Вариационное исчисление: задачи, алгоритмы, примеры.

А.В. Ожегова, Р.Г. Насибуллин Казань, 2013

### УДК 519.6, 517.97 ББК

*Печатается по решению методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского*

### Научный редактор

к.ф.-м.н., доцент **Сурай Л.А.**

### Рецензенты

к.т.-н., доцент КГАСУ **Горская Т.Ю.** и к.ф.-м.н., доцент **Тазюков Б.Ф.**

### Ожегова А.В., Насибуллин Р.Г.

**Вариационное исчисление: задачи, алгоритмы, примеры:** методическое пособие / А.В. Ожегова, Р.Г. Насибуллин – Казань: Казан. ун-т, 2013. – 40 с.

Данные методические указания предназначены для студентов 3, 4 курсов по специальностям/направлениям ”математика”*,* ”математика и компьютерные науки”*,* ”механика”*,* ”механика и математическое моделирование” при изучении дисциплин ”Вариационное исчисление и методы оптимизации”, ”Теория оптимизации”, ”Экстремальные задачи”.

УДК 519.6, 517.97

ББК

### *Q*c Казанский университет, 2013

### *Q*c Ожегова А.В., Насибуллин Р.Г., 2013

**Оглавление**

[Введение](#_bookmark0) 4

1. [Простейшая задача вариационного исчисления](#_bookmark1) 5
   1. [Постановка задачи](#_bookmark2) 5
   2. [Алгоритм решения](#_bookmark5) 7
   3. [Пример](#_bookmark6) 10
2. [Задача Больца](#_bookmark7) 15
   1. [Постановка задачи](#_bookmark8) 15
   2. [Алгоритм решения](#_bookmark10) 16
   3. [Пример](#_bookmark11) 17
3. [Изопериметрическая задача](#_bookmark12) 20
   1. [Постановка задачи](#_bookmark13) 20
   2. [Алгоритм решения](#_bookmark17) 22
   3. [Пример](#_bookmark19) 24
4. [Задача со старшими производными](#_bookmark21) 26
   1. [Постановка задачи](#_bookmark22) 26
   2. [Алгоритм решения](#_bookmark25) 29
   3. [Пример](#_bookmark26) 30
5. [Задача с подвижными концами](#_bookmark27) 32
   1. [Постановка задачи](#_bookmark28) 32
   2. [Алгоритм решения](#_bookmark30) 32
   3. [Пример](#_bookmark31) 33
6. [Задача Лагранжа](#_bookmark32) 35
   1. [Постановка задачи](#_bookmark33) 35
   2. [Алгоритм решения](#_bookmark36) 36
   3. [Пример](#_bookmark37) 37

[Литература](#_bookmark38) 39

# Введение

Данное методическое пособие посвящено задачам классического вариационного исчисления и является дополнением к курсу лекций "Вариационные исчисление и методы оптимизации"*,* "Теория оптимизации" и "Экстремальные задачи"*,* читаемым в Институте математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского университета.

Изложение материла ведется по методологии, основанной на общем принципе исследования экстремальных задач - принципе Лагранжа. За базу взяты учебники [[1]](#_bookmark39) – [[3],](#_bookmark40) написанные преподавателями, читавшими курс оптимизации на механико-математическом факультете МГУ.

В каждом пункте настоящего пособия излагается постановка определенной задачи, приводятся основные определения, указывается алгоритм решения на основе имеющихся необходимых и достаточных условий экстремума с дальнейшей демонстрацией на конкретном примере.

# Простейшая задача вариационного исчисления

## Постановка задачи

#### *Простейшей задачей классического вариационного исчисления*

(ПЗВИ) называется следующая экстремальная задача:

*t*1

*J* (*x*(*·*)) =

*f* (*t, x*(*t*)*, x*˙ (*t*))*dt →* extr*,* (1.1)

*t*0

*x*(*t*0) = *x*0*, x*(*t*1) = *x*1*,* (1.2)

где *f* = *f* (*t, x*(*t*)*, x*˙ (*t*)) - данная функция трех переменных, называемая ***интегрантом***. Отрезок [*t*0*, t*1] предполагается фиксированным и конечным, *t*0 *< t*1. Экстремум функционала [(1.1)](#_bookmark3) ищется среди непрерывно дифференцируемых функций *x ∈ C*1([*t*0*, t*1]), удовлетворяющих ***краевым условиям*** [(1.2).](#_bookmark4) Такие функции называют ***допустимыми*** и говорят, что задача [(1.1)](#_bookmark3) - [(1.2)](#_bookmark4) дана в слабой постановке.

Введем норму в пространстве *C*1([*t*0*, t*1])

*x* 1 =  *x C*1([*t*0*,t*1]) := max *{ x C, x*˙  *C} ,*

где

*x C* := max

*" t*

0*≤t≤t*1

*|x*(*t*)*|.*

**Определение 1.** *Допустимая функция x доставляет* ***слабый локальный***

Г

***минимум*** *в задаче* (1[*.*](#_bookmark3)1) *−* (1[*.*](#_bookmark4)2) (*x ∈ wlocmin*)*, если существует δ >* 0

Г

*такое, что*

*J* (*x*(*·*)) *≥ J* (*x*(*·*))

Г

*для любой допустимой функции x, для которой*

*x − x* 1 *< δ.*

Г

*x доставляет* ***слабый***

**Определение 2.** *Допустимая функция* Г

***абсолютный*** *(****слабый глобальный****)* ***минимум*** *в задаче* (1[*.*](#_bookmark3)1) *−* (1[*.*](#_bookmark4)2) (*x wabsmin*)*, если*

*∈*

Г

*J* (*x*(*·*)) *≥ J* (Г

*x*(*·*))

*для любой допустимой функции x.*

В качестве множества допустимых функций можно выбрать пространство кусочно-непрерывно дифференцируемых функций на [*t*0*, t*1] (*x ∈ KC*1[*t*0*, t*1])

с нормой

*x* 0 = *x C,*

удовлетворяющих краевым условиям [(1.2](#_bookmark4)). В этом случае говорят о сильной постановке задачи.

**Определение 3.** *Говорим, что допустимая функция x доставляет*

Г

***сильный локальный минимум*** *в задаче* (1[*.*](#_bookmark3)1) *−* (1[*.*](#_bookmark4)2) (*x ∈ strlocmin*)*, если существует δ >* 0 *такое, что*

Г

*J* (*x*(*·*)) *≥ J* (*x*(*·*))

Г

*для любой допустимой функции x, для которой*

*x − x* 0 *< δ.*

Г

*x доставляет*

**Определение 4.** *Говорим, что допустимая функция* Г

***сильный абсолютный*** *(****сильный глобальный****)* ***минимум*** *в задаче*

(1[*.*](#_bookmark3)1) *−* (1[*.*](#_bookmark4)2)*, если*

*J* (*x*(*·*)) *≥ J* (*x*(*·*))

Г

*для любой допустимой функции x.*

Часто в вариационном исчислении функции *x*(*t*), доставляющие минимум (максимум) функционалу, называют точками минимума (максимума) или точками экстремума.

Уравнение

*d*

*−dtf*Г*x*˙ (*t*) + *f*Г*x*(*t*) = 0*, ∀t ∈* [*t*0*, t*1]*.*

называют ***уравнением Эйлера*** . Здесь

*d* 1 *d* 1

*f*Г*x*˙ (*t*) :=

*f* (*t, x, x*˙ )1

*dx*˙

*x*(*t*)*,*

*f*Г*x*(*t*) :=

*f* (*t, x, x*˙ )1

*dx*

*x*(*t*)*.*

1*x*=Г

*x*˙ =*x*˙

Г

1*x*=Г

*x*˙ =*x*˙

Г

Функции, являющиеся решениями уравнения Эйлера, называются ***экстремалями*** . Экстремали, удовлетворяющие краевым условиям [(1.2),](#_bookmark4) называются ***допустимыми экстремалями*** в ПЗВИ [(1.1)–(1.2](#_bookmark4)).

Скажем, что на *x* выполнено ***условие Лежандра*** , если

Г

*f*Г*x*˙ *x*˙

*≥* 0*, ∀ t ∈* [*t*0*, t*1]*,*

и ***усиленное условие Лежандра*** , если

Уравнение

*d* (

*f*Г*x*˙ *x*˙

*>* 0*, ∀ t ∈* [*t*0*, t*1]*.*

*−dt*

*f*Г*x*˙ *x*˙ (*t*)*h*˙ (*t*) + *f*Г*x*˙ *x*(*t*)*h*(*t*)

+ *f*Г*xx*˙ (*t*)*h*˙ (*t*) + *f*Г*xx*(*t*)*h*(*t*) = 0

*x*.

называют ***уравнением Якоби*** для исходной задачи на экстремали Г

Точка *τ* называется ***сопряженной с точкой*** *t*0, если для решения уравнения Якоби *h*(*t*) с начальными условиями

*h*(*t*0) = 0*,*

*h*˙ (*t*0) = 1*,*

имеет место равенство

*h*(*τ* ) = 0*.*

Говорят, что на *x* выполнено ***условие Якоби***, если в интервале (*t*0*, t*1)

Г

нет точек, сопряженных с *t*0, и ***усиленное условие Якоби***, если в полуинтервале (*t*0*, t*1] нет точек, сопряженных с *t*0.

Функция

*E* (*t, x, x*˙ *, u*) = *f* (*t, x, u*) *− f* (*t, x, x*˙ ) *− fx*˙ (*t, x, x*˙ )(*u − x*˙ )

называется ***функцией Вейерштрасса*** интегранта *f* .

Говорят, что на *x* выполнено ***условие Вейерштрасса*** , если

Г

*E* (*t,* Г Г *x, x, x*˙ ) *− f*Г*x*˙ (*t*)(*u − x*˙ ) *≥* 0*, ∀u ∈* R*, ∀t ∈* [*t*0*, t*1]*.*

Г

## Алгоритм решения

Для определенности будем исследовать ПЗВИ на минимум.

1. Найти допустимые экстремали. С этой целью выписать *необходимое условие экстремума первого порядка для ПЗВИ - уравнение Эйлера*:

*d*

*−dtf*Г*x*˙ (*t*) + *f*Г*x*(*t*) = 0*.*

Найти решения уравнения Эйлера Г

*x*, удовлетворяющие заданным

условиям на концах ("допустимые экстремали")

1. Для каждой допустимой экстремали проверить *необходимые и достаточные условия локального минимума второго порядка*.
   1. Проверить выполнение *условия Лежандра*:

а) Если условие Лежандра не выполнено, т.е функция

*f*Г*x*˙ *x*˙

знакопеременна на отрезке [*t*0*, t*1], то не выполнено

необходимое условие слабого (а, следовательно, и сильного) экстремума.

б) Если выполнено условие Лежандра:

*f*Г*x*˙ *x*˙ (*t*) *≥* 0*, ∀t ∈* [*t*0*, t*1]*,*

то *x* можно подозревать на точку слабого (сильного)

Г

локального минимума.

в) Если выполнено усиленное условие Лежандра, то переходим к проверке *условия Якоби*.

* 1. Записать уравнение Якоби на экстремали *x*:

Г

*d*

*−dt*

(*f*Г*x*˙ *x*˙ (*t*)*h*˙ (*t*) + *f*Г*x*˙ *x*(*t*)*h*(*t*

+ *f*Г*xx*˙ (*t*)*h*˙ (*t*) + *f*Г*xx*(*t*)*h*(*t*) = 0

и решить его с начальными данными

)

*h*(*t*0) = 0*,*

*h*˙ (*t*0) = 1*.*

* 1. Найти сопряженные с *t*0 точки *τ* , т.е. нули найденного решения *h*(*t*) уравнения Якоби при *t > t*0 и проверить выполнение условия Якоби.

Если при выполнение усиленного условия Лежандра условие Якоби не выполнено, то не выполняется необходимое условие,

*x* - не доставляет локального минимума.

следовательно,

Г

Если при выполнении усиленного условия Лежандра выполнено усиленное условие Якоби, то выполнено достаточное условие слабого минимума, и Г

*x ∈ wlocmin*.

* 1. Проверка *на сильный минимум*.

а) Если интегрант *f является выпуклым* по *x*˙ при всех

фиксированных *t* и *x*, рассматриваемых в качестве параметра, то *x* доставляет сильный минимум в задаче.

Г

б) Если интегрант *f* является ни выпуклым ни вогнутым, то следует проверить *выполнение необходимого условия сильного экстремума - условие Вейерштрасса*:

*x, x*˙ *, u*) *≥* 0*, ∀u ∈* R*, ∀t ∈* [*t*0*, t*1]*.*

*E* (*t,* Г Г

Если не выполнено условие Вейерштрасса, то в этом случае найденная допустимая экстремаль не доставляет сильного минимума.

**Замечание 2.** При исследовании ПЗВИ на максимум необходимо следовать этому же алгоритму, учитывая, что условие Лежандра выполнено, если

*f*Г*x*˙ *x*˙ (*t*) *≤* 0*, ∀t ∈* [*t*0*, t*1]*,*

и усиленное условие Лежандра, если

*f*Г*x*˙ *x*˙ (*t*) *<* 0*, ∀t ∈* [*t*0*, t*1]*.*

Условие Вейерштрасса означает, что

*x, x*˙ *, u*) *≤* 0*, ∀u ∈* R*, ∀t ∈* [*t*0*, t*1]*,*

*E* (*t,* Г Г

а для сильного максимума функция *f* должна быть вогнутой по *x*˙ .

**Замечание 3.** Задачу

*J* (*x*(*·*)) =

*t*1

*t*0

*f* (*t, x*(*t*)*, x*˙ (*t*))*dt →* sup*,*

*x*(*t*0) = *x*0*, x*(*t*1) = *x*1*,*

можно заменить эквивалентной ей задачей

*t*1

*−J* (*x*(*·*)) = *−*

*f* (*t, x*(*t*)*, x*˙ (*t*))*dt →* inf*,*

*t*0

*x*(*t*0) = *x*0*, x*(*t*1) = *x*1*.*

**Замечание 4.** В ПЗВИ [(1.1)–(1.2)](#_bookmark4) в качестве *x*(*t*) может выступать вектор функция *x*(*t*) = (*x*1(*t*)*, . . . , xn*(*t*)). Тогда необходимым условием локального экстремума является система уравнений Эйлера

*d*

*−dtf*Г*x*˙ *i* (*t*) + *f*Г*xi* (*t*) = 0*, ∀t ∈* [*t*0*, t*1]*, i* = 1*, n.*

Условие Лежандра

матрицы

*f*Г*x*˙ *x*˙

*≥* 0 означает неотрицательную определенность

*fx*˙

1*x*˙

1 *. . . fx*˙



1*x*˙ *n*



*fx*˙ *x*˙ 

=



*. . . . . . . . .* 



*x*˙ *nx*˙ 1

*f*



*. . . fx*˙ *nx*˙ *n*

на элементе *x*, а условие *f*Г*x*˙ *x*˙

Г

*>* 0 - ее положительную определенность.

Матричное уравнение Якоби

*d*

*−dt*

(*f*Г*x*˙ *x*˙ (*t*)*h*˙ (*t*) + *f*Г*x*˙ *x*(*t*)*h*(*t*

+ *f*Г*xx*˙ (*t*)*h*˙ (*t*) + *f*Г*xx*(*t*)*h*(*t*) = 0

эквивалентно системе уравнений.

)

## Пример

А) Найти решение следующей экстремальной задачи

*J* (*x*(*·*)) =

1

*x*˙ 3*dt →* inf*,*

0

*x*(0) = 0*, x*(1) = 1*.*

### Решение

1. Запишем необходимое условие слабого, а значит, и сильного экстремума

- уравнение Эйлера

*d*

*−dtfx*˙ + *fx* = 0 *⇐⇒*

*d* 2

3*x*˙

*dt*

= 0 *⇐⇒ x*˙

= const*.*

Общее решение уравнение Эйлера

*x* = *x*(*t*) = *C*1*t* + *C*2*.*

Из условий на концах находим, что

*C*1 = 1*, C*2 = 0*.*

Таким образом, имеется единственная допустимая экстремаль

Г *x*(*t*) = *t.*

1. Проверим на *x* = *t* необходимые и достаточные условия экстремума.

Г

* 1. Усиленное условие Лежандра выполнено:

*f*Г*x*˙ *x*˙ (*t*) = 6*x*˙ (*t*) = 6 *>* 0*, ∀ t ∈* [0*,* 1]*,*

Г

Следовательно, переходим к проверке условия Якоби.

* 1. Выпишем уравнение Якоби

*d*

*−dt*6*h*˙

= 0 *⇔ h*¨ = 0*.*

Общее решение уравнения Якоби

*h*(*t*) = *C*1*t* + *C*2*.*

Начальным условиям

*h*(0) = 0*, h*˙ (0) = 1*,*

удовлетворяет функция

*h*(*t*) = *t.*

* 1. Функция *h*(*t*) = *t* не имеет нулей в полуинтервале (0*,* 1]. Значит, сопряженных точек нет, и стало быть, выполнено усиленное условие Якоби. Таким образом, выполнено достаточное условие

слабого локального минимума, т.е. *x wlocmin.*

*∈*

Г

* 1. Проверка на сильный экстремум.

а) Поскольку функция *f* =

*x*˙ 3 не выпукла по

*x*˙ , то достаточное

условие сильного минимума не выполняется.

б) Проверим необходимое условие сильного минимума - условие Вейерштрасса:

*ε*(*t,* Г Г *x,*

3 2

Г

Г

*x, x*˙ ) *− L*Г*x*˙ (*t*)(*u − x*˙ ) =

= *u*3 *x*˙

*−*

Г

3*x*˙

Г

*−*

(*u − x*˙ ) = *u*3 *−* 1 *−* 3(*u −* 1) = *u*3 *−* 3*u* + 2*.*

Очевидно, что *∀u ∈* R*, ∀t ∈* [0*,* 1] функция

*x, x*˙ *, u*) = *u*3 *−* 3*u* + 2

*ε*(*t,* Г Г

знакопеременна, следовательно, условие Вейерштрасса не выполняется. Так как не выполняется необходимое условие,

то функция *x* не доставляет сильного локального минимума.

Г

### Ответ: Г

*x*) = 1*.*

1. Решить следующую экстремальную задачу

*J* (*x*1(*·*)*, x*2(*·*)) =

2

(*x*˙ 2 + *x*˙ 2 + *x*2)*dt →* inf*,*

1 2 2

1

*x*1(1) = 1*, x*1(2) = 2*, x*2(1) = 0*, x*2(2) = 1*.*

### Решение

* 1. Найдем допустимые экстремали. Система уравнений Эйлера имеет вид

 *d*

Решив ее, получим

*−dt* 2*x*˙ 1 = 0*,*

*−* *d* 2*x*˙ 2 + 2*x*2 = 0*.*

*dt*

*x*1(*t*) = *C*1*t* + *C*2*, x*2(*t*) = *C*3*et* + *C*4*e−t.*

Из граничных условий находим, что

1 *e*2

4 *−*

Откуда

*C*1 = 1*, C*2 = 0*, C*3 =



*, C* = *.*

*e*2 *−* 1 *e*2 *−* 1

*x*1(*t*) = *t,*

Г

*t −t*+2

*x*2(*t*) = *e −e .*

Г *e*2*−*1

* 1. Проверим на полученных экстремалях необходимые и достаточные условия экстремума второго порядка.
     1. Так как матрица

*f*Г*x*˙ *x*˙ (*t*) =

2 0

0 2

положительно определена при любом *t ∈* [0*,* 1], то выполнено

усиленное условие Лежандра.

* + 1. Для проверки условия Якоби запишем систему уравнений Якоби. Учитывая, что

имеем

*f*Г*x*˙ *x*˙ (*t*) =

*f*Г*xx*˙ (*t*) =

2 0

*,*

0 2

0 0

*,*

0 0

*f*Г*x*˙ *x*(*t*) =

*f*Г*xx*(*t*) =

0 0

*,*

0 0

0 0

*,*

0 2

*d*  2 0 *h*˙ 1

0 0 *h*1

+

= 0*,*

*−dt* 0 2

*h*˙ 2

0 2 *h*2

то есть 

*−dt* 2*h*˙ 1 = 0*,*

*d*

*−dt* 2*h*˙ 2 + 2*h*2 = 0*.*

*d*

Общее решение этой системы

*h*1(*t*) = *A*1*t* + *A*2*, h*2(*t*) = *A*3*et* + *A*4*e−t.*

Константы *A*1*, A*2*, A*3*, A*4 найдем из условий

*h*1(0) = 0*,*

*h*˙ (0) = 1*, h*2(1) = 0*,*

*h*˙ 2(1) = 1*,*

которые приводят к системе



*A*1 + *A*2 = 0*,*







*A*1 = 1*,*

*A*3*e* + *A*4*e−*1 = 0*,*



*A*3 *− A*4*e−*1 = 1*.*



Откуда

*A*1 = 1*, A*2 = *−*1*, A*3 =

1 *e*

*, A*4 = *.*

2*e* 2

Следовательно, решение системы уравнений Якоби имеет вид

*et−*1 + *e*1*−t*

*h*1(*t*) = *t, h*2(*t*) = 2 *.*

* + 1. Очевидно, что на (1*,* 2] нет точек, сопряженных с точкой 1. Следовательно, выполнено усиленное условие Якоби. Так как усиленные условия Лежандра и Якоби являются достаточным условием слабого локального минимума, то *x wlocmin*.

*∈*

Г

является и сильным локальным минимумом.

*x*1*, x*2)

Г

* 1. Так как интегрант *f* (*t*) = *x*˙ 2 +*x*˙ 2 +*x*2 является к тому же квадратичным,

1 2 2

то Г

*x*1*, x*2) доставляет абсолютный минимум.

Г

### Ответ: Г

*x*) =

2*e*2

*e*2*−*1

*.*

С) Найти решение следующей экстремальной задачи

*J* (*x*1(*·*)*, x*2(*·*)) =

*π*

(2*x*1*x*2 *−* 2*x*2 + *x*˙ 2 *− x*˙ 2)*dt →* inf*,*

1 1 2

0

*x*1(0) = 0*, x*1(*π*) = 1*, x*2(0) = 0*, x*2(*π*) = 1*.*

### Решение

1. Запишем необходимое условие 1-го порядка - систему уравнений Эйлера

Преобразуя, получим





*x*¨1 + 2*x*1 *− x*2 = 0*,*

*x*¨2 + *x*1 = 0*.*

*x*2 = *x*¨1 + 2*x*1*,*

*⇐⇒*

(4)

*x*1 + 2*x*¨1 + *x*1 = 0;



*x*2 = *x*¨1 + 2*x*1*,*

*⇐⇒*

*x*1 = *C*1 cos *t* + *C*2 sin *t* + *t*(*C*3 cos *t* + *C*4 sin *t*)*.*

В силу граничных условий *x*1(0) = 0*, x*1(*π*) = 1*,* имеем

1

*C*1 = 0*, C*3 = *−π ,*

т.е.

*x*1 = *C*2 sin *t* + *t*

и

1

( 1 \

*−π* cos *t* + *C*4 sin *t*

1

*x*2 = (*C*2 sin *t*+*t*(*−π* cos *t*+*C*4 sin *t*))*11* +2(*C*2 sin *t*+*t*(*−π* cos *t*+*C*4 sin *t*)) =

1

= *C*2 sin *t* + *C*4(2 cos *t* + *t* sin *t*) + *π* (2 sin *t − t* cos *t*)*.*

Неизвестные *C*2 и *C*4 найдем условий на концах *x*2(0) = 0*, x*2(*π*) = 1*.*

Легко получить, что *C*4 = 0, а *C*2 - произвольная константа.

Тогда

1

*x*2(*t*) = *C*2 sin *t* + *π* (2 sin *t − t* cos *t*)*.*

В итоге имеем семейство допустимых экстремалей



*x*1 = *C*2 sin *t − t* cos *t,*

Г *π*

*x*2(*t*) = *C*2 sin *t* + 1 (2 sin *t − t* cos *t*)*,*

Г *π*

где *C*2 - любая константа.

1. Далее перейдем к проверке условия Лежандра. Матрица

2 0

*f*Г*x*˙ *x*˙ =

0 *−*2

- знаконеопределена, т.е. не выполнено необходимое условие экстремума 2-го порядка =*⇒* экстремума нет.

**Ответ:** экстремума нет.

# Задача Больца

## Постановка задачи

***Задачей Больца (ЗБ)*** называется следующая экстремальная задача:

*t*1

*B*(*x*(*·*)) =

*f* (*t, x*(*t*)*, x*˙ (*t*))*dt* + *ψ*(*x*(*t*0)*, x*(*t*1)) *→* extr*,* (2.1)

*t*0

где *f* = *f* (*t, x*(*t*)*, x*˙ (*t*)) - данная функция трех переменных, а *ψ* = *ψ*(*x*0*, x*1)

- данная функция двух переменных. Функцию *f* называют ***интегрантом***, функцию *ψ* - ***терминантом***, функционал *B* - ***функционалом Больца*** . Отрезок [*t*0*, t*1] предполагается фиксированным и конечным, *t*0 *< t*1. Задачу Больца рассматриваем в слабой постановке, т.е. экстремум функционала [(2.1)](#_bookmark9) ищем среди непрерывно дифференцируемых функций, которые в данной задаче будут ***допустимыми*** .

**Определение 5.** *Функция x ∈ C*1[*t*0*, t*1] *доставляет* ***слабый локальный минимум*** *в задаче* (2[*.*](#_bookmark9)1) (*x wlocmin* (2[*.*](#_bookmark9)1))*, если существует δ >* 0 *такое,*

Г

*∈*

Г

*что*

*B*(*x*(*·*)) *≥ B*(*x*(*·*))

Г

*для любой функции x ∈ C*1[*t*0*, t*1]*, для которой*

*x*(*·*) *− x*(*·*) 1 *< δ.*

Г

**Определение 6.** *Функция x ∈ C*1[*t*0*, t*1] *доставляет* ***слабый абсолютный минимум*** *в задаче* [*(2.1)*](#_bookmark9)(*x wlocmin* (2[*.*](#_bookmark9)1))*, если существует δ >* 0 *такое,*

Г

*∈*

Г

*что*

*B*(*x*(*·*)) *≥ B*(*x*(*·*))

Г

*для любой функции x ∈ C*1[*t*0*, t*1]*.*

## Алгоритм решения

1. Выписать *необходимые условия экстремума первого порядка*:

а) *уравнение Эйлера*

*d*

*−dtf*Г*x*˙ + *f*Г*x* = 0;

б) *условия трансверсальности*

*f*Г*x*˙ (*t*0) = *ψ*Г*x*(*t*0)*,*

*f*Г*x*˙ (*t*1) = *−ψ*Г*x*(*t*1)*.*

Найти допустимые экстремали, т.е. решения уравнения Эйлера, удовлетворяющие условиям трансверсальности.

1. Показать используя определение, что решением является одна из допустимых экстремалей или, что решения нет.

**Замечание.** В векторном случае *x*(*t*) = (*x*1(*t*)*, . . . , xn*(*t*)), *необходимыми условиями* являются:

а) *система уравнений Эйлера*

*d*

*−dtfx*˙ *i* + *fxi* = 0*, i* = 1*, n*;

б) *условия трансверсальности*

*f*Г*x*˙ *i* (*t*0) = *ψ*Г*xi*(*t*0)*, i* = 1*, n,*

*f*Г*x*˙ (*t*1) = *−ψ*Г*xi*(*t*1)*, i* = 1*, n.*

## Пример

1. Найти решения следующей экстремальной задачи

*B*(*x*(*·*)) =

1

(*x*˙ 2 *− x*)*dt* + *x*2(1) *→* inf *.*

0

Отметим, что в нашем случае

*f* (*t, x, x*˙ ) = *x*˙ 2 *− x, ψ*(*x*(0)*, x*(1)) = *x*2(1)*.*

### Решение

* 1. Запишем необходимые условия:

а) уравнение Эйлера

*d* 2

*−dtfx*˙ + *fx* = 0 *⇐⇒* 2*x*¨

б) условия трансверсальности

+ 1 = 0;

*fx*˙ (0) = *ψx*(0) *⇐⇒ x*˙ (0) = 0*,*

*fx*˙ (1) = *−ψx*(1) *⇐⇒* 2*x*˙ (1) = *−*2*x*(1) *⇐⇒ x*˙ (1) + *x*(1) = 0*.*

Общее решение уравнение Эйлера

*x*(*t*) = *−t*2*/*4 + *C*1*t* + *C*2*.*

Из условий трансверсальности находим, что *C*1 = 0*, C*2 = 3*/*4. Таким образом имеется единственная допустимая экстремаль *x* = (3 *t*2)*/*4.

*−*

Г

* 1. Покажем, что она доставляет абсолютный минимум в задаче.

Действительно, если *h*(*t*) *∈ C*1[*t*0*, t*1], то допустимая точка в ЗБ и

*x*(*t*) + *h*(*t*) - произвольная

Г

*B*(Г

*x*(*t*)) =

1 1

2*x*˙ *h*˙ *dt* +

*h*˙ 2

1

*dt −*

*hdt* + 2Г

*h*(1) + *h*2

(1)*.*

Г

0 0 0

*x*(1)

Интегрируя по частям и учитывая, что *x* = (3 *t*2)*/*4 получим

*−*

Г

*B*(Г

*x*(*t*)) = 2*x*˙ 11

1

(2*x*¨ + 1)*hdt*+

*−*

Г 10 Г

*h*1

0

1

+ *h*˙ 2*dt* + 2*x*(1)*h*(1) + *h*2(1) =

Г

0

1

*h*2*dt* + *h*2(1) *≥* 0*.*

0

В итоге имеем, что

*B*(Г

*x*(*t*)) *≥* 0

*x*(*t*) доставляет абсолютный

при любом выборе функции *h*, т.е. Г

минимум.

**Ответ:** *x* = (3 *− t*2)*/*4 *∈ absmin*.

Г

1. Найти решения следующей экстремальной задачи

*B*(*x*(*·*)) =

*π*

(*x*˙ 2 + *x*2 *−* 4*x* sin *t*)*dt* + 2*x*2(0) + 2*x*(*π*) *− x*2(*π*) *→* inf *.*

0

В нашем случае а

*f* (*t, x, x*˙ ) = *x*˙ 2 + *x*2 *−* 4*x* sin *t,*

*ψ*(*x*(0)*, x*(1)) = 2*x*2(0) + 2*x*(*π*) *− x*2(*π*)*.*

### Решение

1. Необходимые условия:

а) уравнение Эйлера

*d* 2

*−dt*2*x*˙ + 2*x −* 4 sin *t* = 0 *⇐⇒* 2*x*¨

*− x* = *−*2 sin *t*;

б) условия трансверсальности



2*x*˙ (0) = 4*x*(0)*,*

2*x*˙ (*π*) = *−*2 + 2*x*(*π*)*,*



*x*˙ (0) = 2*x*(0)*,*

*⇐⇒*

*x*˙ (*π*) = *x*(*π*) *−* 1*.*

Получим допустимую экстремаль

*x*(*t*) = *et* + sin *t.*

Г

1. Пусть *h*(*t*) *∈ C*1[*t*0*, t*1]. Тогда

*x*(*t*) + *h*(*t*)) *B*(*x*(*t*)) =

*−*

Г

*π π*

2

= (*x*˙

+ *h*˙ )2 + (*x* + *h*)2 *−* 4(*x* + *h*) sin *tdt* +

*x*˙ + *x*2 *−* 4*x* sin *tdt*+

Г Г Г

0

Г Г Г

0

*x*(0)+*h*(0))2 +2(*x*(*π*)+*h*(*π*))*−*(*x*(*π*)+*h*(*π*))2 *−*2*x*(0)2 *−*2*x*(*π*)+*x*(*π*)2 =

+2(Г Г

*π π*

Г Г Г Г

*π π π*

= 2*x*˙ *h*˙ *dt* + Г

0 0

*h*˙ 2*dt* + 2

0

*xhdt* +

Г

0

*h*2*dt −* 4

0

*h* sin *tdt*+

*x*(0)*h*(0) + 2*h*2(0) + 2*h*(*π*) *−* 2*x*(*π*)*h*(*π*) + *h*2(*π*) =

+4Г Г

*π π π π*

1*π*

= 2*x*˙ *h*1 *−* 2

*x*¨*hdt* +

*h*˙ 2 + 2

*xhdt* +

*h*2*dt−*

Г 10 Г Г

0 0 0 0

*π*

*x*(0)*h*(0) + 2*h*2(0) + 2*h*(*π*) *−* 2*x*(*π*)*h*(*π*) + *h*2(*π*)*.*

*−*4 *h* sin *tdt* + 4Г Г

0

Учитывая, что

*x*˙ = *et* + cos *t,*

Г

*x*¨ = *et* sin *t,*

*−*

Г

имеем

и

*π π*

2 *x*¨*hdt* + 2 Г

*−*

0 0

*π*

*xhdt* 4

*−*

Г

0

*h* sin *tdt* = 0

2*x*˙ (*π*)*h*(*π*) *− x*˙ (0)*h*(0) = *−*4Г

*h*(0) *−* 2*h*(*π*) + 2Г

*π*)*h*(*π*)*.*

Г Г

Следовательно,

*x*(0) *x*(

*B*(Г

*x*(*t*)) =

*π*

*h*˙

0

*π*

2*dt* +

0

*h*2 + 2*h*2

(0) + *h*2

(*π*) *≥* 0

для любых допустимых функций *x* + *h C*1[0*, π*]. Следовательно,

*∈*

Г

*x*(*t*) = *et* + sin *t*

Г

доставляет слабый абсолютный минимум в задаче.

**Ответ:** *x*(*t*) = *et* + sin *t absmin*.

*∈*

Г

# Изопериметрическая задача

## Постановка задачи

***Изопериметрической задачей*** (ИЗ) называется следующая экстремальная задача:

*J*0(*x*(*·*)) =

*t*1

*t*1 *t*0

*f*0(*t, x*(*t*)*, x*˙ (*t*))*dt →* extr*,* (3.1)

*Ji*(*x*(*·*)) =

*fi*(*t, x*(*t*)*, x*˙ (*t*))*dt* = *γi, i* = 1*, m,* (3.2)

*t*0

*x*(*t*0) = *x*0*, x*(*t*1) = *x*1*,* (3.3)

где *fi* = *fi*(*t, x*(*t*)*, x*˙ (*t*)) - данные функции трех переменных. Отрезок [*t*0*, t*1] предполагается фиксированным и конечным, *t*0 *< t*1. Экстремум функционала [(3.1)](#_bookmark14) ищется среди непрерывно дифференцируемых функций *x ∈ C*1([*t*0*, t*1]), удовлетворяющих ***изопериметрическим*** условиям [(3.2)](#_bookmark15) и ***условиям на концах*** [(3.3),](#_bookmark16) такие функции называются ***допустимыми*** в ИЗ.

**Определение 7.** *Допустимая функция x доставляет* ***слабый локальный***

Г

***минимум*** *в задаче* ([*3.1*](#_bookmark14)) *− −*([*3.3*](#_bookmark16)) (*x ∈ wlocmin* (3[*.*](#_bookmark14)1))*, если существует*

Г

*δ >* 0 *такое, что*

*J*0(*x*(*·*)) *≥ J*0(*x*(*·*))

Г

*для любой допустимой функции x, для которой*

*x*(*·*) *− x*(*·*) 1 *< δ.*

Г

*x доставляет* ***слабый***

**Определение 8.** *Допустимая функция* Г

***абсолютный минимум*** *в задаче* [*(3.1)-(3.3)*](#_bookmark16)(*x wlocmin* (3[*.*](#_bookmark14)1))*, если*

*∈*

Г

*существует δ >* 0 *такое, что*

*J*0(*x*(*·*)) *≥ J*0(*x*(*·*))

Г

*для любой допустимой функции x.*

***Лагранжианом*** задачи называется функция

*m*

*L* = *L*(*t*) = *L*(*t, λ*) = \ *λifi*(*t, x, x*˙ )*.*

*i*=0

Скажем, что на *x* выполнено ***условие Лежандра*** , если

Г

*L*Г*x*˙ *x*˙

*≥* 0*, ∀t ∈* [*t*0*, t*1]

и ***усиленное условие Лежандра*** , если

Уравнение

*L*Г*x*˙ *x*˙

*>* 0*, ∀ t ∈* [*t*0*, t*1]*.*

*m*

)

*d*

*−dt*

(*L*Г*x*˙ *x*˙ (*t*)*h*˙ (*t*) + *L*Г*x*˙ *x*(*t*)*h*(*t*

+ *L*Г*xx*˙ (*t*)*h*˙ (*t*) + *L*Г*xx*(*t*)*h*(*t*) +

\

*i*=1

*µigi* = 0*,*

где *gi*(*t*) = *−* *d fix*˙ (*t*) + *fix*(*t*) называют ***уравнением Якоби*** для исходной

*dt* Г Г

*x*.

задачи [(3.1)](#_bookmark14) на экстремали Г

Пусть на экстремали *x* выполнено усиленное условие Лежандра. Точка

Г

*τ* называется ***сопряженной с точкой*** *t*0, если существует нетривиальное решение *h* решение неоднородного уравнения Якоби, для которого

*τ*

*gi*(*t*)*h*(*t*)*dt* = 0*, i* = 1*, . . . , m, h*(*t*0) = *h*(*τ* ) = 0*.*

0

Говорят, что на *x* выполнено ***условие Якоби***, если в интервале (*t*0*, t*1)

Г

нет точек, сопряженных с *t*0, и ***усиленное условие Якоби***, если в полуинтервале (*t*0*, t*1] нет точек, сопряженных с *t*0.

Если функции

*d*

*gi*(*t*) = *−dtf*Г*ix*˙ (*t*) + *f*Г*ix*(*t*)*, i* = 1*, m*

линейно независимы, то говорят, что выполнено условие ***регулярности***.

## Алгоритм решения

1. Выписать *необходимое условие экстремума первого порядка* -

*уравнение Эйлера*

*d*

*− dtL*Г*x*˙ (*t*) + *L*Г*x*(*t*) = 0 (3.4)

для *лагранжиана* задачи

*m*

*L* = *L*(*t*) = *L*(*t, λ*) = \ *λifi*(*t, x, x*˙ )*,*

*i*=0

где *λ* = (*λ*0*, . . . , λm*) - вектор, так называемых, множителей Лагранжа,

*одновременно не обращающихся в ноль*.

Найти решение *x*(*t*) уравнения [(3.4),](#_bookmark18) удовлетворяющие условиям [(3.2)](#_bookmark15) и

Г

[(3.3),](#_bookmark16) т.е. допустимые экстремали в данной задаче. При этом необходимо рассмотреть случаи

*λ*0 = 0 и *λ*0 */*= 0*.*

Во втором случае *λ*0 выбирается произвольно.

1. Для каждой допустимой экстремали проверить *необходимые и достаточные условия экстремума второго порядка*.
   1. Проверить выполнение *условия Лежандра*:

а) если условие Лежандра не выполнено, не выполнено необходимое условие слабого экстремума, т.е. Г

*x* не доставляет

локального экстремума задачи;

б) если выполнено усиленное условие Лежандра, то переходим к проверке условия Якоби.

* 1. Проверка *условия Якоби*.

Дадим аналитическое средство нахождения сопряженных точек для случая, когда функции *gi, i* = 1*, . . . , m,* линейно независимы на отрезках [*τ*0*, τ*1], *t*0 *≤ τ*0 *< τ*1 *≤ t*1. Пусть *h*0 - решение однородного уравнения Якоби (*µi* = 0*, i* = 1*, . . . , m*) с краевыми условиями

*h*0(*t*0) = 0*, h*˙ 0(*t*0) = 1;

*hj* - решение неоднородного уравнения Якоби (*µi* = 0*, i /*= *j*), и краевыми условиями

*hj* (*t*0) = 0*, h*˙ *j* (*t*0) = 0*, j* = 1*, . . . , m.*

Точка *τ* является сопряженной тогда и только тогда, когда матрица

 *h*0(*τ* ) *. . . hm*(*τ* ) 

 *τ τ* 

 Г

*H*(*τ* ) =  *t*0



*h*0*g*1*dt . . .*

Г *hmg*1*dt* 

*t* 

0 

 *. . . . . . . . .* 





 *τ τ* 

Г *h*0*gmdt . . .*

*t*0

Г *hmgmdt*

*t*0

является вырожденной.

Если при выполнение усиленного условия Лежандра условие Якоби не выполнено, то не выполняется необходимое условие экстремума, следовательно, *x* - не доставляет локального

Г

экстремума.

Если при выполнение усиленного условия Лежандра выполнено усиленное условие Якоби, то проверяем условие регулярности.

* 1. Проверка *условия регулярности*.

Если условие регулярности выполнено, то на *x* выполнены

Г

достаточное условие слабого минимума.

1. Если проверка достаточных и необходимых условий второго порядка затруднена, то допустимую экстремаль можно исследовать на экстремум с помощью его определения.
2. Если в задаче ([3](#_bookmark14).1) функционал *J*0 квадратичен

*t*1

*J*0(*x*(*·*)) =

функционалы *Ji* линейны

*t*1

(*A*0*x*˙ 2 + *B*0*x*2) *dt,*

*t*0

*Ji*(*x*(*·*)) =

(*aix*˙ + *bix*)*dt* = *γi, i* = 1*, m,*

*t*0

причем функции *A*0*, a*1*, . . . , am* непрерывно дифференцируемы, функции *B*0*, b*1*, . . . , bm* непрерывны и выполнено условие Лежандра и условие регулярности. Тогда, если не выполнено условие Якоби,

то нижняя грань в задаче равна *−∞*. Если выполнено усиленное

условие Якоби, то допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет абсолютный минимум.

## Пример

Найти решение следующей экстремальной задачи

*J*0(*x*(*·*)) =

1

(*x*˙ 2 + *x*2)*dt →* inf*,*

0

*J*1(*x*(*·*)) =

1

*xe−tdt* =

0

1 *−* 3*e−*2

4

*,* (3[*.*2](#_bookmark15)*1*)

*x*(0) = 0*, x*(1) =

### Решение

1

*.* (3[*.*3](#_bookmark16)*1*)

*e*

1. Для лагранжиана задачи

*L* = *λ*0(*x*˙ 2 + *x*2) + *λ*1*xe−t*

выпишем необходимое условие - уравнение Эйлера

*d t*

*− dtLx*˙ + *Lx* = 0 *⇐⇒ −*2*λ*0*x*¨ + 2*λ*0*x* + *λ*1*e−*

= 0*.* (3.5)

Найдем решение дифференциального уравнение [(3.5),](#_bookmark20) удовлетворяющего условиям (3[*.*2](#_bookmark15)*1*)*,* (3[*.*3](#_bookmark16)*1*).

Пусть *λ*0 = 0. Тогда из [(3.5](#_bookmark20)) мы получим, что *λ*1 = 0, т.е. все множители Лагранжа одновременно обращаются в ноль. Значит необходимое условие экстремума не выполнено.

Пусть *λ*0 = 1*/*2. Имеем

*x*¨ *− x* = *λ*1*e−t.*

Общее решение этого уравнения

*x*(*t*) = *C*1*et* + *C*2*e−t −*

1

2

*λ*1*te−t.*

Константы *C*1*, C*2*, λ*1 найдем из имеющих условий. Получим, что имеется допустимая экстремаль

*x*(*t*) = *te−t.*

Г

1. Проверим необходимые и достаточные условия второго порядка.
   1. Проверим выполнение условия Лежандра

*Lx*˙ *x*˙ (*x*) = 2 *>* 0*.*

Г

Выполнено усиленное условие Лежандра и значит, переходим к проверке условий Якоби.

* 1. Уравнение Якоби

*d*

*−dt*

(*L*Г*x*˙ *x*˙ (*t*)*h*˙ (*t*) + *L*Г*x*˙ *x*(*t*)*h*(*t*

*m*

+*L*Г*xx*˙ (*t*)*h*˙ (*t*)+*L*Г*xx*(*t*)*h*(*t*)+\

*i*=1

*µigi* = 0*,*

где *gi*(*t*) = *−* *d fix*˙ (*t*) + *fix*(*t*) в нашем случае примет вид

)

*dt* Г

Г

*h*¨ + *h* + *µ*1 = 0*.*

Найдем решение *h*0 однородного уравнения Якоби

*h*¨ + *h* = 0

с условиями *h*0(0) = 0*, h*˙0(0) = 1. Имеем

1 *t* 1 *t*

*h*0 = 2 *e −* 2 *e− .*

Найдем решение *h*1 неоднородного уравнения Якоби

*h*¨ + *h* + 1 = 0

с условиями *h*1(0) = 0*, h*˙1(0) = 0. Получим

1 *t* 1 *t* 1 *t*

*h*1(*t*) = 8 *e*

Матрица *H* имеет вид

*−* 8 *e−*

*−* 4 *te− .*

 1 *t*

1 *−t* 1 *t*

1 *−t*

1 *−t* 

2 *e −* 2 *e*



8 *e −* 8 *e*

*−* 4 *te*

*H*(*t*) =  *t*

Г

(1

1 2*τ* )

*t*

Г (1

1 2*τ* 1

2*τ* )  *.*

2 *−* 2 *e−*

0

*dτ* 8 *−* 8 *e−*

0

*−* 4 *τe− dτ*

Сопряженные точки - это решения уравнения

det *H*(*τ* ) = 0*.*

Легко получить, что

*τ* = 0*.*

Следовательно, точек сопряженных к 0 в полуинтервале (0*,* 1] нет, а значит усиленное Якоби выполнено.

* 1. Очевидно, что условие регулярности выполнено, т.к. в нашем случае *m* = 1 и *g*1 = 1.

Таким образом, *x*(*t*) *wlocmin*

*∈*

Г

4. Поскольку функционал *J*0 квадратичен, а *J*1 - линеен, то *x*(*t*)

Г

доставляет абсолютный экстремум.

**Ответ:** *x*(*t*) = *te−t absmin*.

*∈*

Г

# Задача со старшими производными

## Постановка задачи

***Задачей со старшими производными*** (ЗССП) называется следующая экстремальная задача:

*J* (*x*(*·*)) =

*t*1

*t*0

*f* (*t, x*(*t*)*, x*˙ (*t*)*, . . . , x*(*n*)(*t*))*dt →* extr*,* (4.1)

*x*(*k*)(*t*0) = *xk, k* = 0*,* 1*, . . . , n −* 1*, j* = 0*,* 1*.* (4.2)

*j*

где *f* = *f* (*t, x*(*t*)*, x*˙ (*t*)) - данная функция *n* + 1 переменных, называемая ***интегрантом***. Отрезок [*t*0*, t*1] предполагается фиксированным и конечным, *t*0 *< t*1. Экстремум функционала [(4.1)](#_bookmark23) ищется среди непрерывно дифференцируемых функций *x ∈ C*1([*t*0*, t*1]), удовлетворяющих условиям [(4.2)](#_bookmark24) на концах отрезка [*t*0*, t*1]. Такие функции называют ***допустимыми*** .

Введем норму в пространстве *Cn*([*t*0*, t*1]):

*x n* = *x Cn*([*t*0*,t*1]) := max

J

*x C, x*˙  *C, . . . , x*

(*n*)

*C*

*,*

где

*x C* := max

*" t*

0*≤t≤t*1

*{|x*(*t*)*|} .*

*x доставляет* ***слабый локальный***

**Определение 9.** *Допустимая функция* Г

***минимум*** *в задаче* (4[*.*](#_bookmark23)1)*,* (4[*.*](#_bookmark24)2) (*x wlocmin* (4[*.*](#_bookmark23)1))*, если существует δ >* 0

*∈*

Г

*такое, что*

*J* (*x*(*·*)) *≥ J* (*x*(*·*))

Г

*для любой допустимой функции x, для которой*

*x*(*·*) *− x*(*·*) *n < δ.*

Г

*x доставляет* ***слабый***

**Определение 10.** *Допустимая функция* Г

*x ∈ wlocmin* (4[*.*](#_bookmark23)1))*,*

***абсолютный минимум*** *в задаче* [*(4.1),*](#_bookmark23)[*(4.2)*](#_bookmark24)(Г

*если существует δ >* 0 *такое, что*

*J* (*x*(*·*)) *≥ J* (*x*(*·*))

Г

*для любой допустимой функции x.*

Если в качестве множества допустимых функций выбрать множество кусочно-непрерывно дифференцируемых функций на [*t*0*, t*1] (*x ∈ KC*1[*t*0*, t*1]), удовлетворяющих краевым условиям [(4.2),](#_bookmark24) то ЗССП [(4.1)–(4.2)](#_bookmark24) исследуют на сильный экстремум с нормой *x n−*1.

Уравнение

*n* ( *d* \*k*

\( 1)*k*

*−*

*dt*

*f*Г*x*(*k*) (*t*) = 0

*k*=0

называют ***уравнением Эйлера-Пуассона***.

Функции, являющиеся решениями уравнения Эйлера-Пуассона называются ***экстремалями*** . Экстремали, удовлетворяющие краевым условиям [(1.2),](#_bookmark4) называются ***допустимыми экстремалями*** в ЗССП [(4.1)–(4.2).](#_bookmark24)

Скажем, что на *x* выполнено ***условие Лежандра*** , если

Г

*f*Г*x*(*n*)*x*(*n*) *≥* 0*, ∀t ∈* [*t*0*, t*1]

и ***усиленное условие Лежандра*** , если

*f*Г*x*(*n*)*x*(*n*) *>* 0*, ∀ t ∈* [*t*0*, t*1]*.*

Уравнение Эйлера-Пуассона для функционала

*K*(*x*(*·*)) =

*t*1 *n*

\ *Aij x*(*i*)*x*(*j*)*dt, Aij* (*t*) = *f*Г*x*(*i*)*x*(*j*) (*t*)

*t*0 *i,j*=0

называют ***уравнением Якоби*** для задачи [(4.1)](#_bookmark23) на экстремали *x*(*·*).

Для квадратичного функционала, имеющую "диагональную" форму

*K*(*x*(*·*)) =

уравнение Якоби примет вид

*t*1 *n*

\ *Ak*(*x*(*k*))2*dt,*

*t*0 *k*=0

*n* ( *d* \*k* (

\( 1)*k*

*−*

*dt*

*Akx*(*k*)

= 0*.*

*k*=0

*x*(*·*) выполнено усиленное условие Лежандра. Точка *τ* называется ***сопряженной с точкой*** *t*0, если существует нетривиальное решение *h* уравнения Якоби, для которого

Пусть на Г

*h*(*i*)(*t*0) = *h*(*i*)(*τ* ) = 0*, i* = 0*,* 1*, . . . , n −* 1*.*

*x*(*·*) выполнено ***условие Якоби***, если в интервале (*t*0*, t*1) нет точек, сопряженных с *t*0, и ***усиленное условие Якоби***, если в полуинтервале (*t*0*, t*1] нет точек, сопряженных с *t*0.

Говорят, что на Г

Уравнение Якоби - это линейное уравнение 2*n*-го порядка, которое (из- за усиленного условия Лежандра) можно разрешить относительно старшее

производной. Пусть *h*1(*·*)*, . . . , hn*(*·*) - решение уравнения Якоби, для которых

*H*(*t*0) = **O**, а *H*(*n*)(*t*0) - невырожденная матрица, где



*H*(*t*) = 



*h*1(*t*) *. . . hn*(*t*) 

*. . . . . . . . .* 

*,*



*h*(*n−*1)

(*n−*1) 

1 (*t*) *. . . hn* (*t*)

 *h*(*n*)

(*n*) 

*H*(*n*)(*t*) = 



1 (*t*) *. . . hn* (*t*)

*. . . . . . . . .* 

*.*



*h*(2*n−*1)

(2*n−*1) 

1 (*t*) *. . . hn* (*t*)

Точка *τ* является сопряженной к *t*0 тогда и только тогда, когда матрица *H*(*τ* )

является вырожденной.

## Алгоритм решения

1. Записать *необходимое условие экстремума первого порядка - уравнение Эйлера-Пуассона*:

*n* ( *d* \*k*

\( 1)*k*

*−*

*dt*

*fx*(*k*) = 0*.*

*k*=0

Найти допустимые экстремали, т.е. решения уравнения Эйлера- Пуассона, удовлетворяющие краевым условиям на концах.

1. Проверить на допустимых экстремалях *необходимые и достаточные условия высших порядков*.
   1. Проверить выполнение условия *Лежандра*.

Если не выполнено условия Лежандра, то не выполнено необходимое условие экстремума, т.е. найденная допустимая экстремаль не доставляет экстремума.

Если выполнено усиленное условие Лежандра, то перейти к проверке условия Якоби.

б) Проверка *условия Якоби*.

Если не выполнено условия Якоби, то не выполнено необходимое условие экстремума, т.е. найденная допустимая экстремаль не доставляет экстремума.

Если выполнено усиленное условие Якоби и при этом интегрант *f* квазирегулярен, то найденная допустимая экстремаль доставляет сильный минимум в задаче [(4.1)–(4.2).](#_bookmark24)

Если не выполнено условия Якоби и функционал [(4.1)](#_bookmark23) имеет вид

*t*1 *n*

\ *Ak*(*x*(*k*))2*dt,*

*t*0 *k*=0

то нижняя грань равна *−∞*.

Если выполнено условия Якоби и функционал [(4.1)](#_bookmark23) имеет вид

*t*1 *n*

\ *Ak*(*x*(*k*))2*dt,*

*t*0 *k*=0

то допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет абсолютный минимум.

1. Если проверка необходимых и достаточных условий 2-го порядка затруднена, то можно провести исследование при помощи определения экстремума.

## Пример

Решить следующую экстремальную задачу

*J* (*x*(*·*)) =

*T*0

(*x*¨2 *− x*˙ 2) *dt →* min*,*

0

*x*(0) = *x*˙ (0) = *x*(*T*0) = *x*˙ (*T*0) = 0*.*

### Решение

1. Запишем необходимое условие - уравнение Эйлера-Пуассона:

....

*x* + *x*¨ = 0*.*

1. Общее решение уравнение Эйлера-Пуассона:

*x*(*t*) = *C*1 sin *t* + *C*2 cos *t* + *C*3*t* + *C*4*.*

Среди допустимых экстремалей всегда имеется допустимая экстремаль

*x* = 0.

Г

1. Проверяем достаточное условие:
   1. Усиленное условие Лежандра выполнено:

*f*Г*x*¨*x*¨ = 2 *>* 0*, ∀t ∈* [0*, T*0]*.*

б) Проверим выполнимость условия Якоби. Уравнение Якоби имеет вид

*h*(4) + *h*(2) = 0*.*

Положим, что

*h*1(*t*) = 1 *−* cos *t, h*2 = sin *t − t,*

*h*1(*t*) *h*2(*t*)

1 *−* cos *t* sin *t − t*

*H*(*t*) =

Тогда *H*(0) = 0,

*h*˙ 1

(*t*)

*h*˙ 2

=

(*t*)

*.*

sin *t* cos *t −* 1

det *H*¨ (0) = det

*h*¨1(0)

...

*h*¨2(0)

...

= det

1 0

*/*= 0*.*

*h* 1(0)

*h* 2(0)

0 *−*1

Найдем сопряженные точки, решая уравнение det *H*(*τ* ) = 0*.* Имеем

*τ τ τ*

2(cos *τ −* 1) + *τ* sin *τ* = 0 *⇐⇒* sin 2 = 0*,* 2 = tg 2 *.*

Ближайшая к нулю точка: *τ* = 2*π*.

*x*(*t*) = 0 - единственная допустимая экстремаль,

**Ответ:** Если *T*0 *<* 2*π*, то

Г

доставляющая абсолютный минимум, *J*min = *J* (0) = 0. Если *T*0 *>* 2*π*, точная нижняя грань функционала равна *−∞*. Можно показать, что при *T*0 = 2*π*

*x*(*t*) = *C*(1 *−* cos *t*) и все они доставляют

допустимые экстремали имеют вид Г

абсолютный минимум.

# Задача с подвижными концами

## Постановка задачи

***Задачей с подвижными концами*** называется следующая экстремальная задача:

*J* (*ξ*) = *J* (*x*(*·*)*, t*0*, t*1) =

*t*1 *t*0

*fi*(*t, x*(*t*)*, x*˙ (*t*))*dt* + *ψ*0(*t*0*, x*(*t*0)*, t*1*, x*(*t*1)) *→ extr*

(5.1)

*ψi*(*t*0*, x*(*t*0)*, t*1*, x*(*t*1)) = 0*, i* = 1*, m,* (5.2)

где *ξ* = (*x*(*·*)*, t*0*, t*1), *Q* - заданный отрезок, *t*0*, t*1 *∈ Q, t*0 *< t*1.

Элемент *ξ* = (*x*(*·*)*, t*0*, t*1) называется ***допустимым*** , если *x ∈ C*1(*Q*),

*t*0*, t*1 *∈ Q, t*0 *< t*1, и выполняется условие [(5.2)](#_bookmark29) на концах.

*x*(*·*)*,* Г*t*0*,* Г*t*1) *доставляет*

**Определение 11.** *Допустимый элемент ξ*Г

= (Г

***слабый локальный минимум****, если существует δ >* 0 *такой, что для любого допустимого элемента ξ* = (*x*(*·*)*, t*0*, t*1)*, для которого*

*x − x* 1 *< δ, |t*0 *−* Г*t*0*| < δ, |t*1 *−* Г*t*1*| < δ*

Г

*выполняется*

*J* (*ξ*) *≥ J* (*ξ*Г)*.*

## Алгоритм решения

Выписать: ***интегрант задачи***

*L* = *L*(*t*) = *L*(*t, λ*) = *λ*0*f* (*t, x, x*˙ )*,*

***терминант* задачи**

#### *функцию Лагранжа*

*m*

*l* = \ *λiψi*(*t*0*, x*(*t*0)*, t*1*, x*(*t*1))*,*

*i*=0

*t*1

*L* = *L*(*t*)*dt* + *l*(*t*)*.*

*t*0

1. Записать необходимые условия:

а) *условие стационарности по x - уравнение Эйлера для интегранта L*

*d*

*− dtLx*˙ *i* (*t*) + *Lxi* (*t*) = 0*, ∀t ∈ Q*;

б) *условия трансверсальности* для *l*

*Lx*˙ (*t*0) = *lx*(*t*0)*,*

*Lx*˙ (*t*1) = *−lx*(*t*1);

в) *условие стационарности по подвижным концам*

*Lt*0 = *Lt*0 (*t*0) = 0 *⇔ −λ*0*f* (*t*0) + *lt*0 + *lx*(*t*0)*x*˙ (*t*0) = 0*,*

*Lt*1 = *Lt*1 (*t*1) = 0 *⇔ λ*0*f* (*t*1) + *lt*1 + *lx*(*t*1)*x*˙ (*t*1) = 0*.*

Отметим, что это условие выписывается только для подвижных концов отрезка интегрирования.

Найти допустимые экстремали. Рассмотреть два случая *λ*0 = 0 и *λ*0 */*= 0 (за *λ*0 можем брать любую константу, при исследовании задачи на минимум берем *λ*0>0). И учитывать, что множители Лагранжа одновременно не могут обращаться в ноль.

1. Показать, что найденные в пункте 1 допустимые экстремали доставляют экстремум или нет.

## Пример

Найти решение следующей экстремальной задачи

*J* (*x*(*·*)) =

*T*

*x*˙ 2 *− x* + 1*dt → extr,*

0

*x*(0) = 0*.*

### Решение

Имеем: интегрант задачи *L*(*t*) = *λ*0(*x*˙ 2 *− x* + 1), терминант задачи *l*(*t*) =

1

*λ*1*x*(0), функция Лагранжа *L* = Г

0

*λ*0(*x*˙ 2 *− x* + 1)*dt* + *λ*1*x*(0).

1. Запишем необходимые условия:

а) уравнение Эйлера для лагранжиана

*d*

*− dtLx*˙ + *Lx* = 0 *⇐⇒ −*2*λ*0*x*¨ *− λ*0 = 0;

б) трансверсальности по *x* для терминанта

*Lx*˙ (0) = *lx*(0) *⇐⇒* 2*λ*0*x*˙ (0) = *λ*1*, Lx*˙ (*T* ) = *−lx*(*T* ) *⇐⇒* 2*λ*0*x*˙ (*T* ) = 0;

в) условие стационарности по подвижному концу *T*

*LT* (*T* ) = 0 *⇐⇒* 2*λ*0(*x*˙ 2(*T* ) *− x*(*T* ) + 1) = 0*.*

Если *λ*0 = 0, то из б) следует, что *λ*1 = 0 - все множители Лагранжа равны нулю. Значит в этом случае решения нет. Положим *λ*0 = 1. Тогда условия а)-в) записываются следующим образом

*−*2*x*¨ *−* 1 = 0*,*

*x*˙ (*T* ) = 0*, x*(*T* ) = 1*.*

Общее решение уравнение Эйлера

*t*2

*x* = *−* 4 + *C*1*t* + *C*2*.*

Поскольку *x*(0) = 0, то *C*2 = 0. Неизвестные *C*1*, T* находим из условий трансверсальности

 *T*

*−* 2 + *C*1 = 0*,*

2

*−* 4 + *C*1*T* = 1*.*

 *T*

1. Отсюда *C*1 = 1, *T* = 2. Таким образом, в задаче имеется единственный

*x*(*·*)*, T*Г) = (*−t* + *t,* 2).

2

допустимый экстремальный элемент *ξ*Г = (Г 4

1. Возьмем элемент *ξ*Г = (*−t* + *t, T* ). Тогда

2

4

*T* ( *t*

\2 ( *t*2 \

*T*

( *t* \2

*J* (*ξ*) =

0

*−*2 + 1

*− −* 4 + *t* + 1

*dt* =

0

2 *−* 1

*dt,*

2

( *t* \2

*J* (*ξ*Г) =

0

2 *−* 1

*dt.*

Очевидно, что *J* (*ξ*) *> J* (*ξ*Г) при *T >*

*T*Г и *J* (*ξ*Г) *< J* (*ξ*) при *T <*

*T*Г,

поскольку под знаком интеграла стоит неотрицательная величина. Это

означает, что в любой окрестности

*ξ*Г существует другой допустимый

элемент, на котором значение функционала *J* как больше, так и меньше

значения функционала *J* в точке экстремума.

# Задача Лагранжа

*ξ*Г, т.е.

*ξ*Г не доставляет локального

Пусть *n* - фиксированное натуральное число, *k, m ≥* 0 - целые, причем

*k ≤ n*, *fi, i* = 0*, m*, *ψi, i* = 0*, m*, *ϕi, i* = 0*, k* - известные функции своих аргументов, *Q* - заданный отрезок числовой прямой,

*t*0*, t*1 *∈ Q◦, t*0 *< t*1*, x*(*·*) *≡* (*x*1(*·*)*, . . . , xn*(*·*)) *∈ C*1(*Q*)*, ξ* = (*x*(*·*)*, t*0*, t*1)*, ||ξ||* = max*{||x||*1*, |t*0*|, |t*1*|}.*

*n*

Зададим функционалы

*t*1

B*i*(*ξ*) =

*fi*(*t, x*(*t*)*, x*˙ (*t*))*dt* + *ψi*(*t*0*, x*(*t*0)*, t*1*, x*(*t*1))*, i* = 0*, m.*

*t*0

## Постановка задачи

***Задачей Лагранжа в Понтрягинской форме*** называется следующая экстремальная задача:

B0(*ξ*) *→* inf (6.1)

B*i*(*ξ*) *≤* 0*, i* = 1*, m1,* (6.2)

B*i*(*ξ*) = 0*, i* = *m1* + 1*, m,* (6.3)

*x*˙ *j* (*t*) = *ϕj* (*t, x*(*t*))*, j* = 1*, k,* (6.4) [(6.4)](#_bookmark35) - называется дифференциальной связью.

**Определение 12.** *Допустимая точка*

*ξ*Г = (*x*(*·*)*,* Г*t*0*,* Г*t*1) *в задаче* ([*6.1*](#_bookmark34)) *−*

([*6.4*](#_bookmark35)) *доставляет* ***слабый локальный минимум*** *(****максимум****), если существует δ >* 0*, что для любой допустимой функции ξ* = (*x*(*·*)*, t*0*, t*1)

Г

*для которой*

*выполняется*

*ξ − ξ*Г *< δ*

B0(*ξ*) *≥* B0(*ξ*Г) (B0(*ξ*) *≤* B0(*ξ*Г) *.*

## Алгоритм решения

Выписать ***лагранжиан задачи*** :

*m k*

*L* = *L*(*t*) = *L*(*t, λ*) = \ *λifi*(*t, x, x*˙ ) + \ *pj* (*·*)(*xj − ϕ*)*,*

*i*=0 *j*=0

где *λ* = (*λ*0*, . . . , λm*) */*= 0 - вектор множителей; ***терминант*** задачи

*m*

*l* = \ *λiψi*(*t, x, x*˙ );

*i*=0

#### *функцию Лагранжа*:

*t*1

*L* = *L*(*t*)*dt* + *l*(*t*)*.*

*t*0

1. Выписать *необходимые условия*:

а) *условие стационарности для лагранжиана задачи по x*

*d*

*− dtL*Г*x*˙ *i* (*t*) + *L*Г*xi* (*t*) = 0*, i* = 1*, m*; (6.5)

б) *условия трансверсальности*

*L*Г*x*˙ *i* (*t*0) = Г*lxi*(*t*0)*, i* = 1*, m,*

*L*Г*x*˙ *i* (*t*1) = *−*Г*lxi*(*t*1)*, i* = 1*, m*;

в) *условие стационарности по подвижным концам*

*L*Г*t*0 = *Lt*0 (*ξ*Г) = 0 *⇐⇒ −f* (*t*0) + *lt*0 + *lx*(*t*0)*x*˙ (*t*0) = 0*,*

*L*Г*t*1 = *Lt*1 (*ξ*Г) = 0 *⇐⇒ f* (*t*1) + *lt*1 + *lx*(*t*1)*x*˙ (*t*1) = 0; Отметим, что условия выписывается только для подвижных концов.

г) *условие дополняющей нежесткости*

*λi*B*i*(*ξ*Г) = 0*, i* = 1*, m1*;

д) *условие неотрицательности*

*λi ≥* 0*, i* = 1*, m1,*

*m*

\ *λ*2 */*= 0*.*

*i*

*i*=0

Условия а)-д) дают множество допустимых экстремалей задачи [(6.1)–](#_bookmark34) [(6.4)](#_bookmark35) в слабой постановке.

1. Показать, что допустимые экстремали доставляют экстремум функционалу B0 или решений нет.

## Пример

Найти решение следующей экстремальной задачи

B0(*x*(*·*)) =

1

*x*˙ 2*dt → extr,*

0

B1(*x*(*·*)) =

1

*xdt* = 0*, x*(1) = 1*.*

0

### Решение

Записываем лагранжиан задачи

*L*(*t*) = *λ*0*x*˙ 2 + *λ*1*x*;

терминант задачи

*l*(*t*) = *λ*2(*x*(1) *−* 1);

функцию Лагранжа

1

*L* = *λ*0*x*˙ 2 + *λ*1*xdt* + *λ*2(*x*(1) *−* 1)*.*

0

1. Выпишем необходимые условия:

а) для лагранжиана уравнение Эйлера

*d*

*− dtLx*˙ + *Lx* = 0 *⇐⇒ −*2*λ*0*x*¨ + *λ*1 = 0; (6.6)

б) трансверсальности по *x* для терминанта

*Lx*˙ (0) = *lx*(0) *⇐⇒* 2*λ*0*x*˙ (0) = 0

*Lx*˙ (1) = *−lx*(1) *⇐⇒* 2*λ*0*x*˙ (1) = *−λ*2*.*

Так как концы фиксированы и нет ограничений типа неравенств, то отсутствуют условия в), г) и д).

1. Если *λ*0 = 0, то из а) *λ*1 = 0, а из б) *λ*2 = 0 - все множители Лагранжа равны нулю. Следовательно, решения нет. Положим *λ*0 = 1 . Тогда

2

*x*¨ = *λ*1*.*

Общее решение: *x* = *C*1*t*2 + *C*2 + *C*3. Неизвестные константы *C*1*, C*2*, C*3 находим из условия трансверсальности и условий, входящих в постановку задачи. Имеем



*C*2 = 0





*C*1 + *C*3 = 1*,*

3 + *C*3 = 0*.*



 *C*1

Отсюда *C*1 = 3 *, C*2 = 0, *C*3 = *−*1*/*2. Таким образом, в задаче имеется единственная допустимая экстремаль

2

3*t*2 *−* 1

*x* = *.*

Г 2

1. Покажем с помощью непосредственной проверки, что функция *x*

Г

доставляет абсолютный минимум в задаче. Возьмем функцию *h ∈*

*C*1([0*,* 1]) такую, чтобы

*x* + *h* была допустимой функцией. Для этого

Г 1

надо взять функцию *h*, для которой *h*(1) = 0 и Г

0

*hdt* = 0. Тогда

B0(Г + *h*) *−* B0(Г

2

1

= (*x*˙

+ *h*˙ )2

1

*dt −*

1

*x*˙ *dt* = 2

2

1

*x*˙ *h*˙ *dt* +

Г˙ *dt.*

*x x*) Г

0

Г Г

0 0 0

Интегрируя первый интеграл по частям с учетом условия на *h* и условия трансверсальности *x*˙ (0) = 0, получим

*h*

Г

1 1

2 *x*˙ *h*˙ *dt* = 2*x*˙ 11

*h*1

*−*

1

*x*¨*hdt* = *−*6

*hdt* = 0*.*

Г

0

Таким образом,

Г 10 Г

0 0

B0(Г + *h*) *−* B0(Г

1

˙ 2

= Г*h*

*dt ≥* 0

или

*x x*)

0

B0(Г + *h*) *≥* B0(Г

*x*

для любой допустимой точки Г

минимум в данной задаче.

*x*)

2

3*t −*1

*x* = 2 доставляет абсолютный

*x*(*t*) = 3*t*2*−*1

*absmin*.

**Ответ:** Г 2 *∈*

**Литература**

[1] Галеев Э. М., Тихомиров В.М. **Оптимизация: теория, примеры, задачи.** – М.: Элиториал УРСС, 2000. – 320 с.

[2] Алексеев В.М., Галеев Э.М. Тихомиров В.М. **Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи:** Учеб. пособие – 2-е изд.

– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 256 с. ISBN 5-9221-0590-6.

[3] Алексеев В.М., Галеев Э.М. Тихомиров В.М. **Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи:** Учеб. пособие – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 256 с.