

# Лабораторная работа №4

## Траекторное управление и задача планирования траектории.

### 1 Методические рекомендации

До начала работы студент должен выполнить предыдущие лабораторные этого цикла.

### 2 Теоретические сведения

В прошлой работе вы успели ознакомиться с решением прямой и обратной задач кинематики для трехзвенного манипулятора. В данной лабораторной работе вам будет необходимо построить на основании знаний из второй лабораторной работы траекторный регулятор, способный следить за заданной траекторией с высокой точностью.

**Слежение за заданной траекторией** Многозвенный манипулятор представляет из себя систему состоящую из  $n$  сочленений. Каждое сочленение манипулятора испытывает момент нагрузки, обусловленный гравитационными силами, действующий на последующие сочленения и моменты сил вырабатываемые другими сочленениями, то есть каждое звено влияет на точность перемещения системы по заданной траектории. Следовательно слежение за траекторией можно разделить на две основных задачи. Во-первых, обеспечение слежения за траекторией путем регулирования напряжений в зависимости от информации полученной с датчиков. Во-вторых, компенсация создаваемых моментов сил и нагрузки.

В случае одномерного управления момент нагрузки рассматривается как внешний момент  $M_l$ . Во второй лабораторной работе вы уже вывели передаточную функцию от входа  $M_u(s)$  к выходу  $\Theta(s)$  принимая  $M_l(s) = 0$ :

$$\frac{\Theta(s)}{M_u(s)} \approx \frac{1}{s(J_ms + K)}, \quad (1)$$

где  $M_u(s) = \frac{K_m}{R}U(s)$ ,  $K = K_f + \frac{K_e K_m}{R}$ . Теперь получим передаточную функцию от входа  $M_l(s)$  к выходу  $\Theta(s)$  принимая  $U(s) = 0$ :

$$\frac{\Theta(s)}{M_l(s)} \approx -\frac{1}{s(J_ms + K)}, \quad (2)$$

Комбинируя передаточные функции (1) и (2) получаем:

$$\Theta(s) = \frac{1}{s(J_ms + K)}(M_u(s) - M_l(s)) = P(s)(M_u(s) - M_l(s)), \quad (3)$$

где  $P(s)$  передаточная функция математической модели вращательного сочленения с учетом внешних моментов.

Первую задачу слежения за траекторией помогает решить ПИД-регулятор. Вы уже знакомы с ПИД-регулятором по скорости изображенном на рис. 4.1

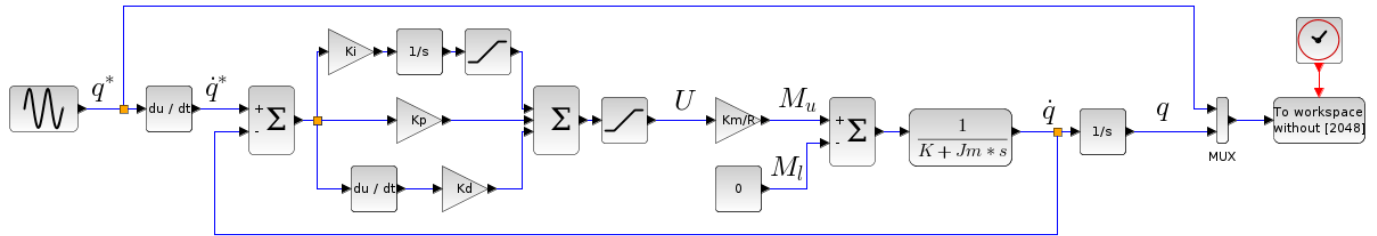


Рис 4.1 Система моделирования замкнутой системы с ПИД-регулятором

Как видно из ошибки моделирования слежения за траекторией представленной синусом, данной системе не хватает точности позиционирования, то есть манипулятор не точно обрабатывает траекторию.

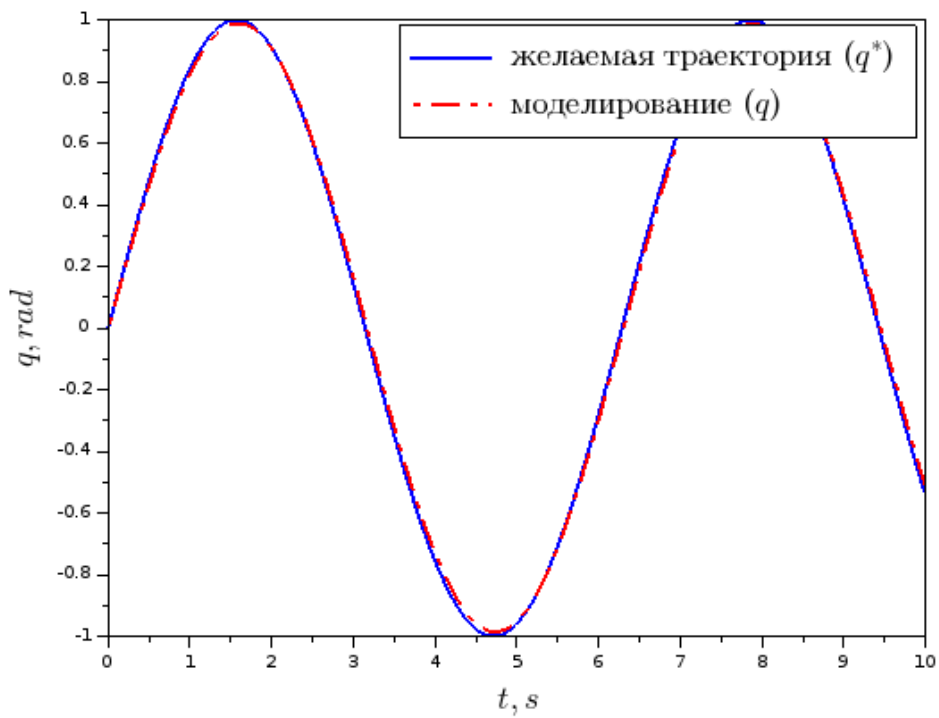


Рис 4.2 Моделирование слежения за синусом одного привода без внешнего воздействия

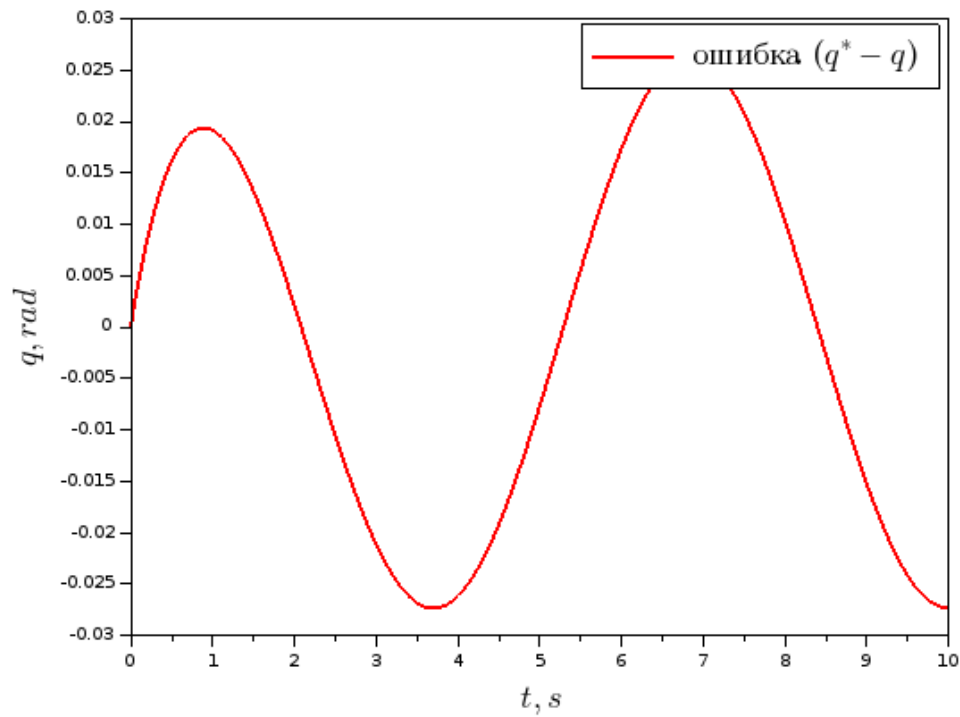


Рис 4.3 Ошибка слежения за синусом одного привода без внешнего воздействия

Для решения второй задачи слежения за траекторией необходимо сделать траекторный регулятор. Пропорционального регулятора по углу будет вполне достаточно. Реализацию данного регулятора можно найти в схеме моделирования представленной на рис. 4.4.

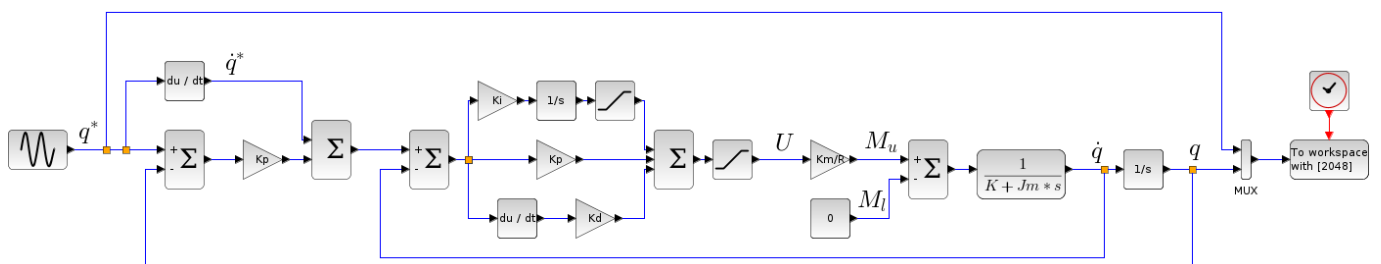


Рис 4.4 Система моделирования замкнутой системы с траекторным регулятором

Как можно заметить после внедрения траекторного регулятора сочленение стало лучше следовать за синусом и порядок ошибки уменьшился.

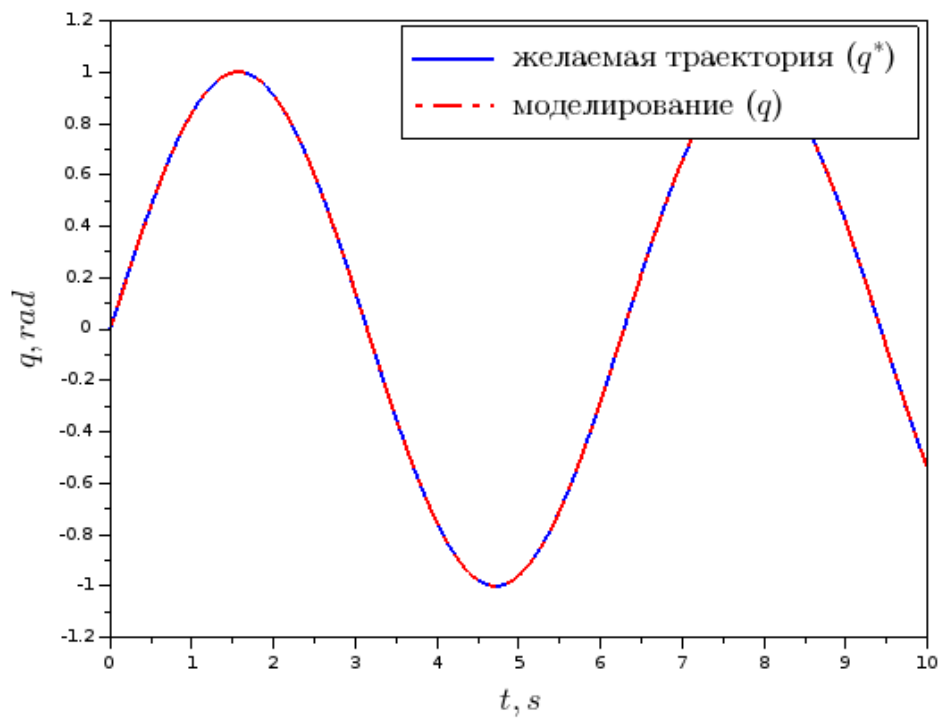


Рис 4.5 Моделирование слежения за синусом одного привода с траекторным регулятором

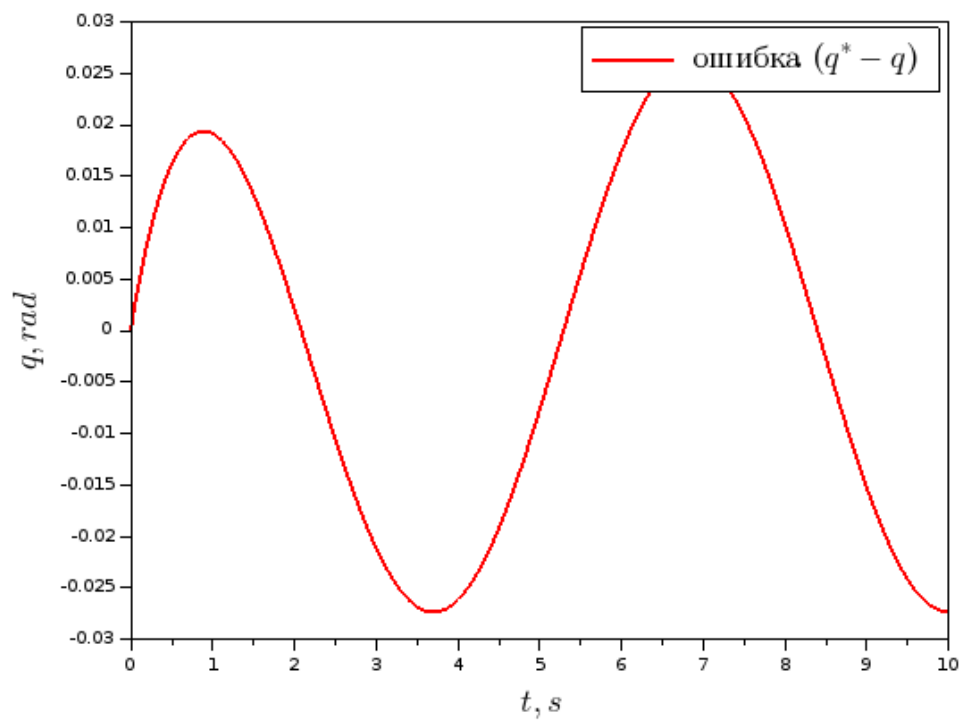


Рис 4.6 Ошибка слежения за синусом одного привода с траекторным

Чтобы наглядно показать влияние траекторного регулятора на точность следования желаемой траектории на рисунке 4.7 приведен график сравнения двух ошибок.

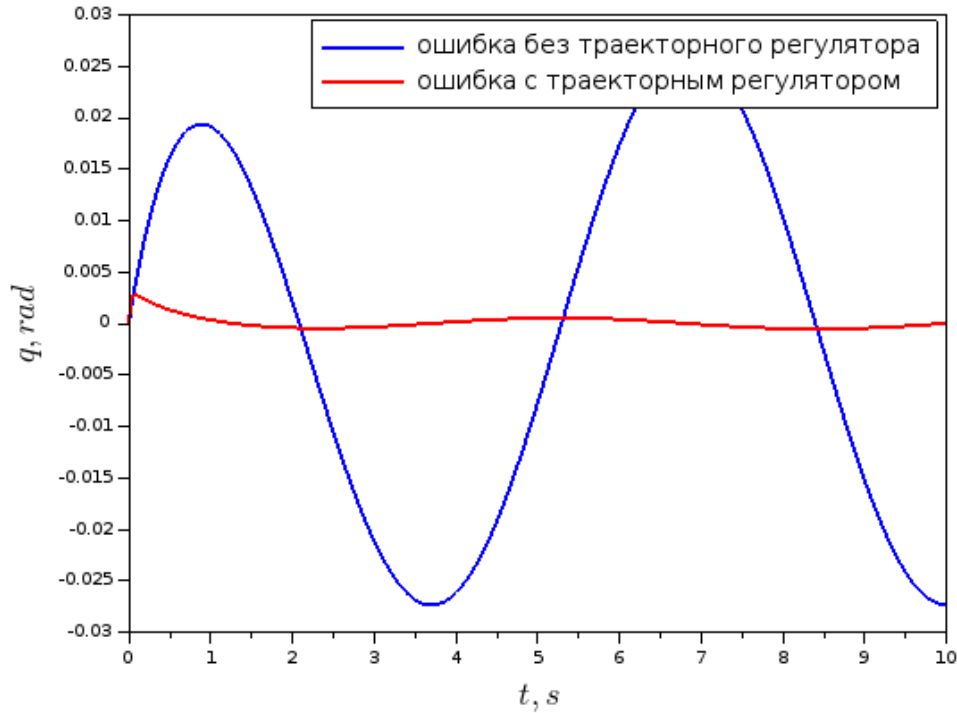


Рис 4.7 Система моделирования замкнутой системы с ПИД-регулятором

## Планировщик траектории

Основной задачей планирования траектории является поиск непрерывного закона движения манипулятора, а именно параметризация пути временем:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Закон движения нужен в первую очередь, чтобы звенья манипулятора двигались согласованно, то есть в начальный и конечный момент времени все звенья начинали и заканчивали свое движение одновременно. При этом для планирования траектории необходимо знать динамические ограничения системы, а именно максимальную скорость и ускорение выходных валов редукторов в сочленениях:  $q_{i_{max}}$  и  $\dot{q}_{i_{max}}$

Рассмотрим задачу перемещения манипулятора из одной конфигурации в (Point to Point). При этом известны только граничные значения обобщенных координат и скоростей:  $q_s = q(0)$ ,  $\dot{q}_s = \dot{q}(t_0)$ ,  $q_f = q(t_f)$ ,  $\dot{q}_f = \dot{q}(t_f)$ , где  $t_0$   $t_f$  - начальное и конечное время соответственно. Необходимо найти значение обобщенных координат манипулятора в каждый момент времени  $t \in [t_0, t_f]$ .

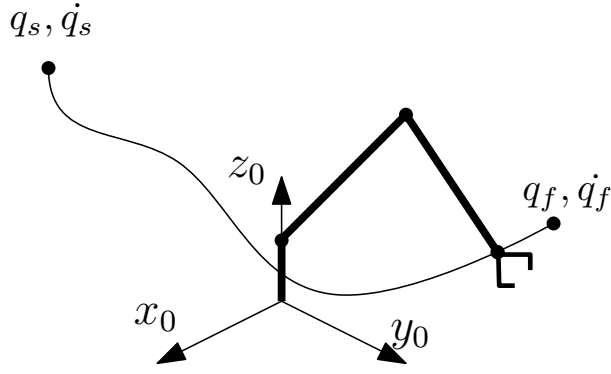


Рис 1.1 Граничные условия для планирования траектории.

## Сплайн интерполяция

Одним из самых распространенных подходов планирования траектории является сплайн-интерполяция. Рассмотрим основную идею процесса интерполяции сплайном с точки зрения лин. алгебры. В рамках нашей задачи ограничимся интерполяцией сплайном третьей степени, ввиду зашумленности измерения ускорений двигателя и как следствие невозможности управления ими. В таком случае уравнение движения для каждого звена манипулятора  $q_i(t)$  задается следующим образом:

$$q_i(t) = a_{i,1} \cdot t^3 + a_{i,2} \cdot t^2 + a_{i,3} \cdot t + a_{i,4} \quad (5)$$

, где  $a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, a_{i,4}$  - неизвестные коэффициенты полинома. Продифференцируем его для получения угловых скоростей и получим:

$$\dot{q}_i(t) = 3a_{i,1} \cdot t^2 + 2a_{i,2} \cdot t + a_{i,3} \quad (6)$$

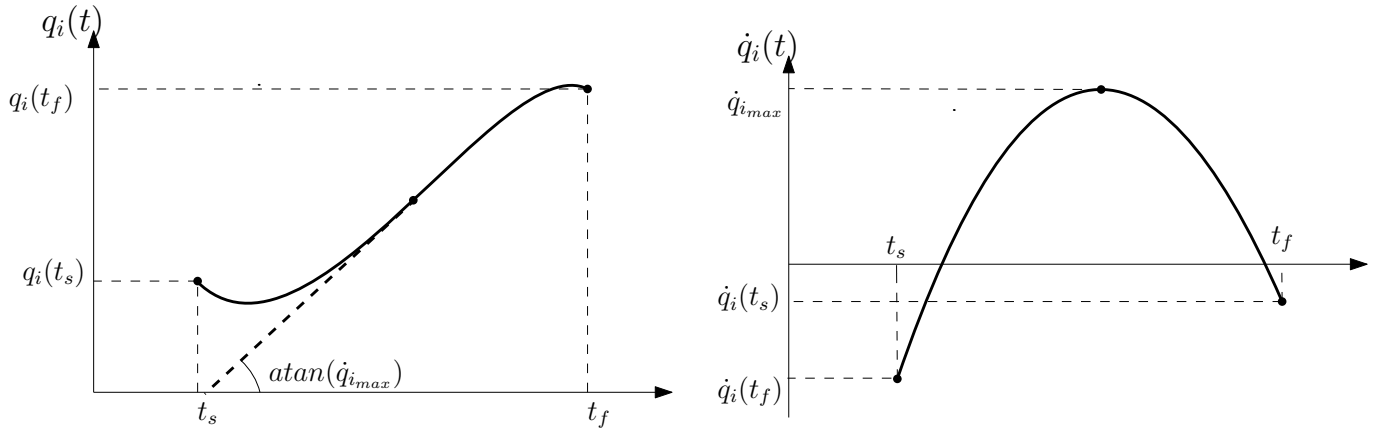


Рис 1.2 Интерполяция кубическим сплайном.

Теперь вспомним о том, что нам известны начальные и конечные значения обобщенных координат и скоростей:  $q_{i_s}, q_{i_f}, \dot{q}_{i_s}, \dot{q}_{i_f}$ , а также времени  $t_s$  и  $t_f$  подставив их в уравнения сформируем систему:

$$\begin{cases} q_{i_s} = a_{i,1} \cdot t_s^3 + a_{i,2} \cdot t_s^2 + a_{i,3} \cdot t_s + a_{i,4} \\ q_{i_f} = a_{i,1} \cdot t_f^3 + a_{i,2} \cdot t_f^2 + a_{i,3} \cdot t_f + a_{i,4} \\ \dot{q}_{i_s} = 3a_{i,1} \cdot t_s^2 + 2a_{i,2} \cdot t_s + a_{i,3} \\ \dot{q}_{i_f} = 3a_{i,1} \cdot t_f^2 + 2a_{i,2} \cdot t_f + a_{i,3} \end{cases} \quad (7)$$

Теперь перейдем непосредственно к интерполяции. Чтобы найти закон движения (1) для каждого звена необходимо определить коэффициенты  $a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, a_{i,4}$ . Как видно из уравнений выше, если принять в них эти коэффициенты как неизвестные параметры, то получится так, что мы имеем **4 уравнения и 4 неизвестных параметра**. Таким образом, мы однозначно сможем разрешить систему уравнений относительно параметров  $a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, a_{i,4}$ . Воспользуемся для этого матричным представлением системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} q_{i_s} \\ q_{i_f} \\ \dot{q}_{i_s} \\ \dot{q}_{i_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_s^3 & t_s^2 & t_s & 1 \\ t_f^3 & t_f^2 & t_f & 1 \\ 3t_s^2 & 2t_s & 1 & 0 \\ 3t_f^2 & 2t_f & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ a_{i,3} \\ a_{i,4} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Перепишем данное выражение в удобном для представления виде:

$$b_i = M_i a_i \quad (9)$$

, где  $M$  - матрица коэффициентов,  $a_i = [a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, a_{i,4}]^T$  - вектор искомых параметров,  $b_i = [q_{i_s}, q_{i_f}, \dot{q}_{i_s}, \dot{q}_{i_f}]^T$  - вектор граничных условий. Теперь можно найти вектор параметров  $a_i$ , обратив матрицу  $M_i$ :

$$a_i = M_i^{-1} b_i \quad (10)$$

Вернемся снова к уравнению движения отдельного звена манипулятора (2) и подставим теперь уже известные из выражения (7) коэффициенты  $a_i = [a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, a_{i,4}]$ :

$$q_i(t) = \begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & a_{i,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Данное выражение можно определить для оставшихся звеньев манипулятора при тех же  $t_f, t_s$  и соответствующих  $q_{i_s}, q_{i_f}$ . В итоге уравнение движения трехзвенного манипулятора будет записано в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Стоит отметить, что выбирая  $\Delta t = t_f - t_s$  нужно учесть  $\dot{q}_{i_{max}}$  и  $\ddot{q}_{i_{max}}$

## Метод линейных сегментов с параболическими частями(LSPB)

Другим наиболее распространенным способом генерации траектории является метод линейных сегментов с параболическими частями. В английской литературе данный метод можно встретить под названием "Linear segments with parabolic blends". В большинстве

случаев этот метод применяется, когда необходимо двигаться от точки до точки, с нулевыми скоростями в начале и в конце траектории.

Уравнение движения для данного метода состоит из трех частей:

- 1) равноускоренное движение ( $\ddot{q}_i = const, \ddot{q}_i > 0$ ).
- 2) равномерное движение ( $\dot{q}_i = const$ ).
- 3) равнозамедленное движение ( $\ddot{q}_i = const, \ddot{q}_i < 0$ ).

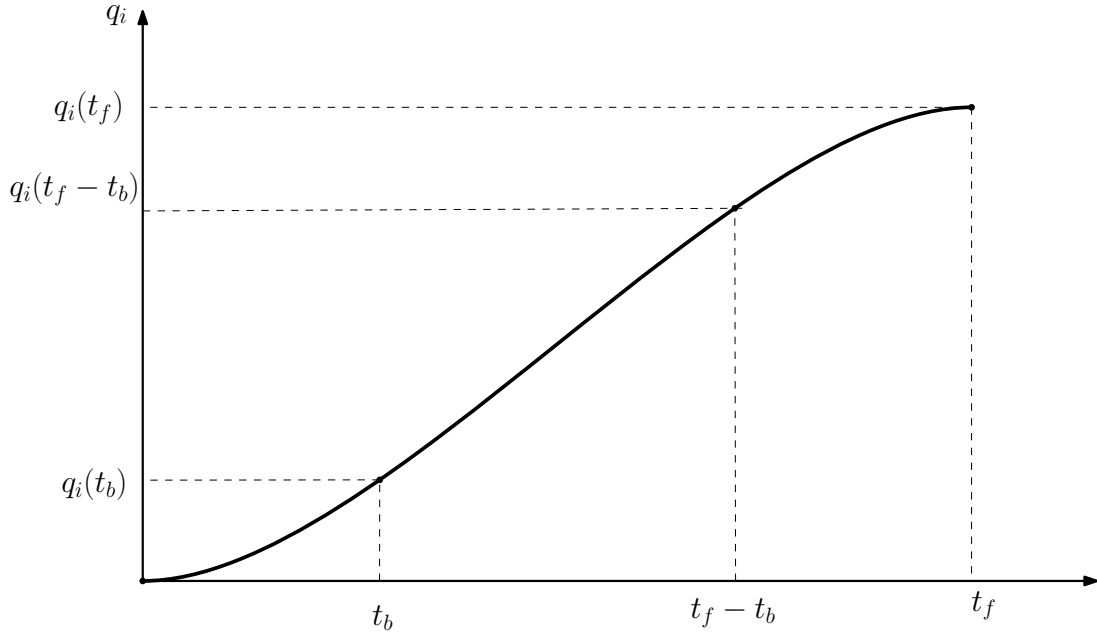


Рис 1.3 Траектория движения звена манипулятора при LSPB планировании.

1) Первая часть представляет из себя процесс разгона привода до некоторой постоянной скорости, обозначим ее как  $V_i$ . Из курса физики вам известно, что движение с постоянным ускорением  $A_i = const$  имеет следующий закон:

$$q_i(t) = c_{i,0} + c_{i,1} \cdot t + c_{i,2} \cdot t^2 \quad (13)$$

$$\dot{q}_i(t) = c_{i,1} + 2c_{i,2} \cdot t \quad (14)$$

$$\ddot{q}_i(t) = 2c_{i,2} = A_i \quad (15)$$

, где  $c_{i,0}, c_{i,1}, c_{i,2}$  - неизвестные константы. Из уравнения выше видно, что:

$$c_{i,2} = A_i/2 \quad (16)$$

$$c_{i,0} = q(0)$$

Для того, чтобы найти остальные коэффициенты, необходимо вспомнить о том, что в рамках нашей задачи в начальный момент времени скорость движения звена  $\dot{q}_i(0) = 0$ , тогда:

$$c_{i,1} = 0$$



Обозначим время в течении которого звено двигается с ускорением  $A_i$ , как  $t_b$ . В таком случае:

$$\dot{q}_i(t_b) = c_{i,1} + 2c_{i,2} \cdot t_b = V_i \quad (17)$$

, это и есть та постоянная скорость с которой будет происходить движение пока  $t \in [t_b, t_f - t_b]$ .

Из последнего выражения можно также узнать коэффициент:

$$c_{i,2} = \frac{V_i}{2t_b}$$

Подставим теперь эти коэффициенты в уравнение (13) и получим финальное выражение, описывающее закон движения при  $t \in [0, t_b]$ :

$$q_i(t) = q_i(0) + \frac{V_i}{2t_b} \cdot t^2 = q_i(0) + \frac{A_i}{2} \cdot t^2 \quad (18)$$

2) Вторая часть выражается законом равномерного движения и представляет из себя линейный сегмент, определенный на интервале  $t \in [t_b, t_f - t_b]$ :

$$q_i(t) = c_{i,0} + c_{i,1} \cdot t = c_{i,0} + V_i \cdot t \quad (19)$$

Для получения финального уравнения необходимо найти  $c_{i,0}$ . Из закона симметрии движения следует, что:

$$q_i\left(\frac{t_f}{2}\right) = \frac{q_i(0) + q_i(t_f)}{2} \quad (20)$$

Отсюда и уравнения (19):

$$\frac{q_i(0) + q_i(t_f)}{2} = c_{i,0} + V_i \cdot \frac{t_f}{2} \quad (21)$$

Теперь выразим все относительно  $c_{i,0}$ :

$$c_{i,0} = \frac{q_i(0) + q_i(t_f) - V_i \cdot t_f}{2} \quad (22)$$

Подставим (22) в (19) и получим закон движения при  $t \in [t_b, t_f - t_b]$ :

$$q_i(t) = \frac{q_i(0) + q_i(t_f) - V_i \cdot t_f}{2} + V_i \cdot t \quad (23)$$

3) Третья часть - это равнозамедленное движение с ускорением  $-A_i$ , где  $t \in [t_f - t_b, t_f]$ :

$$q_i(t) = q_i(t_f) - \frac{A_i \cdot (t_f - t)^2}{2} = q_i(t_f) - \frac{A_i \cdot t_f^2}{2} + A_i \cdot t_f t - \frac{A_i \cdot t^2}{2} \quad (24)$$

Из всех уравнений нам неизвестно только  $t_b$ , найдем его из выражений (17) и (23) для момента времени  $t_b$ :

$$q_i(t_b) = q(0) + \frac{V_i}{2} \cdot t_b = \frac{q(0) + q(t_f) - V_i \cdot t_f}{2} + V_i \cdot t_b \quad (25)$$

Отсюда:

$$t_b = \frac{q(0) - q(t_f) + V \cdot t_f}{V} \quad (26)$$

В результате весь закон движения для LSPB планирования траектории при  $\dot{q}_i(0) = 0$  представляется тремя частями следующим образом:

$$\begin{cases} q_i(t) = q(0) + \frac{A}{2} \cdot t^2 & 0 < t < t_b \\ q_i(t) = \frac{q_i(0) + q_i(t_f) - V_i \cdot t_f}{2} + V_i \cdot t & t_b < t < t_f - t_b \\ q_i(t) = q_i(t_f) - \frac{A_i \cdot t_f^2}{2} + A_i \cdot t_f t - \frac{A_i \cdot t^2}{2} & t_f - t_b < t < t_f \end{cases} \quad (27)$$

### 3 Цель работы

Ознакомиться с методами планирования траектории, решить проблему следования за траекторией и объединяя все полученные знания реализовать манипулятор-художник.

### 4 Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретической частью лабораторной работы.
2. Получить ДН параметры манипулятора с который будет отрабатывать траекторию.
3. Решить ПЗК и ОЗК.
4. Вывести ПИД коэффициенты для привода манипулятора.
5. Снять показания датчиков по углу, при движении последнего звена по синусу при помощи ПИД-регулятора.
6. Реализовать траекторный регулятор представленный на рис. 4.4(или любой другой) и снять показания датчиков как в п.5.. (Реализовав любой другой регулятор он должен выполнять функцию траекторного регулятора)
7. Сделать моделирование в xcos.
8. Реализовать один из методов планирования траектории и нарисовать при помощи манипулятора какой-нибудь не сложный рисунок(например смайлик или домик).

### 5 Содержание отчета

1. Указание ДН параметров манипулятора и коэффициентов ПИД-регулятора.
2. Графики (входной сигнал, моделирование и эксперимент) предусмотренные п.6 и п.7..
3. Графики сгенерированной траектории (в плоскости XOY)
4. График - картинка, построенная на основе решения ОЗК по данным, записанным в процессе следования по траектории.
5. Исходный код управляющей манипулятором программы.
6. Вывод о результате проделанной работы.