МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное автономное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

Севастопольский государственный университет

кафедра Информационных систем

**Цимбал Дмитрий**

Институт информационных технологий и управления в технических системах

курс 2 группа ИC/м-11(о)

09.03.02. Информационные системы и технологии

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине «Численные методы»

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Листов 44

Отметка о зачёте \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(дата)

Руководитель практикума

доцент И.И. Шалимова

(должность) (подпись) (инициалы, фамилия)

Севастополь

2016

Содержание

[ВВЕДЕНИЕ 3](#_Toc470647771)

[1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ 4](#_Toc470647772)

[1.1 Вычисление площади фигуры 4](#_Toc470647773)

[1.2 Численное дифференцирование функций 4](#_Toc470647774)

[1.3 Интерполирование функции 5](#_Toc470647775)

[1.4 Исследование итерационных методов решения систем линейных уравнений 6](#_Toc470647776)

[1.5 Методы обработки экспериментальных данных 6](#_Toc470647777)

[2 ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ФИГУРЫ 7](#_Toc470647778)

[2.1 Общие сведения 7](#_Toc470647779)

[2.2 Решение задачи 8](#_Toc470647780)

[3 ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ 9](#_Toc470647781)

[3.1 Общие сведения 9](#_Toc470647782)

[3.2 Решение задачи 12](#_Toc470647783)

[4 ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ 14](#_Toc470647784)

[4.1 Общие сведения 14](#_Toc470647785)

[4. 2 Интерполяционная формула Лагранжа 15](#_Toc470647786)

[4.3 Интерполяция кусочно-гладким полиномом первой степени. 15](#_Toc470647787)

[4.4 Интерполяция кусочно-гладким полиномом второй степени. 16](#_Toc470647788)

[4.5 Сплайн-интерполяция 17](#_Toc470647789)

[4.6 Решение задач 18](#_Toc470647790)

[5 ИССЛЕДОВАНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 23](#_Toc470647791)

[5.1 Общие сведения 23](#_Toc470647792)

[5.2 Решение задачи 26](#_Toc470647793)

[6 МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ 29](#_Toc470647794)

[6.1 Общие сведения 29](#_Toc470647795)

[6.2 Решение задачи методом наименьших квадратов 31](#_Toc470647796)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 36](#_Toc470647797)

[БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 37](#_Toc470647798)

[ПРИЛОЖЕНИЕ А 38](#_Toc470647799)

# ВВЕДЕНИЕ

Целью данного курсового проектирования является закрепление навыков решения инженерных задач численными методами, а также формирование практических навыков, необходимых для выбора оптимальных методов расчета при решении инженерных задач с применением современных ЭВМ. В процессе выполнения курсовой работы были изучены различные алгоритмы расчётов численными методами, которые могут быть сведены к арифметическим действиям над числами.

Курсовое проектирование включает в себя следующие разделы:

1. Вычисление площади фигуры;
2. Численное дифференцирование функции;
3. Интерполирование функции;
4. Исследование итерационных методов решения систем линейных уравнений;
5. Методы обработки экспериментальных данных.

Основной задачей курсового проектирования является изучение данных численных методов и сведению их к арифметическим и некоторым логическим действиям над цифрами, то есть к тем действиям, которые выполняет ЭВМ, а также сравнение времени получения решения при использовании различных алгоритмов решения задач.

# 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данном разделе приведены задания по заданному варианту для курсового проектирования.

# 1.1 Вычисление площади фигуры

Задана плоская фигура, ограниченная тремя кривыми, уравнения которых y1=f1(x), y2=f2(x) и y3=f3(x) определяются вариантом задания. Требуется разработать программу для вычисления площади указанной фигуры.

В решении этой задачи выделим три основных этапа.

Первый этап. Получить графическое изображение рассматриваемой фигуры, т.е. построить графики функций y1=f1(x), y2=f2(x) и y3=f3(x).

Второй этап. Вычислить абсциссы точек пересечения кривых (отрезки, где находятся точки пересечения определить из графической иллюстрации), т.е. построить и решить соответствующие уравнения.

Третий этап. Представить площадь заданной фигуры как алгебраическую сумму определенных интегралов.

Таблица 1.1 - Вариант для задания по вычислению площади фигуры

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Функции обрамления фигуры | | |
| Y1 | Y2 | Y3 |
| 0.5x+5 | (x-2)3-2 | 3/x |

# 1.2 Численное дифференцирование функций

Вычислить производную функции  в центральном узле при (n=2). Расчеты выполнять с 6-ю знаками после запятой.

Вычислить производную функции  в центральном узле при (n=4). Расчеты выполнять с 6-ю знаками после запятой.

Сравнить результаты расчетов по п.п.1 и 2. В качестве точного значения производной функции  в центральном узле принять ее значение, вычисленное с десятью знаками после запятой.

Таблица 1.2 - Вариант для задания по численному дифференцированию функций

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Значения ; | | | | |
| xi-2 | xi-1 | xi | xi+1 | xi+2 |
| yi-2 | yi-1 | yi | yi+1 | yi+2 |
| *1+ln x* | 1 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 |
| 1 | 1.4055 | 1.6931 | 1.9163 | 2.0986 |

# 1.3 Интерполирование функции

1) В соответствии с вариантом задания построить естественный кубический сплайн по значениям функции yi = f (xi). Рассчитать значение f (ξ), используя интерполяцию кубическими сплайнами. Расчеты вести с 6-ю знаками после запятой.

2) В соответствии с вариантом задания (таблица 3.5) записать интерполяционный полином Лагранжа по значениям функции yi = f (xi). Рассчитать значение f (ξ), используя интерполяционную формулу Лагранжа. Расчеты вести с 6-ю знаками после запятой.

3) По данным таблицы 3.5, записать интерполяционные формулы Лагранжа для случаев кусочно-линейной и кусочно-квадратичной интерполяции. Рассчитать значения f (ξ). Расчеты вести с 6-ю знаками после запятой.

4) Оценить погрешность расчетов по п.п.3.5.1-3.5.3, используя аналитические выражения функций y = f (x).

5) Сравнить результаты расчетов по п.п.1.3.1 - 1.3.4, считая, что ξ известно точно. В качестве точного значения функции y= f (ξ), приведенной в таблице, принять ее значение, вычисленное с десятью знаками после запятой.

Таблица 1.3 - Вариант для задания по интерполированию функции

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Значения ; | | | | | |
| x0 | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| y0 | y1 | y2 | y3 | y4 | y5 |
| *1-ln x* | 1 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 3,5 |
| 1 | 1.4055 | 1.6931 | 1.9163 | 2.0986 | 2.2528 |

ξ = 1.74

# 1.4 Исследование итерационных методов решения систем линейных уравнений

Решить систему уравнений методами простых итераций и Зейделя с точностью . Определить число итераций.

# 1.5 Методы обработки экспериментальных данных

По данной таблице значений x и y (табл. 1.7) найти методом наименьших квадратов две различные эмпирические формулы и сравнить качество полученных приближений:

Таблица 1.4 — Вариант для задания по обработке экспериментальных данных

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 2.6 | -0.3 | -2 | -2.3 | -1.5 | 0.7 | 3.2 |

# 2 ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ФИГУРЫ

# 2.1 Общие сведения

Пусть функция f(х) задана на некотором интервале [а, b]. Разобьем этот интервал произвольным образом на части Δxi= xi+1-xi (i=0, 1, 2, ..., n-1). Возьмем в каждой из частей произвольную точку ξi (i=0, 1, 2, ..., п-1). Тогда определенным интегралом функции f(х) на интервале [а, b] называется

Геометрическая интерпретация определенного интеграла состоит в следующем. Если f(x)≥0 на отрезке [a,b], то есть площадь области, ограниченной графиком функции f(x), осью абсцисс и двумя прямыми х=а и х=b

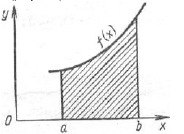


Рисунок 1- -Геометрическая интерпретация определенного интеграла

Другими словами, задача вычисления значения определенного интеграла сводится к нахождению площади криволинейной трапеции. Очевидно, справедливо и обратное утверждение: площадь любой плоской фигуры можно представить как алгебраическую сумму соответствующих интегралов. Но при этом надо учитывать, что если f(x)≤0 на отрезке [a,b] , то площадь соответствующей фигуры равна

# 2.2 Решение задачи

Вычислим точки пересечения функций

f1(x) = f3(x) => x1 = 0.568, x2 = -10.568

f2(x) = f3(x) => x1 = -0.229, x2 = 3.422

И построим график пересечения заданных функций



Как видно из графика весь отрезок разделен на 3 промежутка. Значения абсцисс точек пересечения графиков найдены выше.

Вычислим значение площади фигуры на каждом из отрезков

,

на втором отрезке

.

на третьем отрезке

.

Общая площадь фигуры заданной пересечением f1, f2 и f3 равна сумме , и

# 3 ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ

# 3.1 Общие сведения

При решении практических задач часто нужно найти производные некоторых порядков от функции , заданной таблично. В этих случаях обычно прибегают к *приближенному дифференцированию*.

Для вывода формул приближенного дифференцирования заменяют данную функцию  на интересующем отрезке  интерполирующей функцией , а затем полагают:

 (2.1)

при  .

Аналогично поступают при нахождении производных высших порядков функции .

Если для интерполирующей функции  известна погрешность

 , (2.2)

то погрешность производной  выражается формулой

 . (2.3)

Отметим, что приближенное дифференцирование представляет собой операцию менее точную, чем интерполирование. Действительно, как видно из рисунка 2.1, близость друг к другу ординат двух кривых  и  на отрезке  еще не гарантирует близости на этом отрезке производных  и , т.е. малого расхождения угловых коэффициентов касательных к рассматриваемым кривым при одинаковых значениях аргумента.

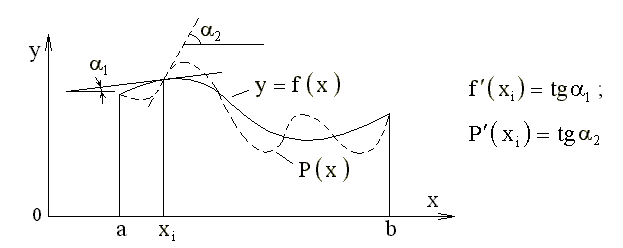


Рисунок 3.1 — Производные исходной функции  и интерполирующего ее полинома 

*Формулы численного дифференцирования для равноотстоящих точек.*

Пусть точки  - равноотстоящие (рисунок 2.2) т.е.  и пусть для функции  известны значения 

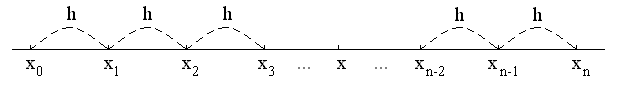


Рисунок 3.2 — Пояснение к формулам (2.4)

Обозначим

 или  (при ) , (2.4)

и для данной системы узлов  построим интерполяционный полином Лагранжа.

 , (2.5)

где  - *обобщенная* степень числа .

Продифференцируем выражение (2.5), учитывая, что :

 . (2.6)

Для оценки погрешности



воспользуемся формулой оценки погрешности для интерполяционного полинома Лагранжа

 , (2.7)

где обозначено

 =  ,

а  - промежуточное значение между точками  и  . Из этой формулы можно найти погрешность производной в узлах:

 , (2.8)

где  - промежуточное значение между точками .

Пример. Произведем расчет для  (три точки).

Из формулы (2.5) получаем:

.

Тогда, с учетом  запишем:

.

В частности, для производных  с учетом (2.4) получим следующие выражения:

 (2.9)

с соответствующими погрешностями:

 (2.10)

Из (2.9) и (2.10) следует, что более *простую структуру и повышенную точность имеют формулы для вычисления центральной производной (*производной в средней точкепри нечетном числе точек).

Приведем формулы для определения центральных производных при  и  (см. рисунок 2.3).

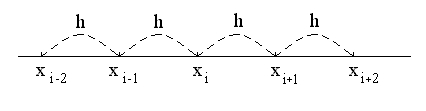


Рисунок 3.3 — Расположение узлов, симметричное относительно точки 



 , (2.11)

где  - некоторая точка интервала ; .



 , (2.12)

где  - некоторая точка интервала .

# 3.2 Решение задачи

Вычисление производной функции  в центральном узле (n=2)

Производная в центральной точке при n=2 рассчитывается следующим образом:





Результаты вычислений:

Производная используя две точки (случай 1): ; ее относительная погрешность: ; ее абсолютная погрешность: .

Производная используя четыре точки (случай 2): ; ее относительная погрешность: ; ее абсолютная погрешность: .

Вычисление производной функции  в центральном узле (n=4)

Производная в центральной точке при n = 4 рассчитывается похожим образом:



Результаты вычислений:

Производная используя четыре точки: ; ее относительная погрешность:; ее абсолютная погрешность:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Метод решения | Результат | Δ | δ |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

# 4 ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ

# 4.1 Общие сведения

Необходимо определить значения функции f (x) при некоторых частных значениях независимого переменного x , находящегося в интервале [a, b]. Аналитическое выражение y = f (x) неизвестно.

x0 , x1, ..., xn – точки, в которых известны значения функции: y0 = f (x0), ..., yn = f (xn), т.е. существует ряд точек (x0 , y0 ) , ..., (xn , yn ), лежащих на кривой y = f (x) (рис. 4.1).

Другими словами, на отрезке [a, b] заданы n-1 узлов интерполяции x0 , x1, ..., xn , а также значения функции f (x) в этих точках:

f (x0) = y0 , f (x1) = y1 , ..., f (xn) = yn . (4.1)

Требуется построить непрерывную (интерполирующую) функцию F(x) , принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и f (x), т.е. такую, что

F(x0) = y0 , F(x1) = y1 , ..., F(xn) = yn . (4.2)

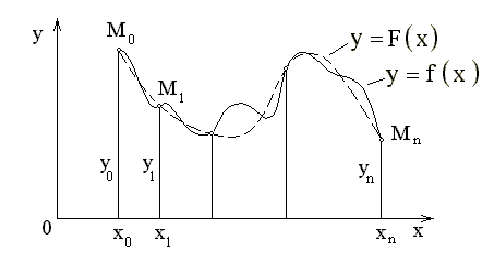


Рисунок 4.1 – К постановке задачи интерполяции

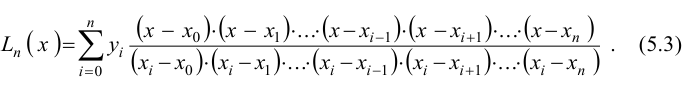
Однозначного решения задача не имеет, т.к. через n-1 точек (x0 , y0) , ..., (xn , yn) можно провести бесчисленное множество кривых.

Часто бывает необходимо провести через заданные точки достаточно гладкую кривую, без большого количества максимумов и минимумов. В этом случае большую роль играет простота аналитического выражения. Например, задача становится однозначной, если вместо произвольной функции F (x) искать полином Pn (x) степени не выше n , удовлетворяющий условиям (4.2), т.е. такой, что P0 (x0) = y0 , P1 (x1) = y1 , ..., Pn (xn) = yn .

Полученную интерполяционную формулу y = F(x) обычно используют для приближенного вычисления значений функции f (x) для значений аргумента x , отличных от узлов интерполяции. Такая операция называется интерполированием функции f (x). Различают интерполирование в узком смысле, когда x є [x0 , xn] и экстраполирование, когда x ȼ [x0 , xn].

# 4. 2 Интерполяционная формула Лагранжа

Если на отрезке [a, b] даны n-1 различных значений аргумента x0 , x1, ..., xn и для функции y = f (x) известны значения: f (x0) = y0 , f (x1) = y1 , ...,   
f (xn) = yn , то приближенное значение функции y = f (x) на отрезке [a, b] определяют с помощью интерполяционной формулы Лагранжа



Эту формулу используют для произвольно заданных узлов интерполирования.

# 4.3 Интерполяция кусочно-гладким полиномом первой степени.

Между узлами x0 и x1 интерполяция осуществляется прямой 1, между узлами x1 и x2 – прямой 2 и т.д. Между каждой парой узлов прямая описывается уравнением y = f (x) в этих узлах. Для линейной интерполяции достаточно знания функции y = f (x) только в двух узлах, между которыми лежит точка интерполяции.

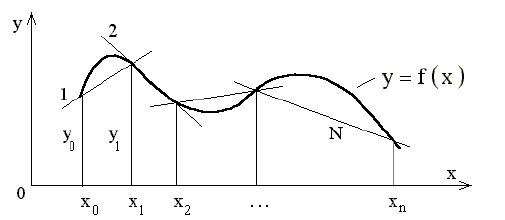


Рисунок 4.2 – Интерполирование полиномами первой степени

# 4.4 Интерполяция кусочно-гладким полиномом второй степени.

Для однозначного построения квадратичной параболы необходимо знать ее значения в трех точках, т.е. в трех узлах интерполяции. Пример квадратичной интерполяции дан на рис. 4.3. Кусочно-полиномиальная интерполяция дает непрерывную интерполирующую функцию (рис. 4.2 и 4.3). Между узлами интерполяции функция имеет непрерывные производные, которые в общем случае при n < N претерпевают разрыв в узлах интерполяции. Однако конкретная решаемая задача может требовать непрерывности производных интерполирующей функции во всем интервале [x0 , xN]. В этих случаях применяют сплайн-интерполяцию.

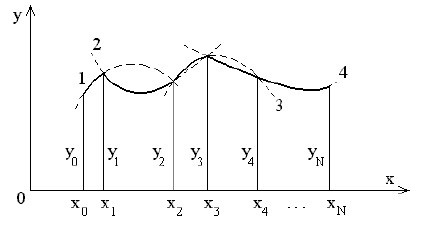


Рисунок 4.3 – Интерполирование полиномами второй степени

# 4.5 Сплайн-интерполяция

Кубическая сплайн-интерполяция означает, что между любыми соседними узлами (x0 , x1), (x1, x2), ..., (xi-1, xi), (xi , xi+1), ..., (xN-1, xn) функция   
y = f (x) интерполируется кубическим полиномом, равным значению функции y(x) в каждом узле и во всех узлах непрерывны его первая и вторая производные (условия сопряжения).

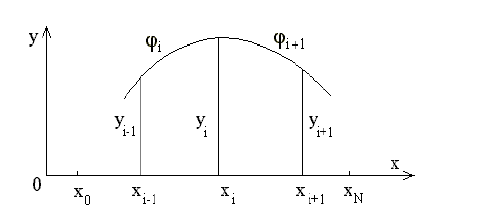


Рисунок 4.4 – К определению сплайн-интерполяции

Кубический полином

(5.6)

интерполирует функцию y = f (x) на интервале [xi-1, xi] (рис. 4.5), а

(4.6)

на интервале [xi, xi+1].

Условия сопряжения имеют вид:

(4.8)

Кроме того, на границах x = x0 и x = xN ставятся условия

(4.9)

Уравнения для коэффициентов полиномов (4.6) и (4.7) удовлетворяют условиям (4.8) и (4.9) и учитывают одинаковые расстояния между любыми соседними узлами.

; (4.10)

; (4.11)

; (4.12)

; (4.13)

; (4.14)

; (4.15)

; (4.16)

Уравнения (4.12), (4.13) представляют систему N+1 линейных алгебраических уравнений с N+1 неизвестными c1 , c2 , ..., cN и трехдиагональной матрицей. Система может быть решена методом прогонки. Зная сi , по формулам (4.14)–(4.16) находят bi и di , а по формуле (4.11) – значения ai .

# 4.6 Решение задач

Сплайн интерполяция

Рассчитаем значение шага интерполяции и разности первого и второго вида



















Построим систему уравнений для нахождения C - множества коэффициентов при x3, найдем a, b и d коэффициенты





Найдем все функции для интерполирования между узлами











Вычислим значение функции в точке ξ



f5 (1.1) = 0.5464

Рисунок 4.5 – Функции интерполирования методом сплайн-интерполяции

Найдем интерполяционный полином методом Эйлера

Для начала получим производную для формул расчета ошибок.

Найдем соответствующие полиномы для всех промежутков и вычислим их сумму для нахождения полинома, описывающего весь заданный промежуток

















Рисунок 4.6 – Интерполяционный полином Лагранжа

Кусочно-линейная и квадратичная интерполяции

Далее по расчетам, приведенным в Приложении А, покажем кусочно-квадратичную и кусочно-линейную интерполяции





Рисунок 4.7 – Кусочно-квадратичная интерполяция



Рисунок 4.8 – Кусочно-линейная интерполяция

Полученные значения интерполяции и их ошибки

Таблица 4.1 Результаты интерполирования различными методами

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тип | Значение | Относительная погрешность | Абсолютная погрешность |
| Сплайн | 1.559834 | 0.005948 | 0.011897 |
| Эйлер | 1.554039 | 0.000153 | 0.000307 |
| Квадратичная | 1.551585 | -0.0023 | 0.0046 |
| Линейная | 1.543548 | -0.010337 | 0.020674 |
| f(ξ) | 1.553885 | – | – |

# 5 ИССЛЕДОВАНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

# 5.1 Общие сведения

Пусть дана линейная система, которую можно записать в виде матричного уравнения. И пусть диагональные коэффициенты системы aii ≠ 0 (i = 1, 2, ..., n) .

Первое уравнение системы разрешают относительно x1 , второе – относительно x2 и т.д. В результате получают эквивалентную приведенную систему уравнений

, (5.1)

Где

Вводят матрицы

Систему (5.1) записывают в матричной форме

, (5.2)

и решают методом последовательных приближений. За нулевое приближение принимают столбец свободных членов .

Последовательно строят матрицы-столбцы

[первое приближение];

[второе приближение] и т.д.

Любое (k+1)-е приближение вычисляют как

, (5.3)

Если последовательность приближений , , ..., , ... имеет предел , то этот предел – решение системы (5.2).

Формулы (5.3) можно записать в развернутом виде

В общем случае, имея систему

можно положить .

Достаточные условия сходимости процесса итераций. Для системы

процесс итерации (5.3) сходится к единственному решению независимо от выбора начального приближения, если выполнены неравенства

т.е., если модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы больше модулей всех остальных коэффициентов (без учета свободных членов).

Итерационный метод Зейделя

Рассматривается линейная система из трех уравнений с тремя неизвестными

, (5.4)

Пусть , тогда по аналогии с методом простой итерации система может быть записана в виде

, (5.5)

Используя первое приближение к решению системы (5.4)

, (5.6)

вычисляют новое значение x1 :

Далее вычисляют новое значение x2 :

Используя вычисленные значения и , находят новое значение x3:

На этом заканчивается первая итерация.

Далее заменяют исходные значения (5.4) на , , и вычисляют следующее приближение. В общем случае k -е приближение определяется формулами:

, (5.7)

Правило останова вычислений задают следующим образом:

1) по максимальным значениям абсолютных разностей

, (5.8)

где e – некоторое положительное число;

2) по максимальным значениям относительных разностей

при условии, что .

Достаточные условия сходимости метода Зейделя. Для системы n уравнений с n неизвестными метод Зейделя сходится, если выполняются следующие условия:

1) система уравнений неприводима, т.е. нельзя вычислить какие-либо неизвестные, решая меньше, чем n уравнений;

2) для всех i

; (5.9)

3) по крайней мере для одного i

. (5.10)

Другими словами, диагональные члены должны преобладать в системе уравнений.

# 5.2 Решение задачи

Решим заданную по варианту систему уравнений методом простых итераций и методом Зейделя

Задана система уравнений вида



Для начала проведем расчет методом простых итераций

Для этого положим, что начальные коэффициенты равны 0

Тогда x, y и z на первой итерации будут равны

Продолжим выполнять итеративный подход

По истечению пяти итераций было получено решение с заданной точностью

Метод Зейделя использует подход простых итераций, модифицировав его начальными значениями коэффициентов ≠ 0 и используя только что полученные значения

И соответственно

Решение системы методом Зейделя получено на 3 шаге

Все решения получены с заданной точностью.

# 6 МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

# 6.1 Общие сведения

Пусть в процессе эксперимента путем измерений получена таблица некоторой зависимости f :

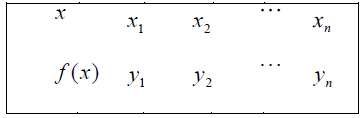


Рисунок 6.1 – Исходные данные к задаче обработки экспериментальных данных в общем виде

Требуется найти формулу, выражающую эту зависимость аналитически. Сформулируем задачу таким образом, чтобы учитывался характер исходной функции: найти функцию F заданного вида y=F(x), принимающую в точках ,,…,, значения близкие к табличным значениям ,,…,.

На практике вид приближающей функции F определяется следующим образом. По заданной таблице значений f (x) строится ее точечный график, а потом проводится гладкая кривая, приближенно отображающая характер расположения точек. По полученной кривой определяется вид приближающей функции. Рассмотрим метод наименьших квадратов, который используется для аппроксимации табличных данных с помощью непрерывной функции.

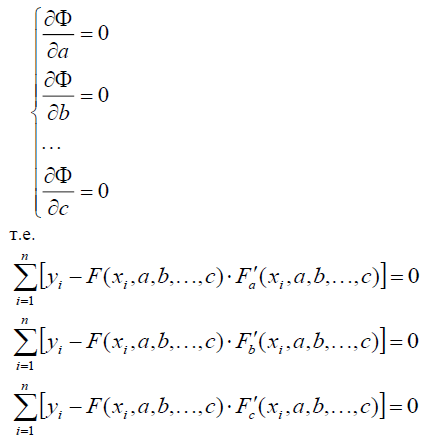
Выбираем соответствующую зависимость функции от аргумента:

Неизвестными параметрами здесь являются a,b,…,c.

Приведем функцию невязок:



Для того чтобы функция невязки достигла минимального значения, необходимо потребовать равенство нулю всех ее частных производных по всем неизвестным параметрам a,b,…,c :



Если полученную систему уравнений решить относительно параметров a,b,…,c, например, методом Гаусса, мы получим конкретный вид искомой функции y=F(x,a,b,…,c).

Очевидно, что изменение количества параметров не искажает сущности подхода, а лишь сказывается на количестве уравнений в системе.

Значения найденной функции y=F(x,a,b,…,c) в точках ,,…, будут отличаться от значений ,,…,. Значения разностей



называют отклонениями измеренных значений y от вычисленных по полученной формуле. Таким образом, можно найти величину



Среди нескольких различных приближений одной и той же табличной функции лучшим следует считать то приближение, для которого величина принимает наименьшее значение.

# 6.2 Решение задачи методом наименьших квадратов



Рисунок 6.1— Исходный график и график аппроксимирующих функций ,

Будем искать приближающую функцию в виде:

Тогда уклонения функции будут иметь вид:

d1=a2+a1x1-y1

d2=a2+a1x2-y2

………………….

dn=a2+a1xn-yn

Сумма квадратов уклонений должна быть минимальной , т.е. :

Задача сводится к нахождению экстремума функции S одной переменной.

Необходимые условия экстремума:



Перегруппируем переменные и сократим на два уравнения, учитывая необходимые условия экстремума, получим систему уравнений:



Составим таблицу:

Таблица 6.1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x | y | x2 | x\*y |
| 1 | -3 | 2.6 | 9 | -7.8 |
| 2 | -2 | -0.3 | 4 | 0.6 |
| 3 | -1 | -2 | 1 | 2 |
| 4 | 0 | -2.3 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | -1.5 | 1 | -1.5 |
| 6 | 2 | 0.7 | 4 | 1.4 |
| 7 | 3 | 3.2 | 9 | 9.6 |
| ∑ | 0 | 0.4 | 28 | 4.3 |

Тогда система (1) имеет вид:

Функция имеет вид

Отклонения для найденной прямой:

Будем искать приближающую функцию в виде:

Задача сводится к нахождению экстремума функции S от двух переменных.

Тогда уклонения функции будут иметь вид:

d1=a1x1^2+a2x1+a3-y1

d2=a1x2^2+a2x2+a3-y2

………………….

dn=a1xn^2+a2xn+a3-yn

Сумма квадратов уклонений должна быть минимальной, т.е.:

Необходимые условия экстремума:

Учитывая необходимые условия экстремума, получим систему уравнений:

Составим таблицу:

Таблица 6.2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x | y | x2 | xy | x3 | x4 | x2y |
| 1 | -3 | 2.6 | 9 | -7.8 | -27 | 81 | 23.4 |
| 2 | -2 | -0.3 | 4 | 0.6 | -8 | 16 | -1.2 |
| 3 | -1 | -2 | 1 | 2 | -1 | 1 | -2 |
| 4 | 0 | -2.3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | -1.5 | 1 | -1.5 | 1 | 1 | -1.5 |
| 6 | 2 | 0.7 | 4 | 1.4 | 8 | 16 | 2.8 |
| 7 | 3 | 3.2 | 9 | 9.6 | 27 | 81 | 28.8 |
| ∑ | 0 | 0.4 | 28 | 4.3 | 0 | 196 | 50.3 |

Тогда система (1) имеет вид:

Функция имеет вид

Отклонения для найденной прямой:

Т.к. значение для функции меньше чем значение для функции – то, полученная эмпирическая формула лучшим образом аппроксимирует значения исходной функции, заданной в виде набора точек.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численные методы – это методы решения задач, которые сводятся или могут быть сведены к арифметическим действиям над числами. Для того, чтобы численные методы могли быть реализованы на ЭВМ, они должны быть устойчивыми и сходящимися.

Особенностью численных методов является то, что они находятся на стыке математики и информатики. Стоит отметить, что необходимым условием применения численных методов – является их реализация на ЭВМ. В реальных задачах данные методы применяются на обширных диапазонах входных данных, где требуется достижение достаточно большой точности вычислений, что зачастую означает необходимость произведения колоссального числа расчетов, для чего и требуется привлечение ЭВМ, которые на сегодняшний день имеют необходимые мощности для решения поставленной задачи в кратчайшие сроки и с минимальной погрешностью. Однако искусство вычислений состоит фактически не столько в предъявлении числовых результатов в виде таблиц чисел и графиков, сколько в обосновании того, что эти результаты получены с заданной точностью.

Таким образом, существует множество численных методов для решения той или иной математической задачи, каждый из них имеет свои недостатки и преимущества, которые необходимо учитывать при выборе для решения того или иного метода.

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бахвалов Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях. Учеб. пособие / Н.С.Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – М.: Высш. шк., 2000.

– 190 с.

1. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
2. Доценко С.В. Конспект лекций по дисциплине «Численные методы в информатике» / С.В. Доценко. – Севастополь. Изд-во СевНТУ, 2000. – 112 с.
3. Дьяконов В.А. Mathcad 8/2000: Специальный справочник/ В.А. Дьяконов.-СПб.:Питер, 2002.-586с.

# ПРИЛОЖЕНИЕ А

Порядок вычислений, производимых в математическом пакете Mathcad

Вычисление площади фигуры:





















































Численное дифференцирование функций:

Расчет дла n=4











Расчет дла n=2













Точное значение заданой функции





Значение производной











Интерполирование функции:

























Сплайн

































































Эйлер



























Кусочно - квадратичная

Кусочно - линейлая



















Исследование итерационных методов решения систем линейных уравнений:

Метод Зейделя









































































Методы обработки экспериментальных данных:































































































