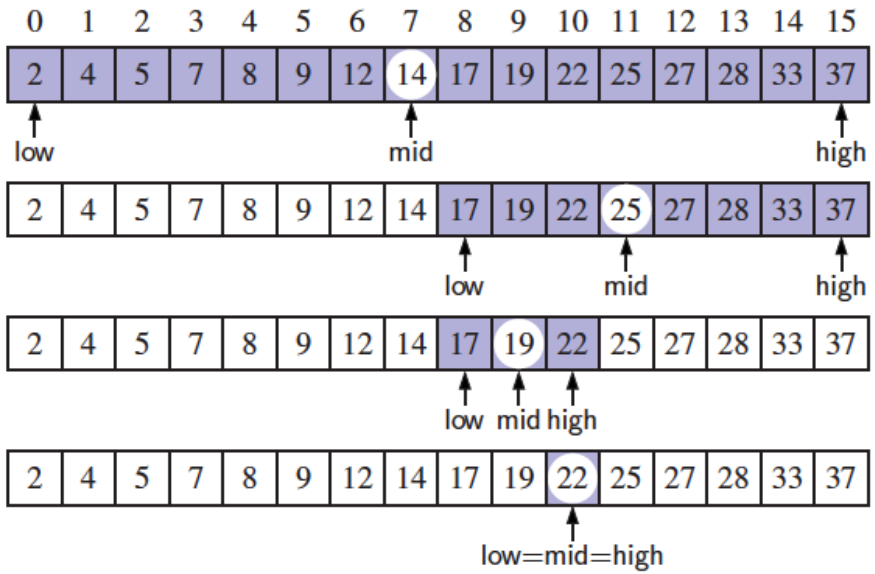
Ricorsione

Luca Becchetti

Presentazione tratta dalle slide che accompagnano il testo Data Structures and Algorithms in Java, 6th edition, by M. T. Goodrich, R. Tamassia, and M. H. Goldwasser, Wiley, 2014

Ricerca binaria

- **Se target = data[mid] → trovato**
- **Se target < data[mid] → cerchiamo in metà inferiore**
- **Se target > data[mid] → cerchiamo in metà superiore**



Ricerca binaria

```
1  /**
2   * Returns true if the target value is found in the indicated portion of the data array.
3   * This search only considers the array portion from data[low] to data[high] inclusive.
4   */
5  public static boolean binarySearch(int[ ] data, int target, int low, int high) {
6    if (low > high)
7      return false;                                    // interval empty; no match
8    else {
9      int mid = (low + high) / 2;
10     if (target == data[mid])
11       return true;                                   // found a match
12     else if (target < data[mid])
13       return binarySearch(data, target, low, mid - 1);   // recur left of the middle
14     else
15       return binarySearch(data, target, mid + 1, high);  // recur right of the middle
16   }
17 }
```

Analisi

- **Dopo ogni tentativo fallito la dimensione della porzione di array da esaminare è pari a uno dei seguenti valori:**

$$(\text{mid}-1)-\text{low}+1=\left\lfloor\frac{\text{low}+\text{high}}{2}\right\rfloor-\text{low}\le\frac{\text{high}-\text{low}+1}{2}$$

$$\text{high}-(\text{mid}+1)+1=\text{high}-\left\lfloor\frac{\text{low}+\text{high}}{2}\right\rfloor\le\frac{\text{high}-\text{low}+1}{2}.$$

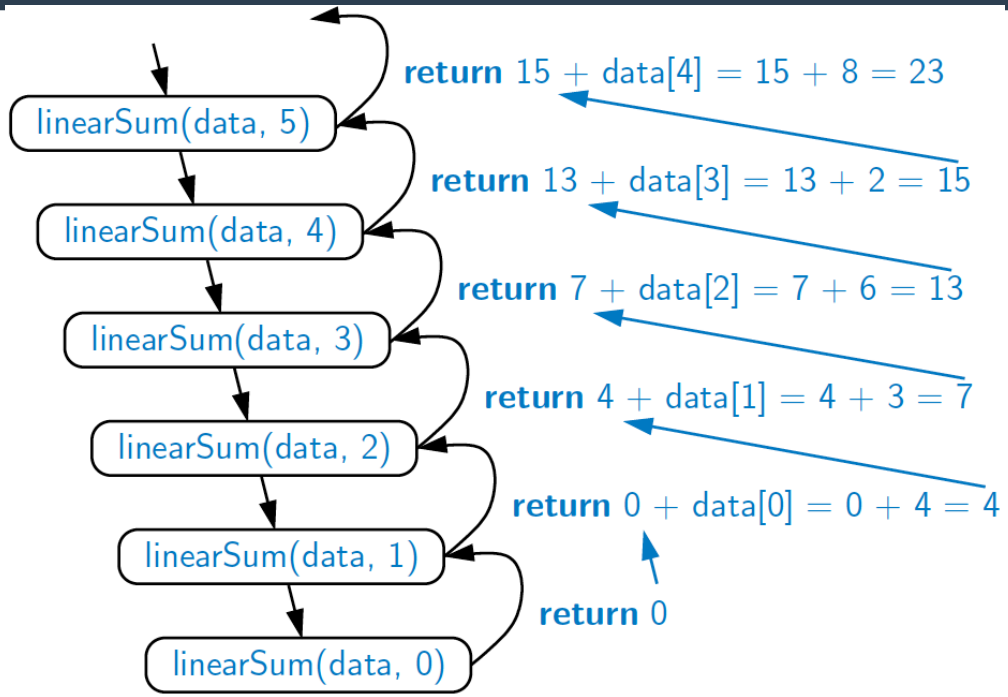
- **Si dimezza spazio di ricerca → O(log n) chiamate ricorsive**

Ricorsione lineare

- **Si ha quando il corpo del metodo contiene al massimo un’invocazione ricorsiva**
- **Il metodo binarySearch implementa una ricorsione lineare**
- **Scrivere un algoritmo/metodo che ricorsivamente calcoli la somma degli elementi di un array**

Somma degli elementi in un array

```
linearSum(A, n)
if n = 0 then
  return 0
else
  return
linearSum(A, n - 1) + A[n - 1]
```




```
34  /** Returns the sum of the first n integers of the given array. */
35  public static int linearSum(int[] data, int n) {
36    if (n == 0)
37      return 0;
38    else
39      return linearSum(data, n-1) + data[n-1];
40  }
```

Inversione di un array

Algorithm reverseArray(A, i, j):

Input: array A e indici non-negativi i e j

Output: Thearray contenente gli elementi di A compresi tra gli indici i e j, in ordine invertito

```
if i <  j then
    Swap A[i] and A[ j]
    reverseArray(A, i + 1,  j – 1)
return
```

Inversione di un array (cont.)

- **Definizione dei metodi che faciliti la ricorsione**
- **Per esempio, definiamo il metodo reverseArray(A, i, j) e non reverseArray(A)**

```
1  /** Reverses the contents of subarray data[low] through data[high] inclusive. */
2  public static void reverseArray(int[ ] data, int low, int high) {
3    if (low < high) {                                  // if at least two elements in subarray
4      int temp = data[low];                            // swap data[low] and data[high]
5      data[low] = data[high];
6      data[high] = temp;
7      reverseArray(data, low + 1, high − 1);           // recur on the rest
8    }
9  }
```

Attenzione ai costi ...

- **Calcolo della funzione $p(x,n)=x^n$**

$$p(x,n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ x \cdot p(x, n-1) & \text{else} \end{cases}$$

- **Scrivere algoritmo corrispondente**
  - Qual è il costo computazionale?
  - Il costo è polinomiale?
  - Possiamo fare meglio?

Una definizione alternativa

$$p(x,n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ x \cdot p(x,(n-1)/2)^2, n > 0 \; dispari \\ p(x,n/2)^2, n > 0 \; pari \end{cases}$$

- **Esempio**

$2^4 = 2^{(4 \lhd 2) 2} = (2^{4 \lhd 2})^2 = (2^2)^2 = 4^2 = 16$

$2^5 = 2^{1+(4 \lhd 2) 2} = 2(2^{4 \lhd 2})^2 = 2(2^2)^2 = 2(4^2) = 32$

$2^6 = 2^{(6 \lhd 2) 2} = (2^{6 \lhd 2})^2 = (2^3)^2 = 8^2 = 64$

$2^7 = 2^{1+(6 \lhd 2) 2} = 2(2^{6 \lhd 2})^2 = 2(2^3)^2 = 2(8^2) = 128$

Metodo alternativo: algoritmo

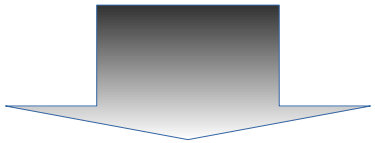
```
Algorithm Power(x, n):
    Input: A number x and integer n = 0
    Output: The value x^n
    if n = 0 then
        return 1
    if n is odd then
        y  = Power(x, (n - 1)/ 2)
        return x · y ·y
    else
        y = Power(x, n/ 2)
        return y · y
```

Complessità computazionale

- **Siamo in presenza di ricorsione lineare**
- **Ad ogni invocazione ricorsiva:**
  - n → (n – 1)/2 oppure
  - n → n/2
- **In ogni caso: secondo argomento dell'algoritmo dimezza (almeno)**
- **Conseguenza → O(log n) invocazioni ricorsive**

Ricorsione in coda

```
1  /** Reverses the contents of subarray data[low] through data[high] inclusive. */
2  public static void reverseArray(int[ ] data, int low, int high) {
3    if (low < high) {                                  // if at least two elements in subarray
4      int temp = data[low];                            // swap data[low] and data[high]
5      data[low] = data[high];
6      data[high] = temp;
7      reverseArray(data, low + 1, high − 1);           // recur on the rest
8    }
9  }
```



```
Algorithm IterativeReverseArray(A, i, j ):
    while i <  j do
        Swap A[i ] and A[ j ]
        i  = i + 1
        j  = j - 1
    return
```

Ricorsione in coda → facile conversione in algoritmo iterativo

Ricorsione doppia (ed errori comuni)

- **Numeri di Fibonacci**
  - $F_0 = 0$
  - $F_1 = 1$
  - $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}, i > 1$

```
/** Returns the nth Fibonacci number (inefficiently). */
public static long fibonacciBad(int n) {
  if (n <= 1)
    return n;
  else
    return fibonacciBad(n-2) + fibonacciBad(n-1);
}
```

- **Complessità computazionale?**

Versione efficiente (ricorsione lineare)

```
/** Restituisce un arrai contenente la coppia F(n) e F(n-1). */
public static long[] fibonacciGood(int n) {
  if (n <= 1) {
    long[] answer = {n, 0};
    return answer;
  } else {
    long[] temp = fibonacciGood(n - 1);              // restituisce {F(n-1), F(n-2)}
    long[] answer = {temp[0] + temp[1], temp[0]};  // vogliamo {F(n), F(n-1)}
    return answer;
  }
}
```

- **Costo O(n) → E' lineare?**
- **Prova**
  - Ricorsione lineare
  - Argomento diminuisce di 1 a ogni invocazione

Versione iterativa (Python-like)

```
def f(n):
    a = 0
    b = 1
    for i = 0 to n:
        temp = a
        a = b
        b = b + temp
    return a
```

Un esercizio di esame

Il seguende codice Java implementa un algoritmo che determina incrementa un contatore binanario avente un numero di cifre costante.

```java
static int[] modIncr(int[] arr) {
  return modIncr(arr, arr.length-1);
}

static int[] modIncr(int[] arr, int i) {
  if(i < 0) return arr;
  if(arr[i] == 0) {
    arr[i] = 1;
    return arr;
  } else {
    arr[i] = 0;
    return modIncr(arr, i-1);
  }
}
```

Si risponda ai seguenti quesiti:

1. Determinare il costo temporale asintotico di caso peggiore dell'algoritmo descritto da `modIncr(int[])` in funzione della dimensione dell'input.

Svolgimento

- **Si supponga che l'array contenga n elementi**
- **Nel caso peggiore la generica invocazione di modincr(int[] arr, int i):**
  - Esegue O(1) operazioni
  - Invoca ricorsivamente la funzione su un sotto-array di dimensione i-1
- **$T(n) \leq c + T(n-1) \leq c + c + T(n-2) \leq \ldots \leq cn$**