Fondamenti di Comunicazioni

Corso: Fondamenti di comunicazioni e Internet (canale I e II)
E Telecomunicazioni

Lezione 3: Valore medio, energia, potenza

Tiziana Cattai
email: tiziana.cattai@uniroma1.it

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Esempio di operazioni sui segnali e simmetria

$x(t) = \mathrm{tri}[(t+3) / 2] - \mathrm{tri} [(t-3) / 2]$

Esempi di operazioni su sequenze

- $z_n = \sum_{k=1}^{3} \delta_{n+k}$

- $z_n = \sum_{k=1}^{3} k\delta_{n+2k}$

Esempi di operazioni su sequenze

- $z_n = \sum_{k=1}^{3} \delta_{n+k}$

- $z_n = \sum_{k=1}^{3} k\delta_{n+2k}$

Operazioni sulle sequenze

$$Decimazione$$

- $x_n = \sum_{k=1}^{10} k\delta_{n-k}$
- $z_n = x_{3n}$

Valore medio di un segnale e di una sequenza

Segnale a durata finita

Il valore medio di un segnale continuo x(t) è calcolato come l'integrale del segnale diviso per la sua durata totale T=b-a:

- $\mu_x^I = \frac{1}{T}\int_a^b x(t)dt$

Definizione analoga per una sequenza:

- $\mu_x^I = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n$

Segnale a durata infinita

- $\mu_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$

- Definizione analoga per una sequenza
- $\mu_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N}\sum_{-N}^{N} x_n$

Valore medio di un segnale: esempi

- $x(t) = c$
- $x(t) = Asin(2\pi f t)$

Valore medio di un segnale: esempi

- $x(t) = c$
- $x(t) = A sin(2\pi f t)$
- $x_n = \begin{cases} 1 \; per \; 0 \leq n \leq 3 \\ o \; altrimenti \end{cases}$

- $x(t) = rect(\frac{t}{2})$ nell'intervallo I=$[-1{,}1]$
- $x(t) = rect(t)$ nell'intervallo I=$[-1{,}1]$

Qual è il valore medio?

a) 0
b) 1
c) ½
Nessuno dei precedenti

Energia di un segnale

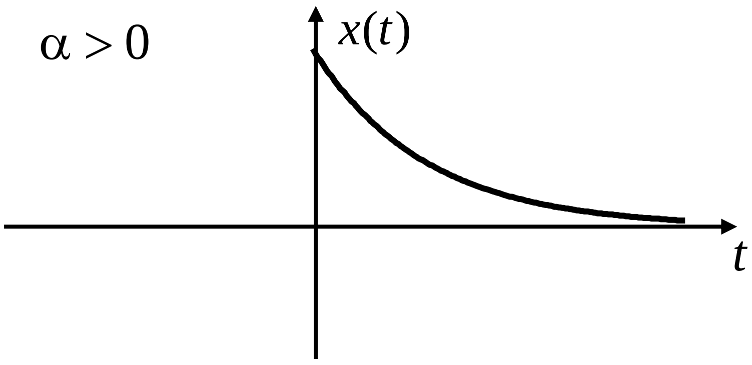
- Definition: $\mathcal{E}_\chi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) \right|^2 dt \geq 0$ $\qquad \varepsilon_x = \sum_n |x_n|^2$

- Definition: **Energy signal**: $0 < \mathcal{E}_\chi < +\infty$

- Definition: **Impulsive signal** $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) \right| dt < +\infty$

Energia di un segnale: esempio di calcolo

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}u_{-1}(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

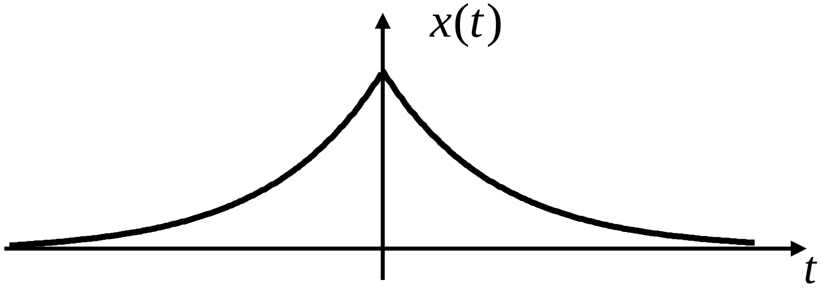


$$\mathcal{E}_x = \int_0^{+\infty} \left(Ae^{-\alpha t}\right)^2 dt = A^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt = \frac{A^2}{-2\alpha} e^{-2\alpha t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{A^2}{2\alpha} \rightarrow$$ Segnale di energia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \int_0^{+\infty} Ae^{-\alpha t} dt = \frac{A}{-\alpha} e^{-\alpha t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{A}{\alpha} \rightarrow$$ Segnale Impulsivo

Energia di un segnale: esempio di calcolo

$$x(t) = Ae^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0$$



$$\mathcal{E}_x = \frac{A^2}{\alpha}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \frac{2A}{\alpha} \quad \rightarrow$$ Segnale impulsivo e di energia

Energia di un segnale: esempio di calcolo

- Calcolare l'energia di $x(t) = rect(t)$
- Calcolare l'energia di $x(t) = tri(t)$

Energia di un segnale: esempio di calcolo

- Calcolare l'energia di $z(t) = rect(t-3) + 2rect(\frac{t}{2} - 1)$

Energia di un segnale: esempio di calcolo

- Calcolare l'energia di $z_n = \sum_{k=1}^{3} k\delta_{n-3k}$

Potenza di un segnale

✓ Def:

$$P_x = \lim_{\Delta t \to +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \left| x(t) \right|^2 dt \geq 0$$

$$P_x = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} |x_n|^2$$

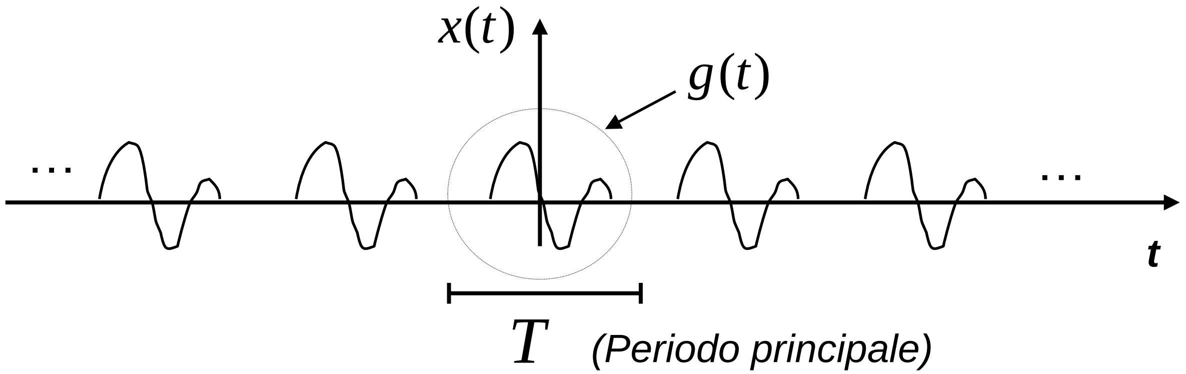
✓ Def: Power signal $0 < P_x < +\infty$

<u>Constant:</u> $x(t) = c$

$$P_x = \lim_{\Delta t \to +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \left| c \right|^2 dt = \left| c \right|^2 \lim_{\Delta t \to +\infty} \frac{1}{\Delta t} \Delta t = \left| c \right|^2$$

Segnale periodico

$$x(t) = x(t+nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t-nT) \qquad T \equiv periodo$$



- ✓ Potenza di un segnale periodico

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

- ✓ Un segnale periodico è un segnale di potenza

Esempio di calcolo della Potenza di un segnale

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi), \qquad T = 1/\ f_0$$

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi)dt = \frac{A^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2}[1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)]dt =$$

$$= \frac{A^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2}dt + \frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)dt =$$

$$= \frac{A^2}{2T}\left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2}\right) + 0 \quad \text{(il coseno ha area nulla)} \ = \frac{A^2}{2}$$

Energia e Potenza: esempio di calcolo

- Calcolare l'energia di $z_n = \sum_{k=1}^{3} k\delta_{n-3k}$
- Supponi sia periodico con periodo T = 10. Quanto vale la potenza?

Esempio codice matlab

main_SWSS_epanet_nodemand_01.m | example_energy_power.m

```
clc
close all
clear

% Definizione del segnale
n = 0:100; % Intervallo di campionamento da 0 a 100
x = sin(0.1*pi*n); % Esempio di un segnale sinusoidale discreto

% Calcolo dell'energia
E = sum(abs(x).^2); % Calcolo dell'energia utilizzando una sommatoria

% Calcolo della potenza
N = length(x); % Lunghezza del segnale
% DA implementare
%%%

% Visualizzazione dei risultati
fprintf('Energia del segnale: %.4f\n', E);
fprintf('Potenza del segnale: %.4f\n', P);

% Plot del segnale
%subplot(2, 1, 1);
stem(n, x);
```

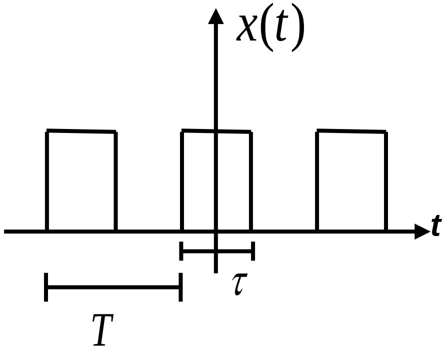
Command Window

Segnali periodici

Treno di “impulsi” rettangolari:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} rect_{\tau}(t - nT)$$

$$\tau / T \equiv \text{"duty cycle"} \leq 1$$



$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [rect_{\tau}(t - nT)]^2\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1^2\, dt = \frac{1}{T}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = \frac{\tau}{T}$$

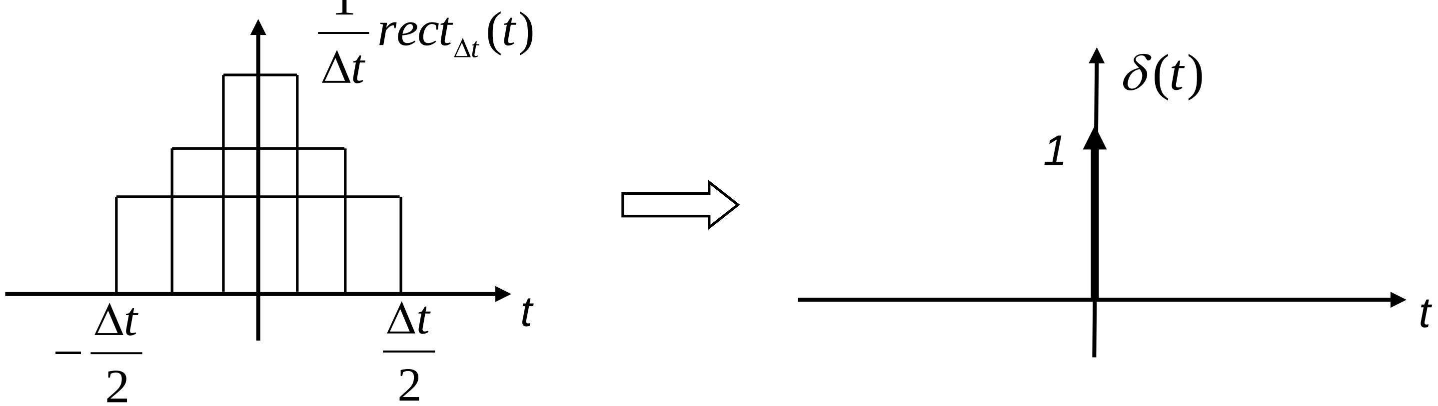
Impulso matematico

- ✓ E' un segnale di durata brevissima (al limite, zero) e di ampiezza elevatissima (al limite, infinita) con integrale unitario in un intervallo comprendente l'origine unitario

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{1}{\Delta t} rect_{\Delta t}(t)}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

area 1



Proprietà dell'impulso matematico

- ✓ $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$ (l'impulso matematico ha area unitaria)
- ✓ $$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0)dt = 1,$$ per ogni $\varepsilon > 0$
- ✓ $$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$ (proprietà di campionamento)

Impulso matematico: esempio

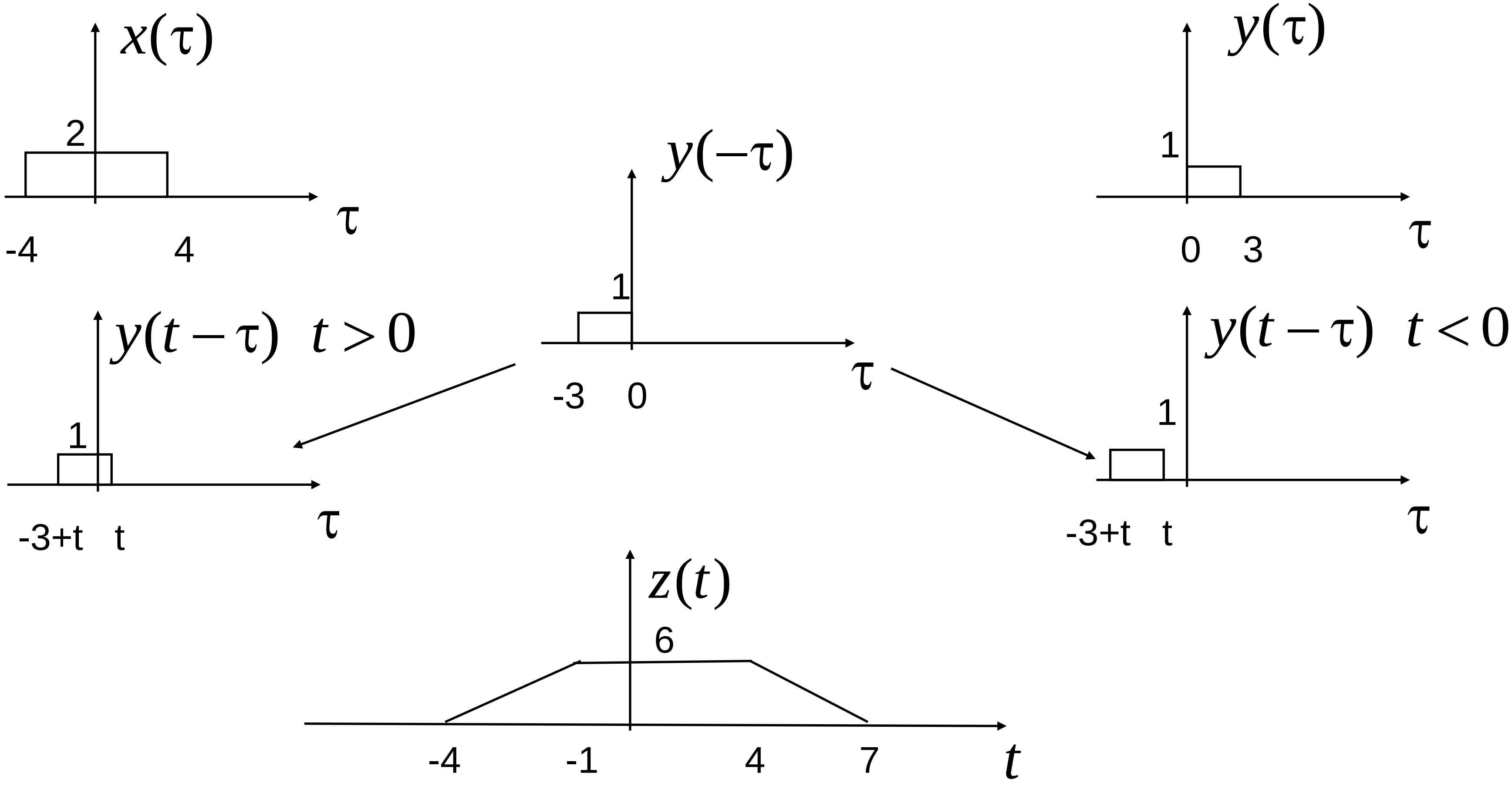
- Calcolare $\int rect(t)\delta(t-1)$
- Calcolare $\int 2rect(t)\delta(t-1/4)$
- Calcolare $\int tri(t)\delta(t)$
- Calcolare $\int tri(t)\delta(t+1/4)$

Convoluzione: Definizione e calcolo

- ✓ Def: $$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$
$$z_n = \sum_k x_k y_{n-k}$$

1. Graficare i due segnali $x(.)$ e $y(.)$ come funzioni di τ ottenendo così $x(\tau)$ ed $y(\tau)$
2. Ribaltare il segnale $y(\tau)$ rispetto all'asse delle ordinate ottenendo $y(-\tau)$
3. Traslare $y(-\tau)$ della quantità t lungo l'asse τ. Quando $t > 0$ allora $y(t-\tau)$ va traslato di t verso destra. Quando invece $t < 0$, $h(-\tau)$ va traslata di t verso sinistra
4. Per ogni valore di $\tau \in (-\infty, +\infty)$ si calcola il prodotto $x(\tau) y(t-\tau)$
5. Si integra rispetto a τ la funzione $x(\tau) y(t-\tau)$ e cioè si calcola l'area sottesa dalla funzione $x(\tau) y(t-\tau)$. La suddetta area è proprio il valore $z(t)$ assunto dalla convoluzione all'istante t.

Convoluzione: Esempio di calcolo



Convoluzione: Proprietà

- ✓ L'operazione di convoluzione è commutativa, ossia

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

- ✓ L'operazione di convoluzione è associativa, cioè

$$[x(t) * y(t)] * z(t) = x(t) * [y(t) * z(t)]$$

- ✓ L'operazione di convoluzione è distributiva rispetto alla somma di segnali

$$[x(t) + z(t)] * y(t) = [x(t) * y(t)] + [y(t) * z(t)]$$

- ✓ La convoluzione di $x(t)$ con $\delta(t - t_0)$ trasla $x(t)$ di t_0, ossia

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

- ✓ Dati due segnali $x(t)$, $y(t)$ di durata Δ_x e Δ_y ,la convoluzione dei due segnali ha durata

$$\Delta_x + \Delta_y$$