Практикум на ЭВМ Метод барьерных функций с методом Давидона-Флетчера-Пауэлла

Титушин Александр Дмитриевич

группа 411

15 октября 2024 г.

Метод Барьерных Функций: Основная Идея

- Преобразует задачу с ограничениями:

$$\min f(x) \quad \text{при} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, ..., m$$

в задачу без ограничений, добавляя барьерную функцию:

$$\phi(x, \mu) = f(x) + \mu \sum_{i=1}^{m} B_i(x)$$

где $B_i(x)$ - барьерная функция, например $-\log(-g_i(x))$.

- С каждой итерацией параметр μ уменьшается, что приводит к последовательному приближению к решению исходной задачи.

Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла (DFP)

- Метод квази-Ньютона для минимизации функции.
- Основная идея: Итерирующее обновление приближения инверсии Гессиана с использованием градиента функции.

Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла (DFP): Шаги алгоритма

1) **Инициализация:** Задать начальную точку x_0 и начальную аппроксимацию обратной Гессианской матрицы $H_0 = I$.
2) **Вычисление градиента:** В каждой итерации вычислить градиент функции ∇f_k в текущей точке x_k.

$$\nabla f_k = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \Bigg|_{x=x_k}$$

3) **Определение направления поиска:** Найти направление поиска p_k с использованием текущей аппроксимации обратной Гессианской матрицы H_k.

$$p_k = -H_k \nabla f_k$$

Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла (DFP): Шаги алгоритма

4) **Линейный поиск:** Найти оптимальное значение шага α_k, чтобы минимизировать функцию вдоль направления p_k.

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

5) **Вычисление новых градиентов:** Вычислить новый градиент ∇f_{k+1} в точке x_{k+1}.

Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла (DFP): Шаги алгоритма

6) **Обновление аппроксимации обратной Гессианской матрицы:** Используя формулы обновления DFP:

$$
\begin{aligned}
s_k &= x_{k+1} - x_k \\
y_k &= \nabla f_{k+1} - \nabla f_k \\
\rho_k &= \frac{1}{y_k^T s_k} \\
H_{k+1} &= \left(I - \rho_k s_k y_k^T\right) H_k \left(I - \rho_k y_k s_k^T\right) + \rho_k s_k s_k^T
\end{aligned}
$$

Проверка сходимости: Если $\|\nabla f_{k+1}\| < \epsilon$, остановиться. Иначе, перейти к следующей итерации.

Реализация основных функций

```python
# Евклидовая норма вектора
def norm(x):
    return sum(i**2 for i in x)**0.5

# Скалярное произведение векторов
def dot_product(a, b):
    return sum(x * y for x, y in zip(a, b))

# Произведение двух векторов
def outer_product(a, b):
    result = [[0] * len(b) for _ in range(len(a))]
    for i in range(len(a)):
        for j in range(len(b)):
            result[i][j] = a[i] * b[j]
    return np.array(result)

# Перемножение двух матриц
def matrix_dot(A, B):
    result = [[0] * len(B[0]) for _ in range(len(A))]
    for i in range(len(A)):
        for j in range(len(B[0])):
            for k in range(len(B)):
                result[i][j] += A[i][k] * B[k][j]
    return np.array(result)

# Транспонирование матрицы
def transpose_matrix(A):
    result = [[0] * len(A) for _ in range(len(A[0]))]
    for i in range(len(A)):
        for j in range(len(A[0])):
            result[j][i] = A[i][j]
    return np.array(result)
```

Реализация основных функций

```
# Линейный поиск для определения оптимального шага
def line_search(f, x, p, alpha0=1, c1=1e-4, rho=0.9):
    # Инициализация начального шага
    alpha = alpha0
    # Уменьшаем alpha до тех пор, пока условие Армихо не выполняется
    while f(x + alpha * p) > f(x) + c1 * alpha * dot_product(gradient(f, x), p):
        alpha *= rho
    return alpha

# Вычисление градиента
def gradient(f, x, epsilon=1e-8):
    grad = np.zeros_like(x)
    for i in range(len(x)):
        x_h = x.copy()
        x_h[i] += epsilon

        f_x_h = f(x_h)
        f_x = f(x)

        # Избегаем неопределнности доопределением 0
        if np.isfinite(f_x_h) and np.isfinite(f_x):
            grad[i] = (f_x_h - f_x) / epsilon
        else:
            grad[i] = 0

    return grad
```

Реализация барьерной функции

```python
# Барьерная функция для произвольного числа ограничений вида g(x) >= 0
def barrier(x, constraints):
    penalty = 0
    for constraint in constraints:
        value = constraint(x)
        # Если ограничение нарушено, то возвращаем бесконечность
        if value <= 0:
            return float('inf')
        # Прибавляем к штрафу логарифм значения ограничения
        penalty -= np.log(value)
    return penalty

# Целевая функция с учетом штрафа
def combined_func(x, mu, constraints):
    return objective(x) + mu * barrier(x, constraints)
```

Реализация DFP с методом барьерных функций

```
# Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла (DFP) с барьерной функцией
def dfp_method(f, x0, mu, tol=1e-6, max_iter=1000):
    n = len(x0)  # Размерность пространства
    H_k = np.eye(n)  # Инициализация матрицы H как единичной
    x_k = x0  # Начальное приближение решения

    for _ in range(max_iter):
        # Вычисление градиента целевой функции
        grad = gradient(lambda x: combined_func(x, mu, constraints), x_k)

        # Если градиент достаточно мал, то останавливаемся
        if norm(grad) < tol:
            break

        # Вычисляем направление поиска p_k
        p_k = -matrix_dot(H_k, grad.reshape(-1, 1)).flatten()
        # Определяем оптимальный шаг alpha с помощью линейного поиска
        alpha = line_search(lambda x: combined_func(x, mu, constraints), x_k, p_k)

        # Обновляем шаг
        x_k_next = x_k + alpha * p_k
        # Обновляем градиент
        grad_next = gradient(lambda x: combined_func(x, mu, constraints), x_k_next)

        # Обновление параметров для метода DFP по формулам
        s_k = x_k_next - x_k
        y_k = grad_next - grad
        rho = 1.0 / dot_product(y_k, s_k)

        # Обновление матрицы H_k по формулам метода DFP
        if rho > 0:
            # Подготовка
            s_k_mat = s_k.reshape(-1, 1)
            y_k_mat = y_k.reshape(-1, 1)
            term1 = matrix_dot(H_k, y_k_mat)
            outer_s = outer_product(s_k, s_k)
            identity = np.eye(n)

            # Само обновление H_k с учетом изменения градиента
            H_k = matrix_dot(
                matrix_dot((identity - rho * matrix_dot(s_k_mat, transpose_matrix(y_k_mat))), H_k),
                (identity - rho * matrix_dot(y_k_mat, transpose_matrix(s_k_mat)))
            ) + rho * outer_s

        # Переход к следующей итерации
        x_k = x_k_next

    return x_k
```

Пример 1

$$f(x) = (x_0 - 3)^2 + (x_1 - 2)^2$$

Ограничения:

$$x_0 \geq 1, \quad x_1 \geq 1$$

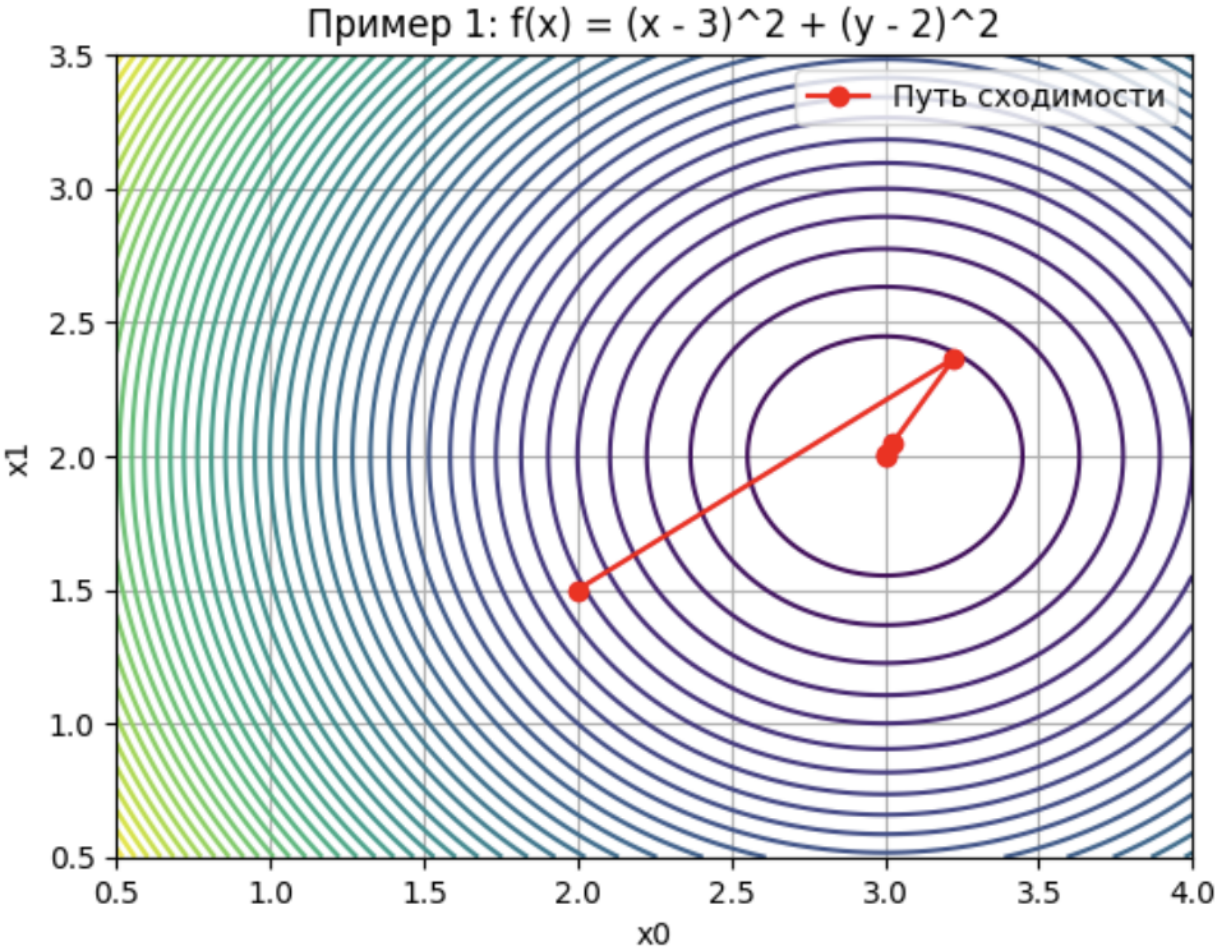
Начальная точка: $(2.0, 1.5)$ Оптимальное решение: $(3.0, 2.0)$ Значение целевой функции: 0.0

Пример 1

```python
# Целевая функция
def objective(x):
    return (x[0] - 3)**2 + (x[1] - 2)**2

def constraint1(x):
    return x[0] - 1

def constraint2(x):
    return x[1] - 1

# Начальные данные
x0 = np.array([2.0, 1.5])  # Начальная точка
mu_start = 1.0  # Начальное значение параметра штрафа
mu_end = 1e-3  # Конечное значение параметра штрафа для прекращения процесса
mu_reduction = 0.1  # Коэффициент уменьшения параметра штрафа на каждой итерации

constraints = [constraint1, constraint2]  # Список ограничений

# Начальные значения переменных для итерационного процесса
x_sol = x0
mu = mu_start
history = [x_sol.copy()]

# Цикл сходимости
while mu > mu_end:
    # Запускаем метод DFP для нахождения минимума с текущим значением mu
    x_sol = dfp_method(lambda x: combined_func(x, mu, constraints), x_sol, mu)
    mu *= mu_reduction  # Уменьшаем mu, чтобы постепенно удалить влияние барьерной функции
    history.append(x_sol.copy())

print("Оптимальное решение:", x_sol)
print("Значение целевой функции в оптимуме:", objective(x_sol))

# Визуализация пути сходимости
x_vals = np.linspace(0.5, 4, 400)
y_vals = np.linspace(0.5, 3.5, 400)
X, Y = np.meshgrid(x_vals, y_vals)
Z = (X - 3)**2 + (Y - 2)**2

plt.contour(X, Y, Z, levels=50)  # Контурный график уровней целевой функции
plt.plot([x[0] for x in history], [x[1] for x in history], 'ro-', label='Путь сходимости')
plt.xlim(0.5, 4)
plt.ylim(0.5, 3.5)
plt.xlabel('x0')
plt.ylabel('x1')
plt.legend()
plt.title('Пример 1: f(x) = (x - 3)^2 + (y - 2)^2')
plt.grid(True)
```

Пример 1

```
Оптимальное решение: [3.00024996 2.00049975]
Значение целевой функции в оптимуме: 3.12227196231781e-07
```



Пример 2

$$f(x) = 2x_0^2 + x_0x_1 + x_1^2$$

Ограничения:

$$x_0 <= 2, \quad x_1 <= 2$$

Начальная точка: $(0.5, 1.0)$ Оптимальное решение: $(0.0, 0.0)$ Значение целевой функции: 0.0

Пример 2

```python
# Целевая функция
def objective(x):
    return x[0]**2 + x[0]*x[1] + x[1]**2

def constraint1(x):
    return -x[0] + 2

def constraint2(x):
    return -x[1] + 2

x0 = np.array([0.5, 1.0])
mu_start = 1.0
mu_end = 1e-3
mu_reduction = 0.1

constraints = [constraint1, constraint2]

x_sol = x0
mu = mu_start
history = [x_sol.copy()]

while mu > mu_end:
    x_sol = dfp_method(lambda x: combined_func(x, mu, constraints), x_sol, mu)
    mu *= mu_reduction
    history.append(x_sol.copy())

print("Оптимальное решение:", x_sol)
print("Значение целевой функции в оптимуме:", objective(x_sol))

x_vals = np.linspace(-2, 2, 400)
y_vals = np.linspace(-2, 2, 400)
X, Y = np.meshgrid(x_vals, y_vals)
Z = X**2 + X * Y + Y**2

plt.contour(X, Y, Z, levels=50)
plt.plot([x[0] for x in history], [x[1] for x in history], 'ro-', label='Путь сходимости')
plt.xlim(-2, 2)
plt.ylim(-2, 2)
plt.xlabel('x0')
plt.ylabel('x1')
plt.legend()
plt.title('Пример 2: f(x) = x^2 + xy + y^2')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Пример 2

```
Оптимальное решение: [-0.00016666 -0.00016666]
Значение целевой функции в оптимуме: 8.33228680265578e-08
```