Tarea 1

José López Joel Patricio

Problema 1

Las propiedades de las funciones de riesgo: Supongamos que una variable aleatoria de supervivencia T con una densidad una mezcla de dos exponenciales.

$$f_t = p\lambda^{-\lambda t} + (1-p)\mu e^{-\mu t}; t \geq 0$$

donde $0 < p < 1$ es el parámetro de proporción de la mezcla $0 < \lambda < \mu < 1$ son parametros de cada exponencial en la mezcla.

a).

Encuentre la función de supervivencia $S(t)$

La función de riesgo es:

$$S(t) = \int_t^\infty p\lambda e^{-\lambda t} + (1-p)\mu e^{-\mu t} dt$$

$$= p\lambda \int_t^\infty e^{-\lambda t} dt + (1-p)\mu \int_t^\infty e^{-\mu t} dt$$

$$= -pe^{-\lambda t}|_t^\infty - (1-p)e^{-\mu t}|_t^\infty$$

$$= pe^{t} + (1-p)e^{-\mu t}$$

b).

Encuentre la función de riesgo $h(t)$ para T y explique anliticamente o intituvamente por que es decreciente en función de su argumento positivo t.

$$\lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_T(t)}{S(t)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{p\lambda e^{-\lambda t} + (1-p)\mu e^{-\mu t}}{1 - [p(1-e^{-\lambda t}) + (1-p)(1-e^{-\mu t})]} \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S(t) = 0$$

por que el $_{n }e^{-t}=0

Problema 2

Sea la variable aleatoria $T = e^y$ que representa el tiempo de supervivencia con distribución en la familia log-localidad-escala.

$$P(Y \geq y) = S_0\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

a)

Derive la función de densidad de probabilidades de T bajo es supuesto que $S_0(\mu) = 1 - \Phi(\mu)$, donde $\Phi(\mu)$ es la funcion de distribución de una $N(0,1)$

$$P(Y \geq y) = S_0\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

$$p(Y \leq y) = 1 - S_0\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

Ahora:

$$p(Y \leq y) = 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

Tenemos que: T=e^{y} tiene una distribución localidad-escala. $\Phi \sim N(0,1)$

$$F_T(t) = P\left(U \leq \left(\frac{log(t)-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{log(t)-\mu}{\sigma}\right)$$

$$f_t = \frac{d}{dt}\Phi\left(\frac{log(t)-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{log(t)-\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{1}{\sigma t}\right)$$

$$\therefore\ T \sim lognormal(\mu, \sigma)$$

b).

Derive la función de densidad de probabilidades de T bajo el supuesto que $S_0(\mu) = -e^{\mu}$, use $\alpha = e^{\mu}$ y $\beta = \frac{1}{\sigma}$

$$P(Y \geq y) = S_0\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(Y \leq y) = 1 - S_0\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - exp\left(-e^{\left(\frac{log(t)-\mu}{\sigma}\right)}\right)$$

Derivando:

$$= f_Y(y) = \frac{d}{dt}\left(1 - exp\left(-e^{\left(\frac{log(t)-\mu}{\sigma}\right)}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma t} exp\left(\frac{log(t)-\mu}{\sigma} - e^{\left(\frac{log(t)-\mu}{\sigma}\right)}\right)$$

$$\therefore\ T \sim Weibull(\alpha, \beta)$$

Problema 3

Sea T una variable aleatoria de tiempo de vida, con una función de riesgo en forma de bañera, tiene una distribución exponencial de potencia con función de supervivencia.

$$S(t) = e^{1-e^{(\lambda t)^{\alpha}}}$$

a).

Si $\alpha = 0.5$ demuestre que la función de riesgo tiene forma de bañera y encuentre el tiempo en que la tasa de riesgo cambia de decreciente a creciente.

$$h(t) = \frac{\partial}{\partial t} logS(t)$$

$$h(t) = \frac{\partial}{\partial t} 1 - e^{(\lambda t)^{2}}$$

$$= \frac{e^{(\lambda t)^{1/2}} \lambda^2}{2t^{1/2}}$$

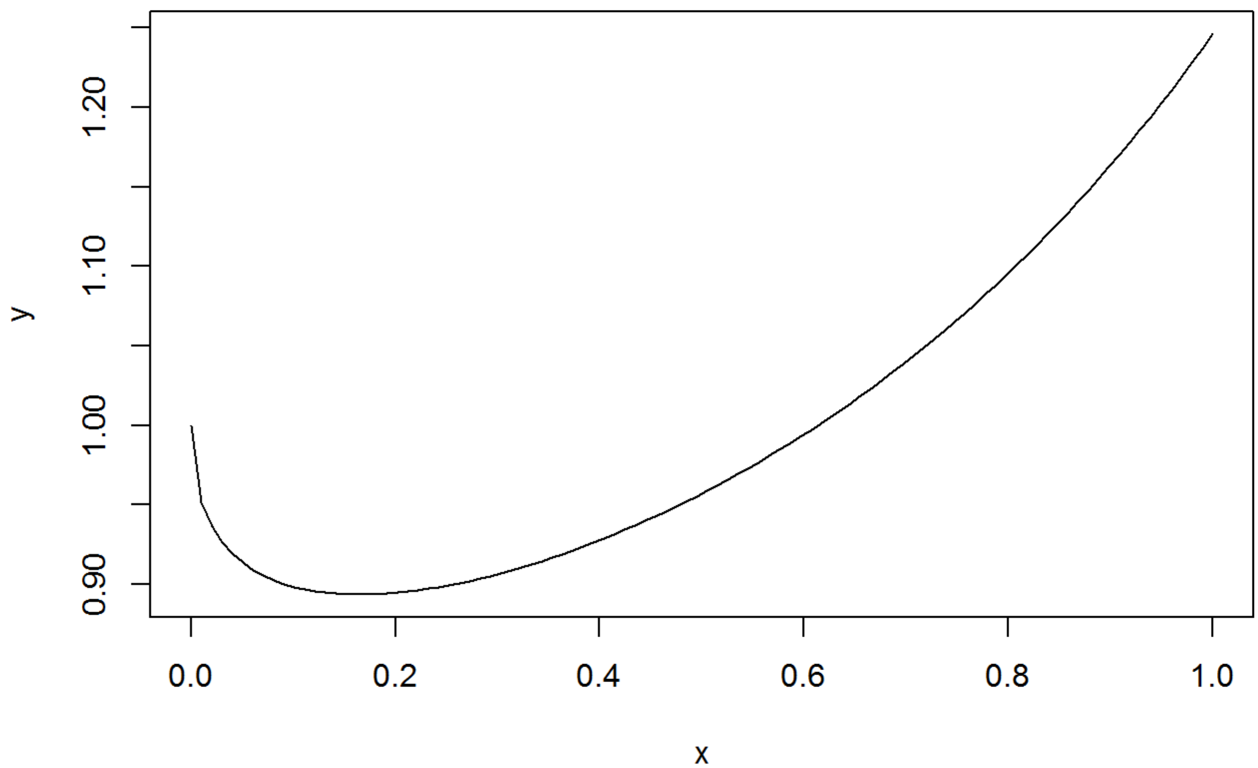
Muestramos la grafica:

```
lamb<-0.33
alfa<-0.5

d<-function(t)
  exp(1-exp((lamb*t)^alfa))


s<-function(t)
  d(t)/(1-integrate(d,0,t)$value)

x<-seq(0,1,length.out=100);
y<-apply(matrix(x),1,s)
plot(x,y,t="l")
```




```
# PUNTO CRITICO

x[order(y)[1]]
```

```
## [1] 0.1616162
```

b).

Si $alpha = 2$, demuestre que la tasa de riesgo de T es monótina y creciente.

De forma análitica:

$$h(t) = \frac{\partial}{\partial t} log S(t)$$

$$h(t) = \frac{\partial}{\partial t} 1 - 1 - e^{(\lambda t)^2}$$

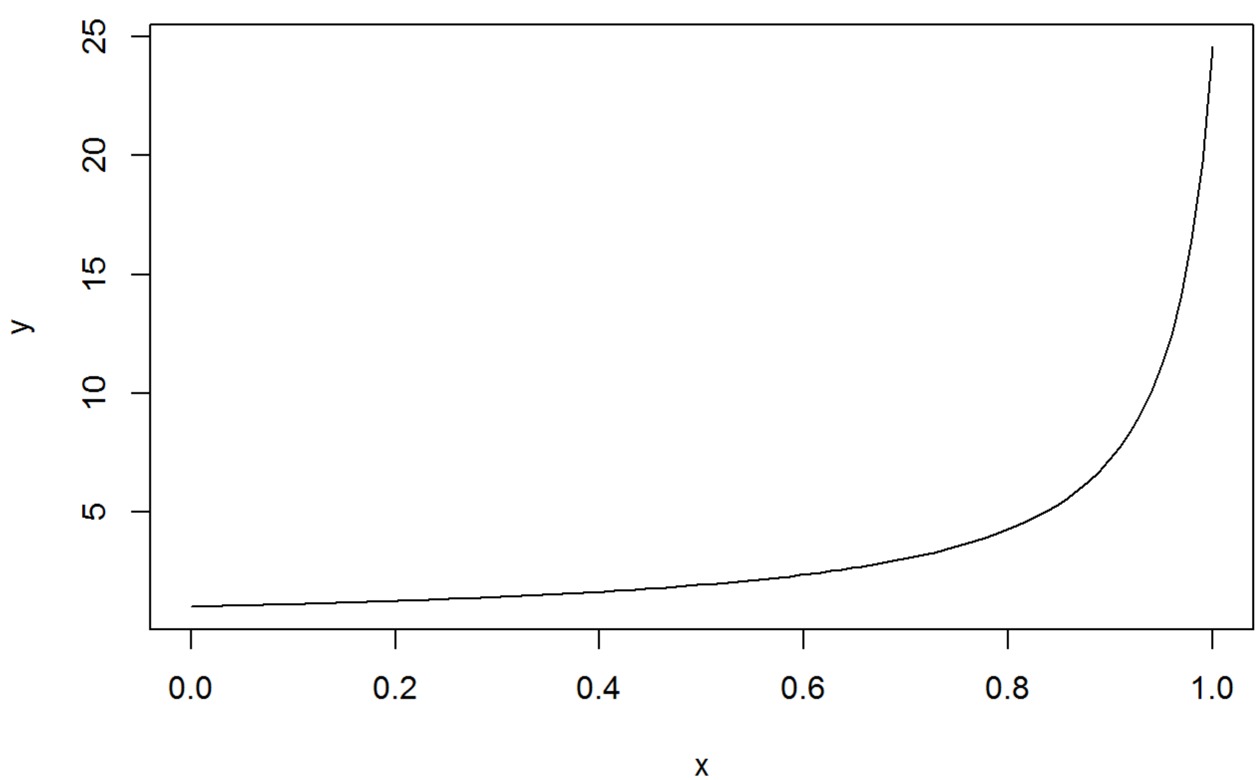
$$= 2\lambda^2 t e^{(\lambda t)^2}$$

```
lamb<-0.33
alfa<-2

d<-function(t)
  exp(1-exp((lamb*t)^alfa))


s<-function(t)
  d(t)/(1-integrate(d,0,t)$value)

x<-seq(0,1,length.out=100);
y<-apply(matrix(x),1,s)
plot(x,y,t="l")
```



```
# PUNTO CRITICO

x[order(y)[1]]
```

```
## [1] 0
```

Problema 4

Un modelo utilizando en la construcción de tablas de vida es de tasa de riesgo constante por partes. Aquí el eje de tiempo se divide en k intervalos, $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i = 1, \ldots, k$ con $\tau_0 = 0$ y $\tau_k = \infty$. La tasa de riesgo en el i-ésimo intervalo es un avalor constante, θ_i eso es:

$$h(t) = \begin{cases} \theta_1 \;\; 0 \leq t < \tau_1 \\ \theta_2 \;\; \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ . \\ . \\ . \\ \theta_{k-1} \;\; \tau_{k-2} \leq t < \tau_{k-1} \\ \theta_k \;\; \tau_{k-1} \leq t \end{cases}$$

a)

Obtenga la función de supervivencia.

La función de supervicencia

$$S(t) = e^{-H(t)}$$
$$donde:$$
$$H(t) = \int_0^t h(u)du$$

Realizando los calculos tenemos:

Función de riesgo acumulado

$$H(t) = \begin{cases} \theta_1 t & 0 \leq t < \tau_1 \\ \theta_i \tau_1 + \theta_2 (t - \tau_1) & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ . & \\ . & \\ . & \\ \theta_1 \tau_1 + \ldots + \theta_{k-2}\tau_{k-2} + \theta_{k-1}(t - \tau_{k-2}) & \tau_{k-2} \leq t < \tau_{k-1} \\ \theta_1 \tau_1 + \ldots + \theta_{k-1}\tau_{k-1} + \theta_k (t - \tau_{k-1}) & \tau_{k-1} \leq t \end{cases}$$

La funcion de supervicencia es:

$$S(t) = \begin{cases} e^{-\theta_1 t} & 0 \leq t < \tau_1 \\ e^{-(\theta_1\tau_1+\theta_2(t-\tau_1))} & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ . \\ . \\ . \\ e^{-(\theta_1\tau_1+\ldots+\theta_{k-2}\tau_{k-2}+\theta_{k-1}(t-\tau_{k-2}))} & \tau_{k-2} \leq t < \tau_{k-1} \\ e^{-(\theta_1\tau_1+\ldots+\theta_{k-1}\tau_{k-1}+\theta_k(t-\tau_{k-1}))} & \tau_{k-1} \leq t \end{cases}$$

b)

Encuentre la función de vida residual media.

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_1} & 0 \leq t < \tau_1 \\ \frac{1}{\theta_2} & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ . \\ . \\ . \\ \frac{1}{\theta_{k-1}} & \tau_{k-2} \leq t < \tau_{k-1} \\ \frac{1}{\theta_k} & \tau_{k-1} \leq t \end{cases}$$

Problema 5

En algunas aplicaciones, se incluye parametro, llamado tiempo de arantia. Este parámetro ϕ es el tiempo más pequeño en que podría ocurrir una falla. Considere que en la variable aleatoria tiempo de vda T tiene una función de supervivencia $Weibull$ de tres parámetros de distrubución está dada por:

$$S(t) = \begin{cases} e^{-\lambda(t-\phi)^{\alpha}} & si & t \geq \phi \\ 1 & si & t < 0 \end{cases}$$

a).

Encuentre la función de riesgo y la función de densidad de la distribucion $Weibull$ de tres parámetros.

$$h(t) = \frac{\partial}{\partial t} log(S(t))$$

Aplicamos las derivadas parciales tenemos:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} log\left(e^{-\lambda(t-\phi)^{\alpha}}\right) & si & t \geq \phi \\ \frac{\partial}{\partial t} log(1) & si & t < 0 \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} \alpha\lambda(t-\phi)^{\alpha-1} & si & t \geq \phi \\ 0 & si & t < 0 \end{cases}$$

$$f(t) = h(t)S(t)$$

Finalmente tenemos:

$$f(t) = \alpha\lambda(t-\phi)^{\alpha-1}e^{-\lambda(t-\phi)^{\alpha}}$$

b).

Suponga que el tiempo de supervivencia T sigue una distribución Weibull de tres parámetros con $\alpha = 1$, $\lambda = 0.0075$ y $\phi = 100$. Encuentra la media y la mediana de los tiempos de vida.

Tenemos para la *media*

$$f_T(t) = 0.0075e^{0.0075(t-100)}; \qquad 100 \leq t < \infty$$

$$E(T) = \int_{100}^{\infty} t\, 0.0075e^{0.0075(t-100)}dt$$

$$= 0.0075e^{0.75}\int_{100}^{\infty} t\, e^{0.0075t}dt$$

Media

$$S(m) = 100 - e^{-0.0075(m-100}$$

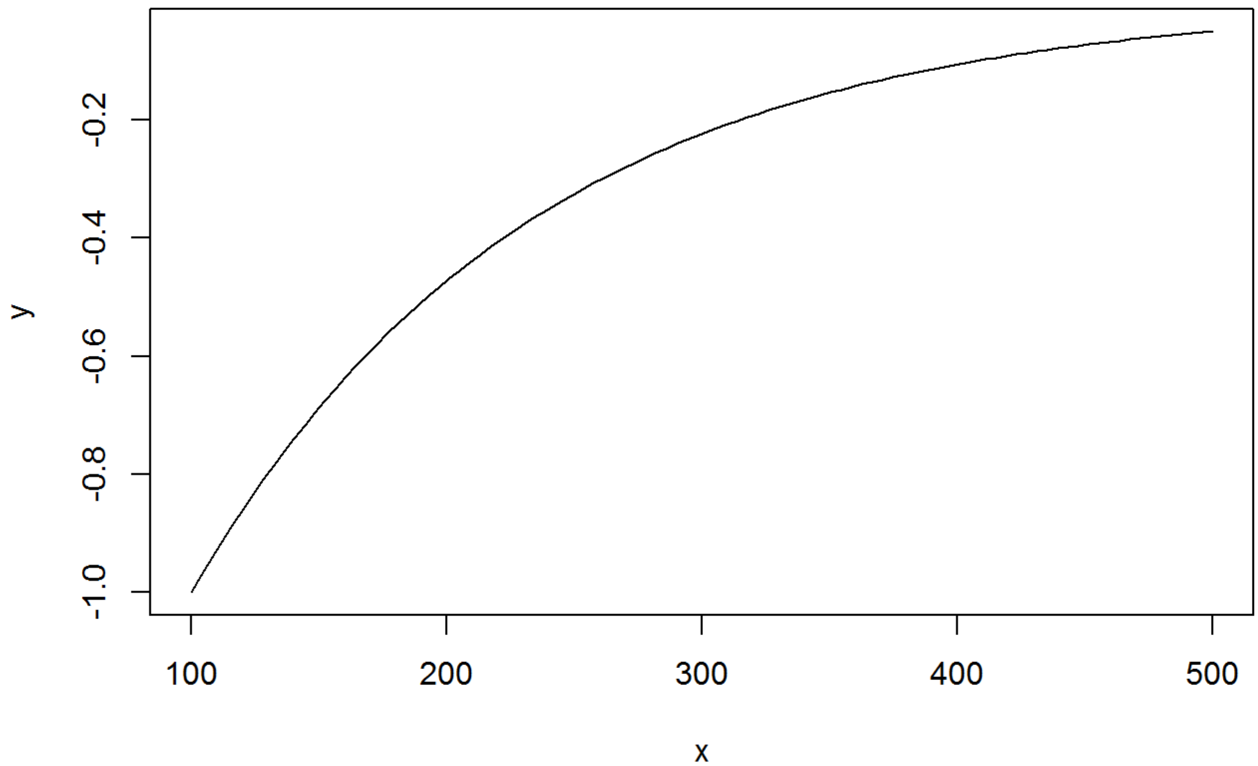
Resolviendo en R tenemos:

```
alfa<-1
lamda<-0.0075
fi=100
condicion<-expression(exp(-lamda*(t-fi)^alfa))

f<-function(t)
  if(t>=fi)-1*eval(deriv(condicion,'t')) else 0

h<-function(t)
  func(t)/eval(condicion)
```

```
x<-matrix(seq(100,500,length.out=100))
y<-apply(x,1,f)
plot(x,y,t='l')
```




```
# media

media<-(t(x)%*%y)/sum(y)
media
```

```
##          [,1]
## [1,] 210.8173
```

```
# mediana

Z<-y/sum(y)
J<-1
M<-Z[J]
while (M<.5) {
  J<-J+1
  M<-M+Z[J]
}

Mediana<-x[J]
Mediana
```

```
## [1] 184.8485
```

Problema 6

Sea T una variable aleatoria de tiempo de vida con distribución $weibull$ de dos parametros, con función de supervivencia

$$S(t) = e^{-\lambda t^{\alpha}}$$

Suponga que tenemos una muestra aleatoria, derive la función de verosimiltud para los siguentes casos:

a).

Tenemos una m.a, de datos *truncados* por la izquierda (y_{li}, t_i), sujetos a $y_{li} \leq t_i; i = 1, 2, \ldots, n$ donde y_{li} son tiempos de truncamiento por la izquierda.$(tip : L_i = P(T = t_i | T \geq y_{li}))$

$$L(\alpha, \beta; t) = \prod_{1}^{n} P(T = t_i | t \geq y_{li})$$

$$= \prod_{1}^{n} \frac{f(t_i)}{P(T \geq y_{li})}$$

$$= \prod_{1}^{n} \frac{\alpha \lambda t^{\alpha-1} e^{-\lambda} t_i^{\alpha}}{e^{-\lambda y_{li}^{\alpha}}}$$

b).

Tenemos una m.a, de datos censurados por intervalo $(Li, Ri); i = 1, \ldots, n.$
$(tip : Li = P(Li \leq Ti \leq Ri))$

$$L(\alpha, \beta; t) = \prod_{i}^{n} P(l_{li} \leq T \geq r_i)$$

$$= \prod_{i}^{n} (F(r_i) - F(l_i)) = \prod_{i}^{n} \left(-e^{-\lambda r_i^{\alpha}} + e^{-\lambda l_i^{\alpha}}\right)$$

$$= \prod_{i}^{n} \left(e^{-\lambda l_i^{\alpha}} - e^{-\lambda r_i^{\alpha}}\right)$$

c)

Datos con truncamiento doble (yli, ti, yri), sujetos a $yli \leq ti \leq yri; i = 1, 2, \ldots, n.$
$(tip : Li = P(T = ti | Li \leq Ti \leq Ri))$

Truncamiento doble:

$$f(y | a < y < b) = \frac{f(y)}{P(a < Y < b)}$$

$$L(\lambda, \alpha; t) = \prod_{1}^{n} P(T = t | y_{li} < T < yr_i$$

$$= \prod_{1}^{n} \frac{f(t)}{P(y_{li} < T < y_{ri})}$$

$$= \prod_{1}^{n} \frac{f(t_i)}{P(y_{li} < T \geq y_{ri})}$$

$$= \prod_{1}^{n} \frac{f(t_i)}{F(y_{ri}) - F(y_{li})}$$

$$= \prod_{1}^{n} \frac{\lambda\alpha(\lambda t)^{\alpha-1} e^{-(\lambda t_i)^\alpha}}{e^{-(\lambda y t_i)^\alpha} + e^{-(\lambda y_{ri})^\alpha}}$$

$$= (\lambda\alpha)^n \prod_{1}^{n} \frac{(t)^{\alpha-1} e^{-(\lambda t_i)^\alpha}}{e^{-(\lambda y t_i)^\alpha} + e^{-(\lambda y_{ri})^\alpha}}$$

d).

caso censura por intervalo y truncamiento).Considere la un muestra de cuatro pacientes cuya edad al moneto de su muerte estaba en lso intervalos $(90, 120], (110, 15], (80, 100], (70, 75])$ sujeto a que la condición de entrada es de 90 años o mas. $(tip : Li = P(Li \leq Ti \leq Ri|T \geq yli))$

La verosimilitud se expresa como:

$$L(\lambda, \alpha; t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{P(l_i < T < R_i)}{P(T > y_{li})}$$

$$= \frac{P(90 < T \leq 120)}{P(T \geq 90)} \frac{P(110 < T \leq 115)}{P(T \geq 90)} \frac{P(80 < T \leq 100)}{P(T \geq 90)} \frac{P(70 < T \leq 75)}{P(T \geq 90)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda 120^\alpha} + e^{-\lambda 90^\alpha}}{e^{-\lambda 90^\alpha}} \frac{e^{-\lambda 115^\alpha} + e^{-\lambda 110^\alpha}}{e^{-\lambda 90^\alpha}} \frac{e^{-\lambda 100^\alpha} + e^{-\lambda 80^\alpha}}{e^{-\lambda 90^\alpha}} \frac{e^{-\lambda 75^\alpha} + e^{-\lambda 70^\alpha}}{e^{-\lambda 90^\alpha}}$$

$$= \left(\frac{1}{e^{-\lambda 90^\alpha}}\right)^4 (e^{-\lambda 120\alpha} + e^{-\lambda 90\alpha})(e^{-\lambda 115\alpha} + e^{-\lambda 110\alpha})(e^{-\lambda 100\alpha} + e^{-\lambda 80\alpha})(e^{-\lambda 75\alpha} + e^{-\lambda 70\alpha})$$

Problema 7

Sea $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ variables aleatorias continuas e independientes de supervivencia y sea Y una nueva variable aleatoria de supervivencia, definida $W = min(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ Si Y_i tiene función de supervivencia $SYi(y) = exp(-\alpha_i y\beta)$ para $\alpha i > 0, y > 0$, determine la función de riesgo para $n^{1/\beta}W$.

Distribuciión $Weibull $

$$W \sim Weibull\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta\right)$$

Sea

$$Y = n^{\frac{1}{\beta}} W$$

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(n^{\frac{1}{\beta}} W < y) = P(W < y/n^{\frac{1}{\beta}})$$

$$= 1 - e^{-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (y/n^{\frac{1}{\beta}})^{\beta}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{n}{n}\alpha y^{\beta}}$$

$$1 - e^{-\alpha y^{\beta}}$$

Entonces:

$$W \sim Weibull(\alpha, \beta)$$

Problema 8

Considere los datos los datos del problema 8

Suponga las concentraciones se distribuyen lognormales (μ, σ) construya la verosimilitud y obtenga los estimadores de m´axima verosimilitud, asi como sus varianzas estimadas.

Función de verosimilitud

$$L(\mu, \sigma^2; t) = \prod_{i=1}^{n} f(\mu_i, \mu, \sigma^2)^{\delta_i} F(\mu_i, \mu, \sigma^2)^{1-\delta_i}$$

```
delta <-rep(.01,16)
datos  <-c(rep(.01,12),rep(.02,14),rep(.03,7),rep(.04,6),rep(.05,3),rep(.06,.47))


likehood<-function(theta)
{
  mu<-theta[1]; sigma<-theta[2]
-(sum(plnorm(delta,mu,sigma,log.p =TRUE))+
sum(dlnorm(datos,mu,sigma,log =TRUE)))

}
#Estimados


res<-optim(c(0,1),likehood,hessian =TRUE)
```

```
## Warning in plnorm(delta, mu, sigma, log.p = TRUE): NaNs produced
```

```
## Warning in dlnorm(datos, mu, sigma, log = TRUE): NaNs produced
```

```
cbind(res$par,diag(solve(res$hessian))^.5)
```

```
##             [,1]       [,2]
## [1,] -4.2044716 0.10106231
## [2,]  0.7278615 0.08441115
```