МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"Российский университет дружбы народов"
Факультет физико-математических и естественных наук
Математический институт им. С.М. Никольского

Курсовая работа

по дисциплине: "Функциональные пространства"

Выполнил:
Студент группы НМТбд-01-19
А. Д. Коротков

Руководитель курсовой работы:
профессор математического института
им. С.М. Никольского
д.ф.-м.н., В. И. Буренков

Москва, 2022 г.

Оглавление

1. Введение

Пусть $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\ 1\leq p\leq\infty$, μ - стандартная лебегова мера в $\mathbb{R}^n$ для некоторого $n\in\mathbb{N}$, E - множество, измеримое по μ. Для $g\in L_{p'}(E)$ (вообще говоря, $L_{p'}(E)$, $L_p(E)$ - пространства комплекснозначных функций) рассматривалась задача поиска нормы функционала $A_g: L_p(E)\to\mathbb{C}$ вида $A_g(f)=\int\limits_E fgd\mu$ ($f\in L_p(E)$). Было получено, что $||A_g||=||g||_{p'}$. В данной работе будет рассмотрен случай $g\notin L_{p'}(E)$, g- измерима (то есть $(B(\mathbb{R}^n),B(\mathbb{C}))$ - измерима).

Для начала напомним некоторые важные определения, которые мы будем использовать в дальнейшем, приведём теоремы, некоторые из которых докажем, на доказательство других сошлёмся, если будет удобно.

2. Теория меры

Опр.1. Пусть X - некоторое множество, множество всех подмножеств множества X обозначим как 2^X. Тогда подмножество $\Sigma\subset 2^X$ называется σ-алгеброй, если

1. $X\in\Sigma$ (то есть X - единица системы Σ).

2. Σ замкнуто относительно операции взятия дополнения: $\forall A\in\Sigma$ имеем $X\setminus A\in\Sigma$.

3. Σ замкнуто относительно операции счётного объединения: для любой системы $(A_k\in\Sigma|k\in\mathbb{N})$ имеем $A=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}A_k\ \in\Sigma$

Опр.2. Пусть X - некоторое множество, $\mathcal{T}=\mathcal{T}_X\subset 2^X$ называется топологией на X, если

1. $\emptyset\in\mathcal{T},\ X\in\mathcal{T}$.

2. $\forall U_1,U_2\in\mathcal{T}$ имеем $U_1\bigcap U_2\in\mathcal{T}$.

3. Объединение произвольного семейства множеств, принадлежащих $\mathcal{T}$, принадлежит $\mathcal{T}$; то есть $\forall A,\ \forall(U_\alpha\in X|\alpha\in A)$ имеем $\bigcup\limits_{\alpha\in A}A_\alpha\ \in\mathcal{T}$.

Пара $(X,\mathcal{T}_X)$ называется топологическим пространством; если топология ясна из контекста, то будем писать просто X.

Опр.3. Пусть X - топологическое пространство. Борелевская σ-алгебра $B(X)$ на X - это σ-алгебра, состоящая из множеств, полученных операциями счётного объединения, счётного пересечения, разности множеств из $\mathcal{T}_X$.

Опр.4. Пусть W - некоторое множество, $\Sigma\subset 2^W$-σ-алгебра. Тогда функция $\mu:\Sigma\to\mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$ называется мерой (σ-аддитивной) на σ-алгебре Σ, если она обладает следующими свойствами:

1. Неотрицательность. $\forall A\in\Sigma$ имеем $\mu(A)\geq 0$.

2. Счётная аддитивность (σ-аддитивность). Для любого счётного семейства попарно непересекающихся множеств $(A_k\in\Sigma|k\in\mathbb{N})$ имеем $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mu(A_k)=\mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k)$.

Тройку (X,Σ,μ) будем называть пространством с мерой, где $X\in\Sigma$-единица σ-алгебры Σ, то есть $\forall A\in\Sigma$ имеем $A\subset X$.

Опр.5. Элементы σ-алгебры назовём измеримыми множествами. Когда на данной σ-алгебре также введена мера μ, элементы σ-алгебры называются измеримыми относительно меры μ.

Опр.6. Пусть X и Y - два произвольных множества, и пусть в них выделены две системы подмножеств $\Sigma_X\subset 2^X$ и $\Sigma_Y\subset 2^Y$ соответственно. Функция $f:X\to Y$ называется (Σ_X,Σ_Y)-измеримой, если $\forall A\in\Sigma_Y$ имеем $f^{-1}(A)\in\Sigma_X$.

Опр.7. Пусть (X, Σ, μ) - пространство с мерой, $f : X \to \mathbb{C}$, на $\mathbb{C}$ введена стандартная топология, которая порождает борелевскую σ-алгебру $B(\mathbb{C})$. Тогда $(\Sigma, B(\mathbb{C}))$-измеримую функцию f будем называть μ-измеримой, или просто измеримой, когда мера ясна из контекста.

Лемма 1. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^k, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^k})$- пространство $\mathbb{R}^k$ со стандартной топологией. Тогда всякое открытое множество $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^k}$ представимо в виде счётного объединения открытых брусов, то есть $U = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} I_{1m} \times ... \times I_{km}$, где I_{rm} - открытые интервалы, I_{rm} может равняться пустому множеству.

Доказательство. Пусть $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^k}$. Для каждого $x \in U$ существует $r_x \in \mathbb{R}_+$, такой что открытый шар $U_x = B(x, r_x) = \{y \in \mathbb{R}^k | d(x, y) < r_x\} \subset U$ (определение открытого множества в метрическом пространстве)(можно сослаться на лекции функана в РУДН!!!!). Внутри каждого шара U_x рассмотрим брусы R_x с вершинами в рациональных точках, такие что $x \in R_x$. Брус $R_x = (a_{1x}, b_{1x}) \times ... \times (a_{kx}, b_{kx})$ однозначно описывается $2 * k$ рациональными числами, то есть $\#\{R_x | x \in U\} = \mathbb{N}$. Тогда элементы последнего множества можно перенумеровать:$\{R_x | x \in U\} = \{\widetilde{R}_i | i \in \mathbb{N}\}$.

Таким образом, так как $\forall x \in U \exists i_0 \in \mathbb{N} : x \in \widetilde{R}_{i_0}$, то $U \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \widetilde{R}_i$. С другой стороны, так как $\forall i \in \mathbb{N}\ \widetilde{R}_i \subset U$, то $U \supset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \widetilde{R}_i$.

Лемма 2. Пусть W- некоторое множество. Для произвольного индексного множества A, произвольной системы $(U_\alpha \subset W | \alpha \in A)$ и отображения $f : V \to W$ выполнено:

1. $f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in A} f^{-1}(U_\alpha)$.
2. $f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in A} U_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\in A} f^{-1}(U_\alpha)$.
3. $\forall \alpha, \beta \in A$ имеем $f^{-1}(U_\alpha \setminus U_\beta) = f^{-1}(U_\alpha) \setminus f^{-1}(U_\beta)$

Доказательство. 1. $f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha) = \{x \in V | f(x) \in \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha\} = \{x \in V | \exists \alpha_0 \in A : f(x) \in U_{\alpha_0}\}$.
Тогда следующая схема завершает доказательство 1:
$x \in f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha) \Leftrightarrow x \in V : \exists \alpha_0 \in A : f(x) \in U_{\alpha_0} \Leftrightarrow x \in V : \exists \alpha_0 \in A : x \in f^{-1}(U_{\alpha_0}) \subset V \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{\alpha\in A} f^{-1}(U_\alpha)$.
2. $f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in A} U_\alpha) = \{x \in V | f(x) \in \bigcap\limits_{\alpha\in A} U_\alpha\} = \{x \in V | \forall \alpha \in A : f(x) \in U_\alpha\}$.
Тогда следующая схема завершает доказательство 2:
$x \in f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in A} U_\alpha) \Leftrightarrow x \in V : \forall \alpha \in A\ f(x) \in U_\alpha \Leftrightarrow x \in V : \forall \alpha \in A\ x \in f^{-1}(U_\alpha) \subset V \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{\alpha\in A} f^{-1}(U_\alpha)$.
3. $\forall \alpha, \beta \in A\ f^{-1}(U_\alpha \setminus U_\beta) = \{x \in V | f(x) \in U_\alpha \setminus U_\beta\} = \{x \in V | f(x) \in U_\alpha, f(x) \notin U_\beta\} =$
$= f^{-1}(U_\alpha) \bigcap (V \setminus f^{-1}(U_\beta)) = f^{-1}(U_\alpha) \setminus f^{-1}(U_\beta)$.

Лемма 3. Функция $f : X \to \mathbb{C}$ измерима тогда и только тогда, когда вещественнозначные функции $u = Ref$, $v = Imf$ являются $(\Sigma_X, B(\mathbb{R}))$-измеримыми.

Доказательство. Достаточность. Пусть $R = I_1 \times I_2$- некий брус, где I_1, I_2-открытые интервалы в $\mathbb{R}$. Тогда R-открыт, $R \in B(\mathbb{R}^2)$; $I_1, I_2 \in B(\mathbb{R})$. Известно, что $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, в качестве гомоморфизма можно взять $g(z) = (x, y) = (Rez, Imz)$. Покажем, что $f^{-1}(g^{-1}(R)) = u^{-1}(I_1) \bigcap v^{-1}(I_2)$.
$f^{-1}(g^{-1}(R)) = \{x \in \mathbb{X} | f(x) \in g^{-1}(R)\} = \{x \in \mathbb{X} | g(f(x)) \in R = I_1 \times I_2\} =$
$= \{x \in \mathbb{X} | u = Ref(x) \in I_1, v = Imf(x) \in I_2\} = \{x \in \mathbb{X} | u(x) \in I_1\} \bigcap \{x \in \mathbb{X} | v(x) \in I_2\} = u^{-1}(I_1) \bigcap v^{-1}(I_2)$
Но множества $u^{-1}(I_1), v^{-1}(I_2)$ измеримы, так как u,v $(\Sigma_X, B(\mathbb{R}))$-измеримы по условию. Следовательно, в силу замкнутости Σ_X относительно операции объединения, множество $u^{-1}(I_1) \bigcap v^{-1}(I_2) = f^{-1}(g^{-1}(R))$ измеримо. Далее по лемме 1 любое множество $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ может быть представлено, как счётное объединение брусов $R_i(U)$, $i \in \mathbb{N}$, и по лемме 2 получаем, что $f^{-1}(g^{-1}(U)) = f^{-1}g^{-1}((\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} R_i(U))) =$

$\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}g^{-1}((R_i(U)))$. Множество $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \Sigma_X$, как счётное объединение множеств $f^{-1}g^{-1}((R_i(U))) \in \Sigma_X$. Таким образом, уже показано, что $\forall U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ имеем $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \Sigma_X$, а так как g- гомеоморфизм, то $\forall U \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ имеем $f^{-1}(U) \in \Sigma_X$. Затем, пользуясь операциями разности, счётного объединения, счётного пересечения множеств леммой 2 и свойствами Σ_X(забыл упомянуть свойства!!!!), получаем, что $\forall U \in B(\mathbb{C})$ имеем $f^{-1}(U) \in \Sigma_X$, а значит функция f измерима.

Необходимость. Пусть функция f-измерима. $Rez, Imz : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$-непрерывные функции, то есть $\forall U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ имеем $Re^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}, Im^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$. Тогда $u = Re \circ f, v = Im \circ f$, $\forall U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ имеем $u^{-1}(U) = f^{-1}(Re^{-1}(U)) \in \Sigma_X,\ v^{-1}(U) = f^{-1}(Im^{-1}(U)) \in \Sigma_X$. Затем, пользуясь операциями разности, счётного объединения, счётного пересечения множеств, леммой 2 и свойствами Σ_X, получаем, что $\forall U \in B(\mathbb{R})$ имеем $u^{-1}(U) \in \Sigma_X,\ v^{-1}(U) \in \Sigma_X$.

Теор.1. Если последовательность измеримых функций $f_n : X \to \mathbb{C}$ сходится к функции $f(x)$ почти всюду на X, то $f(x)$ также измерима.

Доказательство. $f_n(x) \to f(x)$ почти всюду, при $n \to \infty \Leftrightarrow Ref_n(x) \to Ref(x), Imf_n(x) \to Imf(x)$ почти всюду, при $n \to \infty$.

По лемме 3 из измеримости $f_n(x)$ следует измеримость $Ref_n(x), Imf_n(x)$. Тогда по теореме 4' из [1,страница 305] получаем, что функции $Ref(x), Imf(x)$ измеримы, как пределы измеримых функций. Тогда, снова используя лемму 3, получаем, что $f(x)$ измерима.

Опр. 8. Пусть (E, Σ, μ)- пространство с мерой. Мера μ называется σ-конечной, если существует счётное семейство измеримых множеств $(e_i \in \Sigma | i \in \mathbb{N}, \mu(e_i) < \infty)$ такое, что $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} e_i$.

3. Интеграл Лебега

Опр. 9. Функция $f : X \to \mathbb{C}$, определённая на некотором пространстве X с заданной на нём мерой, называется простой, если она измерима и принимает не более чем счётное число значений.

Теор.2. Функция f(x), принимающая не более чем счётное число различных значений

$$y_1, ..., y_n, ...,$$

измерима в том и только том случае, если все множества

$$A_n = \{x : f(x) = y_n\}$$

измеримы.

Доказательство. - см. [1, страница 311]

Теор.3. Для измеримости функции $f : X \to \mathbb{C}$ необходимо и достаточно, чтобы она могла быть представлена в виде предела равномерно сходящейся последовательности простых измеримых функций.

Доказательство. Измеримость функции f равносильна измеримости Ref, Imf- вещественнозначных функций. А для вещественнозначных функций теорема была доказана в [1, страница 311].

Пусть f - некоторая простая функция на X, принимающая значения

$$y_1, ..., y_n, ...; y_i \neq y_j \text{ при } i \neq j,$$

и пусть A - некоторое измеримое подмножество X. Естественно определить интеграл от функции f по множеству A равенством

$$\int\limits_A f(x)d\mu = \sum_n y_n\mu(A_n), \text{ где } A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\}, \ (1)$$

Опр. 10. Простая функция f называется интегрируемой или суммируемой (по мере μ) на множестве A, если ряд (1) абсолютно сходится. Если f интегрируема, то сумма ряда (1) называется интегралом от f по множеству A.

Опр. 11. Назовём функцию f интегрируемой (суммируемой) на множестве A, если существует последовательность простых интегрируемых на A функций $\{f_n\}$, сходящаяся равномерно к f. Предел

$$I = \lim_{n\to\infty}\int\limits_A f_n(x)d\mu$$

обозначим

$$\int\limits_A f(x)d\mu$$

и назовём интегралом функции f по множеству A.

Корректность данного определения проверяется в [1, на странице 314].

Опр. 12. Пусть E - некоторое измеримое множество. Для $p \in (0, \infty)$ определим пространство

$$L_p(E) = \{f : E \to \mathbb{C}|\ ||f||_{L_p(E)} = (\int\limits_E |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < \infty\};$$

а для $p = \infty$ пространство

$$L_\infty(E) = \{f : E \to \mathbb{C}|\ ||f||_{L_\infty(E)} = \inf_{E'\subset E:\mu(E\setminus E')=0}\ \sup_{x\in E'} |f(x)| < \infty\}$$

Лемма 4. Если ограниченная простая функция $f : E \to \mathbb{C}$, такая что $\exists e \subset E : \mu(e) < \infty$, и $f \equiv 0$ на множестве $E \setminus e$ (то есть f исчезает), то $f \in L_p(E)\ \forall p \in (0, \infty]$.

Доказательство. Пусть f - ограниченная исчезающая простая функция, $(y_i \in \mathbb{C}|i \in \mathbb{N})$- семейство её значений (не обязательно различных). Тогда $||f||_{L_\infty(E)} = \max\limits_{i\in\mathbb{N}} |y_i| =: C < \infty$, следовательно, $f \in L_\infty(E)$. Для $p \in (0, \infty)$ рассмотрим интеграл $||f||_{L_p(E)} = (\int\limits_E |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} = (\int\limits_e |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \le (\int\limits_e C^p d\mu)^{\frac{1}{p}} =$
$= C * \mu(e)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Таким образом, $f \in L_p(E)$.

Теор.4.Пусть (E, Σ, μ)- пространство с мерой. Мера μ является σ-конечной тогда и только тогда, когда существует измеримая функция f такая, что $\forall x \in E\ f(x) > 0$, и $\int_E f d\mu < \infty$.

4. Доказательство теоремы

Теор.5. Пусть (E, Σ, μ)- пространство с мерой, где μ - σ-конечная мера. Пусть также $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, 1 \le p \le \infty$, g- измеримая функция. Тогда для функционала $A_g : L_p(E) \to \mathbb{C}$, $A_g(f) = \int_E fgd\mu$ имеем $||A_g|| := \sup\limits_{f\in L_p(E),||f||_{L_p(E)}\neq 0} \frac{|A_g(f)|}{||f||_{L_p(E)}} = ||g||_{L_{p'}(E)}$.

Доказательство. Случай $g \in L_{p'}(E)$ был доказан на лекции. Рассмотрим случай $g \notin L_{p'}(E)$, то есть $||g||_{L_{p'}(E)} = \infty$. Функция g измерима, тогда по теореме 3 существует равномерно сходящаяся к g последовательность простых функций $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, имеем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall k > N\ \forall x \in E\ |g(x) - g_k(x)| < \varepsilon$$

В частности,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall k > N\ \sup_{x \in E} |g(x) - g_k(x)| < \varepsilon$$

Далее,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall k > N\ (g - g_k) \in L_\infty(E), \text{ более того, } ||g - g_k||_{L_\infty(E)} < \varepsilon$$

$\forall e \subset E : \mu(e) < \infty$ имеем $L_\infty(e) \subset L_{p'}(e)$ **(ссылка!!!)**
$\exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N$ имеем $||g - g_k||_{L_{p'}(e)} \leq \mu(e)^{\frac{1}{p'}} ||g - g_k||_{L_\infty(e)} < \mu(e)^{\frac{1}{p'}} \varepsilon$
$||g_k||_{L_{p'}(e)} = ||A^e_{g_k}|| = \sup\limits_{f \in L_p(e), ||f||_{L_p(e)} \neq 0} \frac{|A^e_{g_k}(f)|}{||f||_{L_p(e)}} = \sup\limits_{f \in L_p(e), ||f||_{L_p(e)} \neq 0} \frac{|A^e_{g_k+g-g}(f)|}{||f||_{L_p(e)}} = \sup\limits_{f \in L_p(e), ||f||_{L_p(e)} \neq 0} \frac{|(A^e_{g-g_k} - A^e_g)(f)|}{||f||_{L_p(e)}} \leq$
$||A^e_{g-g_k}|| + ||A^e_g|| \leq \mu(e)^{\frac{1}{p'}} \varepsilon + ||A^e_g||$
При $\varepsilon \to 0$, для произвольного $e \subset E : \mu(e) < \infty$, получаем неравенство $||g||_{L_{p'}(e)} \leq ||A^e_g|| = ||A_g||$
Если E - такое множество, что $\mu(E) < \infty$, то всё доказано. Если же $\mu(E) = \infty$, то существует счётная система попарно непересекающихся множеств $(e_i \in \Sigma | i \in \mathbb{N}, \mu(e_i) < \infty)$ такая, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} e_i = E$.
Тогда $||g||_{L_{p'}(E)} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} ||g||_{L_{p'}(e_i)} \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} ||A^{e_i}_g|| = ||A_g||$.

5. список литературы

1. Энциклопедия Britannica. История численных методов [Электронный ресурс]. URL: `https://www.britannica.com/science/numerical-analysis/Historical-background`

2. Дифференциальное уравнение [Электронный ресурс]: Материал из Википедии — свободной энциклопедии : Версия 1014488600, сохранённая в 11:22 UTC 27 марта 2021 / Авторы Википедии // Википедия, свободная энциклопедия. — Электрон. дан. — Сан-Франциско: Фонд Викимедиа, 2021. — URL: `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Differential_equation&oldid=1014488600`

3. Корректно поставленная задача [Электронный ресурс] : Материал из Википедии — свободной энциклопедии : Версия 104220521, сохранённая в 23:05 UTC 28 декабря 2019 / Авторы Википедии // Википедия, свободная энциклопедия. — Электрон. дан. — Сан-Франциско: Фонд Викимедиа, 2019. — URL: `https://ru.wikipedia.org/?curid=2840565&oldid=104220521`

4. Устойчивость (динамические системы) [Электронный ресурс] : Материал из Википедии — свободной энциклопедии : Версия 111742919, сохранённая в 12:54 UTC 15 января 2021 / Авторы Википедии // Википедия, свободная энциклопедия. — Электрон. дан. — Сан-Франциско: Фонд Викимедиа, 2021. — URL: `https://ru.wikipedia.org/?curid=287781&oldid=111742919`

5. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин под редакцией А.А. Самарского.- Москва: "Наука". Главная редакция физико-математической литературы, 1978. - стр.237-240

6. Ланеев, Е.Б. Устойчивое решение некорректных задач продолжения гармонических функций и их приложения в термографии и геофизике / Е.Б. Ланеев. Дисс. на соискание учёной степени доктора

физико-математических наук, специальность: 05.13.18-математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.- стр.113-122

7. Самарский А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин.- Москва: "Наука". Главная редакция физико-математической литературы, 1989.- стр. 214-215

8. Метод Рунге — Кутты // Википедия. [2020]. Дата обновления: 29.09.2020. URL: https://ru.wikipedia.org/?curid=257112&oldid=109559819 (дата обращения: 29.09.2020).

9. Документация по библиотеке SciPy для языка программирования Python для научных и инженерных расчётов [Электронный ресурс]. URL: https://www.scipy.org/

10. Документация по библиотеке Ьatplotlib для языка программирования Python для построения графиков [Электронный ресурс]. URL: https://matplotlib.org/

11. Документация по библиотеке NumPy для языка программирования Python для работы с массивами [Электронный ресурс]. URL: https://numpy.org/