Série d'Exercices
Tests d'Hypothèses en Médecine

Instructions

Effectuer le test statistique approprié pour chaque exercice : formuler les hypothèses, déterminer le type de test (Z, t-Student, F de Fisher, proportion, apparié), et définir la règle de décision au seuil donné.

Exercice 1 — Test Z sur une moyenne

Une nouvelle molécule est censée réduire la pression artérielle systolique moyenne. Chez $n = 120$ patients traités, la moyenne observée est de 125 mmHg. L'écart-type de la population est connu : $\sigma = 15$ mmHg.
Testez au seuil de 5% si la molécule permet de réduire la pression artérielle par rapport à une moyenne de 130 mmHg.

Exercice 2 — Test t de Student (petit échantillon)

Un nouveau traitement pour le diabète est testé sur 16 patients. Le taux moyen de glycémie est de 92 mg/dL avec un écart-type de 10 mg/dL.
Vérifiez, au seuil de 1%, si le traitement permet d'atteindre un taux moyen inférieur à 100 mg/dL.

Exercice 3 — Test F de Fisher (comparaison de variances)

Deux laboratoires utilisent différentes techniques pour mesurer la concentration sanguine d'un médicament :
- Laboratoire A : $s_A^2 = 4.2$ avec $n = 30$ patients
- Laboratoire B : $s_B^2 = 2.8$ avec $n = 28$ patients
Testez au niveau 5% si les deux méthodes présentent des variances différentes.

Exercice 4 — Test t pour moyennes (échantillons indépendants)

On compare le temps de récupération post-opératoire entre deux groupes :

- Groupe 1 (chirurgie traditionnelle) : $n_1 = 40$, $\bar{x}_1 = 5.2$ jours, $s_1 = 1.1$
- Groupe 2 (chirurgie robotique) : $n_2 = 35$, $\bar{x}_2 = 4.6$ jours, $s_2 = 1.3$

Au seuil de 5%, peut-on conclure que la chirurgie robotique réduit significativement le temps de récupération ?

Exercice 5 — Test Z pour une proportion

Un vaccin est censé protéger au moins 90% des personnes contre un virus. Lors d'une campagne, parmi 500 vaccinés, 440 ne tombent pas malades.
Testez, au seuil de 5%, si le taux de protection est inférieur à 90%.

Exercice 6 — Test F avant comparaison de moyennes

Avant de comparer les moyennes de deux traitements (A et B) :

- Groupe A : $n = 25$, $s^2 = 16$
- Groupe B : $n = 30$, $s^2 = 20$

Testez l'égalité des variances au seuil de 5%.

Exercice 7 — Test t apparié (avant/après traitement)

On mesure le taux de cortisol de 12 patients avant et après un traitement anti-stress.

Patient	**Avant traitement (ng/mL)**	**Après traitement (ng/mL)**
1	18.5	15.2
2	20.1	17.3
3	19.7	16.8
4	22.0	18.5
5	21.5	19.0
6	19.0	16.5
7	23.0	20.1
8	17.5	15.0
9	18.0	15.8
10	20.5	18.0
11	19.8	17.1
12	21.0	18.7

Table 1: Taux de cortisol avant et après traitement anti-stress (en ng/mL)

Tester si le traitement réduit significativement le taux moyen de cortisol.

Exercice 8 — Test t Student (fréquence cardiaque)

Un médicament est censé diminuer la fréquence cardiaque. Un échantillon de 10 patients a une moyenne de 68 bpm, écart-type 5 bpm.
La fréquence normale est de 72 bpm. Testez au seuil de 5%.

Exercice 9 — Test de proportions (traitements A et B)

Deux traitements contre une infection :

- Traitement A : 200 patients, 150 guérisons
- Traitement B : 180 patients, 138 guérisons

Testez au seuil de 5% si les proportions de guérison sont différentes.

Exercice 10 — Test F de Fisher (temps d'hospitalisation)

Comparer la variabilité du temps d'hospitalisation :

- Service 1 : $n_1 = 35$, $s_1^2 = 2.5$
- Service 2 : $n_2 = 30$, $s_2^2 = 3.6$

Testez au seuil de 1% si les variances diffèrent.

Exercice 11 — Test Z pour une proportion

Un programme de dépistage vise 95% de détection. Sur 1000 personnes testées, 920 cas positifs sont correctement détectés.
Testez au seuil de 5% si le taux est inférieur à 95%.

Exercice 12 — Test t apparié (vaccination)

On mesure les taux d'anticorps de 12 patients avant et après vaccination.

Patient	**Avant vaccination (UI/mL)**	**Après vaccination (UI/mL)**
1	45	120
2	50	135
3	48	125
4	46	130
5	47	128
6	44	118
7	49	133
8	46	126
9	45	122
10	47	129
11	48	131
12	46	127

Table 2: Taux d'anticorps avant et après vaccination (en UI/mL)

Tester si la vaccination augmente significativement le taux moyen d'anticorps.

Exercice 13 — Test t pour 2 échantillons indépendants (prise de poids)

Comparer deux régimes alimentaires :

- Régime 1 : 25 patients, $\bar{x}_1 = 2.1$ kg, $s_1 = 0.5$
- Régime 2 : 30 patients, $\bar{x}_2 = 1.7$ kg, $s_2 = 0.6$

Testez si le régime 1 provoque plus de prise de poids que le régime 2.

Exercice 14 — Test Z sur une moyenne

Durée moyenne historique d'une intervention : 120 minutes.
Nouvelle technique : $n = 150$, moyenne 117 minutes, écart-type 20 minutes.
Tester au seuil 5% si la durée est réduite.

Exercice 15 — Test t apparié (glycémie)

Un traitement expérimental est testé sur 8 patients diabétiques.

Patient	**Avant traitement (mg/dL)**	**Après traitement (mg/dL)**
1	165	150
2	180	160
3	155	142
4	170	158
5	160	150
6	175	165
7	185	170
8	172	160

Table 3: Glycémie avant et après traitement expérimental (en mg/dL)

Comparer glycémie avant et après traitement pour tester une réduction significative.

Solutions détaillées des exercices de tests d'hypothèses

Exercice 1 — Test Z sur une moyenne

- **Données :**

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 130 \text{ mmHg} \\ n &= 120 \text{ patients} \\ \bar{x} &= 125 \text{ mmHg} \\ \sigma &= 15 \text{ mmHg} \\ \alpha &= 5\% \end{aligned}$$

- **Hypothèses :**

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu \geq 130 \text{ mmHg} \\ H_1 &: \mu < 130 \text{ mmHg} \end{aligned}$$

- **Test :** Test Z unilatéral à gauche
- **Calcul de la statistique Z :**

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{125 - 130}{15/\sqrt{120}} \approx -3.65$$

- **Règle de décision :** Rejeter H_0 si $Z < -z_{5\%} = -1.645$
- **Conclusion :** On rejette H_0 ($-3.65 < -1.645$). La molécule réduit significativement la pression artérielle ($p < 0.05$).

Exercice 2 — Test t de Student

— **Données :**

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= 100 \text{ mg/dL} \\
n &= 16 \\
\bar{x} &= 92 \text{ mg/dL} \\
s &= 10 \text{ mg/dL} \\
\alpha &= 1\%
\end{aligned}$$

— **Hypothèses :**

$$\begin{aligned}
H_0 &: \mu \geq 100 \text{ mg/dL} \\
H_1 &: \mu < 100 \text{ mg/dL}
\end{aligned}$$

— **Test :** Test t unilatéral à gauche

— **Calcul de t :**

$$t = \frac{92 - 100}{10/4} = -3.2 \quad \text{avec} \quad \text{ddl} = 15$$

— **Valeur critique :** $t_{15;0.01} \approx -2.602$

— **Conclusion :** On rejette H_0 ($-3.2 < -2.602$). Le traitement réduit significativement la glycémie ($p < 0.01$).

Exercice 3 — Test F de Fisher

— **Données :**

$$\begin{aligned}
s_A^2 &= 4.2,\ n_A = 30 \\
s_B^2 &= 2.8,\ n_B = 28 \\
\alpha &= 5\%
\end{aligned}$$

— **Hypothèses :**

$$\begin{aligned}
H_0 &: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\
H_1 &: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2
\end{aligned}$$

— **Test :** Test F bilatéral

- **Calcul de F :**

$$F = \frac{4.2}{2.8} = 1.5 \quad \text{avec} \quad \text{ddl}_1 = 29,\ \text{ddl}_2 = 27$$

- **Valeurs critiques :**

$$F_{29,27;0.025} \approx 2.05 \quad \text{et} \quad F_{29,27;0.975} \approx 0.493$$

- **Conclusion :** On ne rejette pas H_0 ($0.493 < 1.5 < 2.05$). Pas de différence significative entre les variances ($p > 0.05$).

Exercice 4 — Test t pour échantillons indépendants

- **Données :**

$$\begin{aligned} &\text{Groupe 1} : n_1 = 40,\ \bar{x}_1 = 5.2,\ s_1 = 1.1 \\ &\text{Groupe 2} : n_2 = 35,\ \bar{x}_2 = 4.6,\ s_2 = 1.3 \\ &\alpha = 5\% \end{aligned}$$

- **Hypothèses :**

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 \leq \mu_2 \\ H_1 &: \mu_1 > \mu_2 \end{aligned}$$

- **Test :** Test t unilatéral à droite
- **Variance commune :**

$$s_p^2 = \frac{39 \times 1.21 + 34 \times 1.69}{73} \approx 1.45$$

- **Calcul de t :**

$$t = \frac{5.2 - 4.6}{\sqrt{1.45(1/40 + 1/35)}} \approx 2.17 \quad \text{avec} \quad \text{ddl} = 73$$

- **Valeur critique :** $t_{73;0.05} \approx 1.666$
- **Conclusion :** On rejette H_0 ($2.17 > 1.666$). La chirurgie robotique réduit significativement le temps de récupération ($p < 0.05$).

Exercice 5 — Test Z pour une proportion

— **Données :**

$$p_0 = 0.90$$
$$n = 500$$
$$x = 440$$
$$\alpha = 5\%$$

— **Hypothèses :**

$$H_0 : p \geq 0.90$$
$$H_1 : p < 0.90$$

— **Test :** Test Z unilatéral à gauche
— **Proportion observée :**

$$\hat{p} = \frac{440}{500} = 0.88$$

— **Calcul de Z :**

$$Z = \frac{0.88 - 0.90}{\sqrt{\frac{0.90 \times 0.10}{500}}} \approx -1.49$$

— **Valeur critique :** $-z_{0.05} = -1.645$
— **Conclusion :** On ne rejette pas H_0 ($-1.49 > -1.645$). Le taux de protection n'est pas significativement inférieur à 90% ($p > 0.05$).

Exercice 6 — Test F avant comparaison de moyennes

— **Données :**

$$\text{Groupe A} : n_A = 25,\ s_A^2 = 16$$
$$\text{Groupe B} : n_B = 30,\ s_B^2 = 20$$
$$\alpha = 5\%$$

— **Hypothèses :**

$$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$$
$$H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$$

- **Test :** Test F bilatéral
- **Calcul de F :**

$$F = \frac{s_A^2}{s_B^2} = \frac{16}{20} = 0.8$$

- **Degrés de liberté :**

$$\text{ddl}_1 = 24, \ \text{ddl}_2 = 29$$

- **Valeurs critiques :**

$$F_{24,29;0.025} \approx 2.15$$

$$F_{24,29;0.975} = \frac{1}{F_{29,24;0.025}} \approx \frac{1}{2.14} \approx 0.467$$

- **Conclusion :** On ne rejette pas H_0 ($0.467 < 0.8 < 2.15$). Les variances peuvent être considérées comme égales ($p > 0.05$).

Exercice 7 — Test t apparié

- **Données :** 12 patients (voir tableau)

$$\alpha = 5\%$$
$$\text{Différences moyennes}(\bar{d}) = 2.4 \text{ ng/mL}$$
$$\text{Écart-type des différences}(s_d) = 0.9 \text{ ng/mL}$$

- **Hypothèses :**

$$H_0 : \mu_d \leq 0$$
$$H_1 : \mu_d > 0$$

- **Test :** Test t apparié unilatéral à droite
- **Calcul de t :**

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{2.4}{0.9/\sqrt{12}} \approx 9.24$$

- **Degrés de liberté :** ddl = 11
- **Valeur critique :** $t_{11;0.05} \approx 1.796$
- **Conclusion :** On rejette H_0 ($9.24 > 1.796$). Le traitement réduit significativement le taux de cortisol ($p < 0.05$).

Exercice 8 — Test t Student

- **Données :**

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 72 \text{ bpm} \\ n &= 10 \\ \bar{x} &= 68 \text{ bpm} \\ s &= 5 \text{ bpm} \\ \alpha &= 5\% \end{aligned}$$

- **Hypothèses :**

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu \geq 72 \\ H_1 &: \mu < 72 \end{aligned}$$

- **Test :** Test t unilatéral à gauche
- **Calcul de t :**

$$t = \frac{68 - 72}{5/\sqrt{10}} \approx -2.53$$

- **Degrés de liberté :** ddl $= 9$
- **Valeur critique :** $-t_{9;0.05} = -1.833$
- **Conclusion :** On rejette H_0 ($-2.53 < -1.833$). Le médicament réduit significativement la fréquence cardiaque ($p < 0.05$).

Exercice 9 — Test de proportions

- **Données :**

$$\begin{aligned} \text{Traitement A} &: n_A = 200,\ x_A = 150 \\ \text{Traitement B} &: n_B = 180,\ x_B = 138 \\ \alpha &= 5\% \end{aligned}$$

- **Hypothèses :**

$$\begin{aligned} H_0 &: p_A = p_B \\ H_1 &: p_A \neq p_B \end{aligned}$$

- **Test :** Test Z pour deux proportions

— **Proportions observées :**

$$\hat{p}_A = \frac{150}{200} = 0.75$$

$$\hat{p}_B = \frac{138}{180} = 0.767$$

— **Proportion poolée :**

$$\hat{p} = \frac{150 + 138}{200 + 180} \approx 0.758$$

— **Calcul de Z :**

$$Z = \frac{0.75 - 0.767}{\sqrt{0.758 \times 0.242 \times (\frac{1}{200} + \frac{1}{180})}} \approx -0.46$$

— **Valeurs critiques :** $\pm z_{0.025} = \pm 1.96$

— **Conclusion :** On ne rejette pas H_0 ($-0.46 \in [-1.96, 1.96]$). Pas de différence significative entre les taux de guérison ($p > 0.05$).

Exercice 10 — Test F de Fisher (temps d'hospitalisation)

— **Données :**

$$\begin{gathered}\text{Service 1} : n_1 = 35,\ s_1^2 = 2.5 \\ \text{Service 2} : n_2 = 30,\ s_2^2 = 3.6 \\ \alpha = 1\%\end{gathered}$$

— **Hypothèses :**

$$\begin{gathered}H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2\end{gathered}$$

— **Test :** Test F bilatéral

— **Calcul de F :**

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{3.6}{2.5} = 1.44$$

— **Degrés de liberté :**

$$\text{ddl}_1 = 29,\ \text{ddl}_2 = 34$$

— **Valeurs critiques :**

$$F_{29,34;0.005} \approx 2.42$$

$$F_{29,34;0.995} = \frac{1}{F_{34,29;0.005}} \approx \frac{1}{2.45} \approx 0.408$$

— **Conclusion :** On ne rejette pas H_0 $(0.408 < 1.44 < 2.42)$. Pas de différence significative entre les variances des temps d'hospitalisation $(p > 0.01)$.

Exercice 11 — Test Z pour une proportion

— **Données :**

$$\begin{aligned} p_0 &= 0.95 \\ n &= 1000 \\ x &= 920 \\ \alpha &= 5\% \end{aligned}$$

— **Hypothèses :**

$$\begin{aligned} H_0 &: p \geq 0.95 \\ H_1 &: p < 0.95 \end{aligned}$$

— **Test :** Test Z unilatéral à gauche

— **Proportion observée :**

$$\hat{p} = \frac{920}{1000} = 0.92$$

— **Calcul de Z :**

$$Z = \frac{0.92 - 0.95}{\sqrt{\frac{0.95 \times 0.05}{1000}}} \approx -4.36$$

— **Valeur critique :** $-z_{0.05} = -1.645$

— **Conclusion :** On rejette H_0 $(-4.36 < -1.645)$. Le taux de détection est significativement inférieur à 95% $(p < 0.05)$.

Exercice 12 — Test t apparié (vaccination)

- **Données :** 12 patients (différences moyennes)

$$\bar{d} = 8.2 \text{ UI/mL}$$
$$s_d = 2.1 \text{ UI/mL}$$
$$\alpha = 5\%$$

- **Hypothèses :**

$$H_0 : \mu_d \leq 0$$
$$H_1 : \mu_d > 0$$

- **Test :** Test t apparié unilatéral à droite
- **Calcul de t :**

$$t = \frac{8.2}{2.1/\sqrt{12}} \approx 13.52$$

- **Degrés de liberté :** ddl = 11
- **Valeur critique :** $t_{11;0.05} \approx 1.796$
- **Conclusion :** On rejette H_0 ($13.52 > 1.796$). La vaccination augmente significativement le taux d'anticorps ($p < 0.05$).

Exercice 13 — Test t pour échantillons indépendants

- **Données :**

$$\text{Régime 1} : n_1 = 25,\ \bar{x}_1 = 2.1 \text{ kg},\ s_1 = 0.5$$
$$\text{Régime 2} : n_2 = 30,\ \bar{x}_2 = 1.7 \text{ kg},\ s_2 = 0.6$$
$$\alpha = 5\%$$

- **Hypothèses :**

$$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

- **Test :** Test t unilatéral à droite
- **Variance commune :**

$$s_p^2 = \frac{24 \times 0.25 + 29 \times 0.36}{53} \approx 0.309$$

- **Calcul de t :**
$$t = \frac{2.1 - 1.7}{\sqrt{0.309 \times (\frac{1}{25} + \frac{1}{30})}} \approx 2.72$$
- **Degrés de liberté :** ddl = 53
- **Valeur critique :** $t_{53;0.05} \approx 1.674$
- **Conclusion :** On rejette H_0 ($2.72 > 1.674$). Le régime 1 provoque significativement plus de prise de poids que le régime 2 ($p < 0.05$).

Exercice 14 — Test Z sur une moyenne

- **Données :**
$$\begin{aligned} \mu_0 &= 120 \text{ minutes} \\ n &= 150 \\ \bar{x} &= 117 \text{ minutes} \\ s &= 20 \text{ minutes} \\ \alpha &= 5\% \end{aligned}$$
- **Hypothèses :**
$$\begin{aligned} H_0 &: \mu \geq 120 \\ H_1 &: \mu < 120 \end{aligned}$$
- **Test :** Test Z unilatéral à gauche (grand échantillon)
- **Calcul de Z :**
$$Z = \frac{117 - 120}{20/\sqrt{150}} \approx -1.84$$
- **Valeur critique :** $-z_{0.05} = -1.645$
- **Conclusion :** On rejette H_0 ($-1.84 < -1.645$). La nouvelle technique réduit significativement la durée d'intervention ($p < 0.05$).

Exercice 15 — Test t apparié (glycémie)

- **Données :** 8 patients (voir tableau)
$$\begin{aligned} \bar{d} &= 12.5 \text{ mg/dL} \\ s_d &= 5.2 \text{ mg/dL} \\ \alpha &= 5\% \end{aligned}$$

- **Hypothèses :**

$$H_0 : \mu_d \leq 0$$
$$H_1 : \mu_d > 0$$

- **Test :** Test t apparié unilatéral à droite
- **Calcul de t :**
$$t = \frac{12.5}{5.2/\sqrt{8}} \approx 6.80$$
- **Degrés de liberté :** ddl $= 7$
- **Valeur critique :** $t_{7;0.05} \approx 1.895$
- **Conclusion :** On rejette H_0 ($6.80 > 1.895$). Le traitement réduit significativement la glycémie ($p < 0.05$).