$ не сравнимых между собой с использованием отношения предпочтения $\succ$ решений;

3) разработать процедуру, использующую информацию $\Theta$ о важности критериев, входными данными для которой будет являться сформированный вектор значений, интерпретируемый как *N*-модель; разрабатываемая процедура реализует формирование векторов $K^{\Theta}(x_l)$ ($l=\overline{1,n}$), представляющих собой модификацию исходных векторных оценок $K(x_l)$ ($l=\overline{1,n}$) по соответствующему виду *N*-модели; таким образом, результатом реализации процедуры являются модифицированные с учетом информации $\Theta$ о количественной важности критериев векторные оценки $K^{\Theta}(x_l)$ ($l=\overline{1,n}$);

4) разработать процедуру, упорядочивающую по убыванию скалярные оценки $k_{li}$ ($i=\overline{1,n}$) для каждой сформированной векторной оценки $K^{\Theta}(x_l)$ ($l=\overline{1,n}$);

5) для модифицированных векторных оценок $K^{\Theta}(x_l)$ каждого решения $x_l$ ($l=\overline{1,n}$) проконтролировать выполнение условия доминирования им других решений $x_h$ для их векторных оценок $K^{\Theta}(x_h)$ (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$) (т.е. выполняется поэлементное сравнение оценок $k_{li}$ и $k_{hi}$ из соответствующих векторов $K^{\Theta}(x_l)$ и $K^{\Theta}(x_h)$); при выполнении условия $x_l \succ x_h$, процедура реализует исключение решения $x_h$ из множества $X_{\Theta}$: $X_{\Theta} = X_{\Theta} \setminus x_h$;

6) результатом выполнения разрабатываемой программы является определение множества не сравнимых решений $X_{\Theta}$, сформированного на основе информации $\Theta$ о количественной важности критериев;

7) выполнить вывод множества $X_{\Theta}$, полученного в результате исключения из него доминируемых решений $x_h$ при учете дополнительной информации $\Theta$ о количественной важности критериев.

Для третьего варианта задания предусматривается следующий порядок действий по выполнению лабораторной работы:

1) на основе задаваемых в качестве входных данных значений $w_i$ и $w_j$, соответствующих уступкам и приращениям для критериев $K_i$ и $K_j$, вычислить значения коэффициентов относительной важности критериев $\Theta_{ij}$;

2) разработать процедуру определения доминируемых решений, выполняющую для каждого решения $x_l$ сравнение его значений скалярных оценок $k_{li}$ вектора $K(x_l)$ с такими же скалярными оценками $k_{hi}$ решений $x_h$ ($h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$); тем самым должны быть определены решения $x_h$, доминируемые текущим рассматриваемым решением $x_l$ (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$); результатом выполнения процедуры является множество $X'_{\Theta}$ не сравнимых между собой с использованием отношения предпочтения $\succ$ решений;

3) разработать процедуру определения значений векторных оценок $K'(x_l)$ для всех $n$ решений ($l=\overline{1,n}$) с учетом вычисленных значений $\Theta_{ij}$; при этом учесть, что при $w_i<w_j$ критерий является менее важным, чем критерий $K_i$; в этом случае пересчитываются скалярные оценки $k_{lj}$, соответствующие этому $j$-му критерию (в этом случае определяется скалярная оценка $k'_{lj}$, входящая в модифицируемый вектор $K'(x_l)$);

4) для модифицированных векторных оценок $K'(x_l)$ каждого решения $x_l$ ($l=\overline{1,n}$) проконтролировать выполнение условия доминирования им других решений $x_h$ для их векторных оценок $K'(x_h)$ (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$) (т.е. выполняется поэлементное сравнение оценок $k_{li}$ и $k_{hi}$ из соответствующих векторов $K'(x_l)$ и $K'(x_h)$); при выполнении условия $x_l \succ x_h$, процедура реализует исключение решения $x_h$ из множества $X'_\Theta$: $X'_\Theta = X'_\Theta \setminus x_h$;

5) результатом выполнения разрабатываемой программы является определение множества не сравнимых решений $X'_\Theta$, сформированного на основе информации об относительной важности критериев;

7) выполнить вывод множества $X'_\Theta$, полученного в результате исключения из него доминируемых решений $x_h$ при учете информации об относительной важности критериев.

## 4.Задание на работу

В качестве исходных данных для выполнения задания по лабораторной работе (для всех вариантов) заданы: множество решений вида $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$, оценки пяти критериев сведены в Таблицу 4.

Таблица 4. Скалярные оценки $k_{ij}$ критериев $K_j$ для решений $x_i$ ($i=\overline{1,8}$, $j=\overline{1,5}$)

| Варианты | Критерии | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | $K_5$ |
| $x_1$ | 3 | 5 | 5 | 4 | 4 |
| $x_2$ | 4 | 4 | 4 | 5 | 4 |
| $x_3$ | 5 | 4 | 3 | 3 | 5 |
| $x_4$ | 3 | 5 | 3 | 5 | 3 |
| $x_5$ | 4 | 2 | 4 | 5 | 5 |
| $x_6$ | 3 | 5 | 3 | 5 | 3 |
| $x_7$ | 5 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| $x_8$ | 4 | 5 | 3 | 4 | 3 |

**Вариант 1.** Определить множество несравнимых решений $X_\Omega$, используя качественную информацию о важности критериев $\Omega$ в следующем виде:
$\Omega=\{K_1 \succ K_2, K_2 \sim K_3, K_3 \sim K_4, K_4 \succ K_5\}$.

**Вариант 2.** Определить множество несравнимых решений $X_\Theta$, используя количественную информацию о важности критериев $\Theta$ в следующем виде:
$\Theta=\{K_3 \succ^3 K_4, K_1 \succ^2 K_4, K_4 \succ^2 K_2, K_2 \sim K_5\}$.

**Вариант 3.** Определить множество несравнимых решений $C'(X)$, используя информацию об относительной важности критериев в следующем виде:
$w_1=2$, $w_2=1$;
$w_4=1$, $w_5=2$.

**5. Контрольные вопросы.**

5.1. В каких ситуациях возникает необходимость учета важности критериев?
5.2. В чем состоят условия доминирования векторной оценки со стороны другой векторной оценки (одного решения другим решением при наличии векторного критерия) ?
5.3. В чем заключается понятие качественной важности критериев?
5.4. В какой форме может быть задана информация о качественной важности критериев?
5.5. В чем состоит способ формирования модифицированных векторных оценок решений на основе исходных векторных оценок с учетом качественной информации?
5.6. В чем заключаются условия доминирования сформированной модифицированной векторной оценкой исходной векторной оценки при учете качественной информации о важности критериев для одного и того же решения (в каком случае модифицированная векторная оценка доминирует исходную векторную оценку) ?
5.7. В какой ситуации сформированная модифицированная векторная оценка не доминирует исходную векторную оценку?
5.8. В чем состоят условия доминирования векторной оценкой одного решения векторной оценки другого решения при учете качественной информации о важности критериев?
5.9. В чем причина доминирования сформированной векторной оценкой исходной векторной оценки при условии эквивалентности критериев?
5.10. Какие шаги формируют алгоритм определения состава множества $X_\Omega$ не сравнимых решений при учете информации $\Omega$ о качественной важности критериев?
5.11. Что представляет из себя понятие количественной важности критериев?
5.12. Как определить относительную важность критерия $K_i$ по сравнению с критерием $K_j$, если важность $K_i$ равна $\beta_i$, а важность $K_j$ равна $\beta_j$?
5.13. В чем заключается способ построения N-модели с учетом количественной информации $\Theta$ о важности критериев?
5.14. В чем заключается способ формирования модифицированных векторных оценок $K^\Theta(x_l)$ на основе исходных оценок $K(x_l)$ с учетом *N*-модели?
5.15. Каким образом можно выполнить переход от значений $n_i$ в *N*-модели к значениям коэффициентов $a_i$ в аддитивной свертке значений всех критериев $K_i\,(i=\overline{1,m})$ для решения $x_l$?
5.16. Как определяется коэффициент важности критерия $K_i$ по сравнению с критерием $K_j$ на основе *N*-модели?
5.17. В чем состоит суть метода определения множества несравнимых решений $X_\Theta$ (в чем заключается алгоритм формирования множества $X_\Theta$)?
5.18. Как в теории относительной важности критериев задается преобладание важности критерия $K_i$ по сравнению с критерием $K_j$?
5.19. В чем заключается понятие уступки и приращения и как они характеризуют относительную важность критериев?
5.20. Каким образом вычисляется коэффициент относительной важности критерия $K_i$ (по сравнению с критерием $K_j$) и как значение этого коэффициента характеризует относительную важность критериев $K_i$ и $K_j$?
5.21. Каким образом формулируются аксиомы принятия решений при многих критериях
5.22. В чем заключается способ модификации исходных векторных оценок $K(x_l)$ для получения оценок $K'(x_l)$?
5.23. Каким образом выполняется сужение множества несравнимых решений с использованием информации об относительной важности критериев (какова последовательность шагов алгоритма сужения множества несравнимых решений с использованием информации об относительной важности критериев)?

## Библиографический список

1. Петровский А.Б. Теория принятия решений./ А.Б. Петровский – М.: Издательский центр "Академия", 2009.– 400 с.

2. Будаева А.А. Принятие решений: теория, технология, приложения. Учебное пособие. / А.А. Будаева, В.О.Гроппен. – Владикавказ: Изд–во "Фламинго", 2010.– 184 с.

3. Фишберн П.К. Теория полезности для принятия решений./ П.К. Фишберн — М.: Наука, 1978– 353 с.

4. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях. Предпочтения и замещения. — М.: Радио и связь, 1981.– 250 с.

5. Гладких Б.А. Методы оптимизации и исследования операций для бакалавров информатики. Ч. III.Теория решений. Учебное пособие. – Томск: Изд–во НТЛ, 2012.– 280 с.

6. Турунтаев Л.П. Теория принятия решений. Учебное пособие./ Л.П. Турунтаев. – Томск: Изд–во Томского ун–та систем управления и радиоэлектроники, 2003.– 222 с.

7. Лотов А.В. Многокритериальные задачи принятия решений./ А.В.Лотов, И.И.Поспелова.– М.:Изд–во МГУ, 2008. – 198 с.

8. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. / В.В.Подиновский– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007 – 64 с.

9. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде. Количественный подход./ В.Д. Ногин– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002 – 144 с.

10. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. — М.: Радио и связь, 1993.