

Программа курса по "Теории Вероятностей"
IV семестр. ФКТИ. Весна 2023.
Группы 1303,1304, 3381-83.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Вероятностный эксперимент. Аксиоматика Колмогорова.
2. Классическое и геометрическое определение вероятности. Примеры.
3. Свойства вероятности. (+ задача о письмах)
4. Условные вероятности и понятие независимости пары событий. Независимость в совокупности и попарная независимость. Примеры.
5. Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Примеры.
6. Независимые эксперименты. Испытания Бернулли. Формула Бернулли для вычисления вероятностей в схеме Бернулли. Примеры.
7. Приближенное вычисление вероятностей в схеме Бернулли. Схема Пуассона. Теорема Пуассона. Примеры использования.
8. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Пример.
9. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Примеры использования.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА

10. Понятие сигма-алгебры. Определение меры. Свойства меры*. Примеры.
11. Измеримые функции. Разбиения и простые функции. Определение интеграла (Лебега) от простых функций по мере. Определение интеграла от неотрицательной функции. Определение интегрируемой функции. Понятие интеграла Лебега от интегрируемой функции. Свойства интеграла Лебега*.
12. Сингулярность и абсолютная непрерывность мер. Плотности. Теорема Радона-Никодима*. Примеры.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ВЕКТОРЫ

13. Случайные величины. Распределение случайной величины. Задание распределения с помощью функции распределения. Свойства функций распределения. Вычисление вероятности попадания значения случайной величины в интервал с помощью функции распределения.
14. Классификация распределений (типы случайных величин). Дискретный и абс. непрерывный типы распределений. Способы задания. Смеси, разложение распределения на дискретное и непрерывную части. Абсолютно непрерывные распределения, плотность распределения и ее свойства.
15. Преобразование случайных величин. Преобразование распределений. Примеры.
16. Преобразование плотности при монотонном отображении. Линейные преобразования. Преобразование Смирнова. Примеры.
17. Случайные векторы. Совместные распределения случайных величин. Распределения и функции распределения. Свойства функции распределения. Пример вычисления. Одномерные распределения.
18. Случайные векторы дискретного и непрерывного типа. Абсолютно-непрерывные случайные векторы. Способы задания. Плотности. Свойства плотностей.
19. Понятие независимости случайных величин. Независимость в терминах функций распределения и плотностей.
20. Условные распределения. Абсолютно непрерывный и дискретный случаи. Примеры вычисления. Вычисление распределений сумм с использованием условных распределений. Формула полной вероятности. Формула свертки.

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ВЕКТОРОВ

21. Числовые характеристики случайных величин. Мат. ожидание, дисперсия (вероятностный смысл), моменты, квантили (медиана, квартили).
22. Свойства мат. ожидания и примеры вычисления мат. ожиданий. Примеры распределений с несуществующим мат. ожиданием.

23. Дисперсия и ее свойства. Примеры вычисления дисперсии.
24. Числовые характеристики случайных векторов. Вектор мат. ожиданий. Ковариация и коэффициент корреляции. Матрица ковариации. Свойства.
25. Условные числовые характеристики. Условные мат. ожидания и их свойства. Примеры вычисления.
26. Неравенства для моментов (часть 1). Неравенства Гельдера, Минковского и Йенсена. Неравенство Коши-Буняковского как простое следствие неравенства Гельдера.
27. Неравенства для математических ожиданий (часть 2) (в т.ч. неравенства Ляпунова и Чебышева)

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

28. Последовательности случайных величин и их распределения. Законы больших чисел. Теорема Маркова как следствие неравенства Чебышева. Законы больших чисел в форме Чебышева. Закон больших чисел в форме Хинчина. Закон больших чисел в форме Бернулли (для схемы Бернулли).
29. Виды сходимости в теории вероятностей. Сходимость по вероятности, с вероятностью 1, в среднем порядка d . Сходимость по распределению (слабая сходимость). Связь между различными видами сходимости. Формулировка усиленного закона больших чисел.
30. Суммы независимых одинаково распределенных случайных величин. Центральная предельная теорема Леви. Интегральная теорема Муавра-Лапласа как частный случай теоремы Леви.

*- означает, что доказательство данного факта в этом вопросе не требуется.

Рекомендуемая литература

Ананьевский С.М., Невзоров В.Б. Теория вероятностей с примерами и задачами. – Изд. СПбГУ, 2013, ISBN 978-5-288-05491-4.

Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986.

Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988.

Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей. – СПб.: “Лань”, 1998.

Дополнительная литература

Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980.

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984.

Лозев М. Теория вероятностей. — М.: Иностр. лит., 1962.