Security Level:

Модуляция и формирование сигнального созвездия (constellation shaping)

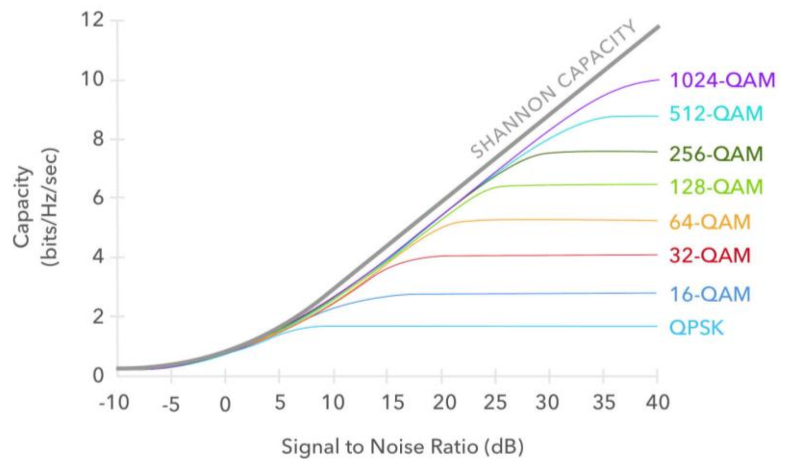
www.huawei.com

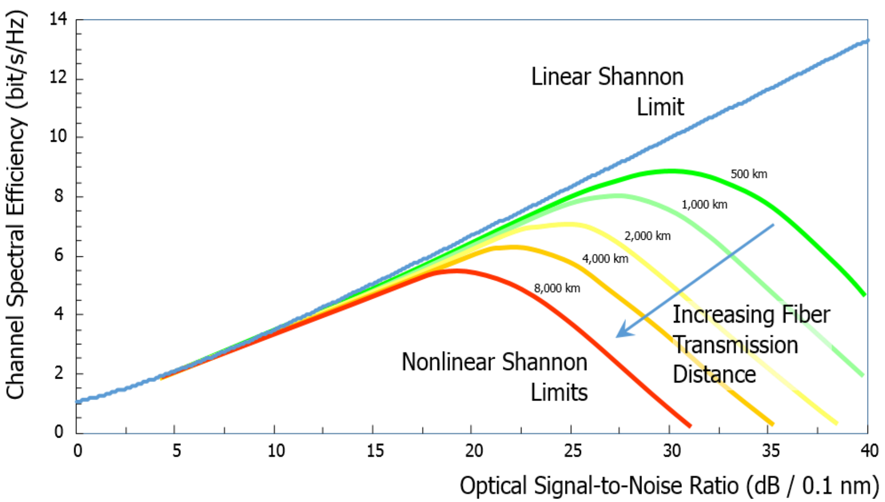
Автор/ Email: Сидельников Глеб / sidelnikov.gleb2@huawei.com
Version: V1.0(20220309)

HUAWEI TECHNOLOGIES CO., LTD.

Введение

- **В когерентной оптике преимущественно используется созвездния QAM (Квадратурно Амплитудная Модуляция КАМ).**
- **Любой квадратный QAM обладает априорной ассимптотической ошибкой до границы Шеннона (~1.53dB) в линейном канале.**
- **В оптике из-за того, что канал является нелинейным ввели в рассмотрение особый нелинейный предел Шеннона*.**





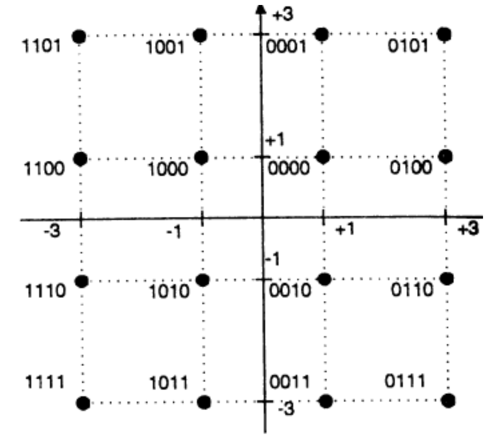
*Andrew D. Ellis, Jian Zhao, and David Cotter, "Approaching the Non-Linear Shannon Limit," J. Lightwave Technol. 28, 423-433 (2010)

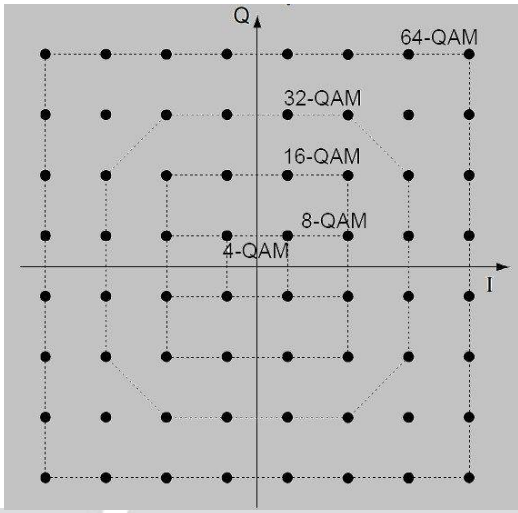
Пример QAM

- **Когерентный передатчик/приемник позволяют модулировать как амплитуду так и фазу**
- **Удобно перейти в комплесное описание сигнала**
- **Число бит передаваемых одним символом:**

$$b = \log_2(M)$$

- **Для QAM16 используется 16 символов, то есть мы можем потенциально передавать 4 бита в каждом символе.**
- **Labeling/Mapping – соответствие символа набору бит**
- **Чаще всего используется маппинг по коду Грея**
  - У соседних ближайших символов отличается только один бит
  - Циклический сдвиг маппинга по вертикали или горизонтали также остается кодом Грея.
- **Самая используемая модуляция в оптике 16QAM**
  - 2 бита отвечают за положение квадртанта (знаковые биты)
  - 2 бита отвечают за положение в квандранте (амплитудные биты)
- **Вероятностный шейпинг для AWGN канала применяется к амплитудным битам**





Емкость

- **Для фиксированного созвездия с *M* точками пропускная способность – количество информации, передаваемое без учета канала:**

$$C = -\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{M}} P(x_i) \cdot \log_2 P(x_i)$$

- **Емкость – количество инормации, передаваемое с учетом канала**
  - Теорема Шеннона-Хартли

$$C = \log_2(1 + SNR)$$

  - Емкость для фиксированного созвездия, показывающая верхнюю границу передаваемой информации в битах на один символ с учетом канала без памяти, вычисляется с помощью

$$MI = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{M}} P(x_i) \cdot \int_Y p(y|x_i) \log_2 \frac{p(y|x_i)}{p(y)} dy$$

  - Предел является недостижимым при реализации реальной схемы кодирования, также называется взаимной информацией (Mutual Information)

Цель шейпинга

- При заданной пропускной способности обеспечить наименьший BER (bit error rate).
- Сократить ошибку до границы Шеннона.

Методы

- Геометрический шейпинг (изменение формы созвездия)
- Вероятностный шейпинг (изменение вероятности появления точек созвездия)
- Гибридный шейпинг

Геометрический шейпинг созвездия

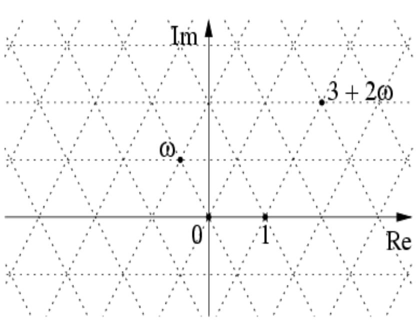
- **У чисел Гаусса целые реальные и мнимые части**

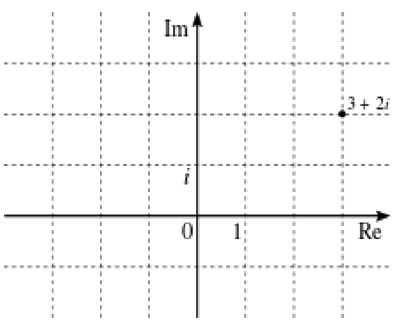
$$x = a + \boldsymbol{i}b, \{a, b\} \in \boldsymbol{Z}$$

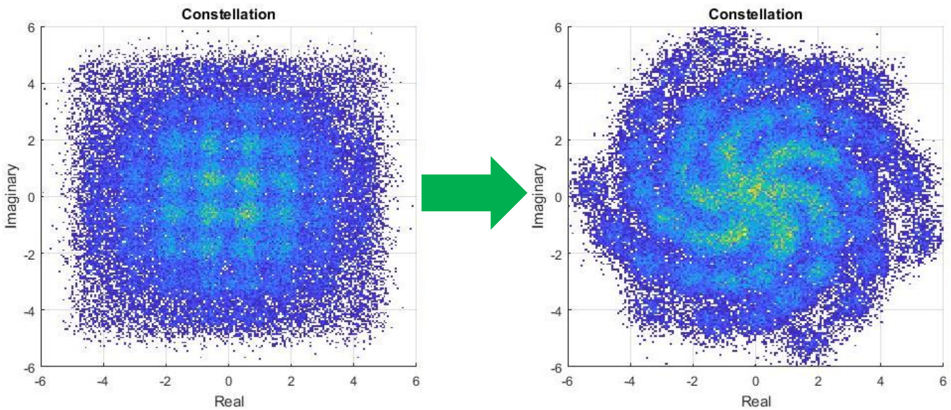
- **Более оптимальная сетка описывается числами Эйзенштейна**

$$x = a + \boldsymbol{\rho}b, \{a, b\} \in \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\rho} = exp\left(\frac{3\boldsymbol{i}-1}{2}\right)$$

- **Для особых искажений (фазовые шумы, нелинейности) оптимальными являются созвездия иных форм**
- **Для AWGN наиболее простым критерием является минимизация среднего расстояния между точками созвездия**







Вероятностный шейпинг созвездия (PCS)

- **Цель: сгенерировать созвездие с наименьшей энергией при фиксированной битовой емкости и геометрии.**
  - Для 16QAM у нас есть возможность сделать независимый шейпинг для квадратур I и Q
  - Всего один свободный параметр: вероятность “0” или “1”
  - Пропускная способность, в случае когда мы имеем k бит на входе и n бит на выходе

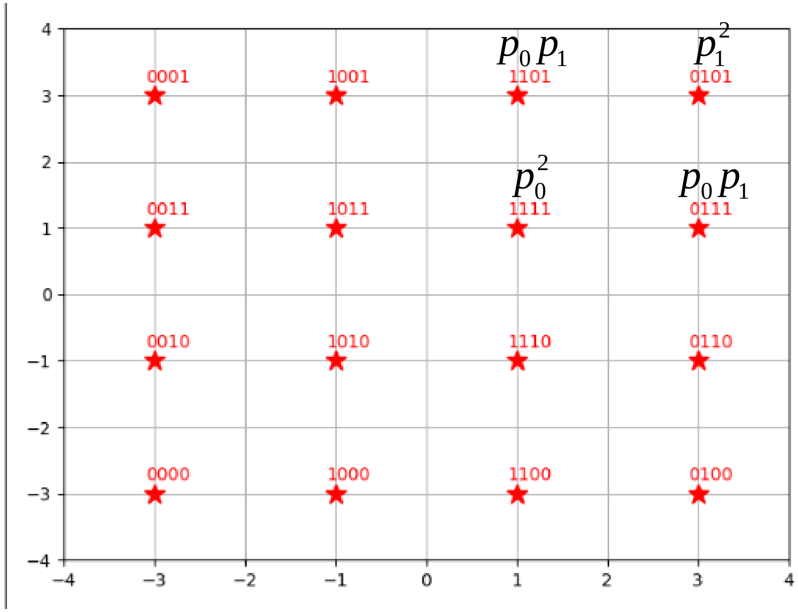
$$C_{throughput} = 2 + 2\frac{k}{n}$$

  - Наблюдаемая емкость:

$$MI = 2 - p_0^2 \log_2 p_0^2 - 2 p_0 p_1 \log_2 p_0 p_1 - p_1^2 \log_2 p_1^2$$

  - Нормированная мощность созвездия:

$$P_s = 2 p_0^2 + 2 \cdot 10 p_0 p_1 + 18 p_1^2$$



$$p_1 = 1 - p_0$$

Линейное кодирование

- **Как правило линейные коды представимы в виде $\vec{v} = \boldsymbol{G}\vec{m}$**
  - $\vec{m}$ - информационное слово длины k
  - $\vec{v}$ - кодовое слово длины n>k
  - $\boldsymbol{G}$ - порождающая матрица (n, k)
- **Линейные коды чаще всего используются для коррекции ошибок (Hamming, LDPC, TPC и т.д.)**
- **Задача декодирования представляет собой решение системы линейных уравнений в соответствующем поле**
- **Линейный код не подходит для реализации вероятностного шейпинга**

Нелинейное кодирование

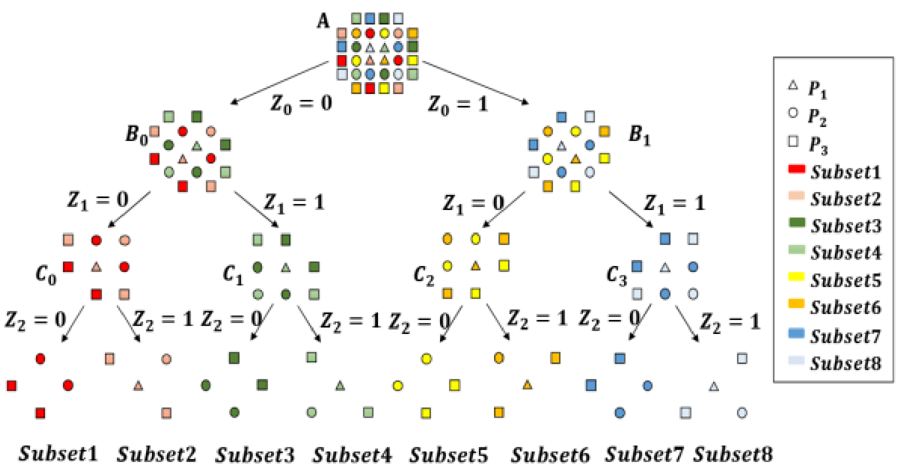
- Избыточность может быть направлена на создание неких нелинейных свойств

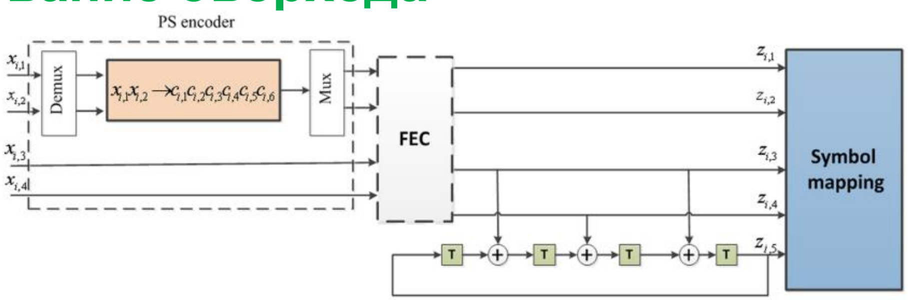
$$\vec{v} = G(\vec{m}), \qquad G(\overrightarrow{m_1} + \overrightarrow{m_2}) \neq G(\overrightarrow{m_1}) + G(\overrightarrow{m_2})$$

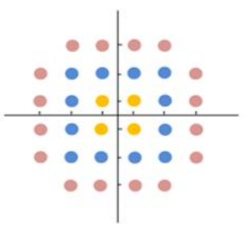
- Перераспределение вероятности «0» и «1» представляет собой пример вероятностного шейпинга
- Можно использовать различные нелинейный метрики (NCS)
- Для AWGN оптимальным является распределение Максвелла-Больцмана (по «Гауссу» для мощности)
- Мягкое декодирование крайне нестабильно!
- Как правило, можно объединить с линейным кодированием.

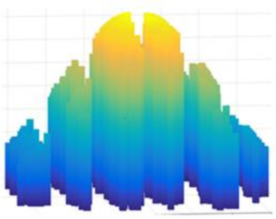
Шейпинг по треллису (TCM)

- **Для треллис модуляции/демодуляции часто используется алгоритм Витерби**
- **В оптике применяется иерархическая символьная реализация**
- **Позволяет использовать мягкий декодер**
- **Экпоненциальный рост сложности с памятью**
- **Более эффективное использование оверхеда**









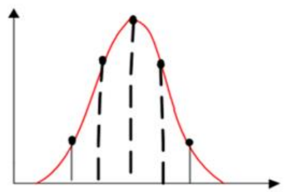


Схема кодирования Ковера

- **Лексикографический порядок**
  - Поля и векторные пространства
    - {0, 1} с классическим векторным пространством, т.е. Последовательность вида $\vec{x} = (x_1 \quad \cdots \quad x_n) = 011001$
  - Правила сравнения слов
    - Естественное правило, если пробегая биты слева направо мы встречаем в одном слове 1, а в другом 0, то первое больше, 010011 > 010001
  - Намного лучше иметь аналитическое представления числа комбинаций
    - Наиболее востребованы энумерации с ограничениями, наиболее известное constant composition distribution matching (CCDM), правило $\sum_{j=1}^{n} x_j = w$
    - Индекс в лексикографическом словаре $i(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j n_s(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0)$
    - Число комбинаций может быть представлено аналитически

$$n_S\left(x_1,..,x_{j-1},0\right)=\binom{n-j}{n(w,j)},\quad n(w,j)=w-\sum_{k=1}^{j-1}x_k$$

$$\binom{n}{k}=C_k^n=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Схема кодирования Ковера

- **Декодер**
  - Из последовательности $\vec{x} = (x_1 \quad \cdots \quad x_n)$ восстановить $\vec{y} = (y_1 \quad \cdots \quad y_m), m < n$
  - Последовательность $\vec{y}$ может быть рассмотрена как бинарное представление индекса в лексикографическом порядке

$$\vec{y} = bin\big(i(\vec{x})\big) = bin\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \binom{n-j}{n(w,j)}\right)$$

  - Так как $x_j \in \{0,1\}$, Нужно сосчитать только часть где $x_j = 1$
  - Если $n(w,j) > n-j$, биномиальные коэффициенты принимаются равными нулю, если $x_j = 1$, тогда $n(w,j) = w, w-1, \ldots$
  - 1 шаг, найти *j* при котором $x_j = 1$, 2 шаг – вычислить адресс в таблице (LUT) соответствующего бинамиального коэффициента
    3 шаг – вычислить сумму

Схема кодирования Ковера

- **Энкодер**
  - Из последовательности $\vec{y} = (y_1 \quad \cdots \quad y_m)$, восстановить $\vec{x} = (x_1 \quad \cdots \quad x_n)$
  - Выходные биты вычисляются последовательно, если $i = bin(\vec{y}) > n_s(x_1, \dots, x_{j-1}, 0)$, тогда $x_j = 1$, и $i = i - n_s(x_1, \dots, x_{j-1}, 0)$.
  - Можно интерпретировать в решетчатом представлении
    - Если $i > n_s(x_1, \dots, x_{j-1}, 0)$ идем вверх влево, в противном случае вверх вправо
    - Решетка объясняет почему мы используем биномиальные коэффициенты для описания числа возможных путей
    - Общее число шагов всегда n

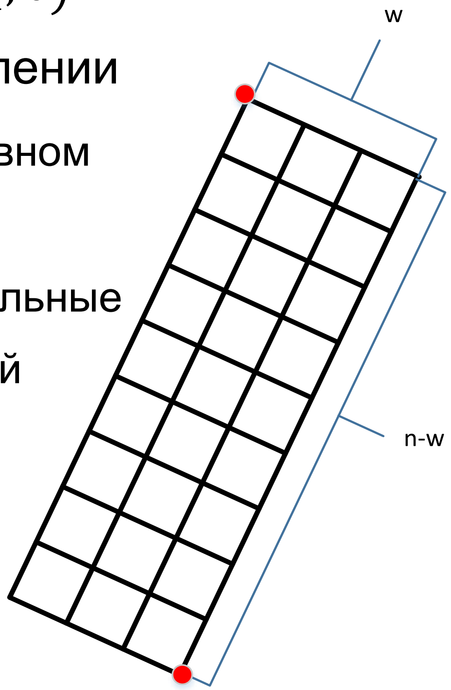


Схема кодирования Ковера

- **Модификация для оптимального шейпинга (Spherical)**
  - Полный словарь содержит последовательности всех весов
  - Число комбинаций одного веса $n(w) = \binom{n}{w}$
  - Модифицированная формула $i(\vec{x}) = \sum_{w=0}^{w^*-1} n(w) + \sum_{j=1}^{n} x_j \binom{n-j}{w^* - \sum_{k=1}^{j-1} x_k}$
  - Энкодер: Определим $w*$ как минимальное значение при котором

$$\sum_{w=0}^{w^*} n(w) > i$$

  - Декодер: Определим $w*$ как $w^* = \sum_{j=1}^{n} x_j$

00000	$w=0,\ n=1$
00001 00010 00100 01000 10000	$w=1,\ n=5$
00011	
00101	
...	

Аппроксимация и проблемы

- **Представление биномиальных коэффициентов с плавающей точкой**

$$\underbrace{01001100111010001101}_{\text{20 бит мантисса}}\,0101000100010100001 0100$$

  - Память может быть существенно снижена ценой небольшой субоптимальности.
  - Пример: 1024 длина блока, 20 бит мантисса, 10 бит экспонента, 34 раза сокращение памяти
- **Процедура дешейпинга неустойчива**
  - Один ошибочный бит на входе может продуцировать множество ошибок
  - Нет мягкой процедуры дешейпинга
  - Условия ограничения (CCDM) сложно использовать для помощи FEC

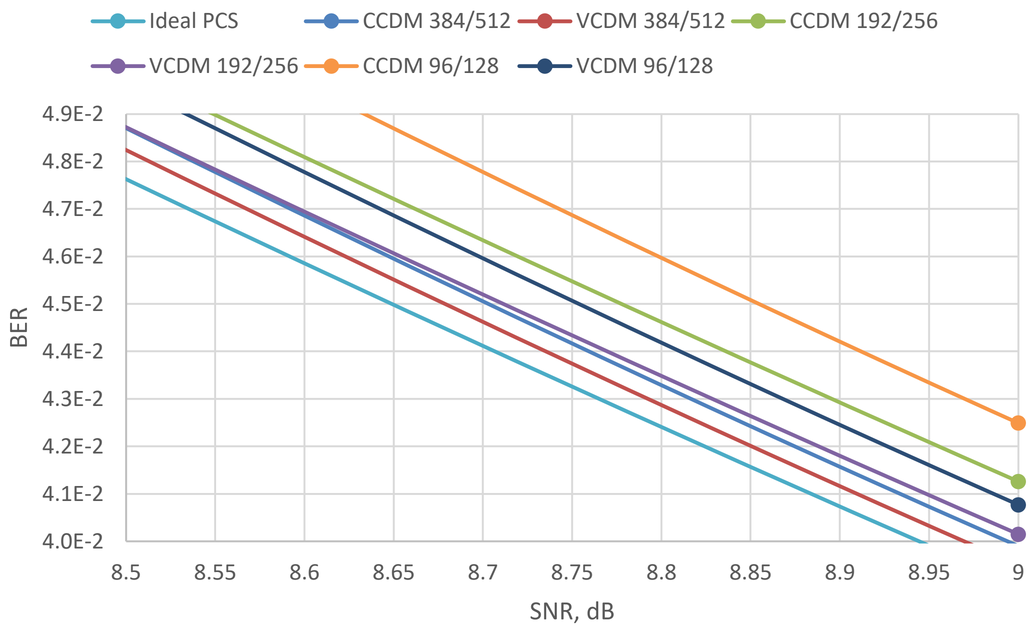
Пример

- **Рассмотрим k=3, n=5**

Входные биты	CCDM словарь	Словарь сферического шейпинга
000	00011	00000
001	00101	00001
010	00110	00010
011	01001	00100
100	01010	01000
101	01100	10000
110	10001	00011
111	10010	00101
Po	0.6	0.775

Пример

- **Для больших блоков ошибка CCDM становится пренебрежимо маленькой.**
- **Для маленьких блоков оптимальный шейпинг имеет ощутимо меньшую погрешность.**



Литература

- 1. Уильям Э. Райан и Шу Линь (2009). Коды каналов: классический и современный . Издательство Кембриджского университета. п. 4 . ISBN 978-0-521-84868-8
- 2. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. М.: Сов. радио,
- 1974
- 3. Cover T. M. Enumerative source encoding // IEEE Trans. Inform. Theory. 1973. V. IT-19, N 1. P. 73-77.
- 4. G. Bocherer, \Probabilistic signal shaping for bit-metric decoding," in Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory (ISIT), Honolulu, HI, USA, Jun. 2014, pp. 431--435.
- 5. M. Vedat Eyuboglu, and G. David Forney , Jr., “Trellis Precoding: Combined Coding, Precoding and Shaping for Intersymbol Interference Channels”, IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, VOL. 38, NO. 2, MARCH 1992, P. 301 – 314.
- 6. M. Secondini and E. Forestieri, "The Limits of the Nonlinear Shannon Limit," in Optical Fiber Communication Conference, OSA Technical Digest (online) (Optical Society of America, 2016), paper Th3D.1.
- 7. K. A. S. Immink, Codes for Mass Data Storage Systems, 2nd ed Eindhoven, The Netherlands: Shannon Found., 2004.
- 8. O. F. Kurmaev, \Constant-weight and constant-charge binary run-length limited codes," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 57, no. 7, pp. 4497{4515, July 2011.

Thank you

www.huawei.com