BFS e cammini minimi

Si consideri un grafo non diretto $G = (V, E)$ e si consideri la visita in ampiezza (Breadth First Search o BFS) a partire da un vertice $v \in V$. Si riporta un possibile pseudo-codice della BFS per comodità:

```
Algoritmo BFS(G, v) {
    // Sia Q una coda inizialmente vuota
    label v as DISCOVERED;
    Q.enqueue(v);
    while (!Q.isEmpty()) {
        w = Q.dequeue();
        <visita w> // Qualunque cosa ciò significhi
        for (u in G.adjacentEdges(w))
            if (u is not labeled as DISCOVERED) {
                label u as DISCOVERED;
                u.parent = w;
                Q.enqueue(u);
            }
    }
}
```

Sia T l'albero di visita della BFS a partire dal nodo v. Dimostrare che, per ogni vertice $u \in V$, il cammino che porta da u a v in T è un percorso di lunghezza minima (nel senso del numero di archi attraversati) tra u e v in G.

Suggerimento. Si assegni a ogni vertice dell'albero BFS l'etichetta che corrisponde al suo livello (0 per la radice v) e si definisca un'induzione rispetto al livello dei vertici.

Risposta. Questo è il caso di un'affermazione del tutto intuitiva, la cui dimostrazione formale richiede tuttavia un minimo sforzo.

Sia T l'albero della BFS, la cui radice è ovviamente v. Una cosa da tenere sempre presente è che T descrive l'ordine in cui i vertici sono stati raggiunti a partire da v. In particolare, gli archi di T sono di tipo *discovery*, per cui la presenza di un arco (w, u) (con w più vicino alla radice di u) indica che u è stato raggiunto a partire da w. Fatte tali premesse, dato un vertice u, il suo *livello* $\ell(u)$ è il numero di archi che lo separano da v in T, ossia la lunghezza del cammino da u a v su T. Assegniamo a ciascun vertice u un'etichetta intera pari al suo livello. Quindi, $\ell(u) = i$ se u è un vertice di livello i in T. Ovviamente, abbiamo $\ell(v) = 0$. Indichiamo poi con $d(u)$ la distanza del vertice u da v *nel grafo* G, intesa come il *minimo* numero di archi per raggiungere v a partire da u (o viceversa, visto che il grafo è indiretto). Dimostrare quanto richiesto equivale a dimostrare che $d(u) = \ell(u)$ per ogni $u \in V$.

Proposizione. Per ogni i, *tutti e soli* i vertici a distanza i da v hanno livello i in T:

1. **Caso base.** L'affermazione è chiaramente vera per $i = 0$, in quanto l'unico vertice a distanza 0 da v è v stesso e il suo livello è 0. E' anche vera per $i = 1$, in quanto i vertici di livello 1 sono tutti e soli i nodi adiacenti a v.

2. **Passo induttivo.** Il passo induttivo viene dimostrato per contraddizione. Supponiamo che l'affermazione sia vera per tutti i livelli $0, 1, \ldots, i-1$ e falsa per qualche $i \geq 2$. Esiste quindi un nodo u, tale che $\ell(u) = i$ ma $d(u) = k < i$. Si noti che $d(u) > i$ non è possibile, in quanto $\ell(u)$ corrisponde alla lunghezza di un cammino da v a u in T (e dunque in G). Esisterà dunque un cammino di lunghezza k che porta da v a u nel grafo G e nessun cammino di lunghezza minore di k. Sia w il predecessore di u su questo cammino. Chiaramente, w ha distanza $k-1$ da v (altrimenti avremmo $d(u) < k$) e, per l'ipotesi induttiva, dobbiamo avere $\ell(w) = k-1$. Sia ora z il predecessore di u, stavolta lungo il cammino che porta da v a u sull'albero T. Chiaramente, $\ell(z) = i-1$, in quanto $\ell(u) = i$. Ciò implica che $\ell(w) < \ell(z)$ e dunque il nodo w è stato visitato e inserito nella coda Q prima di z. Ma ciò contraddice l'ipotesi che $\ell(u) = i$, in quanto durante la visita di w, u sarebbe stato individuato come nodo adiacente a w e quindi il suo livello non potrebbe essere maggiore di $\ell(w) + 1 = k < i$. Tale contraddizione conclude l'induzione e la prova.