ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

Севрюк А.П., Институт Бизнеса БГУ, 1 курс, специальность «Управление информационными ресурсами»

Научный руководитель **Малинин Д.А.**, кандидат физико-математических наук, доцент

«Числа правят миром!» - Пифагор

Закономерность явлений природы, строение и многообразие живых организмов на нашей планете, в том числе и человеческое тело, всё, что нас окружает, поражая воображение своей гармонией и упорядоченностью – всё это можно объяснить последовательностью Фибоначчи.

Именно эти особенности открытия Фибоначчи послужили толчком для исследовательской работы данной проблематики.

Целью работы определено следующее – наиболее полно изучить последовательность и закономерности чисел Фибоначчи, а также определить практическое применение её в жизни.

Для достижения цели были использованы следующие **методы:** изучение массивов информации из различных источников, а также проведение соцопроса.

Актуальность выбранной темы заключается в том, что числа Фибоначчи и их различные инварианты отражаются во всех творениях мироздания, которые продуманы и подчинены единым законам природы и имеют большой практический и теоретический интерес во многих науках.

Леонардо Пизанский (Пизано), который также известен под прозвищем Фибоначчи, был одним из первых, крупных и выдающихся математиком Европы эпохи средневековья. У него было много разнообразных трудов в сфере математики, но свою известность он получил именно благодаря числовой последовательности, которая в последствии была названа его именем. Данную числовую последовательность он описал в задаче о кроликах в своём трактате «Liber Abaci» («Книга абака»). Условие данной задачи следующее: «Пара кроликов находится в закрытом пространстве. Нужно узнать, сколько кроликов родится в течение года, если пара кроликов производит новую пару (особь мужского и женского пола) через месяц, а возможность родить новую пару, кролики получают только через два месяца после своего рождения».

Фибоначчи приводит следующее решение данной задачи: поскольку первоначальная пара становится половозрелой через месяц, а производит потомство через два месяца, то в первом месяце будет одна пара, во втором месяце данные кролики произведут на свет новую пару, т.е. во втором месяце уже будет две пары кроликов, в третьем месяце – три пары, т.к. пара, рожденная в предыдущем еще не может производить потомство, в четвертом месяце уже две пары кроликов произведут на свет потомство, и, соответственно, пар кроликов станет уже пять, и так далее до бесконечности. Если продолжать считать, то мы придем к тому, что в 12 месяце, т.е. через год, пар кроликов будет 377. Мы получили числовой ряд 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 377, … . Данный числовой ряд называется последовательностью или рядом Фибоначчи и обозначается буквой F, а числа, входящие в данный ряд, называются, соответственно, числами Фибоначчи. Не сложно заметить, что каждый последующий член данной последовательности равен сумме двух предыдущих.

Также ряд Фибоначчи можно представить в следующем виде:

$$F_n \coloneqq F(n) \coloneqq \begin{cases} 0 & if\ n = 0; \\ 1 & if\ n = 1; \\ F_{(n-1)} + F_{(n-2)} & if\ n > 1. \end{cases}$$

Ряд Фибоначчи можно стоить как слева направо, так и справа налево. Ряд, который строится слева направо, может быть получен с помощью следующего рекуррентного уравнения: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. А для ряда, строящегося справа налево, имеет место следующее рекуррентное уравнение: $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$. Данные формулы намного компактнее, чем формула, приведенная выше в виде системы, но в них нужно самому задать значения двух первых членов последовательности, а в приведенной выше формуле они уже даны, это 0 и 1.

Также, иногда нам требуется найти значение достаточно большого числа «классического» ряда Фибоначчи, но использовать для этого приведенные ранее рекуррентные формулы довольно сложно и долго, так как нужно высчитывать все числа, вплоть до необходимого. Для простоты понимания разработана формула Бине, с помощью которой это сделать намного проще: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$. При n≥0 имеет место упрощенная формула Бине: $F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, где $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, а при n≤0 - $F_n \approx -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, где $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Также не сложно заметить, что последовательность Фибоначчи обладает множеством интересных свойств и закономерностей. Соседние числа Фибоначчи являются взаимно простыми, а произведение и частное двух любых различных чисел Фибоначчи, отличных от единицы, никогда не является числом Фибоначчи. Также, например, если возвести каждое число из ряда Фибоначчи (1,1, 2, 3, 5, 8, 13, …) в квадрат, то мы получим следующий числовой ряд (1, 1, 4, 9, 25, 64, 169, …). Если складывать два рядом стоящих числа данной последовательности (1+1=2, 1+4=5, 4+9=13, 9+25=34, и т.д), то мы можем заметить, что их суммы равны числам «классического» ряда Фибоначчи, идущим через одно, т.е. 2, 5, 13, 34, … . Если проанализировать сложение квадратов нескольких чисел Фибоначчи, то мы получим следующее: 1+1+4=6, 1+1+4+9=15, 1+1+4+9+25=40, 1+1+4+9+25+64=104. Данные числа не являются числами Фибоначчи, но если внимательно на них посмотреть, то мы увидим, что числа Фибоначчи скрыты внутри них. Мы можем заметить следующее: 6=2·3, 15=3·5, 40=5·8, 104=8·13 и т.д. Интересно заметить такую закономерность, но еще интереснее и более важно понять, почему, например, квадраты чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8 являются произведением чисел 8 и 13. Мы может представить квадраты этих чисел в виде нарисованных квадратов размеров 1 x 1, 1 x 1, 2 x 2, 3 x 3, 5 x 5, 8 x 8. В итоге у нас получится прямоугольник, состоящий из данных квадратов, размер которого (площадь), с одной стороны, равен сумме площадей квадратов, из которых он состоит, а с другой – это высота, умноженная на ширину 8 x 13. Если в каждом из квадратов мы изобразим четверть окружности, то у нас получится внешняя спираль, образованная этими круговыми дугами, которая часто называется спиралью Фибоначчи (Рисунок 1.).

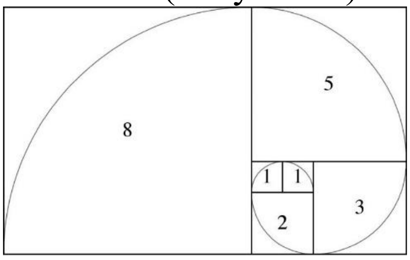

Рисунок 1. Прямоугольник размера 8 х 13. Спираль Фибоначчи.

Не менее интересен результат деления смежных чисел последовательности (13/8=1.625, 21/13=1.615…, 34/21=1.619…, 55/34=1.6176…, 89/55=1.61818… и т.д.), оказалось, что отношение последующего числа к предыдущему, с увеличением ряда стремится к «золотому сечению», т.е. мы будем получать коэффициенты, которые будут становиться все ближе и ближе к числу 1.618033. Данное отношение наиболее известно, как «золотое сечение». Также это единственное число в природе, которое больше своего обратного значения ровно на единицу.

Научно доказано, что числа Фибоначчи очень часто встречаются в природе. Эти числа мы можем встретить, например, в расположении зрелых семян подсолнечников. Их семена идут по спирали от центра к краю, обычно, число спиралей равно 34, 55, но встречаются подсолнечники и с количеством спиралей равным 89 и 144. Также в качестве примера, мы можем рассмотреть чешуйки на сосновых шишках, ананасах, артишоках, которые также расположены спиралями, идущими по часовой стрелке и против неё. Число лепестков в некоторых цветах, таких как ромашки либо маргаритки, может варьироваться от 13 до 89, тоже представляя собой числа Фибоначчи. Число веток на дереве, включая ствол, на различном расстоянии от поверхности земли может представлять собой как последовательность чисел классического ряда Фибоначчи, так и последовательность «трибоначчи». Также примером могут послужить пропорции тела стрекозы и ящерицы, и спиральная раковина моллюска Nautilus pompilius. Это не все примеры, их бесконечно много, и их можно найти почти во всём в музыке, архитектуре, в пропорциях тела человека и животных, в строении космоса и т.д.

В тоже время находятся противники Фибоначии, которые считают заблуждениями его труды и стремятся их опровергнуть. Так, они аргументируют свою позицию тем, что прямоугольник со сторонами равными двум соседним числам из ряда Фибоначчи, отношение которых равно φ, не является наиболее приятным для глаз человека. В то время как сторонники Фибоначчи считают, что выбор будет зависеть от «золотой пропорции».

Данное утверждение было решено проверить путем проведения опроса, в котором приняло участие 90 студентов. Так, было им предложено 10 произвольных прямоугольников (соотношения сторон – 1.) 1:1, 2.) 5:6, 3.) 4:5, 4.) 3:4, 5.) 20:29, 6.) 2:3, **7.) 21:34**, 8.) 13:23, 9.) 1:2, 10.) 2:5 (Рисунок 2.), из которых необходимо было выбрать наиболее приятный для восприятия. В нашем случае «Золотой» прямоугольник был под номером 7.

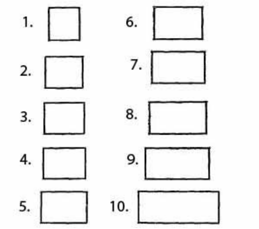

Рисунок 2. Прямоугольники, использованные в опросе

В результате данного опроса получились следующие значения: за 1 прямоугольник проголосовало 6 человек, за 2 – 4 человека, 3 – 8 человек, 4 – 5 человек, 5 – 3 человека, 6 – 11 человек, 7 – 17 человек, 8 – 17 человек, 9 – 12 человек, 10 – 7 человек (Рисунок 4).

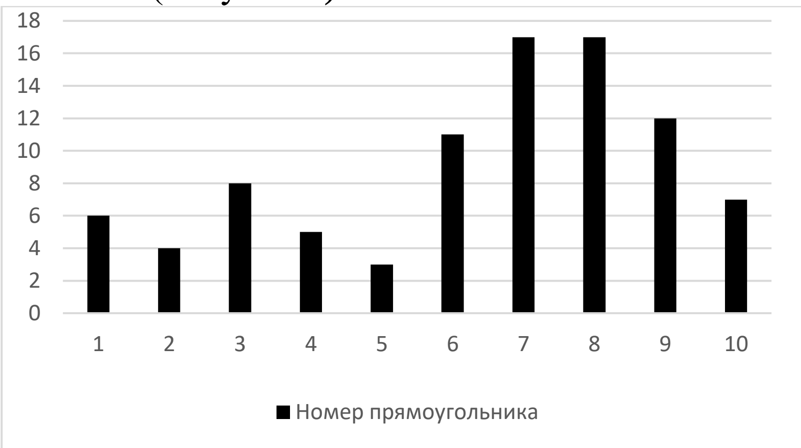

Рисунок 3. Результат опроса

Исходя из опроса следует, что число людей, проголосовавших за прямоугольник под номером 7 (соотношение сторон которого - 0,618…), и число людей, проголосовавших за прямоугольник под номером 8 (соотношение сторон которого - 0,565…), равны. Следовательно, люди преимущественно выбирали прямоугольники, соотношение сторон которых приближается к «золотому сечению», что подтверждает труды сторонников Фибоначчи.

Таким образом, с числами Фибоначчи каждый из нас неоднократно сталкивался в своей жизни. Они встречаются не только в научных трудах, математических уравнениях криптографии и архитектуре, но и в строении человека, природе, космосе. Также стоит отметить, что по результатам проведённого опроса студенты склонялись к выбору объектов, созданных на основе числа Фибоначчи, что говорит и о эстетической значимости этой закономерности.

Список использованных источников

1. Фибоначчи, его числа и кролики / А.В.Дроздюк, Д.В. Дроздюк – Торонто, 2010.
2. Числа Фибоначчи, издание четвертое дополненное / Н.Н.Воробьев – Москва:«Наука» главная редакция физико-математической литературы, 1978.
3. Peter Tannenbaum Excursion in Modern Mathematics Eight Edition.