

Fondamenti di Comunicazioni

Corso: Fondamenti di comunicazioni e Internet (canale I e II)
E Telecomunicazioni

Argomento 6: Trasformata di Fourier Continua, filtri

Tiziana Cattai
email: tiziana.cattai@uniroma1.it



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Trasformata di Fourier Continua

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trasformata di Fourier} \\ \text{FT : } X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = FT\{x(t)\}, \quad -\infty < f < +\infty \quad \text{ANALISI} \\ \\ \text{Antitrasformata di Fourier} \\ \text{FT}^{-1} : x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = FT^{-1}\{X(f)\}, \quad -\infty < t < +\infty \quad \text{SINTESI} \end{array} \right.$$

Il segnale $x(t)$ può essere scritto come l'integrale di infinite componenti armoniche (dall'esponenziale, che può essere scritto in funzione di seno e coseno)

<https://demonstrations.wolfram.com/FourierTransformPairs/>

Trasformata di Fourier Continua

1) $x(t)$ Segnale reale

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt$$

La sua trasformata di Fourier è a simmetria Hermitiana

$$\begin{array}{ll} R(f) = R(-f) & I(f) = -I(-f) \\ M(f) = M(-f) & \varphi(f) = -\varphi(-f) \end{array} \quad \Rightarrow \quad X(f) = X^*(-f)$$

2) Se $x(t)$ è a simmetria Hermitiana ($x(t)=x^*(-t)$)

3) Se $x(t)$ è a reale e pari ($x(t)=x(-t)$), la sua trasformata di Fourier $X(f)$ è reale e pari

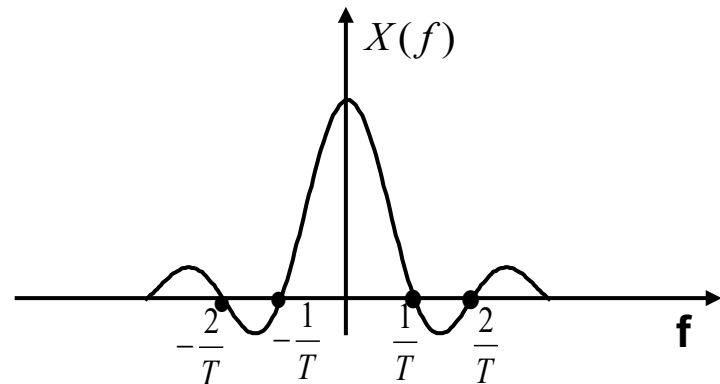
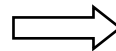
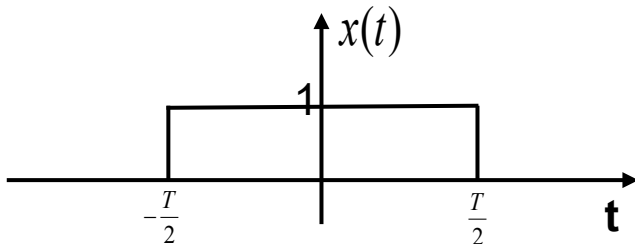
Trasformata di Fourier Continua

Trasformazione di una rect

$$x(t) = \text{rect}_T(t)$$

$$X(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \bigg|_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} - e^{+j2\pi f \frac{T}{2}}}{-j2\pi f} = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T \text{sinc}(\pi f T)$$

essendo $\frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = \sin(z)$



Nota: La $\text{rect}(t)$ è reale e pari, la sua trasformata anche

Proprietà

Linearità

$$FT(ax(t) + by(t)) = aX(f) + bY(f)$$
$$FT^{-1}(aX(f) + bY(f)) = ax(t) + by(t)$$

Dualità Data una coppia trasformata antitrasformata, è possibile individuare una seconda coppia in cui il ruolo della trasformata e dell'antitrasformata risultano scambiati. In particolare, il segnale x è scritto in funzione della frequenza f e la trasformata X è scritta in funzione di t :

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \Leftrightarrow X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

Per $x(t)$ reale e pari:

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \Leftrightarrow X(t) \leftrightarrow x(f)$$

Proprietà

Scalatura Data una costante $\alpha \neq 0$, e la FT del segnale $x(t)=X(f)$, allora risulta

$$FT\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} X(f/\alpha)$$

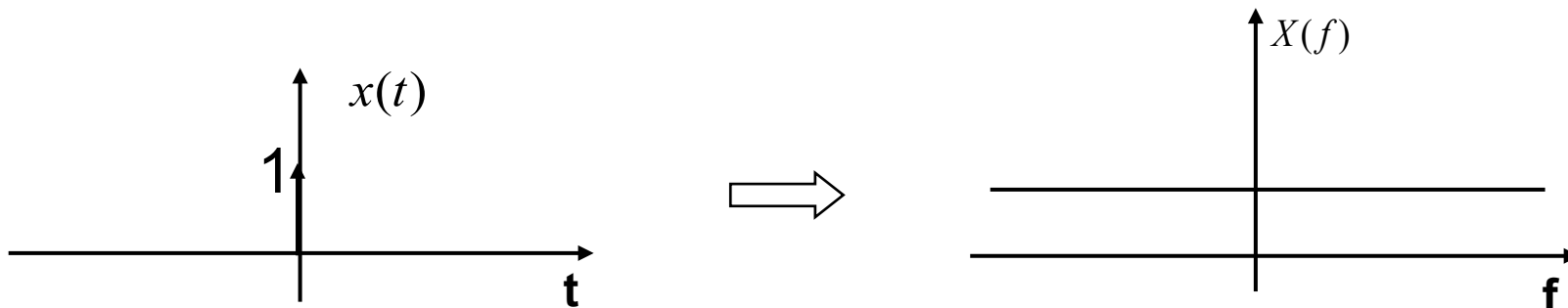
Traslazione nel tempo e nella frequenza Dati $x(t)$ e $X(f)$, una coppia FT e FT⁻¹ e due valori t_0 e f_0 . è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} x(t)e^{j2\pi f_0 t} &\leftrightarrow X(f - f_0) \\ x(t - t_0) &\leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_0} \end{aligned}$$

Trasformata di Fourier Continua

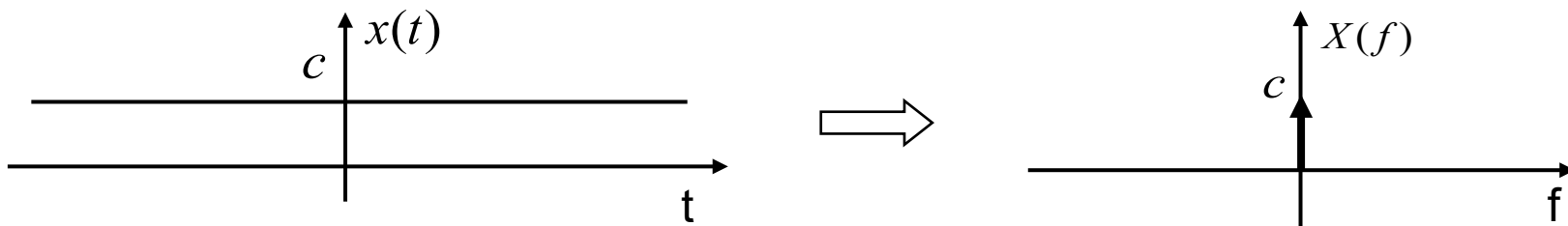
Trasformata di un impulso

$$x(t) = \delta(t) \longrightarrow X(f) = 1$$



Trasformata di una costante

$$x(t) = c \longrightarrow X(f) = c\delta(f)$$



Nota: $x(t)$ è reale e pari, la sua trasformata anche

Trasformata di Fourier Continua

Trasformata di un esponenziale

La trasformata di Fourier di un esponenziale ad una frequenza f_0 è un impulso centrato in f_0 :

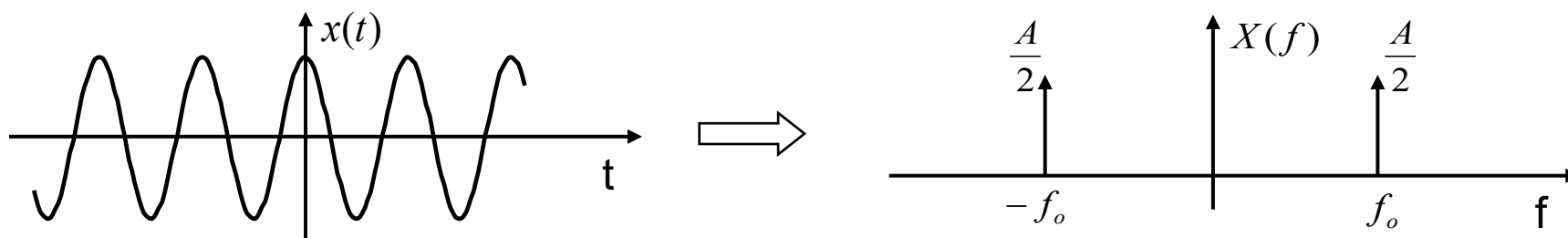
$$e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - f_0)$$
$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi t_0 f}$$

Trasformata di Fourier Continua

Trasformata di un coseno

$$x(t) = A \cos(2\pi f_o t)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cos(2\pi f_o t) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{A}{2} \delta(f - f_o) + \frac{A}{2} \delta(f + f_o)$$



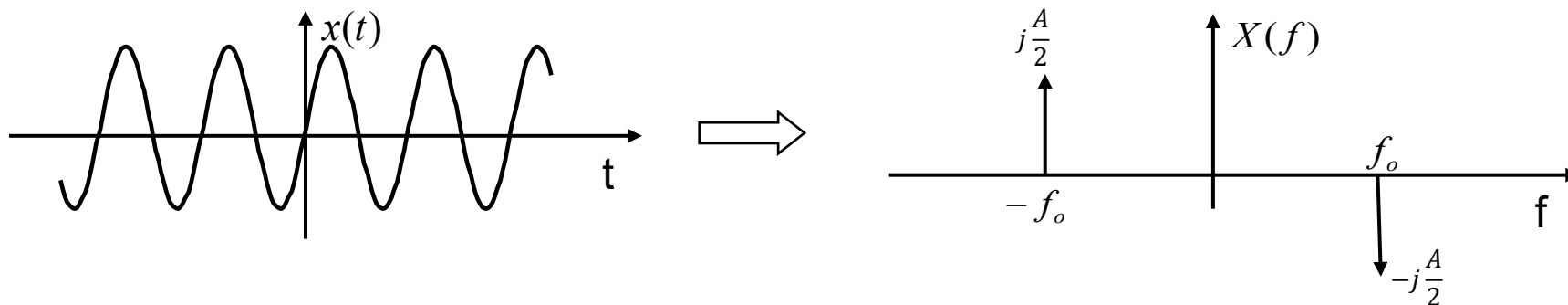
Notare la simmetria

Trasformata di Fourier Continua

Trasformata di un seno

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$$

$$X(f) = A \sin(2\pi f_0 t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \sin(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt = -j \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + j \frac{A}{2} \delta(f + f_0)$$



Notare la simmetria

Trasformata di Fourier di un segnale periodico

Dato un segnale periodico $x(t)$ con periodo T (e $F=1/T$). Indichiamo con $f_n = nF$ le frequenze multiple della frequenza F : armoniche.

È possibile scrivere il segnale $x(t)$ nella seguente forma:

$$x(t) = \sum_n X_n e^{j2\pi f_n t} \quad \text{SERIE DI FOURIER}$$

$x(t)$ si può scrivere come somma pesata (combinazione lineare) di infiniti contributi esponenziali alle frequenze corrispondenti alle armoniche. Gli esponenziali sono scalati per X_n , i coefficienti della serie di Fourier:

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

Trasformata di Fourier di un segnale periodico

Calcoliamo la trasformata di Fourier del segnale periodico $x(t)$:

$$\begin{aligned} FT\{x(t)\} &= FT\left\{\sum_n X_n e^{j2\pi f_n t}\right\} \\ &= \sum_n X_n FT\{e^{j2\pi f_n t}\} = \sum_n X_n \delta(f - f_n) = \sum_n X_n \delta(f - nF) = \\ \rightarrow X(f) &= \sum_n X_n \delta(f - nF) \end{aligned}$$

Trasformata di Fourier di un segnale periodico

Consideriamo il segnale periodico $x(t)$ treno di impulsi :

$$x(t) = \Gamma_T(t) = \sum_k \delta(t - kT)$$

Bisogna calcolare i coefficienti X_n per calcolare successivamente la FT.

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \Gamma_T(t) e^{-j2\pi f_n t} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_k \delta(t - kT) e^{-j2\pi f_n t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j2\pi f_n t} dt = \frac{1}{T} = F \end{aligned}$$

Trasformata di Fourier di un segnale periodico

$$\begin{aligned} FT\{\Gamma_T(t)\} &= FT\left\{\sum_k \delta(t - kT)\right\} \\ &= \sum_n X_n \delta(f - nF) = F \sum_n \delta(f - nF) = F \cdot \Gamma_F(f) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \Gamma_T(t) \leftrightarrow F\Gamma_F(f)$$

Un'altra possibilità è ricavare direttamente il calcolo della trasformata di Fourier del treno di impulsi:

$$FT\{\Gamma_T(t)\} = FT\left\{\sum_k \delta(t - kT)\right\} = \sum_k e^{-j2\pi nFt}$$

Trasformata di Fourier Continua

Dall'uguaglianza delle due espressioni per la trasformata di Fourier del treno di impulsi troviamo **la formula di Poisson**

$$\rightarrow FT\{\Gamma_T(t)\} = F \sum_n \delta(f - nF) = \sum_k e^{-j2\pi nFt}$$

Proprietà della convoluzione e prodotto

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f)Y(f)$$

$$x(t)y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$$

Altre trasformate di Fourier

Abbiamo già visto che $rect(t) * rect(t) = tri(t)$
 $FT\{tri(t)\} = FT\{rect(t) * rect(t)\}$
 $= FT\{rect(t)\} \cdot FT\{rect(t)\} = sinc^2(f)$
 $\rightarrow tri(t) \leftrightarrow sinc^2(f)$

E (per dualità): $sinc^2(t) \leftrightarrow tri(f)$

Esercizi

- 1) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$ e graficarla
- 2) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = \delta(t - 1000)$ e graficarla
- 3) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = \text{sinc}(t + 1)$ e graficarla
- 4) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = \text{sinc}(2t)$ e graficarla
- 5) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = \sin(2\pi 5t)$ e graficarla
- 6) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = \cos(2\pi 3t)$ e graficarla

Banda

La **banda** di un segnale $x(t)$ è definita come l'insieme delle frequenze per cui $X(f)$ è diverso da zero.

La **larghezza di banda** (bandwidth) W è la misura della banda

Esempio:

$$x(t) = \text{sinc}(t)$$

$$x(t) = \text{rect}(t)$$

$$x(t) = \delta(t)$$

$$x(t) = 1$$

Altri esempi:

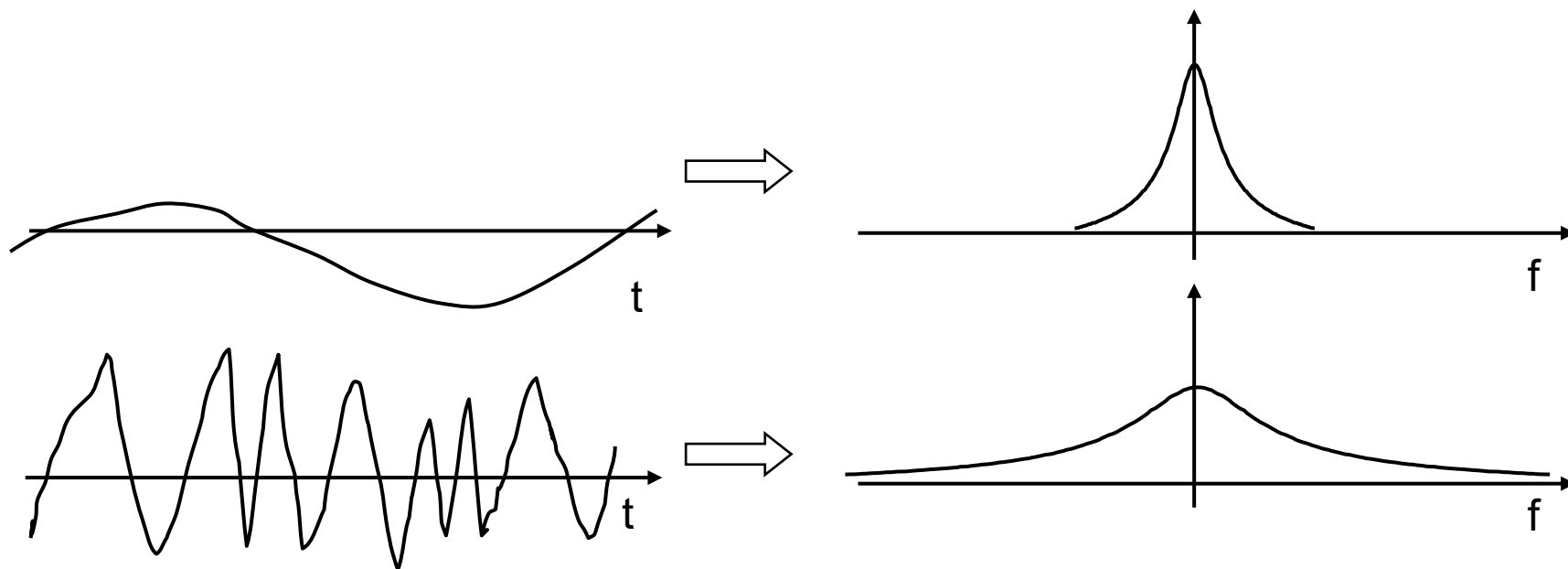
larghezza di banda di un segnale ECG $\sim 100 \text{ Hz}$

Larghezza di banda di un segnale EEG $\sim 10 \text{ Hz}$

Voce $\sim 4 \text{ kHz}$

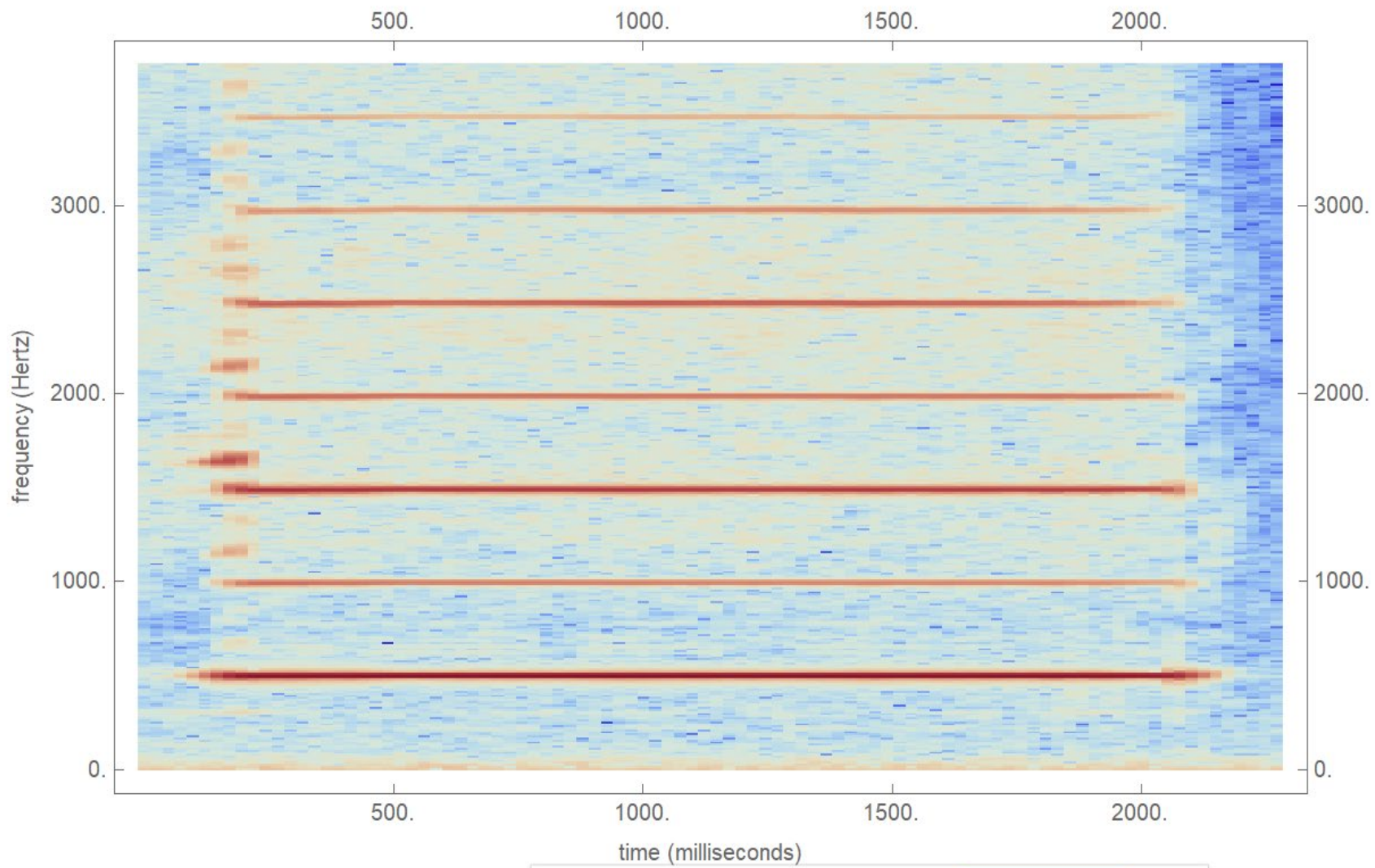
Trasformata di Fourier Continua: Relazione Tempo-Frequenza

- ✓ Segnali brevi (in t) \longrightarrow banda larga (in f)
- ✓ Segnali lunghi (e lenti) \longrightarrow banda stretta (in f)
- ✓ Segnali rapidamente varianti in t \longrightarrow banda larga (in f)



Segnali tempo-variabili

- Finestratura
- Trasformata su intervalli
- Rappresentazione dell'ampiezza vs tempo e frequenza of amplitude
- Spettrogramma
 - Asse x: tempo
 - Asse y: frequenza
 - Colore : energia



Esempi su Wolfram

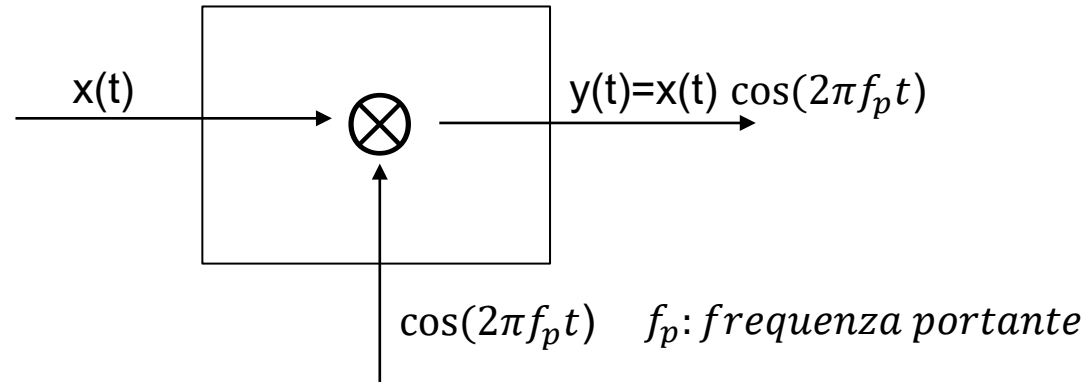
<https://demonstrations.wolfram.com/FourierTransformPairs/>

<https://demonstrations.wolfram.com/FourierSeriesOfSimpleFunctions/>

<https://demonstrations.wolfram.com/AudioSpectrogram/>

Modulatore

Un modulatore è un sistema (lineare e non tempo invariante) che dà in uscita il segnale in ingresso moltiplicato per un coseno ad una frequenza f_p



$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_p t) = \frac{1}{2} x(t) e^{j2\pi f_p t} + \frac{1}{2} x(t) e^{-j2\pi f_p t}$$

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_p t) \leftrightarrow Y(f) = X(f) \delta(f - f_p) + X(f) \delta(f + f_p)$$

L'effetto del modulatore è spostare la trasformata di Fourier del segnale in ingresso su un'altra frequenza, quella della portante: sposta la $X(f)$ su $\pm f_p$

Esempio $X(f) = \text{rect}(f)$; con $f_p = 3$

Proprietà fondamentale della convoluzione

- ✓ La trasformata di Fourier della convoluzione

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- ✓ è pari al prodotto delle trasformate

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

- ✓ dove

$$Y(f) = FT\{y(t)\}$$

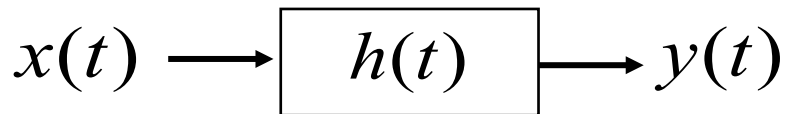
$$X(f) = FT\{x(t)\}$$

$$H(f) = FT\{h(t)\}$$

Risposta in frequenza di un sistema LP (filtro)

✓ Convoluzione (nel tempo):

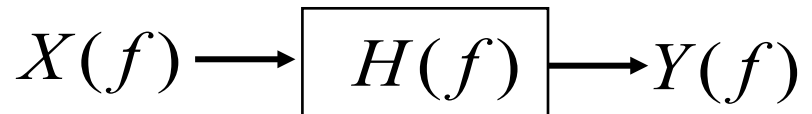
$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



$h(t)$: risposta impulsiva del filtro

✓ Prodotto (in frequenza):

$$Y(f) = H(f)X(f)$$



$H(f)$: risposta in frequenza del filtro
o funzione di trasferimento del
filtro

$$y(t) = \int_f Y(f)e^{j2\pi ft}df = \int_f H(f) \cdot X(f)e^{j2\pi ft}df$$

Esempio

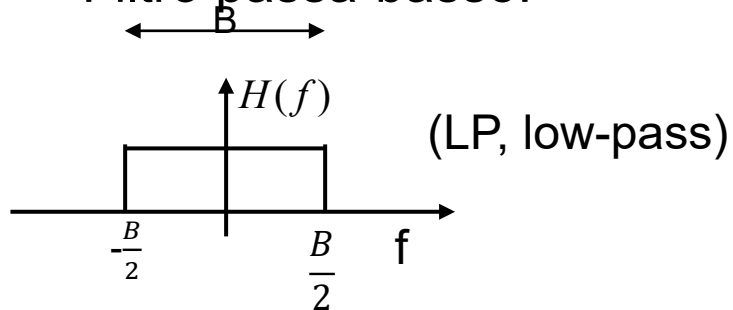
$$x(t) = \text{sinc}^2(t)[1 - e^{j2\pi 5t}]$$

$$h(t) = 2\text{sinc}(3t)$$

$$y(t) = ?$$

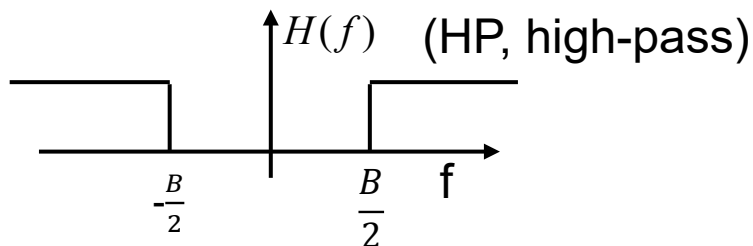
Filtraggio analogico

✓ Filtro passa-basso:



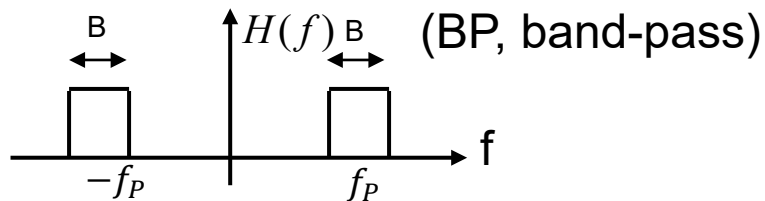
$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right) \leftrightarrow h(t) = B \text{sinc}(Bt)$$

✓ Filtro passa-alto



$$H(f) = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right) \leftrightarrow h(t) = \delta(t) - B \text{sinc}(Bt)$$

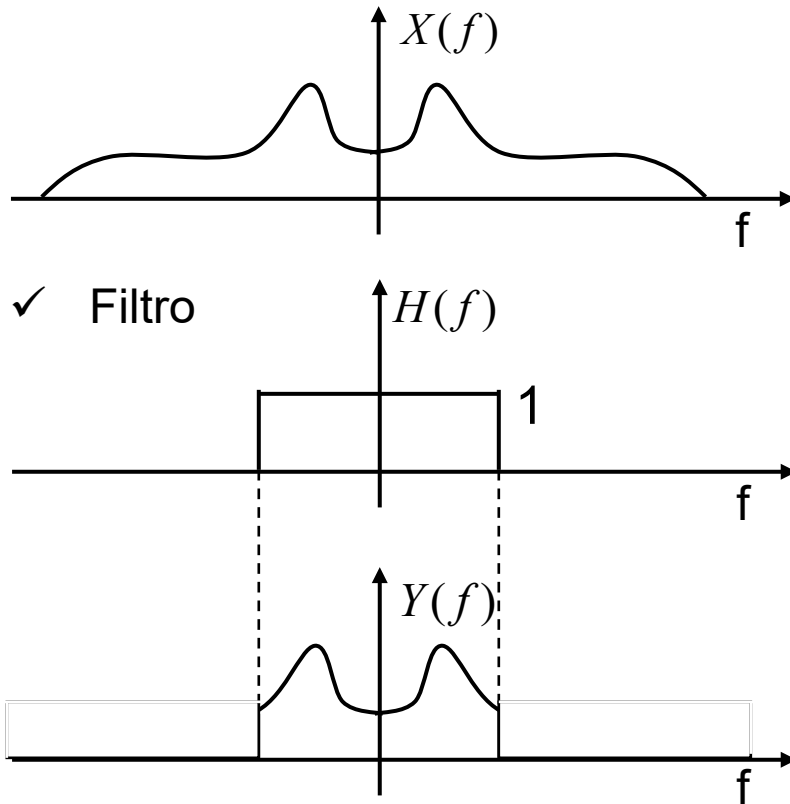
✓ Filtro passa-banda



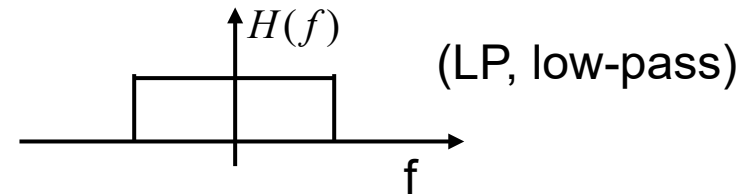
$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f - f_p}{B}\right) + \text{rect}\left(\frac{f + f_p}{B}\right) \\ \leftrightarrow h(t) = 2B \text{sinc}(Bt) \cos(2\pi f_p t)$$

Filtraggio analogico

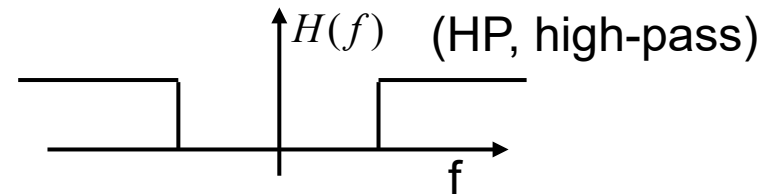
✓ Meccanismo di filtraggio:



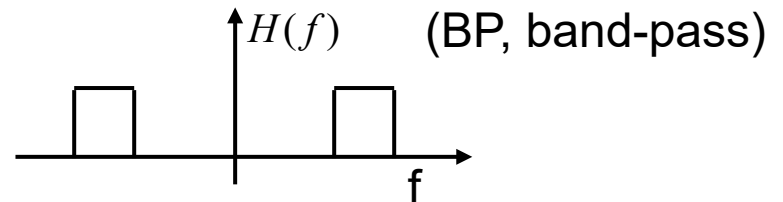
✓ Filtro passa-basso:



✓ Filtro passa-alto

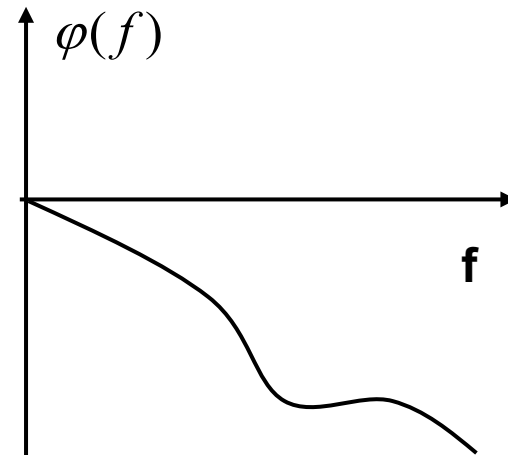
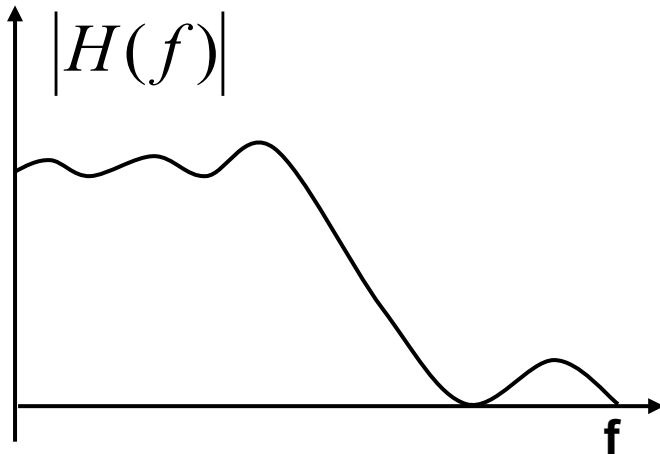


✓ Filtro passa-banda



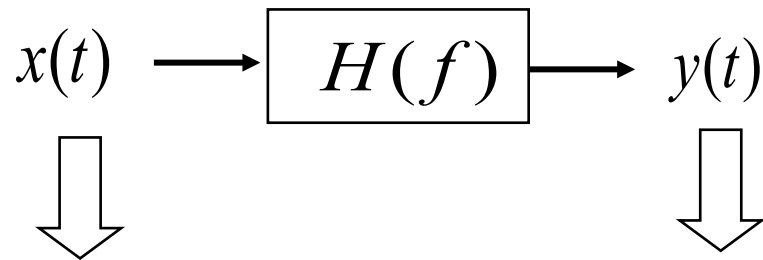
Filtraggio analogico

- ✓ $h(t)$ reale $\Longrightarrow H(f) = H^*(-f)$ (simmetria coniugata)
- ✓ E' sufficiente conoscere $H(f)$ solo per le frequenze positive, perché le f negative si deducono dalla simmetria coniugata



Filtraggio analogico

- ✓ Le sinusoidi sono largamente impiegate nelle trasmissioni (esempi: fax, tastiera telefono, GSM, ...)



$$x(t) = A \cos(2\pi f_o t + \theta) \quad y(t) = A |H(f_o)| \cos(2\pi f_o t + \theta + \varphi(f_o))$$

