Lenguajes Formales, Autómatas y Computabilidad
Preguntas de examen final
Diciembre 2024

Ejercicio 1. Dar un algoritmo que decida si dos expresiones regulares denotan el mismo lenguaje. Justificar la correctitud.

Ejercicio 2. Dar dos algoritmos distintos para determinar si el lenguaje aceptado por un autómata finito dado es el conjunto de todas las cadenas del alfabeto. Jstificar cada uno.

Ejercicio 3. Dar un algoritmo que determine si un lenguaje regular dado es infinito. Justificar.

Ejercicio 4. ¿Cuántos autómatas finitos deterministas con dos estados pueden construirse sobre el alfabeto $\{0, 1\}$?

Ejercicio 5. Sean L1 y L2 lenguajes regulares. Hacer un AFD que reconoce el producto cartesiano de L1 y L2.

Ejercicio 6.

1. Para cada AF hay infinitos AFD que reconocen el mismo lenguaje (Verdadero)
2. Si L es libre de contexto, todo subconjunto de L es libre de contexto (Falso)
3. El Lema de Pumping para lenguajes libres de contexto implica que si un lenguaje se puede bombear entonces es regular o libre de contexto. (Falso)
4. Los autómatas finitos determinísticos reconocen una cadena de longitud n en exactamente n transiciones. (Verdadero)
5. Los autómatas de pila determinísticos reconocen una cadena de longitud n en exactamente n transiciones. (Falso)
6. Sea M un AFD y sea M^R el autómata que resulta de revertir función de transición. $L(M)$ intersección $L(M^R)$ es regular. (Verdadero)

Ejercicio 7. Dado APD P $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, dar un algoritmo que decida si $L(P) = \Sigma^*$. Justificar la correctitud.

Ejercicio 8. Indicar V o F y justificar. Es decidible que

1. La intersección de dos conjuntos c.e. es un conjunto c.e. (Verdadero)
2. Si Halt fuera computable entonces la complejojdad de Kolmogorov $K : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$K(s) = \min\{\#P : \Psi^{(1)}(P) = s\}$$

   seria computable.
   (Verdadero)
3. La pertenecia de una palabra a un lenguaje computable es computable. (Verdadero)
4. clausura de kleene de un lenguaje c.e. es c.e. (Verdadero)
5. clausura de kleene de lenguaje computable es computable (Verdadero)
6. La reversa de un lenguaje computable es computable. (Verdadero)
7. La reversa de un lenguaje c.e es c.e. (Verdadero)
8. Todo conjunto infinito c.e. tiene un subconjunto infinito computable (Verdadero)

Ejercicio 9. Deciir Verdadero o Falso:

1. Toda función total de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ es computable.
2. El conjunto de funciones parcialmente computables de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ es c.e.

Ejercicio 10. Sea APD $P = (Q, \Sigma, \delta, \Gamma, q_0, F)$ y AP $S = (Q', \Sigma', \delta', \Gamma, q'_0, F')$.
Indicar V o F y justificar.

1. L(P) union L(S) es libre de contexto
2. L(P) interseccion es libre de contexto
3. Sea $G = (V_N, V_T, P, S)$) una gramática libre de contexto que no es recursiva a izquierda. Entonces si $wenL(G)$, su árbol de derivación tiene altura menor que $(|w| + 1)(|V_N| + 1)$.
4. Para todo AP hay un APD que reconoce el mismo lenguaje
5. clausura de Kleene de un lenguaje regular es regular
6. clausura de Kleene de un lenguaje libre de contexto deterministico es libre de contexto determinsitico
7. clausura de Kleene de un lenguaje libre de contexto es libre de contexto
8. Es decidible si dos AFs reconocen el mismo lenguaje

Ejercicio 11. Dar un algoritmo que codeterminice un automata finito.

Ejercicio 12. Dado un autómata finito determnístico $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_0, F_A)$ y dado autómata de pila determinístico $P = (Q_P, \Sigma, \Gamma, \delta_P, p_0, F_P)$ dar un algoritmo que decida si el lenguaje $\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(P)$ es finito. Justificar la correctitud.

Ejercicio 13. Sea Σ un alfabeto. Dada una gramática libre de contexto $G = (V_N, V_T, P, S)$ que no es recursiva a izquierda y una palabra $w \in V_T^*$, dar un algoritmo que explore los árboles de derivación de G y para determinar si $w \in \mathcal{L}(G)$ o no. Justificar la correctitud.

Ejercicio 14. Un autómata contador es un autómata de pila con un alfabeto de pila de solamente dos símbolos, el inicial (que representa el cero), y el que se usa para contar en unario. Cada transición incrementa el contador en uno , o lo decrementa en uno, o lo deja igual. En cada transición se puede consultar si el contador es cero o no (tope de la pila).

Demostrar Verdadero o Falso

a. Si un lenguaje es reconocible por un autómata contador entonces el lenguaje complemento también. (Falso)

b. Si dos lenguaje L_A y L_B reconocibles por autómatas contadores entonces el lenguaje de su union $L_A \cup L_B$ también. (Verdadero)

c Si dos lenguaje L_A y L_B reconocibles por un autómatas contadores entonces el lenguaje de su intersección $L_A \cap L_B$ también. (Falso)

Ayuda: Considerar como se demuestran y cómo se refultan las propiedades de clausura de los lenguajes libres de contexto,

Ejercicio 15. Dado R un lenguaje regular, y dado L un lenguaje libre de contexto deterministico, Dar un algoritmo que decide si L=R.

Respuesta: Teorema 10.6 Hopcroft 1976

Ejercicio 16. Dado R un lenguaje Regular, y dado L un lenguaje libre de contexto determinístico, ¿Es decidible si R está incluido en L ?

Respuesta: Teorema 10.6 Hopcroft 1976

Ejercicio 17. Un autómata de cola es un autómata posiblemente no determinístico similar a un autómata de pila pero tiene una cola en vez de una pila. Formalmente un autómata de cola es $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ donde
Q es el conjunto de estados
Σ es el alfabeto de la cinta entrada
Γ el el alfabeto de cola,

$\delta : Q \times \Sigma \cup \{\lambda\} \times \Gamma \cup \{\lambda\} \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \cup \lambda)$ es la función de transición
$q_0 \in Q$ es el estado incial.
$F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.
Por ejemplo $\delta(q_1, a, b) = \{(q_2, c), (q_3, d)\}$ dice que el estado 1_1 si lee a de la entrada y b está primero en la cola, entonces b sale de la cola , el autómata pasa al estado q_2, y pone c último en la cola.

Demostrar que los autómatas de cola tienen mayor poder expresivo que los autómatas de pila.

Ayuda: dar un lenguaje que no es libre de contexto.

Ejercicio 18. Un un autómata de pila no determinístico, $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ es un contador si $\Gamma = \{Z_0, I\}$ el símbolo Z_0 representa el valor del cero y e I representa el valor 1. En cada transición el autómata solamente puede consultar si el contador es 0 o no. El contador no puede volverse negativo, por lo que no puede restar 1 de un contador que actualmente es 0.
Demostrar que:

a. Todos los lenguajes reconocibles por autómatas finitos son reconocibles por autómatas contadores.

b. No todos los lenguajes reconocibles por un autómata contador son reconocibles por un autómata finito.