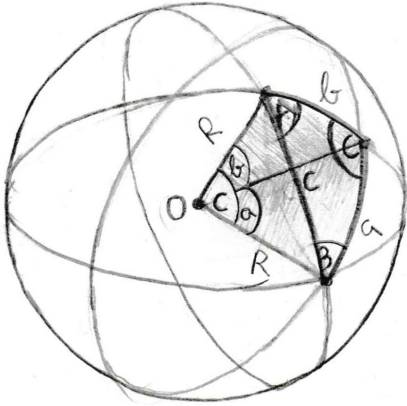


# Sfääriline trigonomeetria

saskia.poldmaa

October 2021

## 1 Põhivalemid



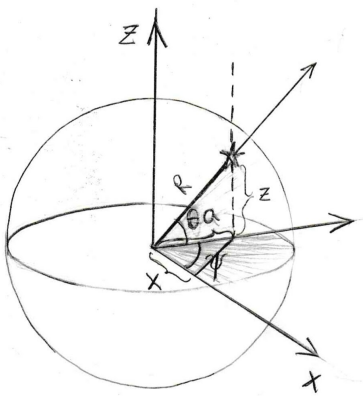
Siinusteoreem:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad (1)$$

Koosinusteoreem:

$$\cos a = \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c \quad (2)$$

## 2 Tuletamine



Jooniselt (kasutades  $R = 1$ )...

$$x = a \cos \psi$$

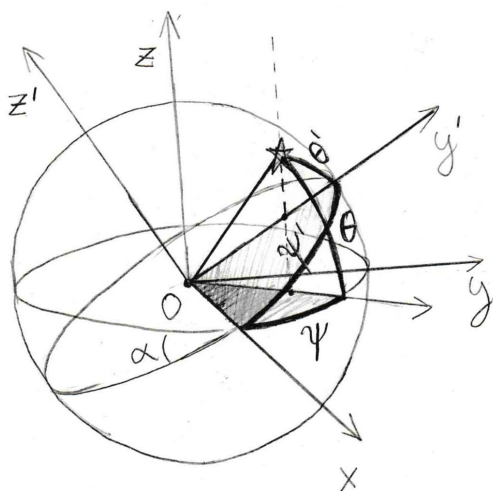
$$a = R \cos \theta$$

$$x = R \cos \theta \cos \psi = \cos \theta \cos \psi \quad (1.1)$$

$$y = R \cos \theta \cos(90 - \psi) = \sin \psi \cos \theta \quad (1.2)$$

$$z = R \sin \theta = \sin \theta \quad (1.3)$$

Vaatame nüüd ka teist koordinaattasandikku, mis on eelmisega võrreldes piki x-telge nurga  $\alpha$  võrra pööratud.



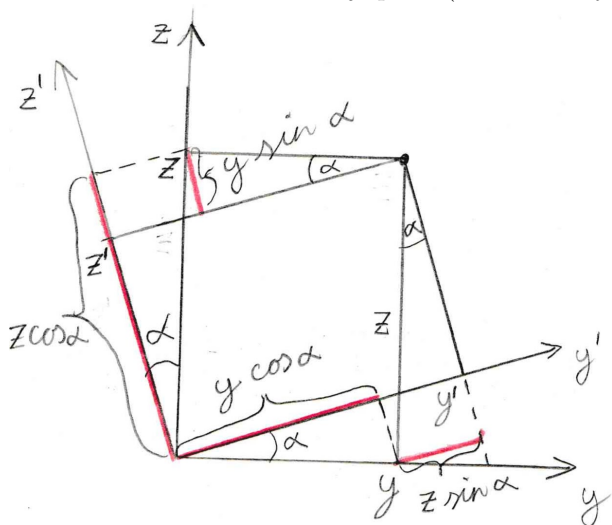
Analoogselt 1.1, 1.2 ja 1.3-ga...

$$x' = \cos\theta' \cos\psi' \quad (2.1)$$

$$y' = \cos\theta' \sin\psi' \quad (2.2)$$

$$z' = \sin\theta' \quad (2.3)$$

Vaatame sama olukorda x-telje pealt (näeme vaid y-z tasandikku)...



$$x' = x \quad (3.1)$$

$$y' = y \cos\alpha + z \sin\alpha \quad (3.2)$$

$$z' = z \cos\alpha - y \sin\alpha \quad (3.3)$$

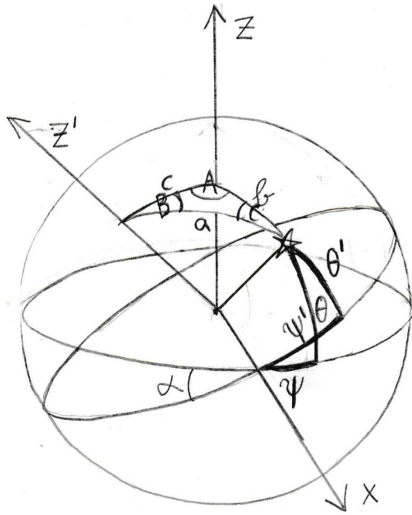
Asendades valemitesse 3.1, 3.2, 3.3 valemid 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2 ja 2.3 saame...

$$\cos\psi' \cos\theta' = \cos\psi \cos\theta \quad (4.1)$$

$$\sin\psi' \cos\theta' = \sin\psi \cos\theta \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha \quad (4.2)$$

$$\sin\theta' = \sin\theta \cos\alpha - \sin\psi \cos\theta \sin\alpha \quad (4.3)$$

Nüüd tuleb vaid muutujad  $\theta$  ja  $\psi$  asendada  $a, b, c, A, B$  ja  $C$  vastu



$$\psi = A - 90^\circ; \psi' = 90^\circ - B; \theta = 90^\circ - b; \theta' = 90^\circ - a; \alpha = c$$

4.1 muutub selliseks...

$$\cos(90^\circ - B) \cos(90^\circ - a) = \cos(A - 90^\circ) \cos(90^\circ - b)$$

$$\sin B \sin a = \sin b \sin A$$

Näeme, et olemegi saanud kätte siinusteoreemi valemi.

4.3 muutub aga selliseks...

$$\cos a = \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c$$

Saime kätte ka koosinusteoreemi valemi.

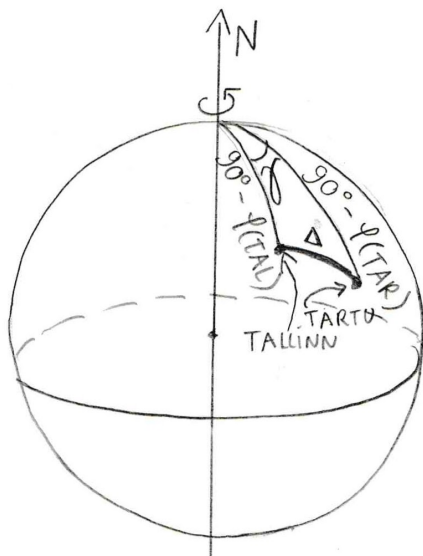
4.2 näeb välja selline...

$$\cos B \sin a = \cos b \sin c - \cos A \sin b \cos c$$

Sel pole eraldi nimetust, kuid ta on vahel sfär. trigo juures siiski ära mainitud n-ö kolmanda valemina.

### 3 Ülesanne

Leia Tartu-Tallinn vahemaa, kui Tallinna koordinaadid on  $59.44^\circ$  N,  $24.75^\circ$  E ning Tartul  $58.38^\circ$  N,  $26.73^\circ$  E



Valemites antud a, b, c-d asendame pikkus- ( $\theta$ ) ning laiuskraadidega ( $\phi$ ).

$\Delta$  tähistab linnade nurkkaugust Maa keskpunktist vaadatuna.

$b = 90^\circ - \phi_{TAL}$ ;  $a = 90^\circ - \phi_{TAR}$ ;  $c = \Delta$ ;  $C = \gamma = \theta_{TAR} - \theta_{TAL}$

Asendame koosinusteoreemi muutujad ära...

$$\cos \Delta = \cos(90^\circ - \phi_{TAR}) \cos(90^\circ - \phi_{TAL}) + \sin(90^\circ - \phi_{TAR}) \sin(90^\circ - \phi_{TAL}) \cos(\theta_{TAR} - \theta_{TAL})$$

Pannes arvud sisse saame, et  $\Delta = 1.61^\circ$ , mis on teepikkusena d.

$$d = \frac{\Delta}{360^\circ} 2\pi R = 179 \text{ km}$$