# Случайные функции. Среднее и дисперсия случайной функции

Случайной функцией называется функция, которая в результате опыта может принять тот или иной конкретный вид, неизвестно заранее - какой именно

Математическое ожидание случайной функции Х (t) определяется следующим образом. Рассмотрим сечение случайной функции Х(t) при фиксированном t. В этом сечении мы имеем обычную случайную величину; определим ее математическое ожидание. Очевидно, в общем случае оно зависит от t, т. е. представляет собой некоторую функцию t:

Дисперсией случайной функции Х (t) называется неслучайная функция D (t) x , значение которой для каждого t равно дисперсии соответствующего сечения случайной функции:

Дисперсия случайной функции при каждом t характеризует разброс возможных реализации случайной функции относительно среднего, иными словами, «степень случайности» случайной функции

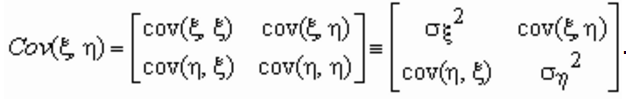
# Ковариации случайной функции

Если между случайными величинами  и  существует стохастическая связь, то одним из параметров, характеризующих меру этой связи является ковариация cov( ,  ). Ковариацию вычисляют по формулам

Если случайные величины  и  независимы, то .

Обратное, вообще говоря, неверно. Из равенства нулю ковариации не следует независимость случайных величин. Случайные величины могут быть зависимыми в то время как их ковариация нулевая! Но зато, если ковариация случайных величин отлична от нуля, то между ними существует стохастическая связь, мерой которой и является величина ковариации.

Ещё есть такая чухня как Ковариационные матрицы (ёбана). В общем это поебота ковариации самой себя с другой функцией.



(мне лень переписывать, думаю понятно)

# Определение временного ряда. Примеры

*Вики гласит следующую хуйню***:** Временно́й ряд (или ряд динамики) — собранный в разные моменты времени статистический материал о значении каких-либо параметров (в простейшем случае одного) исследуемого процесса. Каждая единица статистического материала называется измерением или отсчётом, также допустимо называть его уровнем на указанный с ним момент времени. Во временном ряде для каждого отсчёта должно быть указано время измерения или номер измерения по порядку. Временной ряд существенно отличается от простой [выборки данных](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D1%8B%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%BA%D0%B0), так как при анализе учитывается взаимосвязь измерений со временем, а не только статистическое разнообразие и статистические характеристики выборки

Примеры с той же помойки:

Временные ряды, как правило, возникают в результате измерения некоторого показателя. Это могут быть как показатели (характеристики) технических систем, так и показатели природных, социальных, экономических и других систем (например, [погодные данные](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B4%D0%B0)). Типичным примером временного ряда можно назвать [биржевой курс](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D1%80%D0%B6%D0%B5%D0%B2%D0%BE%D0%B9_%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81), при анализе которого пытаются определить основное направление развития (тенденцию или [тренд](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B5%D0%BD%D0%B4)).

**В зависимости от показателя времени**, временные ряды классифицируют по видам:

**Моментные** - показатель на определенные моменты времени

**Интервальные** - показатель за определенные интервалы времен,

**Производные** - из средних или относительных величин показателя

# Составляющие временного ряда. Аддитивная модель

Аддитивная-хуедитивная, блеять! Сука, картошка подгорела.

Рассмотрим модель временного ряда yt = f(t) +  , где f(t) - неслучайная составляющая (тренд (T), либо тренд и циклическая (C) и (или) сезонная компонента(S), выражающая основную тенденцию).

Повторяющиеся в каждом временном периоде колебания, связанные с изменением времени года классифицируют в зависимости от периода колебания:

Ø не превышающие года – **сезонные** компонентывременного ряда (например: природные, климатические условия)**;**

Ø более года – **циклические** компоненты временного ряда (например: демографические циклы)

Тренд, сезонная, циклическая составляющие называются **регулярными (систематическими)**компонентами временного ряда. Если из временного ряда удалить регулярный компонент, то останется **случайный** компонент (R).

Собственно, аддитивная модель видится мне примерно так: y = T + S +C +R

Хуйня хуйнёй, чесслово.

# Составляющие временного ряда. Мультипликативная модель

Бля, зуб даю, составляющие те же, только теперь y = T\*S\*C\*R. Вот и вся магия.

# Оценка тренда временного ряда методом наименьших квадратов

Лаба за первый хули. 1й курс магов.

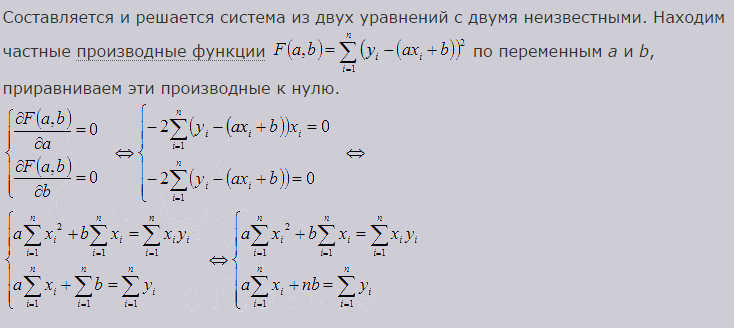
Среди компонентов временного ряда чаще других исследуется тренд. Именно тренд позволяет делать краткосрочные и долгосрочные прогнозы. Для выявления долговременной тенденции изменения временного ряда обычно строят график, на котором наблюдаемые данные (значения зависимой переменной) откладываются на вертикальной оси, а временные интервалы (значения независимой переменной) — на горизонтальной. В этом разделе мы опишем процедуру выявления линейного, квадратичного и экспоненциального тренда с помощью метода наименьших квадратов.

**Модель линейного тренда**является простейшей моделью, применяемой для прогнозирования: Yi=β0+β1Xi+εi. Уравнение линейного тренда:

http://baguzin.ru/wp/wp-content/uploads/2013/09/06%D0%B0.-%D0%A3%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5-%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE-%D1%82%D1%80%D0%B5%D0%BD%D0%B4%D0%B0.jpg

*Сууука, сгорело ПОДСОЛНЕЧНОЕ МАСЛО!! МАСЛО СГОРЕЛО. СУКА КАААААК?! Пиздося…*

Так вот. Если при аппроксимации временного ряда с помощью метода наименьших квадратов первое наблюдение расположить в начале координат, поставив его в соответствие значению X = 0, интерпретация коэффициентов упрощается. Все последующие наблюдения получают целочисленные номера: 1, 2, 3, так что n-е (последнее) наблюдение будет иметь номер n – 1.

Собственно сами формулы МНК: (не, нахуй, я заебусь их переписывать)

# Циклическая составляющая временного ряда. Разложение в ряд Фурье

# Построение периодограммы временного ряда

**Периодограмма** — оценка [спектральной плотности мощности](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D0%BB%D0%BE%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_%D0%BC%D0%BE%D1%89%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8) (СПМ), основанная на вычислении квадрата модуля преобразования Фурье последовательности данных с использованием статистического усреднения: {\displaystyle S\_{T}(\omega )=E\left[{\frac {|X\_{T}(i\omega )|^{2}}{T\_{r}}}\right]}

{\displaystyle X\_{T}(i\omega )} — преобразование Фурье функции {\displaystyle x(t)}X(t) на конечном временном интервале, {\displaystyle T\_{r}}Tr — интервал финитности, E(…) {\displaystyle E(...)}— оператор статистического усреднения (математическое ожидание). Если при расчёте СПМ используется весовая функция (окно), то полученная оценка СПМ называется модифицированной периодограммой. Периодограмма не является состоятельной оценкой СПМ, поскольку дисперсия такой оценки сравнима с квадратом её математического ожидания. С ростом числа используемых отсчётов значения периодограммы начинают всё быстрее флуктуировать.

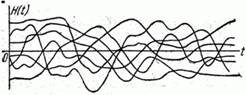
# Стационарные случайные процессы

Cлучайные процессы, протекающие во времени приблизительно однородно и имеющие вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения, причем ни средняя амплитуда, ни характер этих колебаний не обнаруживают существенных изменений с течением времени. Такие случайные процессы называются стационарными.

В качестве примеров стационарных случайных процессов можно привести: 1) колебания самолета на установившемся режиме горизонтального полета; 2) колебания напряжения в электрической осветительной сети; 3) случайные шумы в радиоприемнике; 4) процесс качки корабля и т. п.

Каждый стационарный процесс можно рассматривать как продолжающийся во времени неопределенно долго; при исследовании стационарного процесса в качестве начала отсчета можно выбрать любой момент времени. Исследуя стационарный процесс на любом участке времени, мы должны получить одни и те же его характеристики. Образно выражаясь, стационарный процесс «не имеет ни начала, ни конца».

Примером стационарного случайного процесса может служить изменение высоты центра тяжести самолета на установившемся режиме горизонтального полета (рис. 17.1.1).



# Процессы белого шума

***Процессом белого шума***(white noise process)*,*или просто ***“белым шумом”***(white noise)*,*называют стационарный случайный процесс http://metr-ekon.ru/pics/stat/process-belogo-shuma_1.gif, http://metr-ekon.ru/pics/stat/process-belogo-shuma_2.gif, для которого

http://metr-ekon.ru/pics/stat/process-belogo-shuma_3.gif,  http://metr-ekon.ru/pics/stat/process-belogo-shuma_4.gif

и

http://metr-ekon.ru/pics/stat/process-belogo-shuma_5.gif при  *t* ≠ 0.

Последнее означает, что при  *t*≠ *s*случайные величины  http://metr-ekon.ru/pics/stat/process-belogo-shuma_1.gifи http://metr-ekon.ru/pics/stat/process-belogo-shuma_6.gif, соответствующие наблюдениям процесса белого шума в моменты *t*и *s*, не коррелированы. Если ряд http://metr-ekon.ru/pics/stat/kriterij-serij_7.gif гауссовский,  то отсюда вытекает независимость случайных величин http://metr-ekon.ru/pics/stat/process-belogo-shuma_1.gifи http://metr-ekon.ru/pics/stat/process-belogo-shuma_6.gif при  *t*≠ *s*; при этом для каждого  *m*  и для каждого набора http://metr-ekon.ru/pics/stat/process-belogo-shuma_7.gif случайные величины http://metr-ekon.ru/pics/stat/process-belogo-shuma_8.gif взаимно независимы и имеют одинаковое нормальное распределение  http://metr-ekon.ru/pics/stat/process-belogo-shuma_9.gif, образуя случайную выборку из этого распределения. Такой ряд называют ***гауссовским белым шумом***(Gaussian white noise process).

В то же время, в общем случае, даже если для каждого  *m*  и для каждого набора http://metr-ekon.ru/pics/stat/process-belogo-shuma_7.gif случайные величины http://metr-ekon.ru/pics/stat/process-belogo-shuma_8.gif взаимно независимы и имеют одинаковое распределение, то это еще не означает, что http://metr-ekon.ru/pics/stat/process-belogo-shuma_1.gif – процесс белого шума, т.к. случайная величина   http://metr-ekon.ru/pics/stat/process-belogo-shuma_1.gif может просто не иметь математического ожидания и/или дисперсии (в качестве примера мы опятьможем указать на распределение Коши).

Временной ряд, соответствующий процессу белого шума, ведет себя крайне нерегулярным образом из-за некоррелированности при  *t*≠ *s*случайных величин  http://metr-ekon.ru/pics/stat/process-belogo-shuma_1.gifи http://metr-ekon.ru/pics/stat/process-belogo-shuma_6.gif. Это иллюстрирует график смоделированной реализации гауссовского процесса белого шума (NOISE) с  *D*(*Xt*) ≡ 0.04, показанный на рис. 1.1.

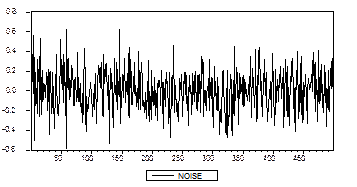


                                 Рис. 1.1

# Автоковариационная и автокорреляционная функции

**Автокорреляционная функция** — зависимость взаимосвязи между функцией (сигналом) и ее сдвинутой копией от величины временного сдвига.

Для детерминированных сигналов **автокорреляционная функция** (**АКФ**) сигнала {\displaystyle f(t)}  определяется интегралом:

{\displaystyle \Psi (\tau )=\int \_{-\infty }^{\infty }f(t)f^{\*}(t-\tau )\mathrm {d} t} 

и показывает связь сигнала (функции {\displaystyle \;f(t)}) с копией самого себя, смещённого на величину {\displaystyle \tau }. Звездочка означает комплексное сопряжение.

Для случайных процессов АКФ случайной функции {\displaystyle X(t)} имеет вид[[1]](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B2%D1%82%D0%BE%D0%BA%D0%BE%D1%80%D1%80%D0%B5%D0%BB%D1%8F%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F#cite_note-1):

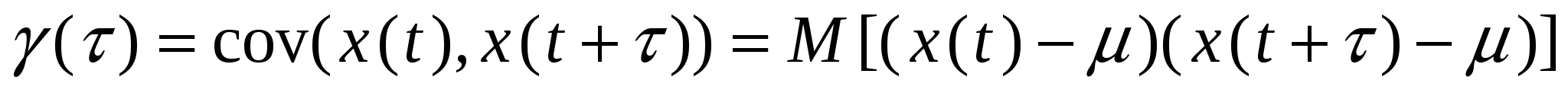
{\displaystyle K(\tau )=\mathbb {E} \{X(t)X^{\*}(t-\tau )\}}

где {\displaystyle \mathbb {E} \{\ \}} — математическое ожидание, звездочка означает комплексное сопряжение.

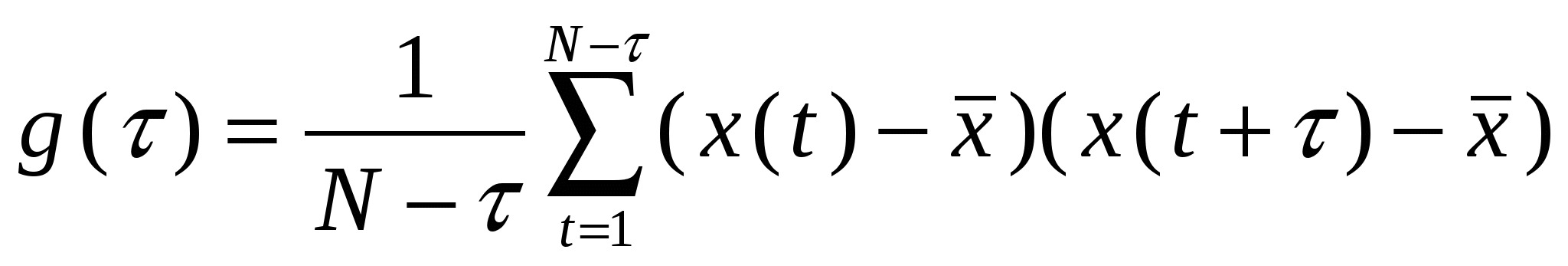
Если исходная функция строго периодическая, то на графике автокорреляционной функции тоже будет строго периодическая функция. Таким образом, из этого графика можно судить о периодичности исходной функции, а следовательно, и о её частотных характеристиках. Автокорреляционная функция применяется для анализа сложных [колебаний](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%B1%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F), например, электроэнцефалограммы человека.

**Автоковариационная функция** (вот тут гугл молчал как партизан так что с этим осторожнее**)**

Из предположения о строгой стационарности временного рядах(t) при m=2 следует, что совместные двумерные распределения для пар случайных величин (x1(t),x2(t)), (x(0),(x(t2-t1)), (x(τ),x(t2-t1+τ) совпадают для любыхt1,t2иτзависят только от разностиt2-t1. Соответственно, ковариация между значениями x(t) и x(t±τ) будет зависеть только от величины «сдвига по времени»τ(и не будет зависеть от t). Эта ковариация называется автоковариацией (поскольку измеряет ковариацию для различных значений одного и того же временного ряда x(t) и определяется соотношением:

.

При анализе величины γ(τ) в зависимости от значенияτпринято говорить об автоковариационной функцииγ(τ). Значения автоковариационной функции могут быть статистически оценены по имеющимся наблюдениям временного ряда по формуле

, гдеτ=1,2, …N-1. Очевидно

γ(0)= σ2=М[x(t)-μ];

γ(τ)=cov(x(t+τ), x(t)) = cov(x(t), x(t+τ)) = cov(x(t), x(t-τ);

γ(τ)= cov(x(t), x(t-τ) = γ(-τ).

# Периодограмма и спектральная плотность случайного процесса

См вопрос 8 слово в слово плюс спектральная плотность случайного процесса

# Процесс скользящего среднего

Простейшим процессом, сконструированным на базе процесса белого шума, является  ***процесс скользящего среднего первого порядка*** (first-order moving average – **MA(1)**):

*Xt*= *εt* + *bεt–*1    *t =*1, …, *n*,

где  *εt*– процесс белого шума, имеющий нулевое математическое ожидание и дисперсию *sε*2 .

               Для этого процесса

*E*(*Xt*) = *E*(*εt* + *bεt–*1) = 0,

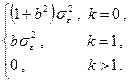
*D*(*Xt*) = *D*(*εt* + *bεt–*1) = *sε*2 + *b*2*sε*2 = (1 + *b*2)*sε*2,

*Cov*(*Xt* , *Xt–*1) = *Cov* =

                       =*Cov*(*εt* , *εt–*1) + *b Cov*(*εt–*1, *εt–*1) + *b Cov*(*εt*, *εt–*2) +*b*2*Cov*(*εt–*1, *εt–*2) =*b sε*2,

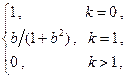
*Cov*(*Xt* , *Xt–k*) = *Cov* = 0      для  *k* > 1.

 В правые части всех этих соотношений не входит  *t*, математическое ожидание и дисперсия  процесса  *Xt* постоянны, а его ковариационная функция зависит только от величины запаздывания одного наблюдения относительно второго, т.е. от  *k*:

*Cov*(*Xt* , *Xt–k*) = *g*(*k*) = 

Следовательно, процесс  *Xt* является стационарным.

Автокорреляции этого процесса равны

*ρ*(*k*) = (кто узнал картинку тот молодец)

т.е. коррелограмма процесса имеет весьма специфический вид. Коррелированными оказываются  только  соседние наблюдения.  Корреляция  между  ними положительна, если  *b* > 0, и отрицательна при *b*< 0. Соответственно, процесс MA(1) с  *b* > 0 имеет более гладкие, по сравнению с белым шумом, реализации, а процесс MA(1) с  *b* < 0 имеет менее гладкие, по сравнению с белым шумом, реализации.

# Пример процесса скользящего среднего

Пусть временной ряд соответствует авторегрессии первого порядка: (1 - a\*Z)\*[x(k) - μ] = ε(k), тогда представление ряда процессом скользящего среднего имеет вид: [x(k) - μ] = ε(k)\*(1 - a\*Z)-1. Составляющая (1 - a\*Z)-1 является суммой бесконечной геометрической прогрессии с показателем a\*Z. Это означает, что модель имеет вид:

[x(k) - μ] = ε(k)\*(1 + a\*Z + a2\*Z2 + a3\*Z3 + a4\*Z4 + ...) или

[x(k) - μ] = ε(k) + a\*ε(k-1) + a2\*ε(k-2) + a3\*ε(k-3) + a4\*ε(k-4) + ...

Аналогично если временной ряд - процесс скользящего среднего первого порядка: x(k) - μ = ε(k) - c\*ε(k-1), то при представлении его авторегрессией получим:

1 + c\*[x(k-1) - μ] + c2\*[x(k-2) - μ] + c3\*[x(k-3) - μ] + c4\*[x(k-4) - μ] + ... = ε(k).

Очевидно, что в практических приложениях реализовать модель бесконечного порядка невозможно. Более того желательно, что бы число коэффициентов в модели было минимально. Этому требованию соответствуют смешанные модели - модели авторегрессии-скользящего среднего:

x(k) - μ = a1\*[x(k-1) - μ] + a2\*[x(k-2) - μ] + ...+ ap\*[x(k-p) - μ] -

- c1\*ε(k-1) - c2\*ε(k-2) - ... - cq\*ε(k-q)+ ε(k)

В общем виде, с использованием оператора сдвига смешанная модель, содержащая авторегрессию порядка p и скользящее среднее порядка q, записывается так:

АР(p)\*[x(k) - μ] = СС(q)\*ε(k)

или совсем кратко: АРСС(p,q) (в англоязычной версии ARMA(p,q)). Например, АРСС(1,1) имеет вид:

x(k) - μ = a1\*[x(k-1) - μ] - c1\*ε(k-1) + ε(k).

Иногда возникает вопрос о практическом использовании составляющей скользящего среднего. Откуда взять ε(k-1), ε(k-2), ε(k-3)...? Пусть построенная модель является моделью скользящего среднего первого порядка: x(k) - μ = ε(k) - c1\*ε(k-1), тогда прогноз по модели будет вычисляться по формуле:

x(k) = μ - c1\*ε(k-1),

где x(k) - прогноз по модели k-ого значения временного ряда.

Очевидно, что если модель адекватна, то ε(k-1) = x(k-1) - x(k-1), тогда формула для вычисления значения прогноза примет вид:

x(k) = μ - c1\*[x(k-1) - x(k-1)]

Иными словами прогноз составляющей скользящего среднего включает в себя (в зависимости от порядка q) значения прогнозов для предыдущих значений временного ряда.

# Процесс скользящего среднего как линейный фильтр

http://www.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_boks1/files.book&file=boks_26.files/image002.gif,             (3.1.1)

**Процессы скользящего среднего.** Рассмотрим частный случай (3.1.1), когда только первые http://www.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_boks1/files.book&file=boks_29.files/image015.gif из весов http://www.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_boks1/files.book&file=boks_29.files/image016.gif ненулевые. Процесс имеет вид

http://www.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_boks1/files.book&file=boks_29.files/image017.gif ,                         (3.1.18)

где символы http://www.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_boks1/files.book&file=boks_29.files/image018.gif используются для обозначения конечного набора весовых параметров. Процесс (3.1.18) называется процессом скользящего среднего порядка http://www.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_boks1/files.book&file=boks_29.files/image015.gif, который иногда будет сокращенно обозначаться ССhttp://www.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_boks1/files.book&file=boks_29.files/image019.gif. В частности, особенно важны для практики процессы первого http://www.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_boks1/files.book&file=boks_29.files/image020.gif и второго порядка http://www.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_boks1/files.book&file=boks_29.files/image021.gif:

http://www.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_boks1/files.book&file=boks_29.files/image022.gif

Мы можем также записать (3.1.18) в эквивалентной форме

http://www.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_boks1/files.book&file=boks_29.files/image023.gif

или

http://www.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_boks1/files.book&file=boks_29.files/image024.gif.                                                                              (3.1.19)

Отсюда следует, что процесс скользящего среднего можно трактовать как выход http://www.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_boks1/files.book&file=boks_29.files/image012.gif линейного фильтра с передаточной функцией http://www.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_boks1/files.book&file=boks_29.files/image025.gif, на выход которого поступает белый шум http://www.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_boks1/files.book&file=boks_29.files/image014.gif.(хз вроде по теме а вроде и дич обьяснение из разряда можно трактовать потому что гладиолус)

# Процесс авторегрессии

# Рекуррентная формула для автокорреляционной функции процесса авторегрессии

# Пример процесса авторегрессии первого порядка

# Процесс авторегрессии - скользящего среднего

# Оценка авторегрессионной функции по экспериментальным данным