Моделирование нестационарного процесса поступления требований

В большинстве задач интенсивность поступления требований является стационарной (не изменяется со временем). В задачах указано, что клиенты, покупатели или транспортные средства поступают либо с фиксированной интенсивностью за единицу времени, либо через промежутки времени с фиксированным средним значением. Однако в реальных системах интенсивность поступления нестационарная, т.е. имеет свои максимумы и минимумы, участки с высокой интенсивностью и с низкой интенсивностью, часы пик и время, когда наблюдается затишье.

Напомним, что процесс поступления требований, когда поступление следующих требований никак не зависит от ранее поступивших требований, называется простейшим или пуассоновским процессом (потоком) поступления. Единственной характеристикой данного процесса является интенсивность поступления за единицу времени λ или $\lambda(t)$. Интервалы времени между поступлениями, как правило, задаются по экспоненциальному закону.

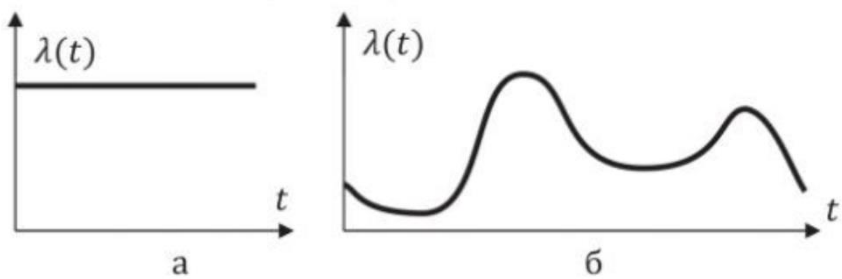

Рисунок 1. Стационарная (а) и нестационарная (б) интенсивность поступления

Для моделирования нестационарного процесса поступления недостаточно лишь изменять интенсивность поступления в алгоритме получения стационарного потока. Это может привести к тому, что участок с высокой интенсивностью будет пропущен.

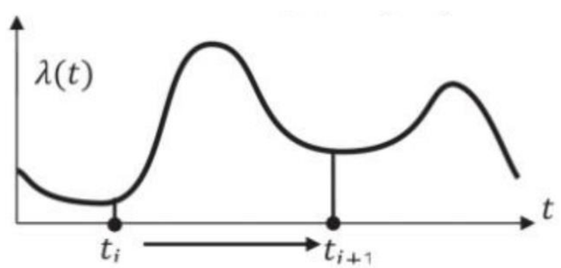

Рисунок 2. Проблема при получении нестационарного процесса

Простым способом моделирования нестационарного процесса является метод прореживания. Основная идея заключается в том, чтобы моделировать интервалы поступления с максимальной постоянной интенсивностью, но прежде чем возвращать следующий момент поступления требования, пропускать некоторые моменты с определенной вероятностью. Приведем алгоритм получения следующего момента поступления:

1. Определяем λ_{max} как максимальное значение, которое может принять $\lambda(t)$.

2. Присваиваем $t_{i+1} = t_i$

3. Генерируем две равномерные случайные величины U_1 и U_2 от 0 до 1.

4. Увеличиваем время поступления t_{i+1} на величину интервала между поступлениями (при максимальной интенсивности) $t_{i+1} = t_{i+1} - ln(U_1) / \lambda_{max}$.

5. Если выполняется $U_2\lambda_{max} \leq \lambda(t_{i+1})$, то возвращаем значение t_{i+1}, иначе переходим к шагу 3.

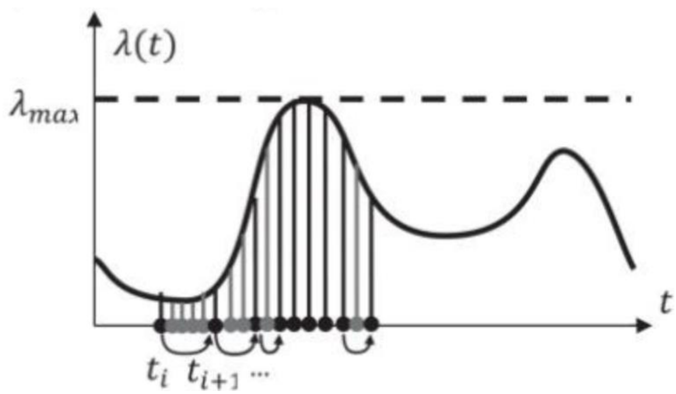

Рисунок 3. Моделирование нестационарного процесса с помощью метода прореживания

Это самый простой способ и далеко не самый эффективный. На участках, где $\lambda(t)$ в несколько раз меньше λ_{max}, будет пропускаться большое количество значений. Другими словами, алгоритм работает большую долю времени вхолостую прежде чем выдать следующий момент времени.

Для реализации нестационарного процесса (например на GPSS) надо во-первых задать интенсивность $\lambda(t)$ как вычисляемое арифметическое выражение, во-вторых осуществить проверку.

Пример: получение нестационарного процесса поступления

с интенсивностью $\lambda(t) = 30 + 50 * sin\left(\frac{\pi t}{24 \text{часа}}\right)$, показывающей количество пришедших человек за час.

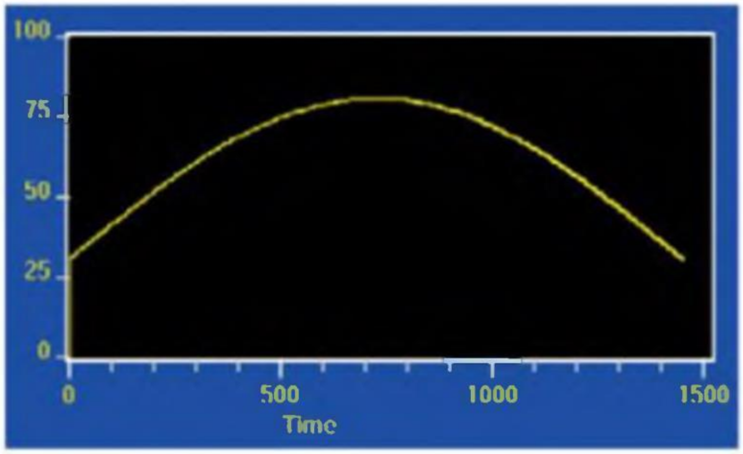

Рисунок 4. Интенсивность поступления $\lambda(t)$

```
Lambda VARIABLE 30+50#sin(3.14#C1/1440)

       GENERATE (exponential(1,0,0.75))
       ASSIGN Y,(uniform(2,0,80))
       TEST LE P$Y,V$Lambda,lb_skip

       ;...

       TERMINATE
lb_skipTERMINATE

       GENERATE 1440
       TERMINATE 1
```

Во-первых, мы задали способ расчета функции интенсивности Lambda от времени с помощью объявления VARIABLE. В качестве единицы времени у нас используется 1 минута. Блок GENERATE генерирует транзакты с максимальной интенсивностью, которая составляет 80 человек в час (60 мин / 80 = 0.75 мин между приходами в среднем). С помощью блока ASSIGN мы сохраняем в параметр транзакта Y случайное число от 0 до 80 (максимальная интенсивность) по равномерному закону. Во-вторых проводим проверку TEST, если значение параметра транзакта Y оказалось меньше интенсивности в текущий момент времени, то транзакт проходит дальше, иначе отбрасывается. Успешно прошедшие через блок TEST транзакты будут обладать заданной интенсивностью $\lambda(t)$.

С помощью приведенной схемы можно задавать произвольную интенсивность поступления, однако надо не забывать о следующих моментах:

1) при изменении функции интенсивности может измениться максимальная интенсивность, поэтому надо заново рассчитать, какое значение ставить в блоке GENERATE;

2) по той же причине надо правильно задавать верхнюю величину для генерируемой случайной величины Y;

3) при изменении единицы измерения времени надо правильно конвертировать интенсивность;

4) если моделирование длится в течение нескольких суток, желательно функцию интенсивности задавать так, чтобы интенсивность в конце одних суток и в начале следующих была одинаковой.

Однако этот алгоритм ведет себя не эффективно на участках, где функция интенсивности во много раз меньше чем максимальная интенсивность, генерируется большое количество случайных величин, которые отбрасываются. Более эффективный алгоритм основан на методе обратной функции к интегральной функции интенсивности. Его идея заключается в следующих шагах:

1) построение интегральной функции $L(x) = \int_0^x \lambda(t)\, dt$ можно в виде кусочно-линейной функции;

2) получение обратной функции $x = L^{-1}(y)$;

3) генерация случайного числа событий n по закону распределения Пуассона с параметром интенсивности, равным $L(T)$, где T показывает общее время моделирования;

4) для каждого события из n генерация равномерной случайной величины Y от 0 до $L(T)$, после чего определение времени наступления этого события $t = L^{-1}(Y)$.

Этот подход более эффективен с точки зрения производительности и экономии случайных чисел, однако он более требователен к памяти, так как необходимо хранить все множество моментов наступления событий, что может быть затруднительно при большом количестве событий.

Задание 1.

На основе рассмотренного примера создайте модель, в которой интенсивность поступлений в час соответствует следующим функциям:

а) $\lambda(t) = 15 + 10 * sin\left(\frac{3\pi t}{24\text{часа}}\right)$

б) $\lambda(t) = 40 + 30 * sin\left(\frac{4\pi t}{24\text{часа}} - \frac{\pi}{2}\right)$

в) $\lambda(t) = 100 - 50\left|\frac{6\text{часов} - (t\, mod\, 12\text{часов})}{6\text{часов}}\right|$

г) $\lambda(t) = 20 + 30[(t\, mod\, 12\text{часов}) \geq 6\text{часов}]$

Задание 2.

Выполните предыдущее задание на основе метода обратной функции к интегральной функции интенсивности.

Все задания выполняются с использованием любых средств разработки.