

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

"Российский университет дружбы народов"

Факультет физико-математических и естественных наук

Математический институт им. С.М. Никольского

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине: "Дифференциальные уравнения"

на тему:

"Решение задачи Коши методом Эйлера и методом Рунге-Кутты"

Выполнил:

Студент группы НМТбд-01-19

А. Д. Коротков

Руководитель курсовой работы:

профессор математического института

им. С.М. Никольского

д.ф.-м.н., член-корреспондент РАН

Г. Г. Лазарева

Москва, 2021 г.

Оглавление

1. Введение	1
2. Теория меры	1
3. Интеграл Лебега	3
4. Доказательство теоремы	4
5. список литературы	5

1. Введение

Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 \leq p \leq \infty$, μ - стандартная лебегова мера в \mathbb{R}^n для некоторого $n \in \mathbb{N}$, E - множество, измеримое по μ . Для $g \in L_{p'}(E)$ (вообще говоря, $L_{p'}(E)$, $L_p(E)$ - пространства комплекснозначных функций) рассматривалась задача поиска нормы функционала $A_g : L_p(E) \rightarrow \mathbb{C}$ вида $A_g(f) = \int_E f g d\mu$ ($f \in L_p(E)$). Было получено, что $\|A_g\| = \|g\|_{p'}$. В данной работе будет рассмотрен случай $g \notin L_{p'}(E)$, g -измерима (то есть $(B(\mathbb{R}^n), B(\mathbb{C}))$ - измерима).

Для начала напомним некоторые важные определения, которые мы будем использовать в дальнейшем, приведём теоремы, некоторые из которых докажем, на доказательство других сошлёмся, если будет удобно.

2. Теория меры

Опр.1. Пусть X - некоторое множество, множество всех подмножеств множества X обозначим как 2^X . Тогда подмножество $\Sigma \subset 2^X$ называется σ -алгеброй, если

1. $X \in \Sigma$ (то есть X - единица системы Σ).
2. Σ замкнуто относительно операции взятия дополнения: $\forall A \in \Sigma$ имеем $X \setminus A \in \Sigma$.
3. Σ замкнуто относительно операции счётного объединения: для любой системы $(A_k \in \Sigma | k \in \mathbb{N})$ имеем $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \Sigma$

Опр.2. Пусть X - некоторое множество, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X \subset 2^X$ называется топологией на X , если

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.
2. $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ имеем $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.
3. Объединение произвольного семейства множеств, принадлежащих \mathcal{T} , принадлежит \mathcal{T} ; то есть $\forall A, \forall (U_\alpha \in \mathcal{T} | \alpha \in A)$ имеем $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

Пара (X, \mathcal{T}_X) называется топологическим пространством; если топология ясна из контекста, то будем писать просто X .

Опр.3. Пусть X - топологическое пространство. Борелевская σ -алгебра $B(X)$ на X - это σ -алгебра, состоящая из множеств, полученных операциями счётного объединения, счётного пересечения, разности множеств из \mathcal{T}_X .

Опр.4. Пусть W - некоторое множество, $\Sigma \subset 2^W$ - σ -алгебра. Тогда функция $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называется мерой (σ -аддитивной) на σ -алгебре Σ , если она обладает следующими свойствами:

1. Неотрицательность. $\forall A \in \Sigma$ имеем $\mu(A) \geq 0$.
2. Счётная аддитивность (σ -аддитивность). Для любого счётного семейства попарно непересекающихся множеств $(A_k \in \Sigma | k \in \mathbb{N})$ имеем $\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$.

Тройку (X, Σ, μ) будем называть пространством с мерой, где $X \in \Sigma$ - единица σ -алгебры Σ , то есть $\forall A \in \Sigma$ имеем $A \subset X$.

Опр.5. Элементы σ -алгебры назовём измеримыми множествами. Когда на данной σ -алгебре также введена мера μ , элементы σ -алгебры называются измеримыми относительно меры μ .

Опр.6. Пусть X и Y - два произвольных множества, и пусть в них выделены две системы подмножеств $\Sigma_X \subset 2^X$ и $\Sigma_Y \subset 2^Y$ соответственно. Функция $f : X \rightarrow Y$ называется (Σ_X, Σ_Y) -измеримой, если $\forall A \in \Sigma_Y$ имеем $f^{-1}(A) \in \Sigma_X$.

Опр.7. Пусть (X, Σ, μ) - пространство с мерой, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, на \mathbb{C} введена стандартная топология, которая порождает борелевскую σ -алгебру $B(\mathbb{C})$. Тогда $(\Sigma, B(\mathbb{C}))$ -измеримую функцию f будем называть μ -измеримой, или просто измеримой, когда мера ясна из контекста.

Лемма 1. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^k, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^k})$ - пространство \mathbb{R}^k со стандартной топологией. Тогда всякое открытое множество $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^k}$ представимо в виде счётного объединения открытых брусков, то есть $U = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_{1m} \times \dots \times I_{km}$, где I_{rm} - открытые интервалы, I_{rm} может равняться пустому множеству.

Доказательство. Пусть $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^k}$. Для каждого $x \in U$ существует $r_x \in \mathbb{R}_+$, такой что открытый шар $U_x = B(x, r_x) = \{y \in \mathbb{R}^k | d(x, y) < r_x\} \subset U$ (определение открытого множества в метрическом пространстве)(можно сослаться на лекции функана в РУДН!!!!). Внутри каждого шара U_x рассмотрим брусы R_x с вершинами в рациональных точках, такие что $x \in R_x$. Брус $R_x = (a_{1x}, b_{1x}) \times \dots \times (a_{kx}, b_{kx})$ однозначно описывается $2 * k$ рациональными числами, то есть $\#\{R_x | x \in U\} = \mathbb{N}$. Тогда элементы последнего множества можно перенумеровать: $\{R_x | x \in U\} = \{\tilde{R}_i | i \in \mathbb{N}\}$.

Таким образом, так как $\forall x \in U \exists i_0 \in \mathbb{N} : x \in \tilde{R}_{i_0}$, то $U \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{R}_i$. С другой стороны, так как $\forall i \in \mathbb{N} \tilde{R}_i \subset U$, то $U \supset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{R}_i$.

Лемма 2. Пусть W - некоторое множество. Для произвольного индексного множества A , произвольной системы $(U_\alpha \subset W | \alpha \in A)$ и отображения $f : V \rightarrow W$ выполнено:

1. $f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha)$.
2. $f^{-1}(\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha)$.
3. $\forall \alpha, \beta \in A$ имеем $f^{-1}(U_\alpha \setminus U_\beta) = f^{-1}(U_\alpha) \setminus f^{-1}(U_\beta)$

Доказательство. 1. $f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha) = \{x \in V | f(x) \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\} = \{x \in V | \exists \alpha_0 \in A : f(x) \in U_{\alpha_0}\}$.

Тогда следующая схема завершает доказательство 1:

$$x \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha) \Leftrightarrow x \in V : \exists \alpha_0 \in A : f(x) \in U_{\alpha_0} \Leftrightarrow x \in V : \exists \alpha_0 \in A : x \in f^{-1}(U_{\alpha_0}) \subset V \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha).$$

$$2. f^{-1}(\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha) = \{x \in V | f(x) \in \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha\} = \{x \in V | \forall \alpha \in A : f(x) \in U_\alpha\}.$$

Тогда следующая схема завершает доказательство 2:

$$x \in f^{-1}(\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha) \Leftrightarrow x \in V : \forall \alpha \in A f(x) \in U_\alpha \Leftrightarrow x \in V : \forall \alpha \in A x \in f^{-1}(U_\alpha) \subset V \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha).$$

$$3. \forall \alpha, \beta \in A f^{-1}(U_\alpha \setminus U_\beta) = \{x \in V | f(x) \in U_\alpha \setminus U_\beta\} = \{x \in V | f(x) \in U_\alpha, f(x) \notin U_\beta\} = \\ = f^{-1}(U_\alpha) \cap (V \setminus f^{-1}(U_\beta)) = f^{-1}(U_\alpha) \setminus f^{-1}(U_\beta).$$

Лемма 3. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ измерима тогда и только тогда, когда вещественнозначные функции $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ являются $(\Sigma_X, B(\mathbb{R}))$ -измеримыми.

Доказательство. Достаточность. Пусть $R = I_1 \times I_2$ - некий брус, где I_1, I_2 -открытые интервалы в \mathbb{R} . Тогда R -открыт, $R \in B(\mathbb{R}^2)$; $I_1, I_2 \in B(\mathbb{R})$. Известно, что $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, в качестве гомоморфизма можно взять $g(z) = (x, y) = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$. Покажем, что $f^{-1}(g^{-1}(R)) = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2)$.

$$f^{-1}(g^{-1}(R)) = \{x \in \mathbb{X} | f(x) \in g^{-1}(R)\} = \{x \in \mathbb{X} | g(f(x)) \in R = I_1 \times I_2\} = \\ = \{x \in \mathbb{X} | u = \operatorname{Re} f(x) \in I_1, v = \operatorname{Im} f(x) \in I_2\} = \{x \in \mathbb{X} | u(x) \in I_1\} \cap \{x \in \mathbb{X} | v(x) \in I_2\} = \\ = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2)$$

Но множества $u^{-1}(I_1), v^{-1}(I_2)$ измеримы, так как u, v $(\Sigma_X, B(\mathbb{R}))$ -измеримы по условию. Следовательно, в силу замкнутости Σ_X относительно операции объединения, множество $u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2) = f^{-1}(g^{-1}(R))$ измеримо. Далее по лемме 1 любое множество $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ может быть представлено, как счётное объединение брусков $R_i(U)$, $i \in \mathbb{N}$, и по лемме 2 получаем, что $f^{-1}(g^{-1}(U)) = f^{-1}g^{-1}((\bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_i(U))) =$

$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}g^{-1}((R_i(U)))$. Множество $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \Sigma_X$, как счётное объединение множеств $f^{-1}g^{-1}((R_i(U))) \in \Sigma_X$. Таким образом, уже показано, что $\forall U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ имеем $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \Sigma_X$, а так как g -гомеоморфизм, то $\forall U \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ имеем $f^{-1}(U) \in \Sigma_X$. Затем, пользуясь операциями разности, счётного объединения, счётного пересечения множеств леммой 2 и свойствами Σ_X (забыл упомянуть свойства!!!!), получаем, что $\forall U \in B(\mathbb{C})$ имеем $f^{-1}(U) \in \Sigma_X$, а значит функция f измерима.

Необходимость. Пусть функция f -измерима. $Re z, Im z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ -непрерывные функции, то есть $\forall U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ имеем $Re^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}, Im^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$. Тогда $u = Re \circ f, v = Im \circ f, \forall U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ имеем $u^{-1}(U) = f^{-1}(Re^{-1}(U)) \in \Sigma_X, v^{-1}(U) = f^{-1}(Im^{-1}(U)) \in \Sigma_X$. Затем, пользуясь операциями разности, счётного объединения, счётного пересечения множеств, леммой 2 и свойствами Σ_X , получаем, что $\forall U \in B(\mathbb{R})$ имеем $u^{-1}(U) \in \Sigma_X, v^{-1}(U) \in \Sigma_X$.

Теор.1. Если последовательность измеримых функций $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ сходится к функции $f(x)$ почти всюду на X , то $f(x)$ также измерима.

Доказательство. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду, при $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow Ref_n(x) \rightarrow Ref(x), Imf_n(x) \rightarrow Imf(x)$ почти всюду, при $n \rightarrow \infty$.

По лемме 3 из измеримости $f_n(x)$ следует измеримость $Ref_n(x), Imf_n(x)$. Тогда по теореме 4' из [1, страница 305] получаем, что функции $Ref(x), Imf(x)$ измеримы, как пределы измеримых функций. Тогда, снова используя лемму 3, получаем, что $f(x)$ измерима.

Опр. 8. Пусть (E, Σ, μ) -пространство с мерой. Мера μ называется σ -конечной, если существует счётное семейство измеримых множеств $(e_i \in \Sigma | i \in \mathbb{N}, \mu(e_i) < \infty)$ такое, что $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} e_i$.

3. Интеграл Лебега

Опр. 9. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, определённая на некотором пространстве X с заданной на нём мерой, называется простой, если она измерима и принимает не более чем счётное число значений.

Теор.2. Функция $f(x)$, принимающая не более чем счётное число различных значений

$$y_1, \dots, y_n, \dots,$$

измерима в том и только том случае, если все множества

$$A_n = \{x : f(x) = y_n\}$$

измеримы.

Доказательство. - см. [1, страница 311]

Теор.3. Для измеримости функции $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ необходимо и достаточно, чтобы она могла быть представлена в виде предела равномерно сходящейся последовательности простых измеримых функций.

Доказательство. Измеримость функции f равносильна измеримости Ref, Imf - вещественнозначных функций. А для вещественнозначных функций теорема была доказана в [1, страница 311].

Пусть f - некоторая простая функция на X , принимающая значения

$$y_1, \dots, y_n, \dots; y_i \neq y_j \text{ при } i \neq j,$$

и пусть A - некоторое измеримое подмножество X . Естественно определить интеграл от функции f по множеству A равенством

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n), \text{ где } A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\}, \quad (1)$$

Опр. 10. Простая функция f называется интегрируемой или суммируемой (по мере μ) на множестве A , если ряд (1) абсолютно сходится. Если f интегрируема, то сумма ряда (1) называется интегралом от f по множеству A .

Опр. 11. Назовём функцию f интегрируемой (суммируемой) на множестве A , если существует последовательность простых интегрируемых на A функций $\{f_n\}$, сходящаяся равномерно к f . Предел

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu$$

обозначим

$$\int_A f(x) d\mu$$

и назовём интегралом функции f по множеству A .

Корректность данного определения проверяется в [1, на странице 314].

Опр. 12. Пусть E - некоторое измеримое множество. Для $p \in (0, \infty)$ определим пространство

$$L_p(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_{L_p(E)} = \left(\int_E |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\};$$

а для $p = \infty$ пространство

$$L_\infty(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_{L_\infty(E)} = \inf_{E' \subset E: \mu(E \setminus E') = 0} \sup_{x \in E'} |f(x)| < \infty\}$$

Лемма 4. Если ограниченная простая функция $f : E \rightarrow \mathbb{C}$, такая что $\exists e \subset E : \mu(e) < \infty$, и $f \equiv 0$ на множестве $E \setminus e$ (то есть f исчезает), то $f \in L_p(E) \forall p \in (0, \infty]$.

Доказательство. Пусть f - ограниченная исчезающая простая функция, $(y_i \in \mathbb{C} \mid i \in \mathbb{N})$ - семейство её значений (не обязательно различных). Тогда $\|f\|_{L_\infty(E)} = \max_{i \in \mathbb{N}} |y_i| =: C < \infty$, следовательно, $f \in L_\infty(E)$. Для $p \in (0, \infty)$ рассмотрим интеграл $\|f\|_{L_p(E)} = \left(\int_E |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_e |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_e C^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = C * \mu(e)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Таким образом, $f \in L_p(E)$.

Теор.4. Пусть (E, Σ, μ) - пространство с мерой. Мера μ является σ -конечной тогда и только тогда, когда существует измеримая функция f такая, что $\forall x \in E f(x) > 0$, и $\int_E f d\mu < \infty$.

4. Доказательство теоремы

Теор.5. Пусть (E, Σ, μ) - пространство с мерой, где μ - σ -конечная мера. Пусть также $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, 1 \leq p \leq \infty$, g - измеримая функция. Тогда для функционала $A_g : L_p(E) \rightarrow \mathbb{C}, A_g(f) = \int_E f g d\mu$ имеем $\|A_g\| := \sup_{f \in L_p(E), \|f\|_{L_p(E)} \neq 0} \frac{|A_g(f)|}{\|f\|_{L_p(E)}} = \|g\|_{L_{p'}(E)}$.

Доказательство. Случай $g \in L_{p'}(E)$ был доказан на лекции. Рассмотрим случай $g \notin L_{p'}(E)$, то есть $\|g\|_{L_{p'}(E)} = \infty$. Функция g измерима, тогда по теореме 3 существует равномерно сходящаяся к g последовательность простых функций $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N \forall x \in E |g(x) - g_k(x)| < \varepsilon$$

В частности,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N \sup_{x \in E} |g(x) - g_k(x)| < \varepsilon$$

Далее,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N (g - g_k) \in L_{\infty}(E), \text{ более того, } \|g - g_k\|_{L_{\infty}(E)} < \varepsilon$$

$\forall e \subset E : \mu(e) < \infty$ имеем $L_{\infty}(e) \subset L_{p'}(e)$ (**ссылка!!!**)

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N$ имеем $\|g - g_k\|_{L_{p'}(e)} \leq \mu(e)^{\frac{1}{p'}} \|g - g_k\|_{L_{\infty}(e)} < \mu(e)^{\frac{1}{p'}} \varepsilon$

$$\|g_k\|_{L_{p'}(e)} = \|A_{g_k}^e\| = \sup_{f \in L_p(e), \|f\|_{L_p(e)} \neq 0} \frac{|A_{g_k}^e(f)|}{\|f\|_{L_p(e)}} = \sup_{f \in L_p(e), \|f\|_{L_p(e)} \neq 0} \frac{|A_{g_k+g-g}^e(f)|}{\|f\|_{L_p(e)}} = \sup_{f \in L_p(e), \|f\|_{L_p(e)} \neq 0} \frac{|(A_{g-g_k}^e - A_g^e)(f)|}{\|f\|_{L_p(e)}} \leq$$

$$\|A_{g-g_k}^e\| + \|A_g^e\| \leq \mu(e)^{\frac{1}{p'}} \varepsilon + \|A_g^e\|$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$, для произвольного $e \subset E : \mu(e) < \infty$, получаем неравенство $\|g\|_{L_{p'}(e)} \leq \|A_g^e\| = \|A_g\|$

Если E - такое множество, что $\mu(E) < \infty$, то всё доказано. Если же $\mu(E) = \infty$, то существует счётная система попарно непересекающихся множеств $(e_i \in \Sigma | i \in \mathbb{N}, \mu(e_i) < \infty)$ такая, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} e_i = E$.

$$\text{Тогда } \|g\|_{L_{p'}(E)} = \sum_{i=1}^{\infty} \|g\|_{L_{p'}(e_i)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|A_g^{e_i}\| = \|A_g\|.$$

5. список литературы

1. Энциклопедия Britannica. История численных методов [Электронный ресурс]. URL: <https://www.britannica.com/science/numerical-analysis/Historical-background>
2. Дифференциальное уравнение [Электронный ресурс]: Материал из Википедии — свободной энциклопедии : Версия 1014488600, сохранённая в 11:22 UTC 27 марта 2021 / Авторы Википедии // Википедия, свободная энциклопедия. — Электрон. дан. — Сан-Франциско: Фонд Викимедиа, 2021. — URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Differential_equation&oldid=1014488600
3. Корректно поставленная задача [Электронный ресурс] : Материал из Википедии — свободной энциклопедии : Версия 104220521, сохранённая в 23:05 UTC 28 декабря 2019 / Авторы Википедии // Википедия, свободная энциклопедия. — Электрон. дан. — Сан-Франциско: Фонд Викимедиа, 2019. — URL: <https://ru.wikipedia.org/?curid=2840565&oldid=104220521>
4. Устойчивость (динамические системы) [Электронный ресурс] : Материал из Википедии — свободной энциклопедии : Версия 111742919, сохранённая в 12:54 UTC 15 января 2021 / Авторы Википедии // Википедия, свободная энциклопедия. — Электрон. дан. — Сан-Франциско: Фонд Викимедиа, 2021. — URL: <https://ru.wikipedia.org/?curid=287781&oldid=111742919>
5. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин под редакцией А.А. Самарского.- Москва: "Наука". Главная редакция физико-математической литературы, 1978. - стр.237-240
6. Ланеев, Е.Б. Устойчивое решение некорректных задач продолжения гармонических функций и их приложения в термографии и геофизике / Е.Б. Ланеев. Дисс. на соискание учёной степени доктора

физико-математических наук, специальность: 05.13.18-математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.- стр.113-122

7. Самарский А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин.- Москва: "Наука". Главная редакция физико-математической литературы, 1989.- стр. 214-215

8. Метод Рунге — Кутты // Википедия. [2020]. Дата обновления: 29.09.2020. URL: <https://ru.wikipedia.org/?curid=257112&oldid=109559819> (дата обращения: 29.09.2020).

9. Документация по библиотеке SciPy для языка программирования Python для научных и инженерных расчётов [Электронный ресурс]. URL: <https://www.scipy.org/>

10. Документация по библиотеке Matplotlib для языка программирования Python для построения графиков [Электронный ресурс]. URL: <https://matplotlib.org/>

11. Документация по библиотеке NumPy для языка программирования Python для работы с массивами [Электронный ресурс]. URL: <https://numpy.org/>