МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное автономное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

Севастопольский государственный университет

кафедра Информационных систем

**Ломакина Анастасия**

Институт информационных технологий и управления в технических системах

курс 4 группа ИC/м-11(о)

09.03.02. Информационные системы и технологии

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине «Численные методы»

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Листов 48

Отметка о зачёте \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(дата)

Руководитель практикума

доцент И.И. Шалимова

(должность) (подпись) (инициалы, фамилия)

Севастополь

2016

Содержание

[ВВЕДЕНИЕ 3](#_Toc470124502)

[1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ 4](#_Toc470124503)

[1.1 Вычисление площади фигуры 4](#_Toc470124504)

[1.2 Численное дифференцирование функций 4](#_Toc470124505)

[1.3 Интерполирование функции 5](#_Toc470124506)

[1.4 Исследование итерационных методов решения систем линейных уравнений 6](#_Toc470124507)

[1.5 Методы обработки экспериментальных данных 7](#_Toc470124508)

[2 ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ФИГУРЫ 8](#_Toc470124509)

[2.1 Общие сведения 8](#_Toc470124510)

[2.2 Решение задачи 9](#_Toc470124511)

[3 ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ 11](#_Toc470124512)

[3.1 Общие сведения 11](#_Toc470124513)

[3.2 Решение задачи 14](#_Toc470124514)

[4 ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ 16](#_Toc470124515)

[4.1 Общие сведения 16](#_Toc470124516)

[4. 2 Интерполяционная формула Лагранжа 17](#_Toc470124517)

[4.3 Интерполяция кусочно-гладким полиномом первой степени. 17](#_Toc470124518)

[4.4 Интерполяция кусочно-гладким полиномом второй степени. 18](#_Toc470124519)

[4.5 Сплайн-интерполяция 19](#_Toc470124520)

[4.6 Решение задач 20](#_Toc470124521)

[5 ИССЛЕДОВАНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 25](#_Toc470124522)

[5.1 Общие сведения 25](#_Toc470124523)

[6 МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ 33](#_Toc470124524)

[6.1 Общие сведения 33](#_Toc470124525)

[6.2 Решение задачи методом наименьших квадратов 35](#_Toc470124526)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 40](#_Toc470124527)

[БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 41](#_Toc470124528)

[ПРИЛОЖЕНИЕ А 42](#_Toc470124529)

# ВВЕДЕНИЕ

Целью данного курсового проектирования является закрепление навыков решения инженерных задач численными методами, а также формирование практических навыков, необходимых для выбора оптимальных методов расчета при решении инженерных задач с применением современных ЭВМ. В процессе выполнения курсовой работы были изучены различные алгоритмы расчётов численными методами, которые могут быть сведены к арифметическим действиям над числами.

Курсовое проектирование включает в себя следующие разделы:

1. Вычисление площади фигуры;
2. Численное дифференцирование функции;
3. Интерполирование функции;
4. Исследование итерационных методов решения систем линейных уравнений;
5. Методы обработки экспериментальных данных.

Основной задачей курсового проектирования является изучение данных численных методов и сведению их к арифметическим и некоторым логическим действиям над цифрами, то есть к тем действиям, которые выполняет ЭВМ, а также сравнение времени получения решения при использовании различных алгоритмов решения задач.

# 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данном разделе приведены задания по заданному варианту для курсового проектирования.

# 1.1 Вычисление площади фигуры

Задана плоская фигура, ограниченная тремя кривыми, уравнения которых y1=f1(x), y2=f2(x) и y3=f3(x) определяются вариантом задания. Требуется разработать программу для вычисления площади указанной фигуры.

В решении этой задачи выделим три основных этапа.

Первый этап. Получить графическое изображение рассматриваемой фигуры, т.е. построить графики функций y1=f1(x), y2=f2(x) и y3=f3(x).

Второй этап. Вычислить абсциссы точек пересечения кривых (отрезки, где находятся точки пересечения определить из графической иллюстрации), т.е. построить и решить соответствующие уравнения.

Третий этап. Представить площадь заданной фигуры как алгебраическую сумму определенных интегралов.

Таблица 1.1 - Вариант для задания по вычислению площади фигуры

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Функции обрамления фигуры | | |
| Y1 | Y2 | Y3 |
| 2x+2 | 1+x5 | (1-x)/3 |

# 1.2 Численное дифференцирование функций

Вычислить производную функции  в центральном узле при (n=2). Расчеты выполнять с 6-ю знаками после запятой.

Вычислить производную функции  в центральном узле при (n=4). Расчеты выполнять с 6-ю знаками после запятой.

Сравнить результаты расчетов по п.п.1 и 2. В качестве точного значения производной функции  в центральном узле принять ее значение, вычисленное с десятью знаками после запятой.

Таблица 1.2 - Вариант для задания по численному дифференцированию функций

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Значения ; | | | | |
| xi-2 | xi-1 | xi | xi+1 | xi+2 |
| yi-2 | yi-1 | yi | yi+1 | yi+2 |
| *1-cos x* | 0.3 | 0,5 | 0,7 | 0,9 | 1,1 |
| 0.0447 | 0.1224 | 0.2352 | 0.3784 | 0.5464 |

# 1.3 Интерполирование функции

1) В соответствии с вариантом задания построить естественный кубический сплайн по значениям функции yi = f (xi). Рассчитать значение f (ξ), используя интерполяцию кубическими сплайнами. Расчеты вести с 6-ю знаками после запятой.

2) В соответствии с вариантом задания (таблица 3.5) записать интерполяционный полином Лагранжа по значениям функции yi = f (xi). Рассчитать значение f (ξ), используя интерполяционную формулу Лагранжа. Расчеты вести с 6-ю знаками после запятой.

3) По данным таблицы 3.5, записать интерполяционные формулы Лагранжа для случаев кусочно-линейной и кусочно-квадратичной интерполяции. Рассчитать значения f (ξ). Расчеты вести с 6-ю знаками после запятой.

4) Оценить погрешность расчетов по п.п.3.5.1-3.5.3, используя аналитические выражения функций y = f (x).

5) Сравнить результаты расчетов по п.п.1.3.1 - 1.3.4, считая, что ξ известно точно. В качестве точного значения функции y= f (ξ), приведенной в таблице, принять ее значение, вычисленное с десятью знаками после запятой.

Таблица 1.3 - Вариант для задания по интерполированию функции

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Значения ; | | | | | |
| x0 | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| y0 | y1 | y2 | y3 | y4 | y5 |
| *1-cos x* | 0.3 | 0,5 | 0,7 | 0,9 | 1,1 | 1,3 |
| 0.0447 | 0.1224 | 0.2352 | 0.3784 | 0.5464 | 0.7325 |

# 1.4 Исследование итерационных методов решения систем линейных уравнений

Решить систему уравнений методами простых итераций и Зейделя с точностью . Определить число итераций.

# 1.5 Методы обработки экспериментальных данных

По данной таблице значений x и y (табл. 1.7) найти методом наименьших квадратов две различные эмпирические формулы и сравнить качество полученных приближений:

Таблица 1.7 — Вариант для задания по обработке экспериментальных данных

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 7 | 12 | 17 | 22 | 27 | 32 | 37 |
| y | 100 | 87.2 | 72.9 | 63.2 | 54.7 | 47.5 | 41.4 | 36.3 |

# 2 ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ФИГУРЫ

# 2.1 Общие сведения

Пусть функция f(х) задана на некотором интервале [а, b]. Разобьем этот интервал произвольным образом на части Δxi= xi+1-xi (i=0, 1, 2, ..., n-1). Возьмем в каждой из частей произвольную точку ξi (i=0, 1, 2, ..., п-1). Тогда определенным интегралом функции f(х) на интервале [а, b] называется

Геометрическая интерпретация определенного интеграла состоит в следующем. Если f(x)≥0 на отрезке [a,b], то есть площадь области, ограниченной графиком функции f(x), осью абсцисс и двумя прямыми х=а и х=b

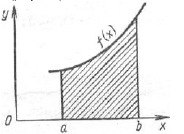


Рисунок 1- -Геометрическая интерпретация определенного интеграла

Другими словами, задача вычисления значения определенного интеграла сводится к нахождению площади криволинейной трапеции. Очевидно, справедливо и обратное утверждение: площадь любой плоской фигуры можно представить как алгебраическую сумму соответствующих интегралов. Но при этом надо учитывать, что если f(x)≤0 на отрезке [a,b] , то площадь соответствующей фигуры равна

# 2.2 Решение задачи

Вычислим точки пересечения функций и проверим знак функций в этих точках

f1(x) = f2(x) => x= 1.27935319, f2(x) = 4.42730128

f1(x) = f3(x) => x= -5.08819078, f1(x) = 2.02939693

f2(x) = f3(x) => x= -0.82855297, f3(x) = 0.60951766

И построим график пересечения заданных функций



Как видно из графика искомая фигура не пересекает ось абсцисс, следовательно на первом отрезке площадь фигуры будет вычисляться как

,

а на втором отрезке

.

Разобьем интервал точек пересечения на 2 отрезка:

[-5.08819078; -0.82855297] и [-0.82855297; 1.27935319]

и получим алгебраическую сумму на каждом из отрезков

Общая площадь фигуры заданной пересечением f1, f2 и f3 равна сумме и

# 3 ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ

# 3.1 Общие сведения

При решении практических задач часто нужно найти производные некоторых порядков от функции , заданной таблично. В этих случаях обычно прибегают к *приближенному дифференцированию*.

Для вывода формул приближенного дифференцирования заменяют данную функцию  на интересующем отрезке  интерполирующей функцией , а затем полагают:

 (2.1)

при  .

Аналогично поступают при нахождении производных высших порядков функции .

Если для интерполирующей функции  известна погрешность

 , (2.2)

то погрешность производной  выражается формулой

 . (2.3)

Отметим, что приближенное дифференцирование представляет собой операцию менее точную, чем интерполирование. Действительно, как видно из рисунка 2.1, близость друг к другу ординат двух кривых  и  на отрезке  еще не гарантирует близости на этом отрезке производных  и , т.е. малого расхождения угловых коэффициентов касательных к рассматриваемым кривым при одинаковых значениях аргумента.

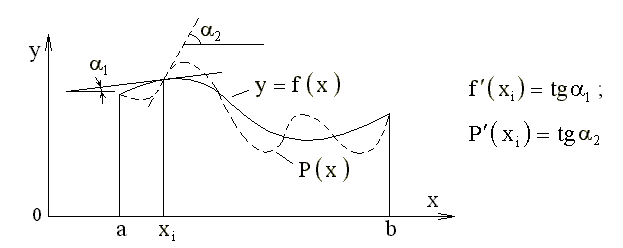


Рисунок 3.1 — Производные исходной функции  и интерполирующего ее полинома 

*Формулы численного дифференцирования для равноотстоящих точек.*

Пусть точки  - равноотстоящие (рисунок 2.2) т.е.  и пусть для функции  известны значения 

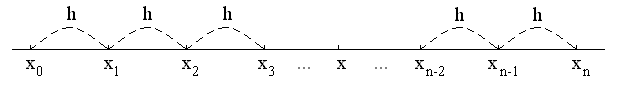


Рисунок 3.2 — Пояснение к формулам (2.4)

Обозначим

 или  (при ) , (2.4)

и для данной системы узлов  построим интерполяционный полином Лагранжа.

 , (2.5)

где  - *обобщенная* степень числа .

Продифференцируем выражение (2.5), учитывая, что :

 . (2.6)

Для оценки погрешности



воспользуемся формулой оценки погрешности для интерполяционного полинома Лагранжа

 , (2.7)

где обозначено

 =  ,

а  - промежуточное значение между точками  и  . Из этой формулы можно найти погрешность производной в узлах:

 , (2.8)

где  - промежуточное значение между точками .

Пример. Произведем расчет для  (три точки).

Из формулы (2.5) получаем:

.

Тогда, с учетом  запишем:

.

В частности, для производных  с учетом (2.4) получим следующие выражения:

 (2.9)

с соответствующими погрешностями:

 (2.10)

Из (2.9) и (2.10) следует, что более *простую структуру и повышенную точность имеют формулы для вычисления центральной производной (*производной в средней точкепри нечетном числе точек).

Приведем формулы для определения центральных производных при  и  (см. рисунок 2.3).

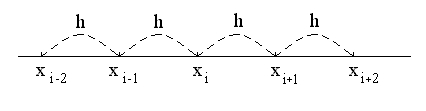


Рисунок 3.3 — Расположение узлов, симметричное относительно точки 



 , (2.11)

где  - некоторая точка интервала ; .



 , (2.12)

где  - некоторая точка интервала .

# 3.2 Решение задачи

Вычисление производной функции  в центральном узле (n=2)

Производная в центральной точке при n=2 рассчитывается следующим образом:





Результаты вычислений:

Производная используя две точки (случай 1): ; ее относительная погрешность: ; ее абсолютная погрешность: .

Производная используя четыре точки (случай 2): ; ее относительная погрешность: ; ее абсолютная погрешность: .

Вычисление производной функции  в центральном узле (n=4)

Производная в центральной точке при n = 4 рассчитывается похожим образом:



Результаты вычислений:

Производная используя четыре точки: ; ее относительная погрешность:; ее абсолютная погрешность:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Метод решения | Результат | Δ | δ |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

# 4 ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ

# 4.1 Общие сведения

Необходимо определить значения функции f (x) при некоторых частных значениях независимого переменного x , находящегося в интервале [a, b]. Аналитическое выражение y = f (x) неизвестно.

x0 , x1, ..., xn – точки, в которых известны значения функции: y0 = f (x0), ..., yn = f (xn), т.е. существует ряд точек (x0 , y0 ) , ..., (xn , yn ), лежащих на кривой y = f (x) (рис. 4.1).

Другими словами, на отрезке [a, b] заданы n-1 узлов интерполяции x0 , x1, ..., xn , а также значения функции f (x) в этих точках:

f (x0) = y0 , f (x1) = y1 , ..., f (xn) = yn . (4.1)

Требуется построить непрерывную (интерполирующую) функцию F(x) , принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и f (x), т.е. такую, что

F(x0) = y0 , F(x1) = y1 , ..., F(xn) = yn . (4.2)

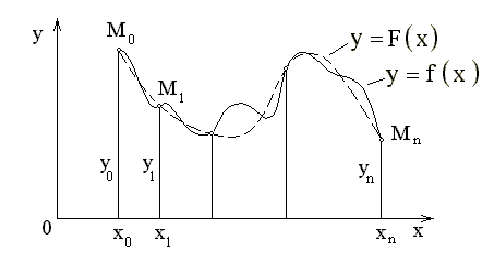


Рисунок 4.1 – К постановке задачи интерполяции

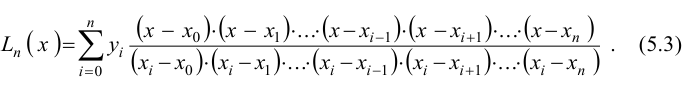
Однозначного решения задача не имеет, т.к. через n-1 точек (x0 , y0) , ..., (xn , yn) можно провести бесчисленное множество кривых.

Часто бывает необходимо провести через заданные точки достаточно гладкую кривую, без большого количества максимумов и минимумов. В этом случае большую роль играет простота аналитического выражения. Например, задача становится однозначной, если вместо произвольной функции F (x) искать полином Pn (x) степени не выше n , удовлетворяющий условиям (4.2), т.е. такой, что P0 (x0) = y0 , P1 (x1) = y1 , ..., Pn (xn) = yn .

Полученную интерполяционную формулу y = F(x) обычно используют для приближенного вычисления значений функции f (x) для значений аргумента x , отличных от узлов интерполяции. Такая операция называется интерполированием функции f (x). Различают интерполирование в узком смысле, когда x є [x0 , xn] и экстраполирование, когда x ȼ [x0 , xn].

# 4. 2 Интерполяционная формула Лагранжа

Если на отрезке [a, b] даны n-1 различных значений аргумента x0 , x1, ..., xn и для функции y = f (x) известны значения: f (x0) = y0 , f (x1) = y1 , ...,   
f (xn) = yn , то приближенное значение функции y = f (x) на отрезке [a, b] определяют с помощью интерполяционной формулы Лагранжа



Эту формулу используют для произвольно заданных узлов интерполирования.

# 4.3 Интерполяция кусочно-гладким полиномом первой степени.

Между узлами x0 и x1 интерполяция осуществляется прямой 1, между узлами x1 и x2 – прямой 2 и т.д. Между каждой парой узлов прямая описывается уравнением y = f (x) в этих узлах. Для линейной интерполяции достаточно знания функции y = f (x) только в двух узлах, между которыми лежит точка интерполяции.

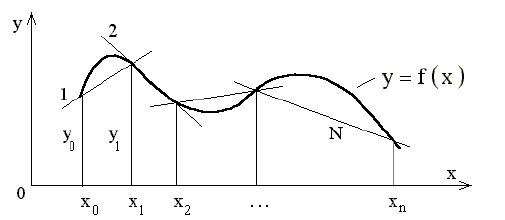


Рисунок 4.2 – Интерполирование полиномами первой степени

# 4.4 Интерполяция кусочно-гладким полиномом второй степени.

Для однозначного построения квадратичной параболы необходимо знать ее значения в трех точках, т.е. в трех узлах интерполяции. Пример квадратичной интерполяции дан на рис. 4.3. Кусочно-полиномиальная интерполяция дает непрерывную интерполирующую функцию (рис. 4.2 и 4.3). Между узлами интерполяции функция имеет непрерывные производные, которые в общем случае при n < N претерпевают разрыв в узлах интерполяции. Однако конкретная решаемая задача может требовать непрерывности производных интерполирующей функции во всем интервале [x0 , xN]. В этих случаях применяют сплайн-интерполяцию.

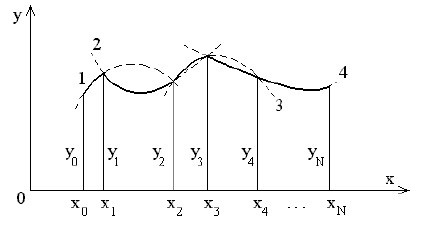


Рисунок 4.3 – Интерполирование полиномами второй степени

# 4.5 Сплайн-интерполяция

Кубическая сплайн-интерполяция означает, что между любыми соседними узлами (x0 , x1), (x1, x2), ..., (xi-1, xi), (xi , xi+1), ..., (xN-1, xn) функция   
y = f (x) интерполируется кубическим полиномом, равным значению функции y(x) в каждом узле и во всех узлах непрерывны его первая и вторая производные (условия сопряжения).

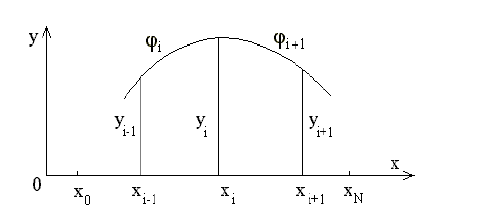


Рисунок 4.4 – К определению сплайн-интерполяции

Кубический полином

(5.6)

интерполирует функцию y = f (x) на интервале [xi-1, xi] (рис. 4.5), а

(4.6)

на интервале [xi, xi+1].

Условия сопряжения имеют вид:

(4.8)

Кроме того, на границах x = x0 и x = xN ставятся условия

(4.9)

Уравнения для коэффициентов полиномов (4.6) и (4.7) удовлетворяют условиям (4.8) и (4.9) и учитывают одинаковые расстояния между любыми соседними узлами.

; (4.10)

; (4.11)

; (4.12)

; (4.13)

; (4.14)

; (4.15)

; (4.16)

Уравнения (4.12), (4.13) представляют систему N+1 линейных алгебраических уравнений с N+1 неизвестными c1 , c2 , ..., cN и трехдиагональной матрицей. Система может быть решена методом прогонки. Зная сi , по формулам (4.14)–(4.16) находят bi и di , а по формуле (4.11) – значения ai .

# 4.6 Решение задач

Сплайн интерполяция

Рассчитаем значение шага интерполяции и разности первого и второго вида





















Построим систему уравнений для нахождения C - множества коэффициентов при x3, найдем a, b и d коэффициенты

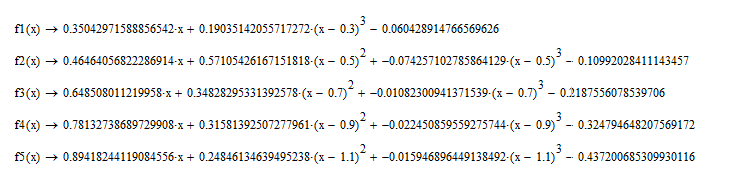








Найдем все функции для интерполирования между узлами



Вычислим значение функции в точке ξ

f5 (1.1) = 0.5464



Рисунок 4.5 – Функции интерполирования методом сплайн-интерполяции

Найдем интерполяционный полином методом Эйлера

Для начала получим производную для формул расчета ошибок.

Найдем соответствующие полиномы для всех промежутков и вычислим их сумму для нахождения полинома, описывающего весь заданный промежуток

















Рисунок 4.6 – Интерполяционный полином Лагранжа

Кусочно-линейная и квадратичная интерполяции

Далее по расчетам, приведенным в Приложении А, покажем кусочно-квадратичную и кусочно-линейную интерполяции





Рисунок 4.7 – Кусочно-квадратичная интерполяция



Рисунок 4.7 – Кусочно-линейная интерполяция

Для всех приведенных интерполяций значение f (1.1) = 0.5464 так как ξ является значением одного из узлов интерполяций.

# 5 ИССЛЕДОВАНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

# 5.1 Общие сведения

Пусть дана линейная система, которую можно записать в виде матричного уравнения. И пусть диагональные коэффициенты системы aii ≠ 0 (i = 1, 2, ..., n) .

Первое уравнение системы разрешают относительно x1 , второе – относительно x2 и т.д. В результате получают эквивалентную приведенную систему уравнений

, (4.1)

Где

Вводят матрицы

Систему (4.1) записывают в матричной форме

, (4.2)

и решают методом последовательных приближений. За нулевое приближение принимают столбец свободных членов .

Последовательно строят матрицы-столбцы

[первое приближение];

[второе приближение] и т.д.

Любое (k+1)-е приближение вычисляют как

, (4.3)

Если последовательность приближений , , ..., , ... имеет предел , то этот предел – решение системы (4.2).

Формулы (4.3) можно записать в развернутом виде

В общем случае, имея систему

можно положить .

Достаточные условия сходимости процесса итераций. Для системы

процесс итерации (4.3) сходится к единственному решению независимо от выбора начального приближения, если выполнены неравенства

т.е., если модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы больше модулей всех остальных коэффициентов (без учета свободных членов).

2. 4. 7 Итерационный метод Зейделя

Рассматривается линейная система из трех уравнений с тремя неизвестными

, (4.4)

Пусть , тогда по аналогии с методом простой итерации система может быть записана в виде

, (4.4)

Используя первое приближение к решению системы (4.4)

, (4.4)

вычисляют новое значение x1 :

Далее вычисляют новое значение x2 :

Используя вычисленные значения и , находят новое значение x3:

На этом заканчивается первая итерация.

Далее заменяют исходные значения (4.23) на , , и вычисляют следующее приближение. В общем случае k -е приближение определяется формулами:

, (4.5)

Правило останова вычислений задают следующим образом:

1) по максимальным значениям абсолютных разностей

, (4.6)

где e – некоторое положительное число;

2) по максимальным значениям относительных разностей

при условии, что .

Достаточные условия сходимости метода Зейделя. Для системы n уравнений с n неизвестными метод Зейделя сходится, если выполняются следующие условия:

1) система уравнений неприводима, т.е. нельзя вычислить какие-либо неизвестные, решая меньше, чем n уравнений;

2) для всех i

; (4.7)

3) по крайней мере для одного i

. (4.8)

Другими словами, диагональные члены должны преобладать в системе уравнений.

# 5.2 Решение задачи

Решим заданную по варианту систему уравнений методом простых итераций и методом Зейделя

Задана система уравнений вида



Для начала проведем расчет методом простых итераций

Для этого положим, что начальные коэффициенты равны 0

Тогда x, y и z на первой итерации будут равны

Продолжим выполнять итеративный подход

По истечению пяти итераций было получено решение с заданной точностью

Метод Зейделя использует подход простых итераций, модифицировав его начальными значениями коэффициентов ≠ 0 и используя только что полученные значения

И соответственно

Решение системы методом Зейделя получено на 3 шаге

Все решения получены с заданной точностью.

# 6 МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

# 6.1 Общие сведения

Пусть в процессе эксперимента путем измерений получена таблица некоторой зависимости f :

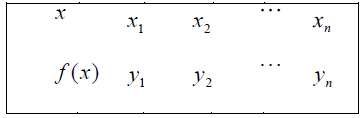


Рисунок 6.1 – Исходные данные к задаче обработки экспериментальных данных в общем виде

Требуется найти формулу, выражающую эту зависимость аналитически. Сформулируем задачу таким образом, чтобы учитывался характер исходной функции: найти функцию F заданного вида y=F(x), принимающую в точках ,,…,, значения близкие к табличным значениям ,,…,.

На практике вид приближающей функции F определяется следующим образом. По заданной таблице значений f (x) строится ее точечный график, а потом проводится гладкая кривая, приближенно отображающая характер расположения точек. По полученной кривой определяется вид приближающей функции. Рассмотрим метод наименьших квадратов, который используется для аппроксимации табличных данных с помощью непрерывной функции.

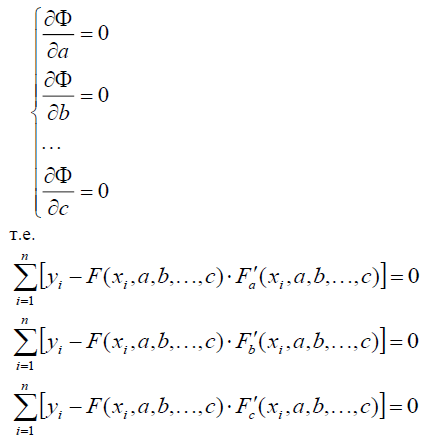
Выбираем соответствующую зависимость функции от аргумента:

Неизвестными параметрами здесь являются a,b,…,c.

Приведем функцию невязок:



Для того чтобы функция невязки достигла минимального значения, необходимо потребовать равенство нулю всех ее частных производных по всем неизвестным параметрам a,b,…,c :



Если полученную систему уравнений решить относительно параметров a,b,…,c, например, методом Гаусса, мы получим конкретный вид искомой функции y=F(x,a,b,…,c).

Очевидно, что изменение количества параметров не искажает сущности подхода, а лишь сказывается на количестве уравнений в системе.

Значения найденной функции y=F(x,a,b,…,c) в точках ,,…, будут отличаться от значений ,,…,. Значения разностей



называют отклонениями измеренных значений y от вычисленных по полученной формуле. Таким образом, можно найти величину



Среди нескольких различных приближений одной и той же табличной функции лучшим следует считать то приближение, для которого величина принимает наименьшее значение.

# 6.2 Решение задачи методом наименьших квадратов



Рисунок 6.1— Исходный график и график аппроксимирующих функций ,

Будем искать приближающую функцию в виде:

Тогда уклонения функции будут иметь вид:

d1=a2+a1x1-y1

d2=a2+a1x2-y2

………………….

dn=a2+a1xn-yn

Сумма квадратов уклонений должна быть минимальной , т.е. :

Задача сводится к нахождению экстремума функции S одной переменной.

Необходимые условия экстремума:



Перегруппируем переменные и сократим на два уравнения, учитывая необходимые условия экстремума, получим систему уравнений:



Составим таблицу:

Таблица 6.1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x | y | x2 | x\*y |
|  | 0 | 100 | 0 | 0 |
|  | 7 | 87,2 | 49 | 610,4 |
|  | 12 | 72,9 | 144 | 874,8 |
|  | 17 | 63,2 | 289 | 1074,4 |
|  | 22 | 54,7 | 484 | 1203,4 |
|  | 27 | 47,5 | 729 | 1282,5 |
|  | 32 | 41,4 | 1024 | 1324,8 |
|  | 37 | 36,3 | 1369 | 1343,1 |
| ∑ | 154 | 503,2 | 4088 | 7713,4 |

Тогда система (1) имеет вид:

Функция имеет вид

Отклонения для найденной прямой:

Будем искать приближающую функцию в виде:

Задача сводится к нахождению экстремума функции S от двух переменных.

Тогда уклонения функции будут иметь вид:

d1=a1x1^2+a2x1+a3-y1

d2=a1x2^2+a2x2+a3-y2

………………….

dn=a1xn^2+a2xn+a3-yn

Сумма квадратов уклонений должна быть минимальной, т.е.:

Необходимые условия экстремума:

Учитывая необходимые условия экстремума, получим систему уравнений:

Составим таблицу:

Таблица 6.2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x | y | x2 | xy | x3 | x4 | x2y |
|  | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | 7 | 87,2 | 49 | 610,4 | 343 | 2401 | 4272,8 |
|  | 12 | 72,9 | 144 | 874,8 | 1728 | 20736 | 10497,6 |
|  | 17 | 63,2 | 289 | 1074,4 | 4913 | 83521 | 18264,8 |
|  | 22 | 54,7 | 484 | 1203,4 | 10648 | 234256 | 26474,8 |
|  | 27 | 47,5 | 729 | 1282,5 | 19683 | 531441 | 34627,5 |
|  | 32 | 41,4 | 1024 | 1324,8 | 32768 | 1048576 | 42393,6 |
|  | 37 | 36,3 | 1369 | 1343,1 | 50653 | 1874161 | 49694,7 |
| ∑ | 154 | 503,2 | 4088 | 7713,4 | 102851 | 2969507 | 186225,8 |

Тогда система (1) имеет вид:

Функция имеет вид

Отклонения для найденной прямой:

Т.к. значение для функции меньше чем значение для функции – то, полученная эмпирическая формула лучшим образом аппроксимирует значения исходной функции, заданной в виде набора точек.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численные методы – это методы решения задач, которые сводятся или могут быть сведены к арифметическим действиям над числами. Для того, чтобы численные методы могли быть реализованы на ЭВМ, они должны быть устойчивыми и сходящимися.

Особенностью численных методов является то, что они находятся на стыке математики и информатики. Стоит отметить, что необходимым условием применения численных методов – является их реализация на ЭВМ. В реальных задачах данные методы применяются на обширных диапазонах входных данных, где требуется достижение достаточно большой точности вычислений, что зачастую означает необходимость произведения колоссального числа расчетов, для чего и требуется привлечение ЭВМ, которые на сегодняшний день имеют необходимые мощности для решения поставленной задачи в кратчайшие сроки и с минимальной погрешностью. Однако искусство вычислений состоит фактически не столько в предъявлении числовых результатов в виде таблиц чисел и графиков, сколько в обосновании того, что эти результаты получены с заданной точностью.

Таким образом, существует множество численных методов для решения той или иной математической задачи, каждый из них имеет свои недостатки и преимущества, которые необходимо учитывать при выборе для решения того или иного метода.

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бахвалов Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях. Учеб. пособие / Н.С.Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – М.: Высш. шк., 2000.

– 190 с.

1. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
2. Доценко С.В. Конспект лекций по дисциплине «Численные методы в информатике» / С.В. Доценко. – Севастополь. Изд-во СевНТУ, 2000. – 112 с.
3. Дьяконов В.А. Mathcad 8/2000: Специальный справочник/ В.А. Дьяконов.-СПб.:Питер, 2002.-586с.

# ПРИЛОЖЕНИЕ А

Порядок вычислений, производимых в математическом пакете Mathcad

Вычисление площади фигуры:

















































Численное дифференцирование функций:

Расчет дла n=4

Расчет дла n=2























Точное значение заданой функции



Значение производной



Интерполирование функции:

























Сплайн



































































Эйлер



























Кусочно - квадратичная

Кусочно - линейлая























Исследование итерационных методов решения систем линейных уравнений:









































































Методы обработки экспериментальных данных:









































































































