

תרגיל בית 2

| תאריך הגשה | שעת הגשה | אחראי על התרגיל | מייל אחראי |
|------------|----------|-----------------|-----------------------------|
| 16/05/2022 | 23:59 | ארנון קידרון | arnon@campus.technion.ac.il |

(נא לכתוב 234125 בכותרת מיילים)

שאלה 1 (15 נק')

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \text{ נתונה המטריצה}$$

יהי \underline{b} וקטור שעבורו למערכת המשוואות $\mathbf{Ax} = \underline{b}$ אין פתרון.

כיוון שאין פתרון, נסתפק בקירוב הטוב ביותר במובן נורמת L_2 , שהוא $\underline{x}^* = \arg \min_{\underline{x}} \|\mathbf{Ax} - \underline{b}\|_2^2$.

נרצה גם לחשב את וקטור השגיאה המתאים $\underline{r}^* = \mathbf{Ax}^* - \underline{b}$.

1. (5 נק') אילו מהווקטורים הבאים יכולים להתקבל כווקטור השגיאה $\underline{r}^* = \mathbf{Ax}^* - \underline{b}$?

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

הסבירו את תשובתכם.

2. (3 נק') נסמן את וקטור השגיאה ב- $\underline{r}^* = \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$. בטאו את c, d באמצעות e, f .

3. (4 נק') כעת נתון הווקטור $\underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 15 \\ 22 \end{bmatrix}$. חשבו את \underline{x}^* , פתרון בעיית LS המתאימה.

4. (3 נק') מצאו את וקטור השגיאה המתאים לפתרון שמצאתם בסעיף 3, והראו שהוא מקיים את הביטוי הפרמטרי שמצאתם בסעיף 2.

שאלה 2 (20 נק')

נתונה הפונקציה $f(\underline{x}) = (x_1 - 1)^2 + (2x_1 + x_2 - 3)^2$.

1. (3 נק') מיצאו את הוקטור \underline{x} שמביא את הפונקציה למינימום, בעזרת הנגזרות החלקיות של f

2. (3 נק') נסחו את בעיית הבאת f למינימום כבעיית LS - $\min_{\underline{x}} \|\underline{Ax} - \underline{b}\|_2^2$. מה הם \underline{A} , \underline{b} ?

3. (4 נק') מיצאו את הפתרון לבעיית LS בדרך שלמדנו בכיתה.

4. (5 נק') הוכיחו בעזרת \underline{A} כי קיים מינימום יחיד לבעיה.

5. (5 נק') האם שינוי \underline{b} היה משנה את יחידות הפתרון? נמקו.

שאלה 3 (15 נק')

בשאלה זו לא נדרשים נימוקים.

א. (5 נק') נתונה בעית ריבועים פחותים עם מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$$\min_{\underline{x}} \|\underline{Ax} - \underline{b}\|_2^2$$

איזו מהטענות הבאות **בהכרח** נכונה?

- a. אם $m \geq n$, אז יש אינסוף פתרונות לבעית LS
- b. אם $m < n$, אז יש אינסוף פתרונות לבעית LS
- c. אם $A^T A$ חיובית מוגדרת, אז יש אינסוף פתרונות לבעית LS
- d. אם \underline{b} שייך למרחב העמודות של A , אז יש אינסוף פתרונות לבעית LS
- e. אם \underline{b} שייך למרחב העמודות של A , אז יש פתרון יחיד לבעית LS

ב. (5 נק') נתונה לנו המטריצה הבאה:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ברצוננו למצוא וקטור \underline{b} שעבורו השגיאה של הפתרון האופטימלי לבעית LS תהיה $\min_{\underline{x}} \|\underline{Ax} - \underline{b}\|_2^2 = 8$ והפתרון יהיה **יחיד**.

מי מהוקטורים הבאים עונה על שתי הדרישות?

a. $\underline{b} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

b. $\underline{b} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$

c. $\underline{b} = [3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$

d. $\underline{b} = [3 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 2 \ 3 \ 2]^T$

e. לא קיים וקטור \underline{b} שעונה על שתי הדרישות

ג. (5 נק') נתונות שתי מטריצות מלבניות $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ומטריצה ריבועית $A_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, כאשר $m > n$. ידוע כי העמודות של כל אחת מהמטריצות פורשות את אותו תת-מרחב, וכי מתקיים $\text{rank}(A_1) = n$. נתון גם וקטור $b \in \mathbb{R}^m$, ונרצה למצוא את ההטלה שלו על תת-המרחב.

איזו מהטענות הבאות **בהכרח** נכונה?

a. ההטלה הקרובה ביותר של b על מרחב העמודות של כל אחת משלוש המטריצות **זהה**, והינה:

$$\underline{y} = A_1(A_1^T A_1)^{-1} A_1^T b$$

b. ההטלה הקרובה ביותר של b על מרחב העמודות של כל אחת משלוש המטריצות **זהה**, והינה:

$$\underline{y} = (A_3^T A_3)^{-1} A_3^T b$$

c. ההטלה הקרובה ביותר של b על מרחב העמודות של כל אחת משלוש המטריצות **זהה**, והינה:

$$\underline{y} = (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T b = (A_2^T A_2)^{-1} A_2^T b = (A_3^T A_3)^{-1} A_3^T b$$

d. ההטלה הקרובה ביותר של b על מרחב העמודות של כל אחת משלוש המטריצות ניתנת **רק** על ידי:

$$\underline{y} = A_3(A_3^T A_3)^{-1} A_3^T b$$

e. ההטלה הקרובה ביותר של b על מרחב העמודות היא:

$$\underline{b} = \underline{y} = (A_3^T A_3)^{-1} A_3^T b$$

שאלה 4 (20 נק')

עבור בעיית ריבועים פחותים $\min_{\underline{x}} \|A\underline{x} - \underline{b}\|_2^2$ כלשהיא, הגדרנו בשיעור את מטריצת ההטלה $P_A = A(A^T A)^{-1} A^T$.

הוכיחו את הטענות הבאות:

1. (1 נק') המטריצה A אינוואריאנטית תחת כפל משמאל במטריצת ההטלה שלה, כלומר $P_A A = A$.

2. (1 נק') מטריצת ההטלה אידמפוטנטית, כלומר $P_A P_A = P_A$.

3. (1 נק') מטריצת ההטלה סימטרית.

4. (2 נק') הוכיחו כי $H_A = (I - P_A)$ היא סימטרית ואידמפוטנטית.

תהי $A = [M_1 \ M_2]$ מטריצה המחולקת לשני בלוקים.

5. (10 נק') הוכיחו כי $P_{M_2} P_A = P_{M_2}$.

6. (5 נק') הוכיחו בעזרת סעיף 5 כי $H_{M_2} H_A = H_A$.

שאלה 5 (30 נק')

בשאלה זו תתנסו בתוכנת מטלב.

בכל סעיף $i \in \{1,2,3\}$, עליכם להכין קובץ סקריפט בשם `clause_i.m`. הקובץ נדרש לרוץ ללא שגיאות, להדפיס את ההדפסות הנדרשות ולהציג את התמונות הנדרשות. עליכם להציג תוצאות גם בתשובה לסעיף בגיליון התשובות. אם תבחרו להכין פונקציות עזר, שימו לב שבתוכנת מטלב כל פונקציה צריכה להיות בקובץ `m` נפרד. בסעיף 3 תידרשו להשתמש במשתנים מסעיפים קודמים. דרך אחת לעשות זאת היא באמצעות הפונקציות `save`, `load`.

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

בתרגול אימנו מסווג שנועד להבחין רק בין תמונות של הספרה 0 לבין תמונות של הספרה 7. בתרגיל זה נרחיב את הטיפול ונגיע למצב של זיהוי כל סיפרה מבין 10 האפשרויות 0, ..., 9.

- (10 נק') הורידו מאתר הקורס את קובץ הקוד `HW2.m` ואת מאגר הנתונים `mnist.mat`. התאימו את הקוד כדי לאמן מסווג שמשימתו היא להבחין בין 0 לבין כל הספרות האחרות.
 - הסבירו איך התאמתם את הקוד לבעיה.
 - כמה תמונות סווגו לא נכון בקבוצת האימון, וכמה בקבוצת המבדק?
 - הציגו 5 תמונות שסווגו לא נכון.
- (10 נק') חזרו ובצעו את אותה משימה לכל אחת מהספרות 0, ..., 9. כלומר, ברצוננו לבנות 10 מסווגים שכל אחד מהם מסוגל להבחין בין הסיפרה k לבין כל האחרות כאשר $k=0,1,2 \dots 9$.
 - כמה תמונות סווגו לא נכון בקבוצת האימון, וכמה בקבוצת המבדק ע"י כל אחד מהמסווגים?
 - הציגו 5 תמונות שסווגו לא נכון ע"י כל מסווג.
- (10 נק') הציעו דרך לקבל סיפרה כלשהי ולקבוע מיהי על סמך 10 המסווגים הנ"ל.
 - בידקו את הדרך שלכם על קבוצת המבדק החדשה המיוצגת ע"י המטריצה `A_new_test` בקוד, והשוו את התשובות שלכם לוקטור התייגים `test.labels`.
 - עבור כמה תמונות לא קיבלתם תשובה חד משמעית אחת? כיצד תציעו לטפל בהן?
 - כמה תמונות זיהיתם לא נכון?
 - הציגו 5 תמונות שזיהיתם לא נכון.

הוראות הגשה

- יינתנו עד 10 נקודות בonus על תרגיל מוקלד, מסודר וברור (סדר התשובות ובהירותן יילקחו בחשבון).

1. את העבודה יש להגיש אלקטרונית בזוגות לאתר הקורס. **הגשות שאינן בזוגות וללא אישור, לא ייבדקו.**

- **את גיליון התשובות יש לשמור כקובץ pdf בשם id1-id2.pdf.**
- במקרה שנדרשת הגשה עם מספר קבצים (למשל קטעי קוד) יש להגיש קובץ zip בשם id1-id2.zip (ובתוכו את גיליון התשובות בשם id1-id2.pdf).

2. באחת השאלות בגיליון זה, אתם נדרשים לכתוב קוד בשפת מטלב.

- יש לצרף את כל קבצי הקוד (קבצי m). לקובץ ה-zip המוגש. (אין צורך להעתיק את הקוד לקובץ id1-id2.pdf).
- אין לצרף קבצי mat.
- תוכלו למצוא באתר הקורס, בדף "קישורים", קישור להורדת התוכנה וקישור למצגות ללימוד שפת מטלב.
- אתם רשאים גם לעבוד בפיתון, ולהגיש קבצי py.

3. ניתן להגיש את תרגיל הבית עד 4 ימי איחור בדף תרגיל הבית באתר הקורס, תחת Late submission.

עבור $x \in \{1,2,3,4\}$ ימי איחור יינתן קנס של 2^x נקודות מציון התרגיל.