Tarea 1

Antonio, H. F.

2022-09-23

Problema 1

Propiedades de las funciones de riesgo. Supongamos que una variable aleatoria de supervivencia T con densidad una mezcla de dos exponenciales

$$f_T(t) = p\lambda e^{-\lambda t} + (1-p)\mu e^{-\mu t}; \quad t \geq 0 \tag{1}$$

donde $0 < p < 1$ es el parámetro de proporción de la mezcla $0 < \lambda < \mu < 1$ son parámetros de cada exponencial en la mezcla.

a) Encuentre la función de supervivencia $S(t)$.
b) Encuentre la función de riesgo $h(t)$ para T y explique analíticamente o intuitivamente por qué es decreciente en función de su argumento positivo t.

Solución a)

Recordando que $S(t) = P(T > t)$, y que $P(T > t) = 1 - P(T > t)$, además $P(T < t) = F_T(t)$, y finalmete sabemos que $F_T(t) = \int_0^t f_T(t)dt$, entonces,

$$S(t) = 1 - \int_0^t p\lambda e^{-\lambda s} + (1-p)\mu e^{-\mu s} ds$$

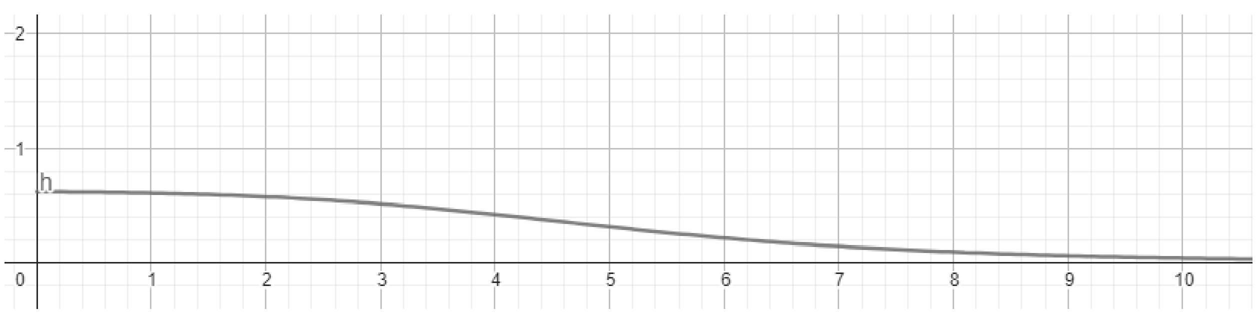
$$S(t) = 1 - [p(1 - e^{-\lambda t}) + (1-p)e^{-\mu t}] \tag{2}$$

Solución b)

Recordando que $h(t) = \frac{f_T(t)}{S(t)}$, tenemos que,

$$h(t) = \frac{p\lambda e^{-\lambda t} + (1-p)\mu e^{-\mu t}}{1 - [p(1 - e^{-\lambda t}) + (1-p)e^{-\mu t}]} \tag{3}$$

Graficando la función de riesgo observamos que es decreciente en todo su dominio.



Problema 2

Sea la variable aleatoria $T = e^y$ que representa el tiempo de supervivencia con distribución en la familia log-localidad-escala

$$P(Y \geq y) = S_0\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \tag{4}$$

a) Derive la función de densidad de probabilidades de T bajo es supuesto que $S_0(\mu) = 1 - \Phi(\mu)$, donde $\Phi(\mu)$ es la función de distribución de una $N(0, 1)$.
b) Derive la función de densidad de probabilidades de T bajo el supuesto que $S_0(\mu) = -e^{\mu}$, use $\alpha = e^{\mu}$ y $\beta = \frac{1}{\sigma}$.

Solución a)

De **(4)** tenemos que,

$$P(Y \leq y) = 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

Y sabemos que si $y = log(t)$,

$$F_T(t) = P\left(U \leq \left(\frac{log(t)-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

Por lo tanto,

$$f_T(t) = \left(\frac{log(t)-\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{1}{\sigma t}\right) \tag{5}$$

La cual es la f.d.p. de una $lN(\mu, \sigma)$.

Solución b)

De **(4)** tenemos que,

$$P(Y \geq y) = 1 - exp\left\{-exp\left(\frac{log(t)-\mu}{\sigma}\right)\right\}$$

Por lo tanto,

$$f_T(t) = \frac{1}{\sigma t} exp\left\{\frac{log(t)-\mu}{\sigma} - e^{\left(\frac{log(t)-\mu}{\sigma}\right)}\right\} \tag{6}$$

La cual es la f.d.p. de una $Weibull(\alpha, \beta)$.

Problema 3

Sea T una variable aleatoria de tiempo de vida, con una función de riesgo en forma de bañera, tiene una distribución exponencial de potencia con función de supervivencia

$$S(t) = e^{1-e^{(\lambda t)^{\alpha}}} \tag{3}$$

a) Si $\alpha = 0.5$ demuestre que la función de riesgo tiene forma de bañera y encuentre el tiempo en que la tasa de riesgo cambia de decreciente a creciente.
b) Si $alpha = 2$, demuestre que la tasa de riesgo de T es monótona y creciente.

Problema 4

Un modelo utilizado en la construcción de **tablas de vida** es el de **tasa de riesgo constante** por partes. Aquí el eje de tiempo se divide en k intervalos, $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i = 1, ..., k$ con $\tau_0 = 0$ y $\tau_k = \infty$. La tasa de riesgo en el i-ésimo intervalo es un avalor constante, θ_i eso es:

$$h(t) = \begin{cases} \theta_1 \quad 0 \leq t < \tau_1 \\ \theta_2 \quad \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ . \\ . \\ . \\ \theta_{k-1} \quad \tau_{k-2} \leq t < \tau_{k-1} \\ \theta_k \quad \tau_{k-1} \leq t \end{cases} \tag{4}$$

a) Obtenga la función de supervivencia $S(t)$.
b) Encuentre la función de vida residual media (mean residual-life function).

Problema 5

En algunas aplicaciones, se incluye parámetro, llamado **tiempo de garantía**. Este parámetro ϕ es el tiempo más pequeño en que podría ocurrir una falla. Considere que en la variable aleatoria tiempo de vida T tiene una función de supervivencia $Weibull$ de tres parámetros de distribución está dada por:

$$S(t) = \begin{cases} e^{-\lambda(t-\phi)^{\alpha}} & si & t \geq \phi \\ 1 & si & t < 0 \end{cases} \tag{5}$$

a) Encuentre la función de riesgo y la función de densidad de la distribución $Weibull$ de tres parámetros.
b) Suponga que el tiempo de supervivencia T sigue una distribución Weibull de tres parámetros con $\alpha = 1$, $\lambda = 0.0075$ y $\phi = 100$. Encuentra la media y la mediana de los tiempos de vida.

Problema 6

Sea T una variable aleatoria de tiempo de vida con distribución $Weibull$ de dos parámetros, con función de supervivencia

$$S(t) = exp(-\lambda t^{\alpha}); \quad \lambda > 0, \alpha > 0, t > 0. \tag{6}$$

Suponga que tenemos una muestra aleatoria, derive la función de verosimiltud para los siguentes casos:

a) Tenemos una m.a, de datos *truncados* por la izquierda (y_{li}, t_i), sujetos a $y_{li} \leq t_i; i = 1, 2, ..., n$ donde y_{li} son tiempos de truncamiento por la izquierda.$(tip : L_i = P(T = t_i | T \geq y_{li}))$
b) Tenemos una m.a, de datos censurados por intervalo $(Li, Ri); i = 1, ..., n.$ $(tip : Li = P(Li \leq Ti \leq Ri))$
c) Datos con truncamiento doble (yli, ti, yri), sujetos a $yli \leq ti \leq yri; i = 1, 2, ..., n.$ $(tip : Li = P(T = ti | Li \leq Ti \leq Ri))$
d) (Caso censura por intervalo y truncamiento). Considere la un muestra de cuatro pacientes cuya edad al momento de su muerte estaba en los intervalos $(90, 120], (110, 15], (80, 100], (70, 75])$ sujeto a que la condición de entrada es de 90 años o mas. $(tip : Li = P(Li \leq Ti \leq Ri | T \geq yli))$

Problema 7

Sea $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ variables aleatorias continuas e independientes de supervivencia y sea Y una nueva variable aleatoria de supervivencia, definida $W = min(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ Si Y_i tiene función de supervivencia $SYi(y) = exp(-\alpha_i y\beta)$ para $\alpha_i > 0, y > 0$, determine la función de riesgo para $n^{1/\beta}W$.

Problema 8

Los datos de benceno presentados en la Tabla anexa ilustran datos censurados por la izquierda tipo 1 con un solo nivel de censura de 2 ppb. Hay N = 36 observaciones, con c = 33 observaciones censuradas y n = 3 no censuradas. Los datos de tricloroetileno presentados en la Tabla tienen un nivel de censuraa de 5 ppb, con N = 24, c = 10, y n= 14. El conjunto de datos del río Skagit contiene 395 mediciones mensuales de concentraciones (mg/l)de amonio (NH3-N) realizadas de enero 1978 hasta diciembre 2010. La Tabla muestra las 60 observaciones realizadas de enero 1978 y diciembre 2010, ordenadas de la más pequeña hasta la más grande, para la cual todas las observaciones están censuradas en 0.01 mg/l. Observe que hay muestras con valores observados de 0.01 mg/l, los cuales serán tratados diferente de las 16 muestras reportadas como < 0.01 mg/l.

Concentración de NH3-N (mg/l)								
< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< .01	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01
< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01	0.01	0.01
0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03
0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
0.04	0.05	0.05	0.05	0.06	0.47			