

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Севастопольский государственный университет»

## **ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ В ИНФОРМАТИКЕ**

Методические указания к выполнению курсовой работы  
по дисциплине «Численные методы»  
для студентов очной и заочной форм обучения,  
обучающихся по направлению  
"Информационные системы и технологии"

Севастополь  
2015

УДК 519.6

Применение численных методов в информатике. Методические указания и индивидуальные задания к курсовой работе по дисциплине «Численные методы в информатике» / Сост. Первухина Е.Л., Голикова В.В., Рябовая В.О. (на основе методических указаний, составленных Первухиной Е.Л., Коваленко Ю.В., Заикиной Е. Н. Изд-во СевНТУ, 2011, электронный ресурс) – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2015. – 65 с.

Целью курсового проектирования является закрепление, углубление и обобщение знаний, полученных в ходе изучения основных численных методов в предыдущем семестре, а также получение навыков работы с современными вычислительными средствами.

Методические указания предназначены для выполнения курсовой работы по дисциплине " Численные методы " для студентов очной и очно-заочной формы обучения

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры информационных систем  
(протокол № 1 от 31 августа 2015 г)

Допущено учебно-методическим центром СевГУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Шушляпин Е.А., д.т.н., проф. каф. технической кибернетики СевГУ.

## СОДЕРЖАНИЕ

1 ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ КУРСОВОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ	4
2 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	6
2.1 Действия с приближенными числами	6
2.2 Улучшение сходимости числовых рядов	11
2.3 Приближенное решение нелинейных уравнений	14
2.4 Решение систем линейных уравнений	22
2.5 Интерполирование функций	32
2.6 Численное дифференцирование функций	39
2.7 Численное интегрирование функций	42
2.8 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений	46
2.9 Одномерная оптимизация	49
2.10 Многомерная оптимизация	54
2.11 Методы обработки экспериментальных данных	60
3 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ	62
3.1 Действия с приближенными числами	62
3.2 Улучшение сходимости числовых рядов	63
3.3 Приближенное решение нелинейных уравнений	64
3.4 Решение систем линейных уравнений	65
3.5 Интерполирование функций	67
3.6 Численное дифференцирование функций	69
3.7 Численное интегрирование функций	71
3.8 Решение обыкновенных дифференциальных уравнений	73
3.9 Одномерная оптимизация	77
3.10 Многомерная оптимизация	7879
3.11 Методы обработки экспериментальных данных	
4 СОДЕРЖАНИЕ И ОФОРМЛЕНИЕ ПОЯСНИТЕЛЬНОЙ ЗАПИСКИ	81
4.1 Структура пояснительной записки	81
4.2 Содержание разделов пояснительной записки	82
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	83

## 1 ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ КУРСОВОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Целью курсового проектирования является закрепление, углубление и обобщение знаний, полученных в ходе изучения основных численных методов в информатике в предыдущем семестре, а также получение навыков работы с современными вычислительными пакетами.

Особенностью выполнения курсовой работы является реализация поставленных задач на ЭВМ в одной или нескольких интегрированных средах. Студент должен разобраться с поставленными задачами, отладить их на персональном компьютере и продемонстрировать преподавателю работу отлаженных программ в соответствии с вариантом задания.

Курсовое проектирование ориентировано на подготовку студентов к последующим этапам учебной деятельности, связанной с решением инженерных задач с использованием информационных систем последнего поколения и с приобретением навыков научного исследования, в том числе при написании дипломной работы.

Для повышения эффективности самостоятельной работы студентов с высоким уровнем подготовки в перечень заданий для курсового проектирования включены задания по разделам, отражающим современные технические и экономические проблемы, но не вошедшим в лекционный курс по дисциплине из-за ограниченного времени аудиторного обучения.

Курсовое проектирование осуществляется по индивидуальным заданиям и включает следующие этапы:

- углубленное изучение численных методов;
- знакомство с вычислительными средствами, используемыми в современных информационных системах;
- построение алгоритмов и решение задач.

Индивидуальные задания из разделов, перечисленных в таблице 1.1, выдает преподаватель, ведущий занятия по курсовому проектированию, и утверждает его после заполнения студентом бланка технического задания (Приложение Б).

Таблица 1.1 – Основные разделы курсовой работы

Наименование раздела	Содержание
1. Действия с приближенными числами	Правила округления приближенных чисел, методы расчета абсолютных и относительных погрешностей результатов вычислений. Построение вычислительных алгоритмов по критерию минимальной погрешности вычислений.
2. Улучшение сходимости числовых рядов	Метод Кумера-Стирлинга, критерии останова вычислений и условия сходимости знакопостоянных числовых рядов
3. Приближенное решение нелинейных уравнений	Отделение корней, правила выбора начального приближения, критерии останова вычислений и условия сходимости методов ложного положения и Ньютона-Рафсона
4. Решение систем линейных уравнений прямыми и итерационными методами	Метод определителей и модификации метода исключения Гаусса. Правила выбора вектора начального приближения, критерии останова вычислений и условия сходимости методов простой итерации и Зейделя.
5. Интерполирование функций	Правила выбора порядка интерполирующего полинома, особенности применения интерполяционной формулы Лагранжа и построения естественного кубического сплайна
6. Численное дифференцирование функций	Применение формул симметричной аппроксимации с остаточным членом при интерполировании по трем и пяти точкам
7. Численное интегрирование функций	Методы построения линейных квадратурных формул. Особенности применения формул трапеций и Симпсона.
8. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений	Метод Эйлера и его модификации. Проблема устойчивости решения. Решение задачи Коши и краевой задачи. Метод Рунге-Кутты.
9. Одномерная оптимизация	Определение наименьшего и наибольшего значения функции. Методы решения: половинного деления, средней точки и «золотого» сечения. Условия окончания вычислений.
10. Многомерная оптимизация	Многомерная оптимизация. Методы экстремума функции первого порядка: градиентный метод и метод наискорейшего спуска.
11. Методы обработки экспериментальных данных	Метод наименьших квадратов; его практическая реализация с помощью современных программных средств

## 2 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

### 2.1 Действия с приближенными числами

#### 2.1.1 Основные определения

К *численным методам* (ЧМ), составляющим часть вычислительной математики, относятся такие методы решения задач, которые могут быть сведены к арифметическим действиям над числами. Для реализации на ЭВМ ЧМ должны быть *устойчивыми и сходящимися*.

ЧМ называется *устойчивым*, если результаты непрерывно зависят от входных данных задачи и погрешность округления, связанная с реализацией ЧМ на ЭВМ, остается ограниченной в заданных пределах изменения параметров ЧМ.

ЧМ называется *сходящимся*, если результаты стремятся к точному решению задачи при стремлении параметров ЧМ к определенным предельным значениям.

*Основной вопрос теории* ЧМ – получение методов, удовлетворяющих требованиям высокой точности, устойчивости и экономичности. После применения ЧМ необходимо получить числовой результат с заданной точностью.

#### 2.1.2 Виды погрешности

*Приближенным числом*  $a$  называется число, незначительно отличающееся от *точного*  $A$  и заменяющее последнее в вычислениях.

Под *ошибкой* или *погрешностью*  $\Delta a$  приближенного числа  $a$  понимают разность  $\Delta a = A - a$ , откуда

$$A = a + \Delta a, \quad (1.1)$$

т.е. точное число рассматривают как приближенное число с нулевой ошибкой. Если знак ошибки неизвестен, то используют *абсолютную погрешность*:

$$\Delta = |\Delta a| = |A - a|. \quad (1.2)$$

Если число  $A$  неизвестно то вместо абсолютной погрешности вводят ее оценку сверху – *предельную абсолютную погрешность*  $\Delta_a$ , под которой понимают всякое число, не меньшее абсолютной погрешности этого числа:  $\Delta_a \geq |A - a|$ , или

$$a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a. \quad (1.3)$$

(1.3) устанавливает границы, в которых заключено число  $A$ :

$$A = a \pm \Delta_a. \quad (1.4)$$

*Относительной погрешностью*  $\delta$  приближенного числа  $a$  называют отношение абсолютной погрешности  $\Delta$  этого числа к модулю соответствующего точного числа  $A$  ( $A \neq 0$ ):

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|}, \quad (1.5)$$

откуда  $\delta = |A| \cdot \Delta$ .

*Предельной относительной погрешностью*  $\delta_a$  приближенного числа  $a$  называют всякое число, не меньшее относительной погрешности этого числа  $\delta = \frac{\Delta}{|A|} \leq \delta_a$ , откуда

$$\Delta \leq |A| \cdot \delta_a, \quad (1.6)$$

т.е. за предельную абсолютную погрешность числа  $a$  можно принять:

$$\Delta_a = |A| \cdot \delta_a. \quad (1.7)$$

На практике  $A \approx a$ , при этом  $A$  может быть неизвестно, поэтому в формулы (1.5) – (1.7) вместо  $A$  подставляют  $a$ . Зная предельную относительную погрешность  $\delta_a$ , получают границы точного числа:

$$A = a \cdot (1 \pm \delta_a). \quad (1.8)$$

Выделяют следующие основные источники погрешностей:

- 1) математическая модель;
- 2) исходные данные (начальные и граничные условия, коэффициенты и правые части уравнений);
- 3) приближенный метод;
- 4) округления при вычислениях.

### 2. 1. 3 Десятичная запись приближенных чисел

Всякое приближенное положительное число  $a$  может быть представлено в виде конечной десятичной дроби:

$$a = \alpha_m \cdot 10^m + \alpha_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + \alpha_{m-n+1} \cdot 10^{m-n+1} \quad (\alpha_m \neq 0), \quad (1.9)$$

где  $m$  – целое число.

Все сохраняемые десятичные знаки  $\alpha_i$  ( $i = m, m-1, \dots, m-n+1$ ) называют *значащими цифрами* приближенного числа  $a$ , некоторые из них могут быть равны нулю (за исключением  $\alpha_m$ ). Значащая цифра числа называется *верной*, если абсолютная погрешность числа не превосходит  $1/2$  единицы соответствующего разряда десятичного числа.

### 2. 1. 4 Экспоненциальная форма записи приближенного числа

В ЭВМ кроме *естественной* формы записи чисел вида (1.9), применяют *экспоненциальную* форму записи:

$$a = f \cdot 10^m \quad (m \in \mathbb{Z}), \quad (1.10)$$

где  $f$  – мантисса действительного числа  $a$ ;  $m$  – порядок числа  $a$ .

Действительное число называют *нормализованным*, если первая значащая цифра мантиссы не равна нулю, а мантисса является правильной дробью (т.е.  $0,1 \leq f \leq 1,0$ ). Число верных цифр в нормализованном числе – число верных цифр в его мантиссе.

### 2. 1. 5 Симметричное округление чисел

Для округления десятичного числа до  $n$  значащих цифр отбрасывают все его цифры, стоящие справа от  $n$ -й значащей цифры, или, если это нужно для сохранения разрядов, заменяют их нулями. При этом если первая из отброшенных цифр

*меньше 5*, то оставшиеся десятичные знаки сохраняются без изменения;

*больше 5*, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица;

*равна 5* и среди остальных отброшенных имеются ненулевые, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица;

*равна 5* и все остальные отброшенные цифры являются нулями, то применяется правило четной цифры.

Очевидно, что при симметричном округлении погрешность округления не превосходит  $1/2$  единицы десятичного разряда, представляемого последней оставленной значащей цифрой.

### 2. 1. 6 Общая формула для погрешности

Пусть задана дифференцируемая функция

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.11)$$

и известны погрешности аргументов этой функции  $\Delta x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Тогда абсолютную погрешность результата вычислений находят по формуле

$$|\Delta u| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_i|, \quad (1.12)$$

где  $|\Delta x_i|$  – абсолютные погрешности аргументов.

### 2. 1. 7 Погрешности арифметических операций

Если знаки погрешностей операндов  $x$  и  $y$  неизвестны, то из (1.12) получают формулы для предельных абсолютных погрешностей:

$$\Delta_{x+y} = \Delta_{x-y} = \Delta_x + \Delta_y, \quad [\text{сложение и вычитание}] \quad (1.13)$$

где  $\Delta_x, \Delta_y$  – предельные абсолютные погрешности аргументов  $x, y$ ;

$$\Delta_{x \cdot y} = |y| \cdot \Delta_x + |x| \cdot \Delta_y. \quad [\text{умножение}] \quad (1.14)$$

$$\Delta_{x/y} = \frac{\Delta_x}{|y|} + \frac{|x|}{y^2} \cdot \Delta_y. \quad [\text{деление}] \quad (1.15)$$

Из выражений (1.13)–(1.15) получают формулы для предельных относительных погрешностей:

$$\delta_{x+y} = \left| \frac{x}{x+y} \right| \cdot \delta_x + \left| \frac{y}{x+y} \right| \cdot \delta_y; \quad [\text{сложение}] \quad (1.16)$$

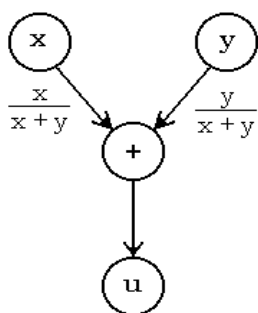
$$\delta_{x-y} = \left| \frac{x}{x-y} \right| \cdot \delta_x + \left| \frac{y}{x-y} \right| \cdot \delta_y; \quad [\text{вычитание}] \quad (1.17)$$

$$\delta_{x \cdot y} = \delta_{x/y} = \delta_x + \delta_y. \quad [\text{умножение и деление}] \quad (1.18)$$

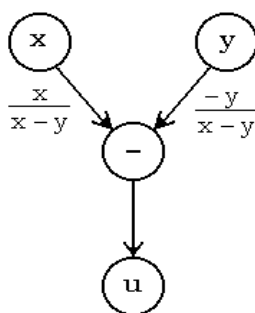
### 2. 1. 8 Графы вычислительных процессов

Метод ориентированных графов позволяет определить вклад погрешности, возникшей в процессе вычислений, в общую погрешность.

Смысл коэффициентов у стрелок на рис. 1.1 следующий:



а)  $u = x + y$



б)  $u = x - y$



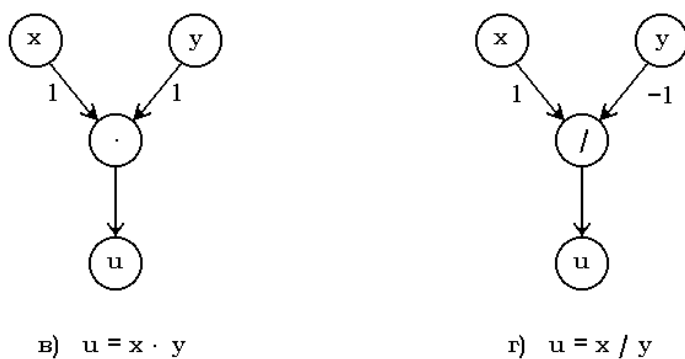


Рисунок 1.1 – Ориентированные графы арифметических операций

относительные погрешности  $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$ ,  $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$  переменных  $x$  и  $y$ , умноженные на коэффициент у стрелки, соединяющей данную переменную с этой операцией, входят в виде слагаемых в относительную погрешность операции  $\delta_u = \frac{\Delta u}{u}$ .

Пример. Граф вычислительного процесса  $u = (x + y) \cdot z$  (рис. 1.2)

$r_1$  – относительная ошибка округления операции сложения;  $r_2$  – относительная ошибка округления операции умножения

Относительная погрешность операции сложения

$$\delta_{x+y} = \frac{x}{x+y} \cdot \delta_x + \frac{y}{x+y} \cdot \delta_y + r_1, \quad (1.19)$$

где  $\delta_x$  и  $\delta_y$  – относительные погрешности операндов  $x$  и  $y$ . Погрешность  $\delta_u$  вычислительного процесса  $u = (x + y) \cdot z$  (с учетом погрешности округления  $r_2$ )

$$\delta_u = \delta_{x+y} \cdot 1 + \delta_z \cdot 1 + r_2, \quad (1.20)$$

где  $\delta_z$  – относительная погрешность операнда  $z$ .

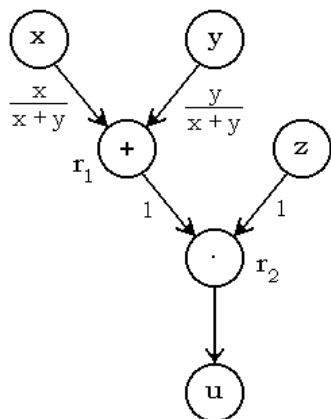


Рисунок 1.2 – Граф вычислительного процесса  $u = (x + y) \cdot z$

## 2. 2 Улучшение сходимости числовых рядов

### 2. 2. 1 Общие положения

#### Сходящийся числовой ряд.

Числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (2.1)$$

называется *сходящимся*, если существует предел последовательности его частичных сумм:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad (2.2)$$

где  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , число  $S$  – *сумма* ряда,  $a_i$  – *члены* ряда.

Медленно сходящийся числовой ряд. Числовой ряд (2.1) *сходится медленно*, если необходимо взять большое число членов ряда, чтобы получить его сумму с заданной точностью.

Критерий Коши (необходимое и достаточное условие сходимости числового ряда). Последовательность частичных сумм ряда сходится в том и только в том случае, если для каждого положительного числа  $\varepsilon$  существует такой номер  $N$ , что из  $m > N$  и  $n > N$  следует

$$|S_n - S_m| < \varepsilon.$$

(2.2) означает, что

$$S = S_n + R_n, \quad (2.3)$$

где  $R_n$  – остаток ряда, причем  $R_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Для нахождения суммы  $s$  сходящегося ряда (2.1) с заданной точностью  $\varepsilon$  необходимо так выбирать  $n$ , чтобы  $|R_n| < \varepsilon$ . Тогда частичная сумма  $S_n$  может быть приближенно принята за сумму  $s$  ряда (2.1).

Составляющие погрешностей при вычислении суммы ряда. Исходную погрешность  $\varepsilon$  обычно разделяют на три составляющих погрешности: остаточную ( $\varepsilon_1$ ), суммирования ( $\varepsilon_2$ ) и округления ( $\varepsilon_3$ ):

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad (2.4)$$

где  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/4$ ;  $\varepsilon_3 = \varepsilon/2$ .

Оценка остатка знакопостоянного числового ряда. Если члены ряда (2.1) представляют значения положительной монотонно убывающей функции  $f(x)$ , т.е.  $a_n = f(x)$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ), то применяют интегральный признак сходимости:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx < R_n < \int_n^{\infty} f(x) dx. \quad (2.5)$$

### 2. 2. 2 Преобразование Куммера-Стирлинга

Пусть ряд (1) сходится медленно и его сумма равна  $A$ . Вспомогательный сходящийся ряд

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (b_n \neq 0) \quad (2.6)$$

имеет известную сумму  $B$ , при этом существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = q \neq 0. \quad (2.7)$$

Преобразование Куммера записывается как

$$A = q \cdot B + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - q \cdot b_n), \quad (2.8)$$

т.е. вычисление суммы медленно сходящегося ряда (2.1) заменяют нахождением суммы вспомогательного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - q \cdot b_n) \text{ с остатком} \quad (2.9)$$

$$\bar{R}_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n - q \cdot b_n) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left( 1 - q \cdot \frac{b_n}{a_n} \right) a_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_n \cdot a_n,$$

где  $\varepsilon_n = 1 - q \cdot \frac{b_n}{a_n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  в силу условия (2.7). Поэтому ряд (2.9) сходится быстрее исходного ряда (1).

В преобразовании Куммера можно использовать ряды Стирлинга

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+m)}, \quad (m = 1, 2, \dots), \text{ суммы } s^{(m)} \text{ которых известны: } s^{(m)} = 1/m \cdot m!.$$

Пусть дан знакоположительный ряд, члены которого являются рациональными функциями целочисленной переменной  $n$

$$a_n = \frac{\alpha_0 n^p + \alpha_1 n^{p-1} + \dots + \alpha_p}{\beta_0 n^q + \beta_1 n^{q-1} + \dots + \beta_q} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.10)$$

где  $p$  и  $q$  — натуральные числа и  $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0$ .

Если имеет место неравенство  $q \geq p + 2$ , то в худшем случае  $a_n = o(1/n^2)$ , и ряд с общим членом (2.10) сходится.

Общий член представляют в виде конечной суммы

$$a_n = \frac{A_1}{n(n+1)} + \frac{A_2}{n(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{A_m}{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)} + a_n^{(m)} \quad (2.11)$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_m$  — неопределенные коэффициенты;  $a_n^{(m)}$  — остаточный член. Коэффициенты  $A_1, A_2, \dots, A_m$

$$\begin{cases} A_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (n+1) \cdot a_n \\ A_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ a_n - \frac{A_1}{n \cdot (n+1)} \right] \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \\ A_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ a_n - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{A_i}{n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+i)} \right] \cdot n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+m) \end{cases} \quad (2.12)$$

подбирают так, чтобы  $a_n^{(m)} = o\left(\frac{1}{n^{2+m}}\right)$ . Вспомогательный ряд (2.6) записывают в следующем виде

$$\begin{aligned} B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{A_1}{n \cdot (n+1)} + \frac{A_2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} + \dots + \frac{A_m}{n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+m)} \right] = \\ &= A_1 \cdot S^{(1)} + A_2 \cdot S^{(2)} + \dots + A_m \cdot S^{(m)} = \frac{A_1}{1 \cdot 1!} + \frac{A_2}{2 \cdot 2!} + \dots + \frac{A_m}{m \cdot m!}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из (2.11) и (2.13) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

и сумму исходного ряда определяют по формуле

$$S = \sum a_n = B + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)}, \quad (2.14)$$

в которой сумму  $B$  ряда находят с использованием (2.13).

## 2. 3 Приближенное решение нелинейных уравнений

### 2. 3. 1 Общие положения

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0. \quad (3.1)$$

*Корнем уравнения (3.1) называют всякое значение  $\xi$ , обращающее функцию  $f(x)$  в нуль, т.е. такое, что  $f(\xi) = 0$ .*

*Изолированным корнем уравнения (3.1) называют корень, для которого существует окрестность, не содержащая других корней этого уравнения.*

*Приближенное решение нелинейных уравнений состоит из этапов отделения и уточнения корней.*

*Отделение корней – установление возможно тесных промежутков  $[\alpha, \beta]$ , в которых содержится только один корень уравнения (3.1). Отделение корней выполняют графическими и аналитическими методами. Уточнение приближенных корней – доведение их до заданной степени точности.*

### 2. 3. 2 Графические методы отделения корней

1) Простейшим методом нахождения приближенного значения корня является построение графика функции

$$y = f(x) \quad (3.2)$$

и приближенное определение точек, в которых график функции пересекает ось  $Ox$ . В этих точках  $y = 0$  и соответствующие значения  $x$  уравнения (3.2) удовлетворяют уравнению (3.1) и являются его действительными корнями.

2) Иногда исходное уравнение можно записать в виде

$$f_1(x) = f_2(x) \quad (3.3)$$

и затем построить графики двух функций

$$y_1 = f_1(x) \quad \text{и} \quad y_2 = f_2(x), \quad (3.4)$$

абсциссы точек пересечения которых удовлетворяют уравнению (3.1) и являются его действительными корнями.

При исследовании функций определяют следующие их свойства:

поведение функции при  $x \rightarrow -\infty$  и при  $x \rightarrow +\infty$ ;

значения  $f(x)$  для  $x$ , для которых легко определить  $f(x)$  (например,  $x = 0$  или  $x = \pm 1$ );

значения  $x$ , при которых  $f(x)$  стремится к бесконечности;

точки пересечения функциями (3.4) осей  $Ox$  и  $Oy$ .

Пример. Графически отделить минимальный по абсолютной величине корень уравнения

$$\sin x - 0,5 = 0 \quad (3.5)$$

Используя (3.3) и (3.4), исходное уравнение переписывают в виде:

$$y_1 = \sin x = y_2 = 0,5.$$

Графики функций  $y_1 = \sin x$  и  $y_2 = 0,5$  изображены на рис.3.1. Приближенные значения корней уравнения (3.5) – абсциссы точек пересечения графиков функций рис.3.1, т.е.  $x_A \in [-6, -5]$ ,  $x_B \in [-4, -3]$ ,  $x_C \in [0, 1]$ ,  $x_D \in [2, 3]$ ,  $x_E \in [6, 7]$ , где  $x_A, x_B, x_C, x_D, x_E$  – абсциссы точек  $A, B, C, D, E$ , т.е. изолированные корни уравнения (3.5). Решением задачи является корень, соответствующий точке  $C$  ( $x_C \in [0, 1]$ ).

### 2. 3. 3 Аналитические методы отделения корней

Для отделения корней применяют два общих аналитических метода. Находят более простое уравнение, которое имеет корни, приблизительно равные корням данного уравнения, пренебрегая малыми членами в исходном уравнении.

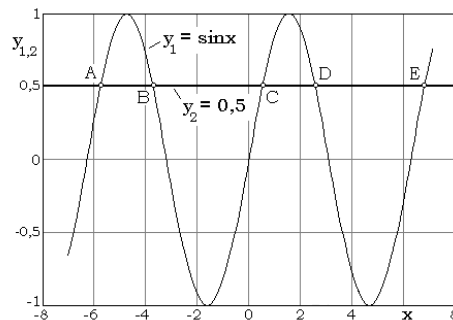


Рисунок 3.1 – Графическое решение уравнения  $\sin x - 0,5 = 0$

**Теорема.** Если действительная непрерывная функция  $f(x)$  принимает значения разных знаков на концах отрезка  $[\alpha, \beta]$ , т.е.  $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ , то внутри отрезка есть по меньшей мере один корень уравнения  $f(x) = 0$ , т.е. найдется хотя бы одно число  $\xi \in [\alpha, \beta]$  такое, что  $f(\xi) = 0$  (рис. 3.2).

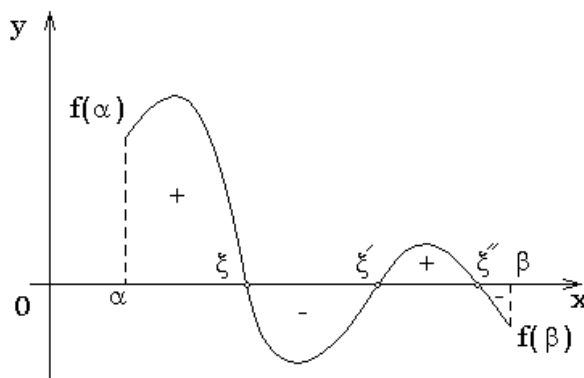


Рисунок 3.2 – К теореме об отделении корней

Корень  $\xi$  будет заведомо единственным, если производная  $f'(x)$  существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала  $[\alpha, \beta]$ , т.е. если  $f'(x) > 0$  или  $f'(x) < 0$  при  $\alpha < x < \beta$ .

Последовательность действий при отделении корней.

1) Устанавливают знаки функции  $f(x)$  в граничных точках  $x=a$  и  $x=b$  области ее существования.

2) Учитывая особенности функции  $f(x)$ , выбирают ряд промежуточных точек  $x=\alpha_1, \alpha_2, \dots$  и определяют знаки  $f(x)$  в этих точках.

3) Отмечают интервалы, содержащие корни уравнения: если  $f(\alpha_k) \cdot f(\alpha_{k+1}) < 0$ , то в интервале  $(\alpha_k, \alpha_{k+1})$  имеется корень уравнения  $f(x) = 0$ .

4) Устанавливают единственность корня в интервале  $(\alpha_k, \alpha_{k+1})$ .

Для отделения корней методом *половинного деления* приближенно делят интервал  $[\alpha, \beta]$  на две, четыре, восемь и т.д. равных частей, определяя знаки функции  $f(x)$  в точках делений.

Для алгебраического уравнения  $n$ -й степени

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0),$$

общее число корней не превышает  $n$ , если считать каждый корень столько раз, какова его кратность. Поэтому, если для такого уравнения получена  $n+1$  перемена знака, то все его корни отделены.

Пример. Отделить корни уравнения

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0. \quad (3.6)$$

В таблице 3.1 приведена схема решения поставленной задачи.

Таблица 3.1 – Схема отделения корней уравнения (3.6)

$x$	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
Знак $f(x)$	—	—	+	+	—	+	+

Уравнение (3.6) имеет три действительных корня, расположенных в интервалах  $(-3, -1)$ ,  $(0, 1)$  и  $(1, 3)$ .

## 2. 3. 4 Методы уточнения корней

Метод ложного положения (МЛП).

Пусть действительная непрерывная функция  $f(x)$  принимает значения разных знаков на концах отрезка  $[a, b]$  и внутри этого отрезка содержится единственный корень  $x=\xi$ , значение которого требуется определить (рис. 3.3).

В качестве первого приближения корня принимают абсциссу точки  $(x_1; 0)$ , в которой секущая  $L_1$ , соединяющая точки  $(a; f(a))$  и  $(b; f(b))$ , пересекает ось  $Ox$ . Из рис. 3.3 следует, что

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} \cdot (b - a) \quad \text{или} \quad x_1 = b - \frac{f(b)}{f(b) - f(a)} \cdot (b - a). \quad (3.7)$$

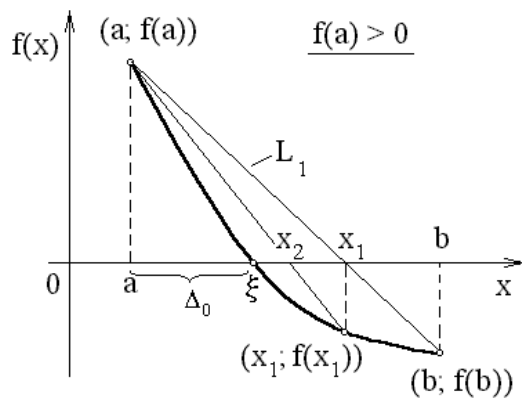


Рисунок 3.3 – Определение действительных корней уравнения

$f(x)=0$  по методу ложного положения. Случай  $f(a) > 0$

Так как  $f(a)$  и  $f(b)$  противоположны по знаку, то  $f(x_1)$  должна быть противоположна по знаку одной из них. Следовательно, можно снова повторить рассмотренный прием для более точного определения значения  $\xi$ .

Если  $f(a) > 0$ , то конец  $a$  отрезка  $[a, b]$  неподвижен и последовательные приближения образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность

$a < \xi < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_1 < x_0$ , где

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= b; \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)} \cdot (x_n - a) \end{aligned} \right\} (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.8)$$

Если  $f(a) < 0$ , то неподвижен конец  $b$  отрезка  $[a, b]$  и последовательные приближения образуют ограниченную монотонно возрастающую последовательность

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < \xi < b,$$

где

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a; \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \cdot (b - x_n) \end{aligned} \right\} (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

Сходимость итерационного процесса. Для того чтобы каждое последующее приближение  $x_{n+1}$  было ближе к корню  $\xi$ , чем предыдущее, достаточно, чтобы выполнялись условия сходимости Фурье:

- а) сохранение знака  $f'(x)$  на интервале  $[a, b]$ ;
- б) сохранение знака  $f''(x)$  на  $[a, b]$ ;
- в) неподвижный конец отрезка  $[a, b]$  должен быть выбран так, чтобы выполнялось неравенство

$$f(a) \cdot f''(a) > 0 \quad \text{или} \quad f(b) \cdot f''(b) > 0.$$

Если условия Фурье выполнены, то существует предел

$$\bar{\xi} = \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (a < \bar{\xi} < b)$$

монотонной и ограниченной последовательности  $\{x_n\}$ , который и является искомым значением корня  $\xi$  уравнения  $f(x)=0$ .

Если условия Фурье не выполнены, то последовательность  $\{x_n\}$  – либо расходящаяся, либо может сходиться к  $\xi$ , но не быть монотонной (колебаться около значения  $\xi$ ).

Погрешность МЛП. Для случая, рассмотренного на рис. 3.3

$$\left. \begin{aligned} a &= \xi - \Delta_0 \\ x_n &= \xi + \Delta_n \\ x_{n+1} &= \xi + \Delta_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

где  $\xi$  – точное значение корня;  $\Delta_n$  – погрешность текущего приближения к корню  $\xi$ .

Используя разложение функций  $f(a)$  и  $f(x_n)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x = \xi$ , получают следующее выражение

$$\Delta_{n+1} = -\frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \cdot \Delta_n \Delta_0 = \rho \Delta_n, \quad (3.11)$$

где  $\rho = -\frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \Delta_0 > 0$ .

Если выполняется условие  $\rho < 1$ , то процесс имеет *линейную* сходимость, т.е.  $\Delta_{n+1} \sim \Delta_n$ . Для оценки погрешности вычислений на текущем  $n$ -м шаге итерационного процесса шаге применяют формулу

$$\Delta_n = |x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad (3.12)$$

где  $m = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$  – минимальное значение первой производной в интервале  $[a, b]$ .

Если в (3.12) минимальное значение первой производной равно нулю ( $m=0$ ), то применяют следующее правило останова вычислений:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon, \quad (3.13)$$

где  $\varepsilon$  – заданная погрешность вычислений.

Метод Ньютона – Рафсона (МНР).

Пусть корень  $\xi$  уравнения  $f(x)=0$  отделен на отрезке  $[a, b]$ ,  $f'(x)$  и  $f''(x)$  непрерывны и сохраняют определенные знаки при  $a \leq x \leq b$ . Зная  $n$ -е приближенное значение корня  $x_n \approx \xi$  ( $a \leq x_n \leq b$ ), можно его уточнить:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.14)$$

где  $x_{n+1}$  –  $(n+1)$ -е приближение корня.

Чем большее численное значение производной  $f'(x)$  в окрестности корня  $\xi$ , тем меньше величина поправки, которую нужно прибавить к  $n$ -му приближению для получения  $(n+1)$ -го приближения. Поэтому МНР удобнее применять, когда в окрестности корня  $\xi$  график функции  $y = f(x)$  имеет наибольшую крутизну. Если численное значение производной  $f'(x)$  вблизи корня  $\xi$  мало, то поправки будут велики, и применять МНР в этом случае не рекомендуется. Геометрически МНР эквивалентен замене небольшой дуги кривой  $y = f(x)$  касательной, проведенной в некоторой точке этой кривой (рис. 3.4).



**Погрешность МНР.** Пусть  $M_2$  – наибольшее значение  $|f''(x)|$  на отрезке  $[a, b]$ ,  $m_1$  – наименьшее значение  $|f'(x)|$  на  $[a, b]$ . Тогда погрешность для  $(n+1)$ -й итерации определяют как

$$|\xi - x_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2 \cdot m_1} \cdot (\xi - x_n)^2 \quad \text{или} \quad \Delta_{n+1} = \rho \cdot \Delta_n^2, \quad (3.15)$$

откуда следует, что если начальное приближение  $x_0$  таково, что

$$\frac{M_2}{2 m_1} \cdot |\xi - x_0| = q < 1,$$

то сходимость процесса Ньютона-Рафсона – *квадратичная*.

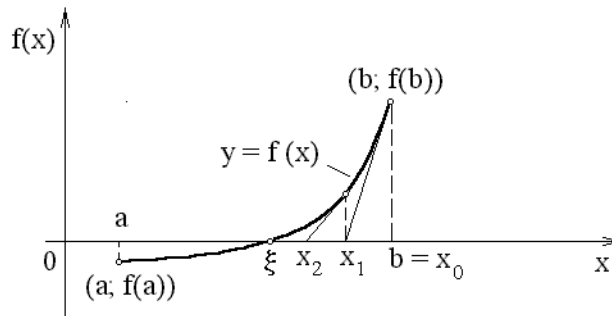


Рисунок 3.4 – Геометрическая интерпретация МНР

В качестве исходной точки  $x_0$  выбирают конец интервала  $[a, b]$ , которому отвечает ордината того же знака, что и знак  $f''(x)$ , т.е.

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0. \quad (3.16)$$

Если  $(\xi - x_n)$  мало, то значение абсолютной погрешности вычисления корня на  $n$ -м шаге есть:

$$\Delta_n = |\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{|f'(x_n)|}, \quad (3.17)$$

откуда следует, что начиная с  $n$ -го шага, погрешность может стать сколь угодно малой. Поэтому на каждом шаге по формуле (3.17) следят за достигнутой точностью определения корня  $\xi$  и останавливают вычисления, когда  $\Delta_n \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon$  задано).

**Пример.** Решить уравнение  $x \cdot \sin x - 1,5 = 0$  методом *ложного положения*, если задан интервал изменения аргумента  $x \in [0; 2]$ . Расчеты вести с пятью десятичными знаками после запятой.

На границах интервала  $f(x)$  принимает значения разных знаков:

$$f(0) = -1,5; \quad f(2) = 0,31859,$$

поэтому корень функции лежит в интервале  $[0; 2]$ .

Выполнение условий Фурье проверяют следующим образом. Учитывая, что  $f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$ , находят значения  $f''(0) = 2$  и  $f''(2) = -2,65089$ . Тогда  $f''(0) \cdot f(0) = 2 \cdot (-1,5) = -3,0$ ;  $f''(2) \cdot f(2) = -2,65089 \cdot 0,31859 = -0,84455$ , т.е. условия Фурье не выполняются.

Если (согласно (3.9))

$$x_0 = \begin{cases} 0; \text{то} \\ \end{cases}$$

$$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f(2) - f(0)} (2 - 0) = 1,64963.$$

С учетом знака  $f(1,64963) = 0,14451$  полученное значение  $x_1$  используют в качестве правой границы при выполнении следующего шага вычислений. Результаты вычислений приведены в табл. 3.2. При изменении значения правой границы применяют формулу (3.8).

Таблица 3.2 – Решение уравнения  $x \cdot \sin x - 1,5 = 0$  по МЛП

n	Левая граница интервала	$x_n$	Правая граница интервала	Значение функции $f(x_n)$
0	0	0	2	-1,5
1	0	1,64963	2	0,14451
2	0	1,50467	1,64963	0,00138
3	0	1,50329	1,50467	-0,00013
4	1,50329	1,50341	1,50467	0,00000

## 2. 4 Решение систем линейных уравнений

### 2. 4. 1 Общие положения

*Линейным* называется уравнение, каждый член которого содержит только одно неизвестное, и каждое неизвестное входит в уравнение только в первой степени. *Линейные системы уравнений* обычно содержат  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными. *Решение системы* уравнений представляет набор значений неизвестных, удовлетворяющих одновременно всем уравнениям системы.

Для системы линейных уравнений возможны варианты решения:

решение существует и является единственным;

система уравнений не имеет решения;

система уравнений имеет бесчисленное множество решений.

Если система уравнений не имеет решений или имеет бесчисленное множество решений, она называется *вырожденной* и имеет определитель, равный нулю.

Численные методы решения систем линейных уравнений делят на *прямые* (конечные) и *итерационные* (бесконечные) методы.

*Прямые методы* позволяют с точностью до ошибок округления дать точное решение системы (если оно существует). Достоинством *итерационных методов* является то, что в них не накапливаются ошибки округления. Поэтому итерационные методы приводят к более точным результатам, чем прямые методы. Особенно это относится к решению *плохо обусловленных* систем.

Система уравнений

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

является *плохо обусловленной*, когда матрица  $A$  плохо обусловлена и ее определитель близок к нулю. Следствием плохой обусловленности является то, что может произойти замена истинного решения ошибочным значением. Матрица  $A$  называется



$$\left. \begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\
 0 + a_{32}^{(1)}x_2 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n &= b_3^{(1)} \\
 &\dots\dots\dots \\
 0 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)}
 \end{aligned} \right\},$$

где  $a_{i1}^{(1)} = 0$  и  $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - m_i a_{1j}$ ,  
 $b_i^{(1)} = b_i - m_i b_1$ ,  $i = \overline{2, n}$ ,  $j = \overline{1, n}$

Аналогично можно исключить  $x_2$  из последних  $n-2$  уравнений, затем  $x_3$  из последних  $n-3$  уравнений и т.д. На  $k$ -м этапе исключают  $x_k$  с помощью множителей

$$m_i^{(k-1)} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = \overline{k+1, n},$$

при этом предполагается, что  $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - m_i^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}, \\
 b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - m_i^{(k-1)} b_k^{(k-1)}, \quad i = \overline{k+1, n}, \quad j = \overline{k, n}.
 \end{aligned}$$

Индекс  $k$  принимает последовательные целые значения от 1 до  $n-1$  включительно ( $k = \overline{1, n-1}$ ). При  $k=n-1$  происходит исключение  $x_{n-1}$  из последнего уравнения.

В результате получается треугольная система уравнений

$$\left. \begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)}.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Определитель системы можно вычислять как произведение диагональных элементов треугольной матрицы (4.5)

$$\Delta = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n-1)}, \quad (4.6)$$

знак этого произведения следует изменить на противоположный, если число перестановок было нечетным.

*Обратный ход* осуществляется в соответствии с формулами

$$\left. \begin{aligned}
 x_n &= \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \\
 x_{n-1} &= \frac{b_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1, n}^{(n-2)} \cdot x_n}{a_{n-1, n-1}^{(n-2)}} \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_j &= \frac{b_j^{(j-1)} - a_{j, n}^{(j-1)} \cdot x_n - \dots - a_{j, j+1}^{(j-1)} \cdot x_{j+1}}{a_{jj}^{(j-1)}}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

для  $j = n-2, n-3, \dots, 1$ .

Для решения системы (4.4) нужно выполнить

$$N = \frac{n \cdot (n^2 + 3n - 1)}{3} \quad (4.8)$$

умножений и делений. Примерно столько же потребуется сложений.

#### 2. 4. 4 Компактная схема Гаусса (схема Холецкого)

Требуется решить линейную систему уравнений (4.1). Матрицу  $A$  представляют в виде произведения нижней треугольной матрицы  $B = [b_{ij}]$  и верхней треугольной матрицы  $C = [c_{ij}]$  с единичной диагональю, т.е.

$$A = B \cdot C, \quad (4.9)$$

где  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$  и  $C = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$

На первом этапе решения находят  $b_{ij}$  и  $c_{ij}$ :

$$\left. \begin{aligned} b_{i1} &= a_{i1} \\ b_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} \cdot c_{kj} \end{aligned} \right\} \quad (i \geq j > 1) \quad , \quad (4.10)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{1j} &= \frac{a_{1j}}{b_{11}} \\ c_{ij} &= \frac{1}{b_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1 < i < j) \quad . \quad (4.11)$$

При выполнении вычислений по формулам (4.10) и (4.11) применяют *правило фиксации индексов*: поочередно вычисляют столбец  $(b_{i1})_{i=1}^n$ , затем строку  $(c_{1j})_{j=2}^n$  и т.д. На втором этапе вычисляют вектор  $\bar{x}$ :

$$B \bar{y} = \bar{b}, \quad C \bar{x} = \bar{y}. \quad (4.12)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{a_{1, n+1}}{b_{11}} \\ y_i &= \frac{1}{b_{ii}} \left( a_{i, n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} y_k \right) \end{aligned} \right\} \quad (i > 1) \quad (4.13)$$

и

$$\left. \begin{aligned} x_n &= y_n \\ x_i &= y_i - \sum_{k=i+1}^n c_{ik} x_k \end{aligned} \right\} \quad (i < n) \quad (4.14)$$

Т.к.  $\det C = 1$ , а  $\det A = \det B \cdot \det C$ , то

$$\det A = \det B = b_{11} b_{22} \dots b_{n-1, n-1} b_{nn}. \quad (4.15)$$

#### 2. 4. 5 Метод Гаусса – Жордана

Метод *исключает обратный ход* при решении системы (4.4). Первый шаг исключения  $x_1$  совершают обычным методом Гаусса, т.е. при  $a_{11} \neq 0$  умножают первое урав-



$$\bar{x} = \bar{\beta} + \bar{\alpha} \bar{x} \quad (4.19)$$

и решают *методом последовательных приближений*. За нулевое приближение принимают столбец свободных членов  $\bar{x}^{(0)} = \bar{\beta}$ .

Последовательно строят матрицы-столбцы

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{\beta} + \bar{\alpha} \bar{x}^{(0)} \quad [\text{первое приближение}];$$

$$\bar{x}^{(2)} = \bar{\beta} + \bar{\alpha} \bar{x}^{(1)} \quad [\text{второе приближение}] \text{ и т.д.}$$

Любое  $(k+1)$ -е приближение вычисляют как

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{\beta} + \bar{\alpha} \bar{x}^{(k)} \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (4.20)$$

Если последовательность приближений  $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k)}, \dots$  имеет предел  $\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}^{(k)}$ ,

то этот предел – решение системы (4.19).

Формулы (4.20) можно записать в развернутом виде

$$\left. \begin{aligned} x_i^{(0)} &= \beta_i \\ x_i^{(k+1)} &= \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)} \quad \alpha_{ii} = 0; \quad i = \overline{1, n}; \quad k = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \right\}$$

Иногда удобнее приводить систему (4.4) к виду (4.18) так, чтобы коэффициенты  $\alpha_{ii}$  не были равны нулю. Например, уравнение

$$1,02 x_1 - 0,15 x_2 = 2,7$$

удобно записать в виде  $x_1 = 2,7 - 0,02 x_1 + 0,15 x_2$ .

В общем случае, имея систему

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, n}),$$

можно положить  $a_{ii} = a_{ii}^{(1)} + a_{ii}^{(2)}$ , где  $a_{ii}^{(1)} \neq 0$ .

Достаточные условия сходимости процесса итераций. Для системы

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, n})$$

процесс итерации (4.20) *сходится к единственному решению* независимо от выбора начального приближения, если выполнены неравенства

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (i = \overline{1, n}),$$

т.е., если модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы больше модулей всех остальных коэффициентов (без учета свободных членов).

## 2. 4. 7 Итерационный метод Зейделя

Рассматривается линейная система из трех уравнений с тремя неизвестными

$$\left. \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &= b_3 \end{aligned} \right\}. \quad (4.21)$$

Пусть  $a_{11} \neq 0$ ,  $a_{22} \neq 0$ ,  $a_{33} \neq 0$ , тогда по аналогии с методом простой итерации система может быть записана в виде

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) \\ x_3 &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (a) \\ (б) \\ (в) \end{matrix} \quad (4.22)$$

Используя первое приближение к решению системы (4.22)

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \quad (4.23)$$

вычисляют новое значение  $x_1$ :

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}).$$

Далее вычисляют новое значение  $x_2$ :

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)}).$$

Используя вычисленные значения  $x_1^{(1)}$  и  $x_2^{(1)}$ , находят новое значение  $x_3$ :

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}).$$

На этом заканчивается *первая итерация*.

Далее заменяют исходные значения (4.23) на  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$  и вычисляют следующее приближение. В общем случае  $k$ -е приближение определяется формулами:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)}) \\ x_3^{(k)} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}) \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Правило останова вычислений задают следующим образом:

1) по максимальным значениям абсолютных разностей

$$\text{Макс} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon, \quad (4.25)$$

где  $\varepsilon$  – некоторое положительное число;

2) по максимальным значениям относительных разностей

$$\text{Макс} \left| \frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}} \right| < \varepsilon \quad (4.26)$$

при условии, что  $x_i^{(k)} \neq 0$ .

Достаточные условия сходимости метода Зейделя. Для системы  $n$  уравнений (4.4) с  $n$  неизвестными метод Зейделя сходится, если выполняются следующие условия:

1) система уравнений неприводима, т.е. нельзя вычислить какие-либо неизвестные, решая меньше, чем  $n$  уравнений;

2) для всех  $i$

$$|a_{ii}| \geq |a_{i1}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}|; \quad (4.27)$$

3) по крайней мере для одного  $i$

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}|. \quad (4.28)$$

Другими словами, *диагональные члены должны преобладать в системе уравнений*.



## 2. 4. 8 Метод прогонки

Пусть дана система линейных разностных уравнений *второго порядка*

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i, \quad a_i \neq 0, \quad b_i \neq 0, \quad (i=1, 2, \dots, N-1). \quad (4.29)$$

с граничными условиями на левой и правой границах:

$$y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2. \quad (4.30)$$

Система (4.29), (4.30) может быть представлена в матричном виде,

$$A \vec{y} = \vec{f}, \quad (4.31)$$

где  $\vec{y} = (y_0, y_1, \dots, y_N)^T$  – вектор неизвестных;

$\vec{f} = (\mu_1, -f_1, \dots, -f_{N-1}, \mu_2)^T$  – вектор–столбец свободных членов;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\chi_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_i & -c_i & b_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\chi_2 & 1 \end{bmatrix}$$

– трехдиагональная матрица системы.

Для решения системы (4.29), (4.30) используют метод исключения неизвестных, основанный на формуле *прогонки*:

$$\left. \begin{aligned} & \xrightarrow{(\rightarrow)} \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad i=1, 2, \dots, N-1, \quad \alpha_1 = \chi_1; \\ & \xrightarrow{(\rightarrow)} \beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i + f_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad i=1, 2, \dots, N-1, \quad \beta_1 = \mu_1; \\ & y_N = \frac{\mu_2 + \chi_2 \beta_N}{1 - \alpha_N \chi_2}; \\ & \xleftarrow{(\leftarrow)} y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i=N-1, N-2, \dots, 2, 1, 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

Стрелки в формулах (4.32) показывают направление счета:

( $\rightarrow$ ) от  $i$  к  $i+1$ ;

( $\leftarrow$ ) от  $i+1$  к  $i$ .

Формулы (4.32) применяют, если знаменатели дробей не равны нулю.

## 2. 5 Интерполирование функций

### 2. 5. 1 Задача интерполирования

Необходимо определить значения функции  $f(x)$  при некоторых частных значениях независимого переменного  $x$ , находящегося в интервале  $[a, b]$ . Аналитическое выражение  $y = f(x)$  неизвестно.  $x_0, x_1, \dots, x_n$  – точки, в которых известны значения функции:  $y_0 = f(x_0), \dots, y_n = f(x_n)$ , т.е. существует ряд точек  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ , лежащих на кривой  $y = f(x)$  (рис. 5.1).

Другими словами, на отрезке  $[a, b]$  заданы  $n+1$  узлов интерполяции  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , а также значения функции  $f(x)$  в этих точках:

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad \dots, \quad f(x_n) = y_n. \quad (5.1)$$

Требуется построить непрерывную (*интерполирующую*) функцию  $F(x)$ , принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и  $f(x)$ , т.е. такую, что

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n. \quad (5.2)$$

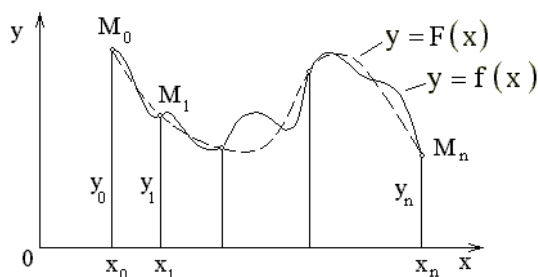


Рисунок 5.1 – К постановке задачи интерполяции

Однозначного решения задача не имеет, т.к. через  $n+1$  точек  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$  можно провести бесчисленное множество кривых.

Часто бывает необходимо провести через заданные точки достаточно гладкую кривую, без большого количества максимумов и минимумов. В этом случае большую роль играет простота аналитического выражения. Например, задача становится однозначной, если вместо произвольной функции  $F(x)$  искать полином  $P_n(x)$  степени не выше  $n$ , удовлетворяющий условиям (5.2), т.е. такой, что

$$P_0(x_0) = y_0, P_1(x_1) = y_1, \dots, P_n(x_n) = y_n.$$

Полученную интерполяционную формулу  $y = F(x)$  обычно используют для приближенного вычисления значений функции  $f(x)$  для значений аргумента  $x$ , отличных от узлов интерполяции. Такая операция называется *интерполированием* функции  $f(x)$ . Различают *интерполирование в узком смысле*, когда  $x \in [x_0, x_n]$  и *экстраполирование*, когда  $x \notin [x_0, x_n]$ .

### 2.5.2 Интерполяционная формула Лагранжа

Если на отрезке  $[a, b]$  даны  $n+1$  различных значений аргумента  $x_0, x_1, \dots, x_n$  и для функции  $y = f(x)$  известны значения:

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n,$$

то приближенное значение функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  определяют с помощью *интерполяционной формулы Лагранжа*

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_{i-1}) \cdot (x-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdot (x_i-x_1) \cdot \dots \cdot (x_i-x_{i-1}) \cdot (x_i-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i-x_n)}. \quad (5.3)$$

Формулу (5.3) используют для *произвольно заданных* узлов интерполирования.

### 2.5.3 Оценка погрешности формулы Лагранжа

Величина остаточного члена полинома Лагранжа есть

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x), \quad (5.4)$$

где  $y = f(x)$  — заданная функция;  $L_n(x)$  — интерполяционный полином Лагранжа, принимающий в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  значения

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n).$$

Если в рассматриваемом интервале  $a \leq x \leq b$  изменения  $x$ , содержащем узлы интерполирования, функция  $f(x)$  имеет все производные  $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n+1)}(x)$  до  $(n+1)$ -го порядка включительно, то остаточный член равен

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x),$$

$$\text{где } \Pi_{n+1}(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = \prod_{i=0}^n (x - x_i),$$

а  $\xi$  зависит от  $x$  и лежит внутри отрезка  $[a, b]$ .

Оценка абсолютной погрешности формулы Лагранжа есть

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(x)|, \quad (5.5)$$

где  $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$  — максимум производной  $f^{(n+1)}(\xi)$  на отрезке  $[a, b]$ .

#### 2. 5. 4 Выбор порядка интерполяционного полинома

Если разности  $\Delta^{n+1}y$  почти постоянны для функции  $y=f(x)$  [1], то функция  $y=f(x)$  достаточно хорошо интерполируется полиномом  $n$ -й степени, например, полиномом Лагранжа  $L_n(x) = \sum_{i=0}^n P_i(x) \cdot y_i$ , который совпадает со значениями  $y_i = f(x_i)$  в точках  $x_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ). Если увеличить степень интерполяционного полинома, т.е. взять

$$L_{n+m}(x) = \sum_{i=0}^{n+m} P_i(x) \cdot y_i,$$

$m \geq 1$ , то интерполирующая кривая будет менее гладкой, чем исходная функция  $y=f(x)$  (рис. 5.2). Эта разница может усугубляться неконтролируемыми погрешностями вычислений. Поэтому степень полинома должна быть ограниченной и не превышать нескольких единиц ( $n < 10$ ).

Если число точек  $N$  интерполируемой функции превышает степень полинома, то применяют *кусочно-полиномиальную* интерполяцию. В этом случае функция между любыми соседними узлами интерполируется полиномами одной и той же небольшой степени.

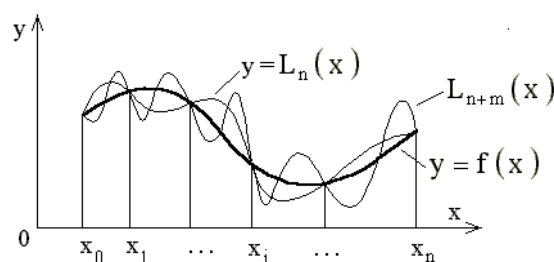


Рисунок 5. 2 – Эффект увеличения степени интерполирующего полинома

#### 2. 5. 5 Примеры кусочно-полиномиальной интерполяции

Интерполяция кусочно-гладким полиномом первой степени (рис. 5.3). Между узлами  $x_0$  и  $x_1$  интерполяция осуществляется прямой 1, между узлами  $x_1$  и  $x_2$  — прямой 2 и т.д. Между каждой парой узлов прямая описывается уравнением  $y=f(x)$  в этих узлах. Для линейной интерполяции достаточно знания функции  $y=f(x)$  только в двух узлах, между которыми лежит точка интерполяции.

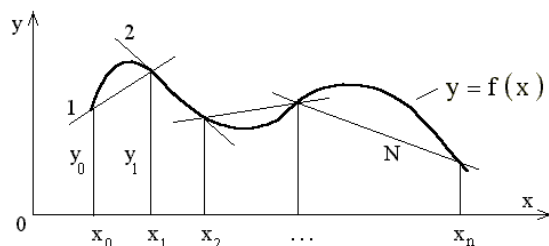


Рисунок 5.3 – Интерполирование полиномами первой степени

Интерполяция кусочно-гладким полиномом второй степени. Для однозначного построения квадратичной параболы необходимо знать ее значения в трех точках, т.е. в трех узлах интерполяции. Пример *квадратичной* интерполяции дан на рис. 5.4.

Кусочно-полиномиальная интерполяция дает непрерывную интерполирующую функцию (рис. 5.3 и 5.4). Между узлами интерполяции функция имеет непрерывные производные, которые в общем случае при  $n < N$  претерпевают *разрыв* в узлах интерполяции. Однако конкретная решаемая задача может требовать непрерывности производных интерполирующей функции во всем интервале  $[x_0, x_N]$ . В этих случаях применяют *сплайн-интерполяцию*.

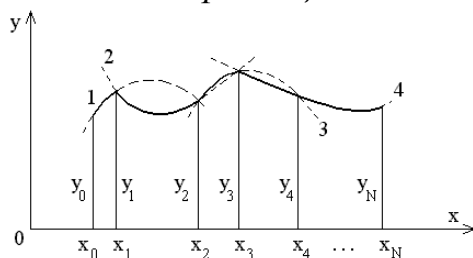


Рисунок 5.4 – Интерполирование полиномами второй степени

### 2. 5. 6 Сплайн-интерполяция

*Кубическая сплайн-интерполяция* означает, что между любыми соседними узлами

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{i-1}, x_i], [x_i, x_{i+1}], \dots, [x_{N-1}, x_N]$$

функция  $y=f(x)$  интерполируется *кубическим полиномом*, равным значению функции  $y(x)$  в каждом узле и во всех узлах непрерывны его первая и вторая производные (условия сопряжения).

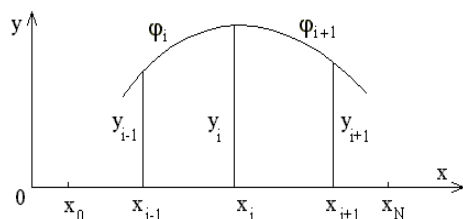


Рисунок 5.5 – К определению сплайн-интерполяции

Кубический полином

$$\phi_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i) \quad (5.6)$$

интерполирует функцию  $y=f(x)$  на интервале  $[x_{i-1}, x_i]$  (рис. 5.5), а

$$\phi_{i+1}(x) = a_{i+1} + b_{i+1}(x - x_i) + c_{i+1}(x - x_i)^2 + d_{i+1}(x - x_i)^3, \quad (x_i \leq x \leq x_{i+1}) \quad (5.7)$$

на интервале  $[x_i, x_{i+1}]$ .

Условия сопряжения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i(x_{i-1}) &= y_{i-1} & (i=1, 2, \dots, N) & \quad (a) \\ \varphi_i(x_i) &= y_i & (i=1, 2, \dots, N) & \quad (б) \\ \varphi'_i(x_i - \varepsilon) &= \varphi'_{i+1}(x_i + \varepsilon) & (i=1, 2, \dots, N-1) & \quad (в) \\ \varphi''_i(x_i - \varepsilon) &= \varphi''_{i+1}(x_i + \varepsilon) & (i=1, 2, \dots, N-1) & \quad (г) \\ \varphi_i(x_i) &= \varphi_{i+1}(x_i) & & \quad (д) \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Кроме того, на границах  $x = x_0$  и  $x = x_N$  ставятся условия

$$\varphi''_1(x_0) = 0, \quad \varphi''_N(x_N) = 0. \quad (5.9)$$

Уравнения для коэффициентов полиномов (5.6) и (5.7) удовлетворяют условиям (5.8) и (5.9) и учитывают одинаковые расстояния между любыми соседними узлами.

$$h = x_i - x_{i-1} \quad (i = \overline{1, N}); \quad (5.10)$$

$$a_i = y_{i-1} \quad (i = \overline{1, N}); \quad (5.11)$$

$$c_i + 4c_{i+1} + c_{i+2} = 3 \frac{\Delta^2 y_{i-1}}{h^2}; \quad (5.12)$$

$$c_1 = 0, \quad c_{N+1} = 0; \quad (5.13)$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h}. \quad (5.14)$$

$$b_i = \frac{\Delta y_{i-1}}{h} - \frac{1}{3}(c_{i+1} + 2c_i)h \quad (i = \overline{1, N-1}); \quad (5.15)$$

$$b_N = \frac{\Delta y_{N-1}}{h} - \frac{2}{3}c_N h. \quad (5.16)$$

Уравнения (5.12), (5.13) представляют систему  $N+1$  линейных алгебраических уравнений с  $N+1$  неизвестными  $c_1, c_2, \dots, c_N$  и трехдиагональной матрицей. Система может быть решена методом *прогонки*. Зная  $c_i$ , по формулам (5.14)–(5.16) находят  $b_i$  и  $d_i$ , а по формуле (5.11) – значения  $a_i$ .

**Пример.** Для функции  $y=f(x)$  известны ее значения в точках A(0; 0,0), B(1; 0,5), C(2; 2,0), D(3; 1,5). Требуется найти *естественный* кубический сплайн, который проходит через точки A, B, C, D.

В задаче число интервалов разбиения равно трем ( $N=3$ ), а шаг равен единице ( $h=1$ ). При  $x_0=0$ ,  $y_0=0,0$ ;  $x_1=1$ ,  $y_1=0,5$ ;  $x_2=2$ ,  $y_2=2,0$ ;  $x_3=3$ ,  $y_3=1,5$ , получают первые и вторые конечные разности:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 0,5; \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1 = 1,5; \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2 = -0,5;$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 1,0; \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = -2,0,$$

которые помещены в табл. 5.1.

Таблица 5.1 – Таблица конечных разностей функции  $y=f(x)$

$x_{i-1}$	$y_{i-1}$	$\Delta y_{i-1}$	$\Delta^2 y_{i-1}$
0	0,0	0,5	1,0
1	0,5	1,5	-2,0
2	2,0	-0,5	
3	1,5		

Из условий (5.13) следуют нулевые значения коэффициентов  $c_1 = c_4 = 0$  (при  $N=3$ ). С использованием выражений (5.12) и таблицу 5.1 составляют систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 4,0 & 1,0 \\ 1,0 & 4,0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix},$$

решая которую, получают значения коэффициентов  $c_2 = 1,2$ ;  $c_3 = -1,8$ . Подставляя значения коэффициентов  $c_i$  в (5.15), (5.16), а так же в (5.14) находят коэффициенты  $b_i$  и  $d_i$ :

$$\begin{aligned} b_1 &= 0,5 - \frac{1}{3} \cdot 1,2 = 0,1; \quad b_2 = 1,5 - \frac{1}{3}(-1,8 + 2 \cdot 1,2) = 1,3; \\ b_3 &= -0,5 - \frac{2}{3} \cdot (-1,8) = 0,7; \\ d_1 &= \frac{1,2}{3} = 0,4; \quad d_2 = \frac{-1,8 - 1,2}{3} = -1,0; \quad d_3 = \frac{1,8}{3} = 0,6. \end{aligned}$$

Из условий (5.11) и таблицы 5.1

$$a_1 = 0,0; \quad a_2 = 0,5; \quad a_3 = 2,0.$$

Подставляя в (5.6) и (5.7) значения коэффициентов, получают уравнения кубического сплайна:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x) &= 0,4x^3 + 0,1x \quad (0 \leq x \leq 1); \\ \varphi_2(x) &= -(x-1)^3 + 1,2(x-1)^2 + 1,3(x-1) + 0,5 \quad (1 \leq x \leq 2); \\ \varphi_3(x) &= 0,6(x-2)^3 - 1,8(x-2)^2 + 0,7(x-2) + 2,0 \quad (2 \leq x \leq 3). \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

## 2.6 Численное дифференцирование функций

### 2.6.1 Общие сведения

Для *приближенного дифференцирования* функцию  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  заменяют интерполирующей функцией  $P(x)$ , полагая, что при  $a \leq x \leq b$

$$f'(x) = P'(x). \quad (6.1)$$

Аналогично находят производные высших порядков функции  $f(x)$ .

Если для интерполирующей функции  $P(x)$  известна погрешность

$$R(x) = f(x) - P(x), \quad (6.2)$$

то погрешность производной  $P'(x)$  выражается формулой

$$r(x) = f'(x) - P'(x) = R'(x). \quad (6.3)$$

Приближенное дифференцирование – операция менее точная, чем интерполирование: близость ординат кривых  $y = f(x)$  и  $y = P(x)$  на отрезке  $[a, b]$  не гарантирует на нем близости производных  $f'(x)$  и  $P'(x)$ , т.е. малого расхождения угловых коэффициентов касательных к этим кривым при одинаковых значениях аргумента (рис. 6.1).

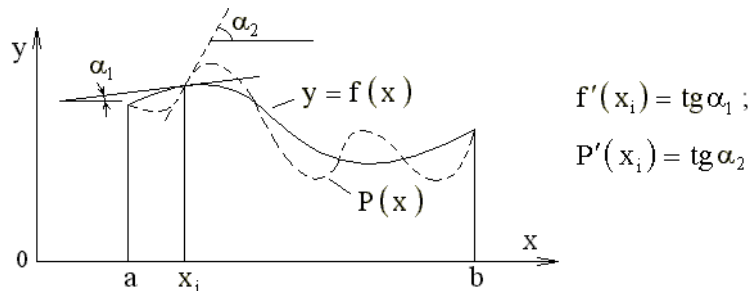


Рисунок 6.1 – Производные исходной функции  $y = f(x)$  и интерполирующего ее полинома  $P(x)$

### 2. 6. 2 Численное дифференцирование для равноотстоящих точек

Пусть точки  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  – равноотстоящие (рис. 6.2), т.е.  $x_{i+1} - x_i = h$ ,  $(i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$  и для функции  $y = y(x)$  известны значения  $y_i = y(x_i)$ ,  $(i = 0, 1, \dots, n)$ . Пусть  $\frac{x-x_0}{h} = q$  или

$$x = x_0 + qh \quad (\text{при } x_0 \leq x < x_1 \quad 0 \leq q < 1). \quad (6.4)$$

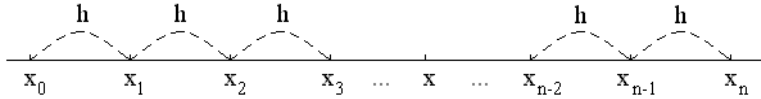


Рисунок 6.2 – Пояснение к формулам (6.4)

Для данной системы узлов  $x_i$  интерполяционный полином Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} y_i \cdot q^{[n+1]}}{i! (n-i)! \cdot q^{-i}}, \quad (6.5)$$

где  $q^{[n+1]} = q \cdot (q-1) \cdot (q-2) \cdot \dots \cdot (q-n)$  – обобщенная степень числа  $q$ . Дифференцирование выражения (6.5) с учетом того, что  $\frac{dx}{dq} = h$ , дает

$$y'(x) \approx L'_n(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i! (n-i)!} \cdot \frac{d}{dq} \left\{ \frac{q^{[n+1]}}{q-i} \right\}. \quad (6.6)$$

Для оценки погрешности

$$r_n(x) = y'(x) - L'_n(x)$$

используют формулу

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad (6.7)$$

где

$$\prod_{i=0}^n (x - x_i) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = \prod_{i=0}^n (x - x_i),$$

а  $\xi = f(\xi)$  – промежуточное значение между точками  $x_0, x_1, \dots, x_n$  и  $x$ . Погрешность производной в узлах есть

$$R'_n(x_i) = (-1)^{n-i} h^n \frac{i! (n-i)!}{(n+1)!} \cdot y^{(n+1)}(\xi), \quad (6.8)$$

где  $\xi$  – промежуточное значение между точками  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

Пример. Произвести расчет для  $n = 2$  (три точки).

Из формулы (6.5) следует:

$$L_2(x) = \frac{1}{2} y_0 \cdot (q-1)(q-2) - y_1 q(q-2) + \frac{1}{2} y_2 \cdot q(q-1).$$

Тогда, с учетом  $\frac{dq}{dx} = h^{-1}$  можно записать:

$$y'(x) \approx L'_2(x) = \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{2} y_0 (2q-3) - y_1 (2q-2) + \frac{1}{2} y_2 (2q-1) \right].$$

В частности, для производных  $y'(x_i) = y'_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) получают:

$$\left. \begin{aligned} y'_0 &= \frac{1}{2h} (-3y_0 + 4y_1 - y_2) & a) \\ y'_1 &= \frac{1}{2h} (-y_0 + y_2) & б) \\ y'_2 &= \frac{1}{2h} (y_0 - 4y_1 + 3y_2) & в) \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

с соответствующими погрешностями:

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{3} h^2 y'''(\xi_0), & a) \\ r_1 &= -\frac{1}{6} h^2 y'''(\xi_1), & б) \\ r_2 &= \frac{1}{3} h^2 y'''(\xi_2) & в) \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Из (6.9) и (6.10) следует, что *более простую структуру и повышенную точность имеют формулы для вычисления центральной производной* (производной в средней точке при нечетном числе точек).

## 2.7 Численное интегрирование функций

### 2.7.1 Постановка задачи

Задача численного интегрирования функции заключается в вычислении значения определенного интеграла по ряду значений подынтегральной функции. Численное вычисление однократного интеграла называется *механической квадратурой*, а соответствующие формулы – *квадратурными формулами*. Обычный прием механической квадратуры состоит в том, что подынтегральную функцию  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  заменяют интерполирующей функцией  $\varphi(x)$  простого вида (например, полиномом), а затем приближенно полагают:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (7.1)$$

Для функции  $\varphi(x)$  интеграл  $\int_a^b \varphi(x) dx$  должен вычисляться непосредственно. Если функция  $f(x)$  задана аналитически, ставят вопрос о погрешности формулы (7.1). В качестве аппроксимирующей функции рассматривают интерполяционный полином Лагранжа.

### 2.7.2 Квадратурные формулы с равноотстоящими узлами интерполирования

Для функции  $y = f(x)$  требуется вычислить интеграл  $\int_a^b y dx$ . Выбирают шаг  $h = (b-a)/n$  и разбивают отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных частей с помощью равноотстоящих точек

$$x_0 = a, \quad x_i = x_0 + ih \quad (i = \overline{1, n-1}), \quad x_n = b.$$

Вводят обозначение  $y_i = f(x_i)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) и заменяют функцию  $y$  интерполяционным полиномом Лагранжа, в результате получают приближенную линейную квадратурную формулу



$$\int_{x_0}^{x_n} y dx = \sum_{i=0}^n A_i y_i, \quad (7.2)$$

где  $A_i$  – некоторые неопределенные коэффициенты.

### 2.7.3. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

Выражения для коэффициентов  $A_i$  в (7.2) записывают в виде:

$$A_i = (b-a) H_i^n,$$

где постоянные (коэффициенты Котеса) определяются как

$$H_i^n = \frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq \quad (i=0, 1, \dots, n), \quad (7.3)$$

$q = \frac{x-x_0}{h}$ ;  $q^{[n+1]}$  – обобщенная степень числа  $q$ .

Квадратурная формула (7.2) при этом принимает вид

$$\int_a^b y dx = (b-a) \sum_{i=0}^n H_i^n y_i, \quad (7.4)$$

где  $h = \frac{b-a}{n}$  и  $y_i = f_i(a+ih)$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ).

### 2.7.4 Квадратурная формула трапеций и ее остаточный член

Из (7.3) получают значения коэффициентов Котеса при  $n=1$ :

$$H_0^1 = -\int_0^1 \frac{q(q-1)}{q} dq = -\frac{1}{2}; \quad H_1^1 = \int_0^1 q dq = \frac{1}{2}. \quad (7.5)$$

Подставляя (7.5) в (7.4), получают формулу трапеций (рис. 7.1):

$$\int_{x_0}^{x_1} y dx = \frac{h}{2} \cdot (y_0 + y_1). \quad (7.6)$$

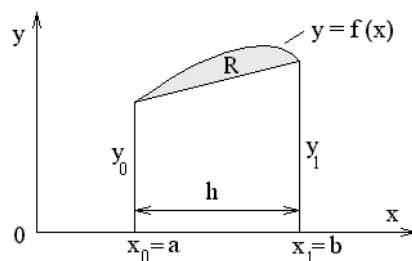


Рисунок 7.1 – К формуле трапеций

Если  $y \in C^{(2)}[a, b]$ , то остаточный член равен:

$$R = -\frac{h^3}{12} y''(\xi), \quad \text{где} \quad \xi \in [x_0, x_1]. \quad (7.7)$$

### 2.7.5 Квадратурная формула Симпсона и ее остаточный член

Из (7.3) при  $n=2$  следует:

$$\left. \begin{aligned} H_0^2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 (q-1)(q-2) dq = \frac{1}{4} \left( \frac{8}{3} - 6 + 4 \right) = \frac{1}{6}; \\ H_1^2 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \int_0^2 q(q-2) dq = \frac{2}{3}; \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

$$H_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 q(q-1) dq = \frac{1}{6}.$$

С учетом зависимости  $x_2 - x_1 = 2h$ , из (7.4) и (7.8) получают:

$$\int_{x_0}^{x_2} y dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (7.9)$$

Формула (7.9) называется *формулой Симпсона*. Геометрически эта формула получается в результате замены кривой  $y = f(x)$  параболой  $L_2(x)$ , проходящей через три точки  $M_0(x_0, y_0)$ ,  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  (рисунок 7.2).

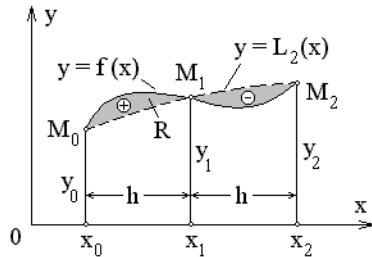


Рисунок 7.2 – К формуле Симпсона

Если  $y \in C^{(4)}[a, b]$ , то остаточный член формулы Симпсона

$$R = -\frac{h^5}{90} y^{(4)}(\xi), \quad \text{где } \xi \in (x_0, x_2). \quad (7.10)$$

Остаточный член, определяемый по формуле (7.10), обращается в нуль для полиномов второй и третьей степени. Поэтому формула Симпсона при относительно малом числе ординат обладает повышенной точностью.

### 2.7.7 Общая формула трапеций

Для вычисления интеграла  $\int_a^b y dx$  промежутки интегрирования  $[a, b]$  делят на  $N$  равных частей  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ , ...,  $[x_{N-1}, x_N]$ , к каждой применяют формулу (7.6). Полагая  $h = \frac{b-a}{N}$  и обозначая через  $y_i = f(x_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) значения подынтегральной функции в точках  $x_i$ , получают

$$\int_a^b y dx = h \left( \frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{N-1} + \frac{y_N}{2} \right). \quad (7.11)$$

При  $y \in C^{(2)}[a, b]$ , остаточный член формулы (7.11) равен

$$R = -\frac{N h^3}{12} y''(\xi) = -\frac{(b-a) h^2}{12} y''(\xi), \quad \xi \in [a, b] \quad (7.12)$$

### 2.7.8 Общая формула Симпсона

Пусть  $N = 2m$  – четное число и  $y_i = f(x_i)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ) – значения функции  $y = f(x)$  для равноотстоящих точек  $(x_0, x_1, \dots, x_N)$ , где  $x_0 = a$ ,  $x_N = b$  с шагом

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{b-a}{2m}.$$

Применяя формулу Симпсона к каждому удвоенному промежутку  $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2m-2}, x_{2m}]$  длины  $2h$ , получают *общую формулу Симпсона*

$$\int_a^b y \, dx = \frac{h}{3} [(y_0 + y_N) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2], \quad (7.13)$$

где 
$$\begin{aligned} \sigma_1 &= y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1} \\ \sigma_2 &= y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2} \end{aligned}.$$

При  $y \in C^{(4)}[a, b]$ , *остаточный член общей формулы Симпсона* равен

$$R = -\frac{mh^5}{90} y^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} y^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]. \quad (7.14)$$

Если задана предельная допустимая погрешность  $\varepsilon > 0$ , то из (7.14) можно определить шаг  $h$ :

$$h < \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)M_4}},$$

где  $M_4 = \max |y^{(4)}(x)|$ , т.е.  $h$  имеет порядок  $\sqrt[4]{\varepsilon}$ .

Когда оценка погрешности (7.14) затруднительна, применяют двойной пересчет с шагами  $h$  и  $2h$ . При этом считают, что совпадающие десятичные знаки принадлежат точному значению интеграла.

## 2. 8 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

### 2. 8. 1 Общие сведения

Пусть на отрезке  $[a, b]$  требуется найти функцию  $y = y(x)$ , удовлетворяющую уравнению

$$y' = f(x, y) \text{ и начальному условию } y(x_0) = y_0.$$

Здесь  $f(x, y)$  – заданная непрерывная функция заданных аргументов.

Решить приведенную задачу численно – это значит для заданной последовательности чисел  $x_0, x_1, \dots, x_n$  из отрезка  $[a, b]$  и числа  $y_0$ , не находя самого решения  $y = y(x)$ , вычислить (приблизленно) значения  $y_0, y_1, \dots, y_n$  этого решения в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

В этом случае можно искомую интегральную функцию  $y = y(x)$  заменить ломаной, вершинами которой являются точки  $M_i(x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$ ; при условии, что направление отрезка  $[M_i, M_{i+1}]$  совпадает с направлением интегральной кривой в точке  $M_i$ . Иначе говоря, необходимо, чтобы

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \quad x_i = x_0 + ih, \quad h = x_{i+1} - x_i, \quad i = \overline{0, n-1} \quad (8.1)$$

Из (8.1) следует:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i). \quad (8.2)$$

Формула (8.3), которую называют формулой Эйлера, позволяет вычислить значения  $y(x_i)$ , т.е. построить ломаную, аппроксимирующую искомую интегральную кривую (Рис. 8.1). Нетрудно показать, что погрешность формулы (1) равна  $O(h^2)$ .

### 2. 8. 2 Модификации метода Эйлера

Более точным является *усовершенствованный метод Эйлера*, когда сначала вычисляют промежуточные значения

$$x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{h}{2}, \quad y_{k+\frac{1}{2}} = y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k), \quad (8.3)$$

а потом значения:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}). \quad (8.4)$$

Другой модификацией метода Эйлера является *усовершенствованный метод Эйлера-Коши*. Его сущность заключается в следующем: сначала выбирают «грубое» приближение к решению –  $\tilde{y}_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$ , затем, исходя из данного выражения, вычисляют  $\tilde{f}_{k+1} = f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})$ , а потом приближенно полагают, что

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})}{2}. \quad (8.5)$$

Усовершенствованный метод Эйлера можно еще более уточнить, применив *итерационную обработку* каждого значения  $y_k$ . Исходя из «грубого» приближения  $y_{k+1}^{(0)} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$  строят итерационный процесс вида:

$$y_{k+1}^{(s)} = y_k + \frac{h}{2} \cdot [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(s-1)})], \quad i = 1, 2, \dots \quad (8.6)$$

Процесс итерации продолжают до тех пор, пока два последующих приближения  $y_{k+1}^{(m)}$  и  $y_{k+1}^{(m+1)}$  не будут совпадать в соответствующих десятичных знаках. После этого полагают  $y_{k+1} \approx y_{k+1}^{(m)}$  – общая часть приближений  $y_{k+1}^{(m)}$  и  $y_{k+1}^{(m+1)}$ .

Метод Эйлера с итерационной обработкой дает на каждом шагу погрешность порядка  $h^3$  и нередко используется в вычислительной практике.

### 2. 8. 3 Метод Рунге-Кутты

Метод Рунге-Кутты характеризуется повышенной точности и принадлежит к многшаговым методам численного интегрирования задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0. \quad (8.7)$$

Пусть  $h$  – шаг интегрирования. Вычисление приближенного значения  $y_{k+1}$  при решении задачи Коши в точке  $x_{k+1}$  методом Рунге-Кутты заключается в выполнении операций, связанных с определением на каждом  $k$  – ом шаге коэффициентов

$$k_1 = h \cdot f(x_k, y_k),$$

$$k_2 = h \cdot f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}),$$

$$k_3 = h \cdot f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}), \quad (8.8)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_k + h, y_k + k_3);$$

и далее значений

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (8.9)$$

**Пример.** Найти значения функции  $y = f(x)$  – решения уравнения

$y'(x) = y(x) - 4x + 3$  при  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 3$ ,  $n = 3$  и  $h = 0.1$ .

Решение начинают с вычисления коэффициентов  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_4$  для  $x_0$  и  $y_0$ :

$$k_1 = h \cdot F(x_0, y_0) = 0.1 \cdot 6 = 0.6;$$

$$k_2 = h \cdot F(x_0 + 0.05, y_0 + 0.3) = 0.1 \cdot (3.3 - 4 \cdot 0.05 + 3) = 0.61;$$

$$k_3 = h \cdot F(x_0 + 0.05, y_0 + 0.305) = 0.1 \cdot (3.305 - 4 \cdot 0.05 + 3) = 0.6105;$$

$$k_4 = h \cdot F(x_0 + 0.1, y_0 + 0.6105) = 0.1 \cdot (3.6105 - 4 \cdot 0.1 + 3) = 0.62105.$$

$y_1$  находят по формуле (8.9):

$$y_1 = 3 + \frac{1}{6}(0.6 + 2 \cdot 0.61 + 2 \cdot 0.6105 + 0.62105) = 3.61034.$$

Далее вычисляют коэффициенты  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_4$  для новых значений  $x_1 = 0.1$  и  $y_1 = 3.61034$ :

$$k_1 = h \cdot F(x_1, y_1) = 0.621034;$$

$$k_2 = h \cdot F(x_1 + 0.05, y_1 + 0.310517) = 0.63209;$$

$$k_3 = h \cdot F(x_1 + 0.05, y_1 + 0.31605) = 0.632635;$$

$$k_4 = h \cdot F(x_1 + 0.1, y_1 + 0.632635) = 0.6442975.$$

Рассчитывают следующее значение функции:

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 4.2428.$$

Для определения  $y_3$  вычисляют  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_4$  с учетом значений  $x_2 = 0.2$  и  $y_2 = 4.2428$ :

$$k_1 = 0.644280, \quad k_2 = 0.65649, \quad k_3 = 0.65711 \text{ и } k_4 = 0.66991.$$

$$\text{Тогда } y_3 = 4.2428 + \frac{1}{6}(0.64428 + 2 \cdot 0.65649 + 2 \cdot 0.65711 + 0.66991) = 4.89971.$$

## 2. 9 Одномерная оптимизация

### 2. 9. 1 Общие сведения

Пусть функция  $f(x)$  определена на  $P \subseteq E_1$ . Задачей одномерной оптимизации называют задачу, в которой требуется найти

$$\max(\min)f(x), \quad x \in P.$$

Решением или точкой максимума (минимума) задачи называют точку  $x^* \in P$  такую, что

$$f(x^*) \geq (\leq) f(x) \text{ для всех } x \in P.$$

Методы одномерной оптимизации условно подразделяют на три группы. К *первой* группе относят методы, основанные на вычислении значений самой функции  $f(x)$  (*методы нулевого порядка*). Вторую группу составляют методы, использующие значения и функции, и ее первой производной (*методы первого порядка*). К *третьей* группе принадлежат методы, использующие значения функции, ее первой и второй производной (*методы второго порядка*).

В дальнейшем предполагается, что максимизируемая функция, определенная на множестве  $P$ , является унимодальной. Это значит, что существует единственная точка  $x^*$  ее максимума на  $P$  и для любых  $x_1, x_2 \in P$ :

$$f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x^*), \text{ если } x_1 \leq x_2 \leq x^*$$

$$f(x^*) \geq f(x_1) \geq f(x_2), \text{ если } x^* \geq x_1 \geq x_2$$

Другими словами, унимодальная функция монотонно возрастает слева от точки максимума и монотонно убывает справа от нее.

Предположение об унимодальности функции в окрестности точки  $x^*$  естественно, поэтому получение информации о таком промежутке является важным этапом

процедуры оптимизации. При использовании методов одномерной оптимизации обычно выделяют два этапа: поиск отрезка, содержащего точку максимума, и уменьшение длины этого отрезка до заранее установленной величины (уточнение координаты точки максимума на данном отрезке).

### 2. 9. 2 Поиск отрезка, содержащего точку максимума

#### Алгоритм Свенна

Исходные данные:  $x_0$  – начальная точка,  $h$  – шаг поиска ( $h > 0$ ).

Шаг 1. Вычислить  $f(x_0)$ ;  $f(x_0 + h)$ ;  $f(x_0 - h)$ ;  $k = 1$ .

Шаг 2. Если  $f(x_0 - h) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + h)$ , то  $x_1 = x_0 + h$ , перейти к шагу 4.

Шаг 3. Если  $f(x_0 - h) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + h)$ , то  $x_1 = x_0 - h$ ,  $h = -h$ , перейти к шагу 4, в противном случае ( $f(x_0 - h) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + h)$ ),  $a = x_0 - h$ ;  $b = x_0 + h$ , конец.

Шаг 4.  $x_{k+1} = x_k + 2^k h$ , вычислить  $f(x_{k+1})$ .

Шаг 5. Если  $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$ , то  $k = k + 1$ , перейти к шагу 4.

Шаг 6. Если  $h > 0$ , то  $a = x_{k-1}$ ,  $b = x_{k+1}$ , конец, в противном случае  $a = x_{k+1}$ ,  $b = x_{k-1}$ , конец.

Случай  $f(x_0 - h) \geq f(x_0) \leq f(x_0 + h)$  (шаг 3) не рассматривается, т.к. он противоречит предположению об унимодальности функции  $f(x)$ .

Уменьшение длины отрезка, содержащего точку максимума, достигается путем последовательного исключения частей этого отрезка. Величина интервала, исключаемого на каждом шаге, зависит от расположения двух пробных точек внутри отрезка. Поскольку координата точки максимума заранее неизвестна, целесообразно размещать пробные точки таким образом, чтобы обеспечивать уменьшение длины отрезка в одном и том же отношении.

### 2. 9. 3 Дихотомический поиск (метод деления отрезка пополам)

Пробные точки  $y, z$  на каждом шаге этого метода выбираются как:

$$y = (a + b) / 2 - \delta; \quad z = (a + b) / 2 + \delta,$$

где  $\delta$  – параметр такой, что  $0 < \delta < (b - a)$ .

При малых  $\delta$  каждая из пробных точек делит отрезок почти пополам, т.е. исключению будет подлежать почти половина отрезка.

#### Алгоритм.

Исходные данные: отрезок  $[a; b]$ , содержащий точку максимума; параметр  $\delta$  и параметр окончания счета  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 2\delta$ ).

Шаг 1.  $a_1 = a$ ;  $b_1 = b$ ;  $k = 1$ .

Шаг 2. Если  $b_k - a_k < \varepsilon$ ,  $x^* \in [a_k, b_k]$ , конец.

Шаг 3.

$$y = (a_k + b_k) / 2 - \delta; \quad z = (a_k + b_k) / 2 + \delta$$

$$A = f(y); \quad B = f(z).$$

Шаг 4. Если  $A > B$ , то  $a_{k+1} = a_k$ ;  $b_{k+1} = z$ ; в противном случае  $a_{k+1} = y$ ;  $b_{k+1} = b_k$

Шаг 5.  $k = k + 1$ , перейти к шагу 2.

На каждой итерации дихотомического поиска производят два вычисления значения функции и после  $n$  вычислений ( $n/2$  итераций) длина начального интервала уменьшается приблизительно в  $2^{n/2}$  раз.

### 2. 9. 4 Метод «золотого» сечения

«Золотым» сечением отрезка называется деление отрезка на две неравные части так, чтобы отношение длины всего отрезка к длине большей части равнялось отношению длины большей части к длине меньшей части отрезка. Золотое сечение отрезка  $[a;b]$  проводится двумя точками  $y$  и  $z$ , симметричными относительно середины отрезка.

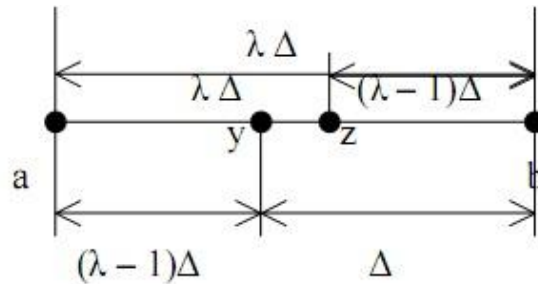


Рисунок 9.1– Метод «золотого» сечения

$$\frac{b-a}{b-y} = \frac{b-y}{y-a} = \frac{b-a}{z-a} = \frac{z-a}{b-z} = \lambda = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,6180\dots$$

Отсюда

$$y = (\lambda - 1)a + (\lambda - 1)^2 b = 0,618a + 0,382b$$

$$z = (\lambda - 1)^2 a + (\lambda - 1)b = 0,382a + 0,618b$$

Точка  $y$  производит «золотое» сечение отрезка  $[a;z]$ , а точка  $z$  производит «золотое» сечение отрезка  $[y;b]$ . На этом свойстве, позволяющем на каждой итерации вычислить значение функции лишь в одной пробной точке, основан алгоритм метода.

#### Алгоритм.

Исходные данные:  $[a;b]$  – отрезок, содержащий точку максимума;  $\varepsilon$  – параметр окончания счёта.

Шаг 1.  $\lambda = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ;  $k=1$ ;  $a_k = a$ ;  $b_k = b$ ;

$$y = (\lambda - 1)a_k + (\lambda - 1)^2 b_k; A = f(y);$$

$$z = (\lambda - 1)^2 a_k + (\lambda - 1)b_k; B = f(z).$$

Шаг 2. Если  $A > B$ , то перейти к шагу 4.

Шаг 3.  $a_{k+1} = y$ ;  $b_{k+1} = b_k$ ;

$$y = z; A = B;$$

$$z = (\lambda - 1)^2 a_{k+1} + (\lambda - 1)b_{k+1};$$

$B = f(z)$ , перейти к шагу 5.

Шаг 4.  $a_{k+1} = a_k$ ;  $b_{k+1} = z$ ;  $z = y$ ;  $B = A$ ;

$$y = (\lambda - 1)a_{k+1} + (\lambda - 1)^2 b_{k+1};$$

$$A = f(y).$$

Шаг 5. Если  $b_{k+1} - a_{k+1} < \varepsilon$ , то

$$x^* \in [a_{k+1}; b_{k+1}], \text{ конец.}$$

Шаг 6.  $k = k+1$ , перейти к шагу 2.

На каждой итерации метода «золотого» сечения производится лишь одно вычисление значения функции. При этом длина полученного в результате одной итерации отрезка составит  $(\lambda-1)\Delta$  где  $\Delta$  – длина исходного интервала.

Если сравнить методы дихотомического поиска и «золотого» сечения, используя в качестве критерия эффективности  $F = \Delta_n / \Delta$  – относительное уменьшение интервала после  $n$  вычислений значений функции  $f(x)$ , где  $\Delta_n$  – длина интервала, полученного после  $n$  вычислений, то  $F = (0,5)^{n/2}$  в случае дихотомического поиска и  $F = (0,6180)^n$  для метода золотого сечения, т.е. метод золотого сечения эффективнее.

### 2. 9. 5 Метод средней точки

Для отыскания корня уравнения

$$f'(x) = 0$$

которому соответствует точка максимума унимодальной и дифференцируемой на заданном отрезке функции  $f(x)$ , используют алгоритм исключения интервалов, на каждой итерации которого рассматривается лишь одна точка  $z$ .

Если в точке  $z$  выполняется условие

$$f'(x) > 0$$

то с учётом предположения об унимодальности утверждают, что точка максимума не может находиться левее точки  $z$ , следовательно, интервал  $x \leq z$  может быть исключён. С другой стороны, если  $f'(x) < 0$  то точка максимума не может находиться правее точки  $z$ , т.е. исключению подлежит интервал  $x \geq z$ . Эти рассуждения составляют основу метода (поиск Больцмана).

#### Алгоритм.

Исходные данные: точки  $a$  и  $b$  такие, что  $f'(a) > 0, f'(b) < 0$ ,  $\varepsilon$  – параметр окончания счёта.

Шаг 1.  $z = \frac{a+b}{2}$ . Вычислить  $f'(z)$ .

Шаг 2. Если  $|f'(z)| \leq \varepsilon$ , то  $x^* \approx z$ , конец.

Шаг 3. Если  $f'(z) > 0$  то  $a=z$ , перейти к шагу 1, иначе  $b=z$ , перейти к шагу 1.

### 2. 9. 6 Метод хорд (секущих)

При реализации метода учитывается не только знак производной, но и её значение. Метод заключается в решении уравнения

$$f'(x) = 0$$

методом хорд и поэтому носит тоже название.

Пусть знаки производной унимодальной функции  $f(x)$  на концах отрезка  $[a;b]$  различны:  $f'(a) > 0, f'(b) < 0$ .

## 2. 10 Многомерная оптимизация

### 2. 10. 1 Общие сведения



Один из подходов к задаче поиска экстремума функции  $f(\bar{x})$  векторного аргумента размерности  $n$  (как и в случае одномерного поиска) заключается в решении системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (10.1)$$

получающейся при использовании необходимого условия экстремума. Методы для решения систем нелинейных уравнений, описанные в п. 2.3, могут плохо сходиться.

Другой подход заключается в построении такой последовательности  $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \dots$ , для которой значения функции  $f$  образуют убывающую сходящуюся последовательность. Такие методы называют *прямыми методами* решения задач оптимизации. При этом последовательность векторов  $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(N)}$ , удовлетворяющих условию  $f(\bar{x}^{(0)}) > f(\bar{x}^{(1)}) > \dots > f(\bar{x}^{(N)})$ , называется *релаксационной*, а методы построения этих последовательностей – методами спуска.

В методах спуска точки релаксационной последовательности вычисляются следующим образом:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \alpha_k \bar{p}_k \quad (10.2)$$

где  $\bar{p}^{(k)}$  – направление спуска от точки  $\bar{x}^{(k)}$  к точке  $\bar{x}^{(k+1)}$ ,  $\alpha_k$  – шаг вдоль этого направления. Различные варианты метода спуска отличаются друг от друга способами выбора направления спуска и шага вдоль него.

Методы *второго* порядка (см. раздел 2.9) для получения результата с заданной степенью точности требуют наименьшего числа итераций. Однако вычисление вторых производных может потребовать большого количества вычислительных операций. Поэтому быстрее могут сходиться методы первого и нулевого порядков. Хотя они требуют большего количества итераций, каждая итерация может потребовать меньшего количества арифметических операций, т.е. суммарное количество операций будет меньше. С точки зрения вычислительных затрат эти методы могут оказаться предпочтительнее.

### 2. 10. 1 Градиентные методы

Естественно в формуле (10.2) при поиске минимума функции  $f(\bar{x})$  выбирать в качестве направления спуска то направление, вдоль которого функция убывает скорее всего, т.е. направление антиградиента. Тогда формула (10.2) примет вид

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \alpha_k \bar{f}'(\bar{x}^{(k)}) \quad (10.3)$$

где  $\bar{f}'(\bar{x}^{(k)})$  – градиент функции  $f$  в точке  $\bar{x}^{(k)}$ . Методы спуска, в которых в качестве направления спуска используется направление, совпадающее с антиградиентом, называются *градиентными* и отличаются друг от друга выбором шага вдоль направления спуска. Эти методы являются методами первого порядка.

### 2. 9. 2 Градиентные методы с дроблением шага

Шаг спуска при использовании формулы (10.3) выбирается из условия, что значение функции на каждом шаге меньше, чем на предыдущем, т.е.

$$f(\bar{x}^{(k)}) > f(\bar{x}^{(k)} - \alpha_k \bar{f}'(\bar{x}^{(k)})) \quad (10.4)$$

При этом возникает проблема выбора шага  $\alpha_k$ . Если шаг задать очень малым, таким, что условие будет заведомо выполняться, это может потребовать очень большого числа итераций. Но большой шаг может привести к нарушению условия (10.4), либо привести к колебаниям около точки минимума. Поэтому итерационный процесс, удовлетворяющий условию (10.4) строится следующим образом. Выбирается шаг  $\alpha_0$ , и с этим шагом, постоянным для нескольких итераций, проводится расчет по формуле (10.3) и для  $k$ -й итерации проверяется условие (10.3). Если оно выполняется, то с этим шагом проводят следующие итерации.

Если условие (10.3) не выполняется, то шаг  $\alpha_0$  уменьшается до тех пор, пока условие (10.4) не будет выполнено. Графическая иллюстрация метода приведена на рис. 10.1.

К точке минимума  $\bar{x}^{(k)}$  приближается некоторая ломаная  $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k)}$ , ортогональная в каждой точке соответствующей линии уровня. Эта ломаная называется градиентной кривой и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\bar{x}}{d\alpha} = -\bar{f}'(\bar{x}).$$

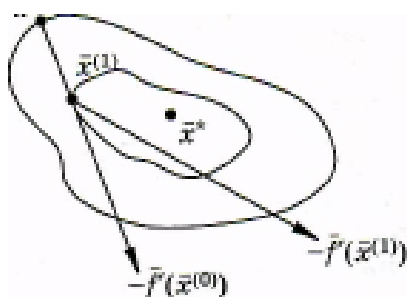


Рисунок 10.1– Иллюстрация к градиентному методу с дроблением шага

### 2. 10. 3 Метод наискорейшего спуска

В методе наискорейшего спуска шаг на каждой итерации выбирается из условия минимума функции  $f(\bar{x})$  вдоль направления спуска, т.е.

$$f(\bar{x}^{(k)} - \alpha_k \bar{f}'(\bar{x}^{(k)})) = \min_{\alpha} f(\bar{x}^{(k)} - \alpha \bar{f}'(\bar{x}^{(k)}))$$

В этом методе на каждой итерации решают задачу одномерной оптимизации, что усложняет алгоритм и требует дополнительных вычислений. Однако метод дает выигрыш, связанный с движением вдоль направления спуска, которое осуществляется с оптимальным шагом.

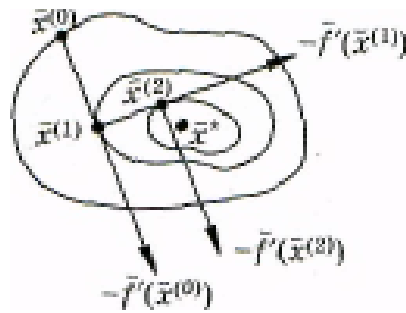


Рисунок 10.2– Иллюстрация к методу наискорейшего спуска

Геометрическая иллюстрация метода приведена на рис. 10.2, где каждая последующая точка находится как точка касания антиградиента и линии минимального уровня в данном направлении. Звенья градиентной кривой в этом случае ортогональны друг другу. Действительно, шаг  $\alpha$  на каждой итерации выбирается из условия минимума по  $\alpha$  функции

$$\varphi(\alpha) = f(\bar{x}^{(k)}) - \alpha \bar{f}'(\bar{x}^{(k)}).$$

Дифференцируя  $\varphi$  по  $\alpha$ , получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} [f(\bar{x}^{(k)}) - \alpha \bar{f}'(\bar{x}^{(k)})] = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha} = -\bar{f}'(\bar{x}^{(k+1)}) \bar{f}'(\bar{x}^{(k)}) = 0$$

т. е. направления спуска на двух последовательных итерациях ортогональны.

#### 2. 10. 4 Метод покоординатного спуска

В данном случае спуск осуществляют не по всем координатам одновременно, а последовательно по каждой из них следующим образом.

Пусть  $\bar{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  – точка начального приближения (здесь нижний индекс – номер координаты). Осуществляют спуск по первой координате  $x_1$ . Для этого фиксируют все координаты, кроме первой, вычисляют частную производную функции  $f$  по первой координате  $\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}=\bar{x}^{(0)}}$  и находят следующее приближение:

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} - \alpha_1 \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}=\bar{x}^{(0)}} \cdot \bar{e}_1$$

где  $\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$  – единичный вектор оси  $x_1$ .

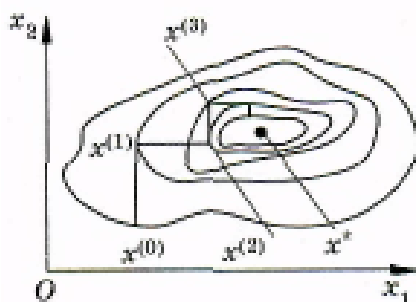


Рисунок 10.3 – Иллюстрация к методу координатного спуска

Следующая итерация происходит аналогично: фиксируются все координаты, кроме  $x_2$ , и  $\bar{x}^{(2)}$  вычисляется по формуле

$$\bar{x}^{(2)} = \bar{x}^{(1)} - \alpha_2 \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}=\bar{x}^{(1)}} \cdot \bar{e}_2,$$

где  $\bar{e}_2 = (1, 0, \dots, 0)$  – единичный вектор оси  $x_2$ .

Таким образом, в методе покоординатного спуска на каждой итерации меняется только одна координата, т. е. спуск осуществляется по ломаной, состоящей из отрезков прямых, параллельных осям координат. Геометрическая интерпретация метода для случая функции двух независимых переменных изображена на рис. 10.3. Здесь через  $x^*$  обозначено решение задачи оптимизации.

## 2. 10. 5 Сходимость градиентных методов

В рассмотренных методах последовательность  $f^{(k)}(\bar{x})$  сходится к точке минимума функции  $f(\bar{x})$  из любой точки начального приближения  $\bar{x}^{(0)}$ . Если функция  $f(\bar{x})$  ограничена снизу, ее градиент удовлетворяет *условию Липшица* (т. е. существует постоянная  $R$  такая, что неравенство  $\|f'(\bar{x}) - f'(\bar{y})\| \leq R\|\bar{x} - \bar{y}\|$  справедливо для любых  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , принадлежащих допустимому множеству) и выбор значения шага на каждой итерации производится одним из описанных выше способов.

Теорема гарантирует сходимость либо к нижней грани, либо к стационарной точке. Градиентный метод с выбором шага по (10.3) гарантирует сходимость в точку минимума, если  $f(\bar{x})$  является сильно выпуклой функцией. Скорость сходимости оценивается неравенством

$$\|\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^*\| \leq \frac{M-m}{M+m} \|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*\| \quad (10.5)$$

т. е. итерации сходятся как геометрическая прогрессия со знаменателем прогрессии  $q = (M-m)/(M+m)$ . В качестве  $M$  и  $m$  в (10.5) могут, например, быть взяты максимальное и минимальное значения собственных чисел матрицы  $f''(\bar{x})$ .

В качестве критерия окончания итерационного процесса обычно берется одно из следующих условий:

$$\|\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)}\| \leq \varepsilon, \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right\|_{\bar{x}=\bar{x}^{(k)}} \leq \varepsilon, \quad \|f(\bar{x}^{(k+1)}) - f(\bar{x}^{(k)})\| \leq \varepsilon$$

Если величины  $M$  и  $m$  незначительно отличаются друг от друга, то значение  $q$  мало и скорость сходимости метода достаточно хорошая. Если же  $M \geq m$ , значение  $q$  близко к единице и градиентные методы сходятся плохо. В этом случае рельеф функции носит так называемый овражный характер, т. е. линии уровня отличаются большой кривизной.

**Пример.** Рассмотрим функцию  $f(x, y) = x^2 + 2sy^2$ . Ее линии уровня сильно вытянуты вдоль оси  $x$ . Траектория градиентного спуска для этой функции характеризуется спуском на дно оврага и затем медленным движением вдоль его дна к точке минимума. Изменить рельеф функции можно введением новых переменных, что может изменить характер сходимости итерационного процесса. Так, заменой  $x_1 = x$ ;  $y_1^2 = 2sy^2$  сведем приведенную функцию к функции  $f(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2$  линиями уровня которой являются окружности и градиент направлен в точку минимума функции.

## 2.11 Методы обработки экспериментальных данных

Пусть в процессе эксперимента путем измерений получена таблица некоторой зависимости  $f$ :

$x$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$f(x)$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_n$

Требуется найти формулу, выражающую эту зависимость аналитически. Сформулируем задачу таким образом, чтобы учитывался характер исходной функции: найти функцию  $F$  заданного вида  $y = F(x)$ , принимающую в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$  значения близкие к табличным значениям  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

На практике вид приближающей функции  $F$  определяется следующим образом. По заданной таблице значений  $f(x)$  строится ее точечный график, а потом проводится гладкая кривая, приближенно отображающая характер расположения точек. По полученной кривой определяется вид приближающей функции.

Рассмотрим метод наименьших квадратов, который используется для аппроксимации табличных данных с помощью непрерывной функции.

Выбираем соответствующую зависимость функции от аргумента:

$$y = F(x, a, b, \dots, c). \quad (11.1)$$

Неизвестными параметрами здесь являются  $a, b, \dots, c$ .

Приведем функцию невязок:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n [y_i - F(x_i, a, b, \dots, c)]^2. \quad (11.2)$$

Для того чтобы функция невязки (11.2) достигла минимального значения, необходимо потребовать равенство нулю всех ее частных производных по всем неизвестным параметрам  $a, b, \dots, c$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^n [y_i - F(x_i, a, b, \dots, c) \cdot F'_a(x_i, a, b, \dots, c)] = 0$$

$$\sum_{i=1}^n [y_i - F(x_i, a, b, \dots, c) \cdot F'_b(x_i, a, b, \dots, c)] = 0$$

$$\sum_{i=1}^n [y_i - F(x_i, a, b, \dots, c) \cdot F'_c(x_i, a, b, \dots, c)] = 0$$

если полученную систему уравнений решить относительно параметров  $a, b, \dots, c$ , например, методом Гаусса, мы получим конкретный вид искомой функции  $y = F(x, a, b, \dots, c)$ .

Очевидно, что изменение количества параметров не искажает сущности подхода, а лишь сказывается на количестве уравнений в системе.

Значения найденной функции  $y = F(x, a, b, \dots, c)$  в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  будут отличаться от значений  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . Значения разностей

$$y_i - F(x_i, a, b, \dots, c) = \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, 4};$$

называют отклонениями измеренных значений  $y$  от вычисленных по полученной формуле. Таким образом, можно найти величину

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i. \quad (11.3)$$

Среди нескольких различных приближений одной и той же табличной функции лучшим следует считать то приближение, для которого величина  $\sigma$  принимает наименьшее значение.

### 3 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

#### 3.1 Действия с приближенными числами

**3.1.1** В соответствии с вариантом задания (таблица 3.1) определить абсолютную и относительную погрешности вычисления значений функции  $u$ , считая все знаки операндов  $a, b, c$  и  $d$  верными. Выполнить расчеты, используя формулы (1.12) и (1.5). Результаты вычислений представить в виде (1.4), (1.8), (1.10).

Таблица 3.1- Варианты заданий

Вариант	1	2	3	4	5
$u$	$\frac{a+b}{c+d}$	$\frac{a+b}{cd}$	$ab+cd$	$\frac{a}{b} \cdot (c+d)$	$(a+b) \cdot (c+d)$
$a$	0,2567	5,89762	45,267	0,2879	54,3
$b$	2,005	2,11	0,035	0,56	0,025

c	0,21	0,58967	3,2785	2,5876	3,7
d	3,289437	2,8	0,095	8,235	2,00765
Вариант	6	7	8	9	10
u	$\frac{a-b}{c+d}$	$\frac{a-b}{cd}$	$ab-cd$	$\frac{a}{b} \cdot (c-d)$	$(a-b) \cdot (c+d)$
a	1,007852	4,216	1,2486	0,12862	85,12
b	0,873	2,98	1,02348	0,19	48,4
c	1,25763	0,45	0,4579	2,1486	0,5072
d	0,25	2,16	2,14	1,986	0,12
Вариант	11	12	13	14	15
u	$\frac{a-b}{c-d}$	$\frac{ab}{c-d}$	$abc-d$	$\frac{a}{c} \cdot (b-d)$	$(a-b) \cdot (c-d)$
a	5,37915	2,859	4,219831	4,8526	5,25
b	2,35	1,25	0,85	2,672	5,1279354
c	2,137	5,976	1,089371	1,82	9,54
d	1,98643	3,2	0,52	1,6	1,897264
Вариант	16	17	18	19	20
u	$\frac{a+b}{c-d}$	$\frac{ab}{c+d}$	$abc+d$	$\frac{a}{c} \cdot (b+d)$	$(a+b) \cdot (c-d)$
a	1,14	4,235	1,23	8,24935	85,21
b	3,852198	0,89	54,1867	2,57	0,53
c	2,1867	2,168	0,086	2,97624	2,156
d	1,97	0,21	1,82	3,21	2,1
Вариант	21	22	23	24	25

Продолжение таблицы 3.1

u	$a \cdot (b-c+d)$	$\frac{ab}{cd}$	$a \cdot (b+c-d)$	$\frac{abc}{d}$	$a \cdot (b+c+d)$
a	2,13	1,193	9,985	0,2586	71
b	8,952	0,23	12,67	2,254	0,25
c	6,217624	5,56	1,23	9,86	1,006789
d	0,86	0,78	13,00957	0,277	0,038
Вариант	26	27	28	29	30
u	$a+b+c+d$	$\frac{a}{bcd}$	$a+b-c-d$	$abcd$	$a \cdot (b-c-d)$
a	1,22513	21	12	2,1624	5,213
b	1,07	2,156	0,245	3,185	6,13842
c	6,24387912	4,24	3,29	0,085	2,114733
d	42	3,1	8,5213	5,24	3,254

**3. 1. 2** Составить граф процесса вычисления функции u. Записать выражение для предельной оценки относительной погрешности данного вычислительного процесса с учетом погрешностей округлений. Рассчитать относительную ( $\delta_u$ ) и абсолютную ( $\Delta_u$ ) погрешности, полагая, что погрешности округления не превышают  $0,5 \cdot 10^{-5}$ . Результаты вычислений представить в виде (1.4), (1.8), (1.10).

### 3. 2 Улучшение сходимости числовых рядов

Вычислить сумму числового ряда, улучшив его сходимость

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ где } a_n = \frac{1}{(cn + \beta) \cdot (\mu n + \nu) \cdot (pn + q)}. \quad (\varepsilon = 10^{-5}). \quad (3.2.1)$$

Выполнить расчеты, применяя преобразование Стирлинга - Куммера. Довести число слагаемых N в сумме преобразованного ряда до  $N \in [10, 20]$ .

Таблица 3.2 – Варианты заданий

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	1	1	1	1	1
										0	1	2	3	4	5
$\alpha$	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2
$\beta$	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	1	1
$\mu$	1	2	2	2	3	4	4	2	3	3	4	4	2	4	4
$\nu$	0	1	1	3	1	1	3	1	1	2	1	3	1	1	3
$p$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$q$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Продолжение таблицы 3.2

N	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\alpha$	2	3	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\beta$	3	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
$\mu$	4	3	4	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1
$\nu$	1	2	3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$p$	0	0	0	1	1	2	2	3	2	2	4	4	4	4	4
$q$	1	1	1	1	1	1	3	1	3	3	1	3	5	1	3

Используя интегральный признак сходимости (2.5), оцените скорость сходимости ряда (3.2.1).

### 3.3 Приближенное решение нелинейных уравнений

#### 3.3.1 Графически отделить действительные корни уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \quad (3.3.1)$$

Значения коэффициентов a, b и c даны в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Варианты заданий

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	-2	-5	-7	0	-3	-2	-1	-7	3	6
b	-11	-4	7	-7	-10	-5	-10	7	-6	5
c	12	20	15	6	24	6	-8	15	-8	-12
N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	3	-2	-3	0	4	-1	5	1	3	0
b	-10	-19	4	-2	6	-4	8	3	7	1
c	-24	20	-2	-4	4	-6	6	-5	5	-10
N	21	22	23	23	25	26	27	28	29	30
a	4	-1	5	-3	-1	-4	0	-5	1	1
b	9	-1	11	4	0	6	-2	8	-4	3



c	10	-15	15	-2	2	-4	4	-6	6	-4
---	----	-----	----	----	---	----	---	----	---	----

**3.3.2** В соответствии с вариантом задания (таблица 3.3) уточнить значение минимального по абсолютному значению корня уравнения (3.3.2), используя МЛП и МНР, с точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Определить число итераций.

Расчеты выполнять с 5-ю десятичными знаками после запятой (сохраняя один запасной десятичный знак). В качестве правила останова вычислений использовать неравенства (3.12) или (3.13) и (3.17). Нарисовать блок – схему алгоритма решения задачи МЛП и МНР.

### 3.4 Решение систем линейных уравнений

#### 3.4.1 Решить методом исключения Гаусса систему уравнений

$$A\vec{x} = \vec{b}, \quad (3.4.1)$$

где  $A = \begin{bmatrix} 8,30 & 2,62 + \alpha & 4,10 & 1,90 \\ 3,92 & 8,45 & 7,78 - \alpha & 2,46 \\ 3,77 & 7,21 + \alpha & 8,04 & 2,28 \\ 2,21 & 3,65 - \alpha & 1,69 & 6,99 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -10,65 + \beta \\ 12,21 \\ 15,45 - \beta \\ -8,35 \end{bmatrix}.$

Расчеты вести с 8 знаками после запятой. Значения коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  даны в таблице 3.4.1.

Таблица 3.4.1 – Варианты заданий

№	1	2	3	4	5	6
$\alpha$	0,0					
$\beta$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
№	7	8	9	10	11	12
$\alpha$	0,2					
$\beta$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
№	13	14	15	16	17	18
$\alpha$	0,4					
$\beta$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
№	19	20	21	22	23	24
$\alpha$	0,6					
$\beta$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
№	25	26	27	28	29	30
$\alpha$	0,8					
$\beta$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0

**3.4.2** Решить методами Холецкого и Гаусса-Жордана систему уравнений (3.4.1). Расчеты вести с 8 знаками после запятой. Найти значение определителя системы.

#### 3.4.3 Решить систему $A\vec{x} = \vec{b}$ методом квадратных корней, где

$$A = \begin{bmatrix} 5,18 + \alpha & 1,12 & 0,95 & 1,32 & 0,83 \\ 1,12 & 4,28 - \alpha & 2,12 & 0,57 & 0,91 \\ 0,95 & 2,12 & 6,13 + \alpha & 1,29 & 1,57 \\ 1,32 & 0,57 & 1,29 & 4,57 - \alpha & 1,25 \\ 0,83 & 0,91 & 1,57 & 1,25 & 5,21 + \alpha \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 6,19 \\ 3,21 \\ 4,28 - \beta \\ 6,25 \\ 4,95 + \beta \end{bmatrix}.$$

Вычисления вести с пятью знаками после запятой. Значения коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  даны в таблице 3.4.2.

Таблица 3.4.2 – Варианты заданий

№	1	2	3	4	5	6
$\alpha$	0,00					
$\beta$	0,00	0,35	0,70	1,05	1,40	1,75
№	7	8	9	10	11	12
$\alpha$	0,25					
$\beta$	0,00	0,35	0,70	1,05	1,40	1,75
№	13	14	15	16	17	18
$\alpha$	0,50					
$\beta$	0,00	0,35	0,70	1,05	1,40	1,75
№	19	20	21	22	23	24
$\alpha$	0,75					
$\beta$	0,00	0,35	0,70	1,05	1,40	1,75
№	25	26	27	28	29	30
$\alpha$	1,00					
$\beta$	0,00	0,35	0,70	1,05	1,40	1,75

**3. 4. 4** Решить систему уравнений методами простых итераций и Зейделя с точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Определить число итераций.

$$\left. \begin{aligned} 7x + 0,09y - 0,03z &= P, \\ 0,09x + 4y - 0,15z &= Q, \\ 0,04x - 0,08y + 6z &= R \end{aligned} \right\} . \quad (3.4.2)$$

Таблица 3.4.3 – Варианты заданий

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
Q	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
R	17,0	16,9	16,8	16,7	16,6	16,5	16,4	16,3	16,2	16,1
N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P	6,0	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9
Q	8,0	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9
R	16,0	15,9	15,8	15,7	15,6	15,5	15,4	15,3	15,2	15,1
N	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
Q	9,0	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9
R	15,0	14,9	14,8	14,7	14,6	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1

### 3. 5 Интерполирование функций

**3. 5. 1** В соответствии с вариантом задания (таблица 3.5) построить естественный кубический сплайн по значениям функции  $y_i = f(x_i)$ . Рассчитать значение  $f(\xi)$ , используя интерполяцию кубическими сплайнами. Расчеты вести с 6-ю знаками после запятой.

3.5.2. В соответствии с вариантом задания (таблица 3.5) записать интерполяционный полином Лагранжа по значениям функции  $y_i = f(x_i)$ . Рассчитать значение  $f(\xi)$ , используя интерполяционную формулу Лагранжа. Расчеты вести с 6-ю знаками после запятой.

Таблица 3.5 - Варианты заданий

№	$y = f(x)$	Значения $x_i; y_i$						$\xi$
		$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
		$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	
1	$\sin x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,27
		0	0,0998	0,1987	0,2955	0,3894	0,4794	
2	$\sin x$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,54
		0,1987	0,2955	0,3894	0,4794	0,5646	0,6442	
3	$\sin x$	0,3	0,45	0,6	0,75	0,9	1,05	0,52
		0,2955	0,4350	0,5646	0,6816	0,7833	0,8674	
4	$1 + \sin x$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	1,35
		1	1,3894	1,7174	1,9320	1,9996	1,9093	
5	$1 + \sin x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0,31
		1	1,1987	1,3894	1,5646	1,7174	1,8415	
6	$1 + \sin x$	0,1	0,4	0,7	1,0	1,3	1,6	1,25
		1,0998	1,3894	1,6442	1,8415	1,9636	1,9996	
7	$\cos x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0,72
		1	0,9801	0,9211	0,8253	0,6967	0,5403	
8	$\cos x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,16
		1	0,9950	0,9801	0,9553	0,9211	0,8776	
9	$\cos x$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	1,05
		1	0,9211	0,6967	0,3624	-0,0292	-0,4161	
10	$1 - \cos x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,27
		0	0,0050	0,0199	0,0447	0,0789	0,1224	
11	$1 - \cos x$	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,1
		0,0447	0,1224	0,2352	0,3784	0,5464	0,7325	
12	$1 - \cos x$	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	0,

2		0	0,0 447	0,1 747	0,3 784	0,6 376	0,9 293	45
---	--	---	------------	------------	------------	------------	------------	----

Продолжение таблицы 3.5

13	$\ln x$	1	1,25	1,5	1,75	2,0	2,25	1,32
		0	0,2231	0,4055	0,5596	0,6931	0,8109	
14	$\ln x$	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	1,8
		0,4055	0,5306	0,6419	0,7419	0,8329	0,9163	
15	$\ln x$	1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	2,35
		0	0,4055	0,6931	0,9163	1,0986	1,2528	
16	$1 + \ln x$	1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	1,74
		1	1,4055	1,6931	1,9163	2,0986	2,2528	
17	$1 + \ln x$	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,15
		1,4055	1,5306	1,6419	1,7419	1,8329	1,9163	
18	$1 + \ln x$	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	3,75
		1,6931	2,0986	2,3863	2,6094	2,7918	2,9459	
19	$e^x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,16
		1	1,1052	1,2214	1,3499	1,4918	1,6487	
20	$e^x$	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,15
		1,6487	2,0138	2,4596	3,0042	3,6693	4,4817	
21	$e^x$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	1,35
		1	1,6487	2,7183	4,4817	7,3891	12,1825	
22	$2 - e^x$	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	0,75
		0,3513	-0,0138	-0,4596	-1,0042	-1,6693	-2,4817	
23	$2 - e^x$	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,15
		-0,2255	-0,4596	-0,7183	-1,0042	-1,3201	-1,6693	
24	$2 - e^x$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	0,85
		1	0,3513	-0,7183	-2,4817	-5,3891	-10,1825	
25	$tg x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,25
		0	0,1003	0,2027	0,3093	0,4228	0,5463	
26	$tg x$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,76
		0,5463	0,6841	0,8423	1,0296	1,2602	1,5574	
27	$tg x$	1,0	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,07
		1,5574	1,7433	1,9648	2,2345	2,5722	3,0096	
28	$3 - tg x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,23
		3	2,8997	2,7973	2,6907	2,5772	2,4537	
29	$3 - tg x$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	0,48
		2,7973	2,5772	2,3159	1,9704	1,4426	0,4278	
30	$3 - tg x$	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	0,75
		3	2,6907	2,3159	1,7398	0,4278	-11,1014	

**3. 5. 3** По данным таблицы 3.5, записать интерполяционные формулы Лагранжа для случаев кусочно-линейной и кусочно-квадратичной интерполяции. Рассчитать значения  $f(\xi)$ . Расчеты вести с 6-ю знаками после запятой.

**3. 5. 4** Оценить погрешность расчетов по п.п.3.5.1-3.5.3, используя аналитические выражения функций  $y=f(x)$ , приведенные в таблице 3.5.

**3. 5. 5** Сравнить результаты расчетов по п.п.3.5.1 - 3.5.4, считая, что  $\xi$  известно точно. В качестве точного значения функции  $y=f(\xi)$ , приведенной в таблице 3.5, принять ее значение, вычисленное с десятью знаками после запятой.

### 3. 6 Численное дифференцирование функций

**3. 6. 1** В соответствии с вариантом задания (таблица 3.6) вычислить производную функции  $y=f(x)$  в центральном узле по формуле (6.11) ( $n=2$ ). Расчеты выполнять с 6-ю знаками после запятой.

**3. 6. 2** В соответствии с вариантом задания (таблица 3.6) вычислить производную функции  $y=f(x)$  в центральном узле по формуле (6.12) ( $n=4$ ). Расчеты выполнять с 6-ю знаками после запятой.

**3. 6. 3** Сравнить результаты расчетов по п.п.3.6.1 и 3.6.2. В качестве точного значения производной функции  $y=f(x)$  в центральном узле (таблица 3.6) принять ее значение, вычисленное с десятью знаками после запятой.

Таблица 3.6 - Варианты заданий

№	$y=f(x)$	Значения $x_i; y_i$				
		$x_{i-2}$	$x_{i-1}$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_{i+2}$
		$y_{i-2}$	$y_{i-1}$	$y_i$	$y_{i+1}$	$y_{i+2}$
1	$\sin x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
		0	0,0998	0,1987	0,2955	0,3894
2	$\sin x$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
		0,1987	0,2955	0,3894	0,4794	0,5646
3	$\sin x$	0,3	0,45	0,6	0,75	0,9
		0,2955	0,4350	0,5646	0,6816	0,7833
4	$1 + \sin x$	0	0,4	0,8	1,2	1,6
		1	1,3894	1,7174	1,9320	1,9996
5	$1 + \sin x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8
		1	1,1987	1,3894	1,5646	1,7174

Продолжение таблицы 3.6

6	$1 + \sin x$	0,1	0,4	0,7	1,0	1,3
		1,0998	1,3894	1,6442	1,8415	1,9636
7	$\cos x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8
		1	0,9801	0,9211	0,8253	0,6967
8	$\cos x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
		1	0,9950	0,9801	0,9553	0,9211
9	$\cos x$	0	0,4	0,8	1,2	1,6
		1	0,9211	0,6967	0,3624	-0,0292
10	$1 - \cos x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
		0	0,0050	0,0199	0,0447	0,0789
11	$1 - \cos x$	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1
		0,0447	0,1224	0,2352	0,3784	0,5464

12	$1 - \cos x$	0	0,3	0,6	0,9	1,2
		0	0,0447	0,1747	0,3784	0,6376
13	$\ln x$	1	1,25	1,5	1,75	2,0
		0	0,2231	0,4055	0,5596	0,6931
14	$\ln x$	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
		0,4055	0,5306	0,6419	0,7419	0,8329
15	$\ln x$	1	1,5	2,0	2,5	3,0
		0	0,4055	0,6931	0,9163	1,0986
16	$1 + \ln x$	1	1,5	2,0	2,5	3,0
		1	1,4055	1,6931	1,9163	2,0986
17	$1 + \ln x$	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
		1,4055	1,5306	1,6419	1,7419	1,8329
18	$1 + \ln x$	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
		1,6931	2,0986	2,3863	2,6094	2,7918
19	$e^x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
		1	1,1052	1,2214	1,3499	1,4918
20	$e^x$	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3
		1,6487	2,0138	2,4596	3,0042	3,6693
21	$e^x$	0	0,5	1,0	1,5	2,0
		1	1,6487	2,7183	4,4817	7,3891
22	$2 - e^x$	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3
		0,3513	-0,0138	-0,4596	-1,0042	-1,6693
23	$2 - e^x$	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
		-0,2255	-0,4596	-0,7183	-1,0042	-1,3201
24	$2 - e^x$	0	0,5	1,0	1,5	2,0
		1	0,3513	-0,7183	-2,4817	-5,3891

Продолжение таблицы 3.6

25	$tg x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
		0	0,1003	0,2027	0,3093	0,4228
26	$tg x$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
		0,5463	0,6841	0,8423	1,0296	1,2602
27	$tg x$	1,0	1,05	1,1	1,15	1,2
		1,5574	1,7433	1,9648	2,2345	2,5722
28	$3 - tg x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
		3	2,8997	2,7973	2,6907	2,5772
29	$3 - tg x$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
		2,7973	2,5772	2,3159	1,9704	1,4426
30	$3 - tg x$	0	0,3	0,6	0,9	1,2
		3	2,6907	2,3159	1,7398	0,4278

### 3.7 Численное интегрирование функций

**3.7.1** В соответствии с вариантом задания (таблица 3.7) по заданным значениям подынтегральной функции  $y_i = f(x_i)$  рассчитать значение определенного интеграла,  $\int_{x_0}^{x_4} y dx$ , используя общую формулу трапеций (7.11). По формуле (7.12) рассчитать значение остаточного члена определенного интеграла. Расчеты вести с 6-ю знаками после запятой.

**3.7.2** В соответствии с вариантом задания (таблица 3.7) по заданным значениям подынтегральной функции  $y_i = f(x_i)$  рассчитать значение определенного интеграла,  $\int_{x_0}^{x_4} y dx$ , используя общую формулу Симпсона (7.13). По формуле (7.14) рассчитать значение остаточного члена определенного интеграла. Расчеты вести с 6-ю знаками после запятой.

Таблица 3.7 - Варианты заданий

№	$y = f(x)$	Значения $x_i; y_i$				
		$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
		$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
1	$\sin x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
		0	0,0998	0,1987	0,2955	0,3894
2	$\sin x$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
		0,1987	0,2955	0,3894	0,4794	0,5646

Продолжение таблицы 3.7

3	$\sin x$	0,3	0,45	0,6	0,75	0,9
		0,2955	0,4350	0,5646	0,6816	0,7833
4	$1 + \sin x$	0	0,4	0,8	1,2	1,6
		1	1,3894	1,7174	1,9320	1,9996
5	$1 + \sin x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8
		1	1,1987	1,3894	1,5646	1,7174
6	$1 + \sin x$	0,1	0,4	0,7	1,0	1,3
		1,0998	1,3894	1,6442	1,8415	1,9636
7	$\cos x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8
		1	0,9801	0,9211	0,8253	0,6967
8	$\cos x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
		1	0,9950	0,9801	0,9553	0,9211
9	$\cos x$	0	0,4	0,8	1,2	1,6
		1	0,9211	0,6967	0,3624	-0,0292
10	$1 - \cos x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
		0	0,0050	0,0199	0,0447	0,0789
11	$1 - \cos x$	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1
		0,0447	0,1224	0,2352	0,3784	0,5464
12	$1 - \cos x$	0	0,3	0,6	0,9	1,2
		0	0,0447	0,1747	0,3784	0,6376
13	$\ln x$	1	1,25	1,5	1,75	2,0
		0	0,2231	0,4055	0,5596	0,6931

14	$\ln x$	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
		0,4055	0,5306	0,6419	0,7419	0,8329
15	$\ln x$	1	1,5	2,0	2,5	3,0
		0	0,4055	0,6931	0,9163	1,0986
16	$1 + \ln x$	1	1,5	2,0	2,5	3,0
		1	1,4055	1,6931	1,9163	2,0986
17	$1 + \ln x$	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
		1,4055	1,5306	1,6419	1,7419	1,8329
18	$1 + \ln x$	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
		1,6931	2,0986	2,3863	2,6094	2,7918
19	$e^x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
		1	1,1052	1,2214	1,3499	1,4918
20	$e^x$	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3
		1,6487	2,0138	2,4596	3,0042	3,6693
21	$e^x$	0	0,5	1,0	1,5	2,0
		1	1,6487	2,7183	4,4817	7,3891

Продолжение таблицы 3.7

22	$2 - e^x$	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3
		0,3513	-0,0138	-0,4596	-1,0042	-1,6693
23	$2 - e^x$	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
		-0,2255	-0,4596	-0,7183	-1,0042	-1,3201
24	$2 - e^x$	0	0,5	1,0	1,5	2,0
		1	0,3513	-0,7183	-2,4817	-5,3891
25	$\operatorname{tg} x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
		0	0,1003	0,2027	0,3093	0,4228
26	$\operatorname{tg} x$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
		0,5463	0,6841	0,8423	1,0296	1,2602
27	$\operatorname{tg} x$	1,0	1,05	1,1	1,15	1,2
		1,5574	1,7433	1,9648	2,2345	2,5722
28	$3 - \operatorname{tg} x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
		3	2,8997	2,7973	2,6907	2,5772
29	$3 - \operatorname{tg} x$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
		2,7973	2,5772	2,3159	1,9704	1,4426
30	$3 - \operatorname{tg} x$	0	0,3	0,6	0,9	1,2
		3	2,6907	2,3159	1,7398	0,4278

**3.7.3** Выполнить расчеты п.3.7.1 по значениям подынтегральной функции в узлах  $x_0, x_2, x_4$ .

**3.7.4** Выполнить расчеты п.3.7.2 по значениям подынтегральной функции в узлах  $x_0, x_2, x_4$ .

**3.7.5** Для заданной подынтегральной функции записать ее первообразную. Сравнить результаты расчетов по п.п.3.7.1 – 3.7.4, считая, что точным значением



определенного интеграла для функции  $y=f(x)$ , приведенной в таблице 3.7, является его значение, вычисленное непосредственно с десятью знаками после запятой.

### 3.8 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

**3.8.1** Используя метод Эйлера и его модификации решить следующие дифференциальные уравнения с заданными начальными условиями на отрезке  $[a, b]$  при значениях параметров из таблицы 3.8.

Таблица 3.8.1 - Варианты заданий

№	Дифф. уравнение	Нач. условия	$a$	$b$	$h$
1	$y' = y + (1+x) \cdot y^2$	$y(1) = -1.0$ ,	$a = 1.0$ ,	$b = 1.5$ ,	$h = 0.1$ ;
2	$y' = \frac{x+y}{y-x}$ ,	$y(0) = 1.0$ ,	$a = 0.0$ ,	$b = 1.0$ ,	$h = 0.1$ ;
3	$y' = \frac{6-x^2 y^2}{-x^2}$ ,	$y(1) = 2.0$ ,	$a = 1.0$ ,	$b = 1.5$ ,	$h = 0.05$ ;
4	$y' = -\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}$ ,	$y(0) = e$ ,	$a = 0.0$ ,	$b = 0.5$ ,	$h = 0.05$ ;
5	$y' = \frac{1-\sin 2x}{\cos x} \cdot y$ ,	$y(0) = 0.0$ ,	$a = 0.0$ ,	$b = 1.0$ ,	$h = 0.1$ ;
6	$y' = \frac{3y}{2x} + \frac{3}{2} xy^{\frac{1}{3}}$ ,	$y(1) = 0.0$ ,	$a = 1.0$ ,	$b = 2.0$ ,	$h = 0.1$ ;
7	$y' = \frac{2xy^3}{1-x^2 y^2}$ ,	$y(2) = 1.0$ ,	$a = 2.0$ ,	$b = 2.5$ ,	$h = 0.05$ ;
8	$y' = \frac{y^2 \ln x - y}{x}$ ,	$y(2) = 1.0$ ,	$a = 1.0$ ,	$b = 2.0$ ,	$h = 0.1$ ;
9	$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - 0.25y^2$ ,	$y(1) = 2.0$ ,	$a = 1.0$ ,	$b = 2.0$ ,	$h = 0.1$ ;
10	$y' = y + x^2$ ,	$y(0) = 1.0$ ,	$a = 0.0$ ,	$b = 0.5$ ,	$h = 0.5$ ;
11	$y' = xy^3 - x^2$ ,	$y(4) = 0.7$ ,	$a = 4.0$ ,	$b = 5.0$ ,	$h = 0.1$ ;
12	$y' = \sqrt{4x^2 + 1} - 3y^2$ ,	$y(-1) = 0.2$ ,	$a = -1.0$ ,	$b = 1.0$ ,	$h = 0.2$ ;
13	$y' = \cos(1.5x - y^2) - 3.2$ ,	$y(2.6) = 1.8$ ,	$a = 2.6$ ,	$b = 4.6$ ,	$h = 0.2$ ;
14	$y' = x^2 + xy + y^2$ ,	$y(2.0) = 1.2$ ,	$a = 2.0$ ,	$b = 3.0$ ,	$h = 0.1$ ;
15	$y' = e^{-(y^2+1)} + 2x$ ,	$y(0.0) = 0.3$ ,	$a = 0.0$ ,	$b = 0.5$ ,	$h = 0.05$ .

**3. 8.2** Методом Рунге-Кутты найти на отрезке  $[a, b]$  решение следующих дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями и значениями параметров:

Таблица 3.8.2 - Варианты заданий

№	Дифф. уравнение	Нач. условия	$a$	$b$	$h$
1	$y' = \frac{2y}{x} + x,$	$y(1) = 0.0,$	$a = 1.0,$	$b = 2.0,$	$h = 0.1;$
2	$y' = \frac{xy}{1+x^2},$	$y(0) = 2.0,$	$a = 0.0,$	$b = 0.5,$	$h = 0.05;$
3	$y' = y + (1+x)y^2,$	$y(2.0) = 1.2,$	$a = 2.0,$	$b = 3.0,$	$h = 0.1;$
4	$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x},$	$y(1) = 0.0,$	$a = 1.0,$	$b = 2.5,$	$h = 0.1;$
5	$y' = -y \cos x + \cos x \cdot \sin x,$	$y(0.0) = -1.0,$	$a = 0.0,$	$b = 2.0,$	$h = 0.2;$
6	$y' = \frac{x^2 y^2 - (2x+1)y + 1}{x},$	$y(1) = 0.0,$	$a = 1.0,$	$b = 2.5,$	$h = 0.1;$
7	$y' = \frac{1 + e^{\frac{x}{y}}}{e^{\frac{x}{y}}(\frac{x}{y} - 1)},$	$y(0) = 1.0,$	$a = 0.0,$	$b = 2.5,$	$h = 0.1;$
8	$y' = -\frac{y}{x} + \ln xy^2,$	$y(1) = -2.0,$	$a = 1.0,$	$b = 2.5,$	$h = 0.1;$
9	$y' = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2},$	$y(1) = 0.0,$	$a = 1.0,$	$b = 2.5,$	$h = 0.1;$
10	$y' = -\frac{xy+1}{2x^2-1},$	$y(0) = 0.0,$	$a = 0.0,$	$b = 1.5,$	$h = 0.1;$
11	$y' = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1},$	$y(0) = 0.0,$	$a = 0.0,$	$b = 2.0,$	$h = 0.2;$

Продолжение таблицы 3.8.2

12	$y' = -x^2 y^2 + \frac{x^2 - 0.5}{(0.5x^2 + 1)^2},$	$y(0) = 0.0,$	$a = 0.0,$	$b = 1.0,$	$h = 0.1;$
13	$y' = 4.7x - y^3 + 1.8,$	$y(0.6) = 3.4,$	$a = 0.6,$	$b = 2.6,$	$h = 0.2;$
14	$y' = \frac{1}{x^3 y + 1} + 2y,$	$y(1.5) = 2.1,$	$a = 1.5,$	$b = 2.0,$	$h = 0.05;$
15	$y' = x + \frac{1}{\sqrt{11}} \cos y,$	$y(2.1) = 2.5,$	$a = 2.1,$	$b = 3.1,$	$h = 0.1.$

**3. 8. 3** Решить уравнение  $y'=f(x,y)$  на интервале  $[x_0, x^*]$  с начальным условием  $y(x_0)=y_0$

а) методом Эйлера

б) методом Рунге-Кутты

Таблица 3.8.3 - Варианты заданий

№	Дифф. уравнение	Интервал	Нач. условия	$h$
---	-----------------	----------	--------------	-----

16	$y' = x^2 + y$	[0;0,2]	$y_0 = 1.0$	$h = 0.1$
17	$y' = 2x^2 + y$	[0;0,2]	$y_0 = 1.0$	$h = 0.1$
19	$y' = 2x + y$	[0;0,2]	$y_0 = 1.0$	$h = 0.1$
20	$y' = x + 2y$	[0;0,2]	$y_0 = 1.0$	$h = 0.1$
21	$y' = x^2 - y$	[1;1,2]	$y_0 = 0$	$h = 0.1$
22	$y' = x - 2y$	[1;1,2]	$y_0 = 0$	$h = 0.1$
23	$y' = 2(x + y)$	[1;1,2]	$y_0 = 0$	$h = 0.1$
24	$y' = 2x - 3y$	[1;1,2]	$y_0 = 0$	$h = 0.1$
25	$y' = 2x + 3y$	[0;0,2]	$y_0 = 1.0$	$h = 0.1$
26	$y' = x + 3y$	[0;0,2]	$y_0 = 1.0$	$h = 0.1$
27	$y' = 4x + y$	[0;0,2]	$y_0 = 1.0$	$h = 0.1$
28	$y' = 3x - y$	[0;0,2]	$y_0 = 1.0$	$h = 0.1$
29	$y' = 4x - y$	[0;0,2]	$y_0 = 1.0$	$h = 0.1$
30				

### 3.9 Одномерная оптимизация

Методом Свенна найти отрезок, содержащий точку экстремума унимодальной функции  $f(x)$ . Вычислить точку экстремума указанным методом.

Таблица 3.9 - Варианты заданий

№ вар-та	Функция	Вид экстремума	Метод	$\varepsilon$
1	$f(x) = x^2 + 1$	min	Хорд	$\varepsilon = 0,05$
2	$f(x) = 3x - x^2 - 1$	max		
3	$f(x) = 2x - x^2 - 1$	max		
4	$f(x) = 2x^2 + 3$	min		
5	$f(x) = x^2 + x + 1$	min		
6	$f(x) = 10x^2 + 7x + 1$	min	Ньютона-Рафсона	$\varepsilon = 0,01$
7	$f(x) = 15x - 2x^2 + 5$	max		
8	$f(x) = 3 + 7x - 2x^2$	max		
9	$f(x) = 4 - 3x^2$	max		
10	$f(x) = 5 - 4x - x^2$	max		
11	$f(x) = 4 - 5x + x^2$	min	Средней точки	$\varepsilon = 0,05$
12	$f(x) = 2x^2 - 1$	min		
13	$f(x) = 4 - 2x - x^2$	max		
14	$f(x) = 2 - x^2$	max		
15	$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	max	Дихотомического поиска	$\varepsilon = 0,2$
16	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$	min		
17	$f(x) = \ln(x^2 + 1)$	min		
18	$f(x) = x^2 + 2$	min		

19	$f(x)=x^2-3x+1$	min		
20	$f(x)=x^2+x+2$	min		

Продолжение таблицы 3.9

21	$f(x)=3-x-x^2$	max	Золотого сечения	$\varepsilon=0,2$
22	$f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$	max		
23	$f(x)=2x^2-7x-3$	min		
24	$f(x)=\frac{\sqrt{x}-\ln x}{\sqrt{x}}$	min		
25	$f(x)=x^2+4x-5$	min		

### 3.10 Многомерная оптимизация

Найти точку экстремума функции.

Таблица 3.10 – Варианты заданий

№ варианта	Функция	Начальные условия	Примечания
1	$f(x)=2y+xy+y^2+2x+y+1$	$x_0=0; y_0=-1; \alpha=0,5$	Мин, м-д наискорейшего спуска
2	$f(x)=xy+2x^2+2y^2-4x-4y$	$x_0=0; y_0=0$	
3	$f(x)=xy+10y^2-4x-4y$	$x_0=0; y_0=0$	
4	$(x-3y)^2 + (y+1)^2$	$x_0=0; y_0=8$	$\varepsilon=0,15$
5	$(x+y)^2 + (y+4)^2$	$x_0=9; y_0=5$	$\varepsilon=0,3$
6	$f(x)=x^4-4yy+y+4y^2-6x+2$	$x_0=0; y_0=0$	Мин, м-д Ньютона, $\alpha=0,2 \quad \varepsilon=0,1$
7	$f(x)=y+10(y-\sin x)^2$	$x_0=1; y_0=1$	

8	$(x - 4y)^2 + (y + 5)^2$	$x_0=10 ; y_0=-5$	$\varepsilon=0,15$
9	$(x + 5y)^2 + (y - 1)^2$	$x_0=8 ; y_0=10$	$\varepsilon=0,35$
10	$(x - 3y)^2 + (y - 2)^2$	$x_0=4 ; y_0=10$	$\varepsilon=0,25$
11	$f(x)=y+2y^2-4x-4y$	$x_0=0 ; y_0=0$	Мин, м-д сопряженных градиентов
12	$(x + y)^2 + (y + 2)^2$	$x_0=6 ; y_0=-1$	$\varepsilon=0,18$
13	$(x + 3y)^2 + (y + 5)^2$	$x_0=10 ; y_0=10$	$\varepsilon=0,35$
14	$(x + 9y)^2 + (y - 1)^2$	$x_0=-6 ; y_0=5$	$\varepsilon=0,25$
15	$(x - 2y)^2 + (y - 9)^2$	$x_0=15 ; y_0=12$	$\varepsilon=0,15$
16	$(x + y)^2 + (y + 6)^2$	$x_0=10 ; y_0=8$	$\varepsilon=0,18$
17	$(x + y)^2 + (y - 1)^2$	$x_0=5 ; y_0=6$	$\varepsilon=0,15$
18	$(x - 2y)^2 + (y - 3)^2$	$x_0=7 ; y_0=6$	$\varepsilon=0,25$
19	$(x + 2y)^2 + (y - 4)^2$	$x_0=-4 ; y_0=7$	$\varepsilon=0,3$
20	$(x + 2y)^2 + (y - 3)^2$	$x_0=0 ; y_0=10$	$\varepsilon=0,18$
21	$(x - 2y)^2 + (y - 3)^2$	$x_0=-7 ; y_0=-7$	$\varepsilon=0,2$

### 3.11 Методы обработки экспериментальных данных

По данной таблице значений  $x$  и  $y$  найти методом наименьших квадратов две различные эмпирические формулы и сравнить качество полученных приближений:

1)

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	2.6	-0.3	-2	-2.3	-1.5	0.7	3.2

2)

$x$	0	2	4	6	8	10
$y$	5	-1	0.5	1.5	4.5	8.5

3)

$x$	1	2	3	4	5	6
$y$	1.14	2.78	4.07	4.91	5.41	5.52

4)

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	0.71	- 0.01	0.51	0.82	0.88	0.81	0.49

5)

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y$	6	3	1	0.3	-0.1	-0.2	0	0.2	1

6)

$x$	-3	-2	-1	0	1	2
$y$	-1.4	-4.3	-5.2	-4.1	-1.1	4.2

7)

$x$	7	8	9	10	11	12	13
$y$	3.1	4.9	5.3	5.8	6.1	6.7	5.9

8)

$x$	2	4	6	8	10	12
$y$	4.5	7.1	8.2	7.3	9.0	6.2

9)

$x$	0.30	0.91	1.50	2.00	2.20	2.62	3.72	5.11
$y$	6	3	1	0.3	-0.1	-0.2	0	0.2

10)

$x$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$y$	3.02	2.81	2.57	2.39	5.15	7.23	7.00	8.00

11)

$x$	0	7	12	17	22	27	32	37
$y$	100	87.2	72.9	63.2	54.7	47.5	41.4	36.3

12)

$x$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
$y$	1.67	1.32	1.10	0.81	0.48	0.18	-1.10	-0.46	-0.81	-0.15

13)

$x$	0	4	10	15	21	29	36	3	51	68
$y$	66.7	71.0	86.0	98.9	78.4	65.7	51.3	44.0	43.6	29.6

14)

$x$	0	7	12	17	22	27	32	37
$y$	100	87.2	72.9	63.2	54.7	47.5	41.4	36.3

15)

$x$	1	4	9	16	25	27
$y$	0.1	3.5	8.1	14.3	9.0	6.2

## 4 СОДЕРЖАНИЕ И ОФОРМЛЕНИЕ ПОЯСНИТЕЛЬНОЙ ЗАПИСКИ

Заключительным этапом выполнения работы являются оформление пояснительной записки, графического материала и защита студентом курсовой работы в соответствии с утвержденным индивидуальным заданием.

### 4.1 Структура пояснительной записки

Пояснительная записка к курсовому проекту выполняется на стандартных листах формата А4 с одной стороны листа и должна иметь следующую структуру:

1	Титульный лист
2	Индивидуальное задание на выполнение работы
3	Содержание
4	Введение
5	Постановка задачи
6	Содержательная часть работы по отдельным разделам индивидуального задания
7	
8	
9	
10	
11	Заключение
12	Библиографический список
13	Приложения

### 4.2 Содержание разделов пояснительной записки

Титульный лист является первым листом пояснительной записки, с него начинается нумерация страниц, но номер 1 на титульном листе не ставится. Образец титульного листа приведен в приложении А.

Индивидуальное задание на выполнение работы представляет специальный бланк, который необходимо заполнить. Образец задания приведен в приложении Б.

В содержании перечисляют наименования разделов пояснительной записки и номера соответствующих страниц.

Во введении указывают цели и задачи курсового проектирования.

В разделе «Постановка задачи» приводят постановку задачи на курсовое проектирование.

В содержательной части работы по отдельным разделам, соответствующим индивидуальному заданию, описывают алгоритмы решения задач (отмечая их достоинства и недостатки) с основными и промежуточными преобразованиями и подстановкой числовых значений, а также приводят результаты проверки правильности решения.

В разделе «Заключение» должны быть сделаны основные выводы по результатам курсового проектирования.

В разделе "Библиографический список" указывают перечень научно-технических публикаций, нормативных технических документов и других научно-технических материалов, на которые есть ссылки в основном тексте. Если на источник нет ссылки из основного текста, его в список не помещают. Список должен быть приведен в конце текста пояснительной записки, начиная с новой страницы. Библиографические описания в перечне ссылок приводят в порядке, в котором они впервые упоминаются в тексте. Порядковые номера описаний в перечне являются ссылками в тексте (номерные ссылки). Библиографические описания ссылок в перечне приводят в соответствии с действующими стандартами по библиотечному и издательскому делу.

В приложение к пояснительной записке могут быть включены таблицы, обоснования, методики, расчеты, блок-схемы алгоритмов программ, графические материалы и другие документы, использованные при выполнении курсовой работы.

## **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Бахвалов Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях. Учеб. пособие / Н.С.Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – М.: Высш. шк., 2000. – 190 с.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
3. Доценко С.В. Конспект лекций по дисциплине «Численные методы в информатике» / С.В. Доценко. – Севастополь. Изд-во СевНТУ, 2000. – 112 с.
4. Мэтьюз Д. Г. Численные методы. Использование MATLAB / Д.Г. Мэтьюз., К.Д. Финк. – М.: «Вильямс», 2001. – 714 с.
5. Пирумов У.Г. Численные методы / У.Г. Пирумов. – М.: Дрофа, 2003. – 224 с.
6. Методы безусловной многомерной оптимизации: Рек. к выполнению лаб., практ. и курсовых работ/ Сост.: С.А. Шипилов: НФИ КемГУ. – Новокузнецк. 2000.- 31 с.