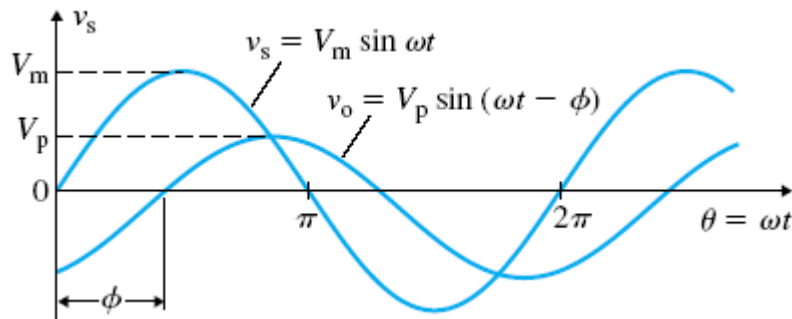


**Risposta in frequenza di
reti a singola costante di tempo
STC (Single Time Constant)**

Risposta in frequenza



$v_s(t) = V_m \sin \omega t$ tensione di ingresso

$v_o(t) = V_p \sin(\omega t - \phi)$ tensione di uscita

$\omega = 2\pi f$ pulsazione

$T(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_s(j\omega)}$ guadagno in tensione o funzione di trasferimento

$|T(j\omega)|$ modulo della funzione di trasferimento

$\angle T(j\omega)$ fase della funzione di trasferimento

La risposta in frequenza di un circuito è la rappresentazione del diagramma del modulo in decibel $20\log_{10}|T(j\omega)|$ e del diagramma della fase $\angle T(j\omega)$ della funzione di trasferimento in funzione della frequenza, con quest'ultima grandezza in scala logaritmica. Tali diagrammi sono detti diagrammi di Bode.

Diagrammi di Bode

$$T(s) = \frac{V_O(s)}{V_i(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0} = a_m \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

a, b numeri reali

$n \geq m$

z_1, z_2, \dots, z_m : zeri della funzione di trasferimento

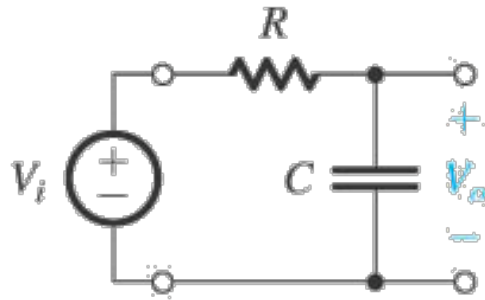
p_1, p_2, \dots, p_n : poli della funzione di trasferimento

Una generica funzione di trasferimento $T(s)$ può essere trasformata nel dominio della frequenza sostituendo $j\omega$ alla variabile s .

I diagrammi di Bode permettono di rappresentare l'andamento del modulo $|T(j\omega)|$ e della fase $\angle T(j\omega)$ al variare della frequenza.

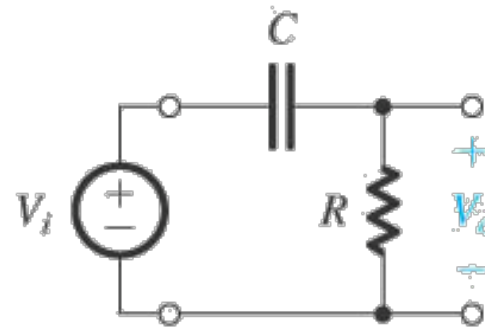
Utilizzando i diagrammi di Bode è possibile descrivere la risposta in frequenza di un amplificatore e studiare la stabilità dell'amplificatore.

Esempio di reti STC



(a)

esempio di rete STC passa-basso



(b)

esempio di rete STC passa-alto

Circuito RC passa-basso

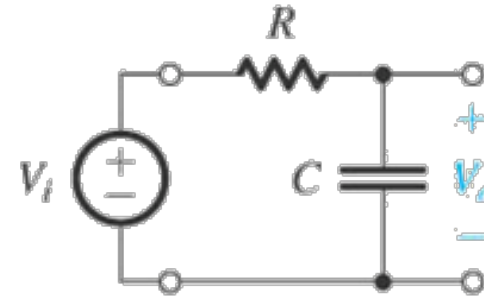
$$V_o(s) = V_i(s) \frac{Z_C}{R + Z_C}$$

$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{1/sC}{R + 1/sC} = \frac{1}{1 + sRC}$$

$$T(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega t}$$

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega t)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$$

$$\angle T(j\omega) = f = -\arctg(\omega t) = -\arctg(\omega/\omega_0) \text{ con } \omega_0 = 1/RC = 1/t$$



Per $\omega \ll \omega_0$

$$|T(j\omega)| \approx 1$$

$$20 \log_{10} |T(j\omega)| = 0$$

$$f = 0$$

Per $\omega \gg \omega_0$

$$|T(j\omega)| \approx \omega_0/\omega$$

$$20 \log_{10} |T(j\omega)| = 20 \log_{10} |\omega_0/\omega|$$

$$f = -\rho/2 = -90^\circ$$

Per $\omega = \omega_0$

$$|T(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$$

$$20 \log_{10} |T(j\omega)| = 20 \log_{10} |1/\sqrt{2}| = -3 \text{ dB}$$

$$f = -\rho/4 = -45^\circ$$

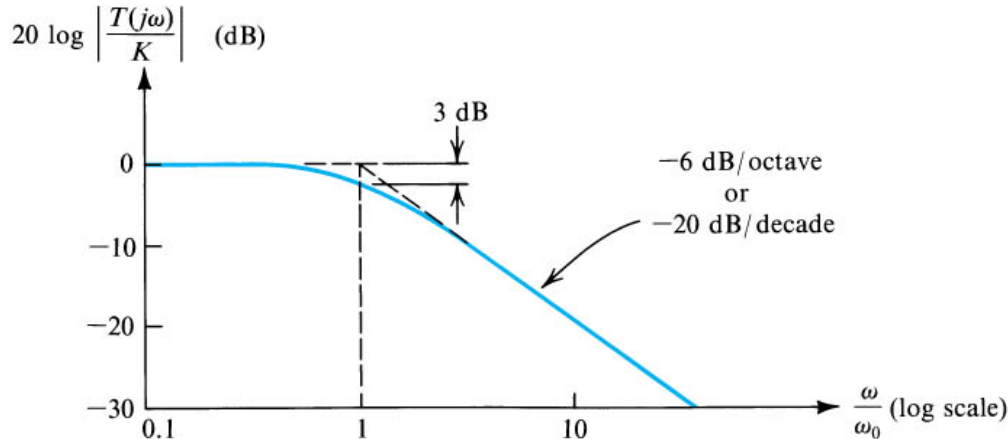
Risposta in frequenza di una rete STC di tipo passa-basso

$$T(s) = \frac{K}{1 + s/\omega_0} \quad s = j\omega \quad T(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega/\omega_0}$$

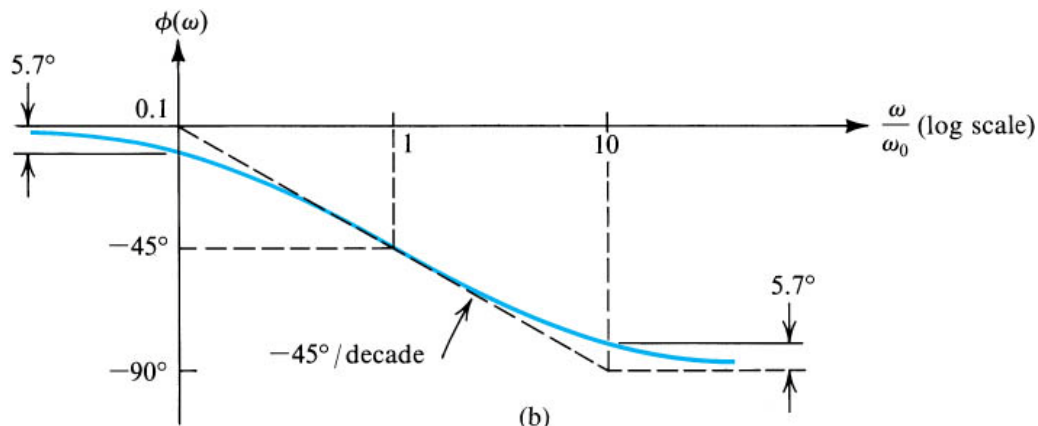
K : modulo della funzione di trasferimento per $\omega=0$

$\omega_0 = 1/\tau$: limite superiore di banda a -3 dB

τ : costante di tempo



(a)



(b)

$$|T(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$$

$$|T(j\omega_0)| = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

$$|T(j\omega)|_{\omega \ll \omega_0} @ \frac{K\omega_0}{\omega}$$

$$|T(j\omega)|_{\omega \gg \omega_0} @ K$$

$$\angle T(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\angle T(j\omega_0) = -45^\circ$$

$$\angle T(j\omega) = 0 \text{ per } \omega \ll \omega_0$$

$$\angle T(j\omega) = -90^\circ \text{ per } \omega \gg \omega_0$$

Circuito RC passa-alto

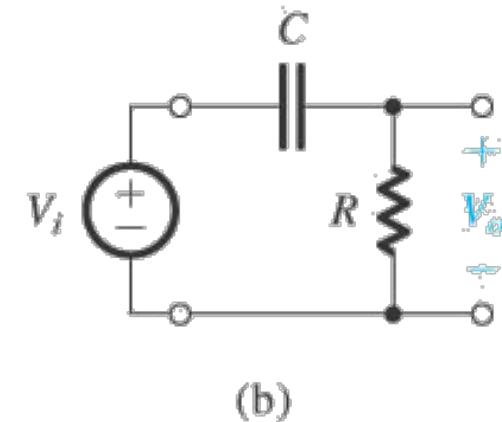
$$V_o(s) = V_i(s) \frac{R}{R + Z_C}$$

$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R}{R + Z_C} = \frac{R}{R + 1/sC} = \frac{sRC}{1 + sRC}$$

$$T(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\omega t}{1 + j\omega t}$$

$$|T(j\omega)| = \frac{\omega t}{\sqrt{1 + (\omega t)^2}} = \frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$$

$$\angle T(j\omega) = \phi = p/2 - \arctg(\omega t) = p/2 - \arctg(\omega/\omega_0)$$



$$\text{con } \omega_0 = 1/RC = 1/t$$

Per $\omega \ll \omega_0$

$$|T(j\omega)| @ \omega/\omega_0$$

$$20\log_{10}|T(j\omega)| @ 20\log_{10}(\omega/\omega_0)$$

$$\phi @ p/2$$

Per $\omega \gg \omega_0$

$$|T(j\omega)| @ 1$$

$$20\log_{10}|T(j\omega)| @ 0$$

$$\phi @ 0$$

Per $\omega = \omega_0$

$$|T(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$$

$$20\log_{10}|T(j\omega)| = 20\log_{10}|1/\sqrt{2}| = -3\text{ dB}$$

$$\phi = p/4 = 45^\circ$$

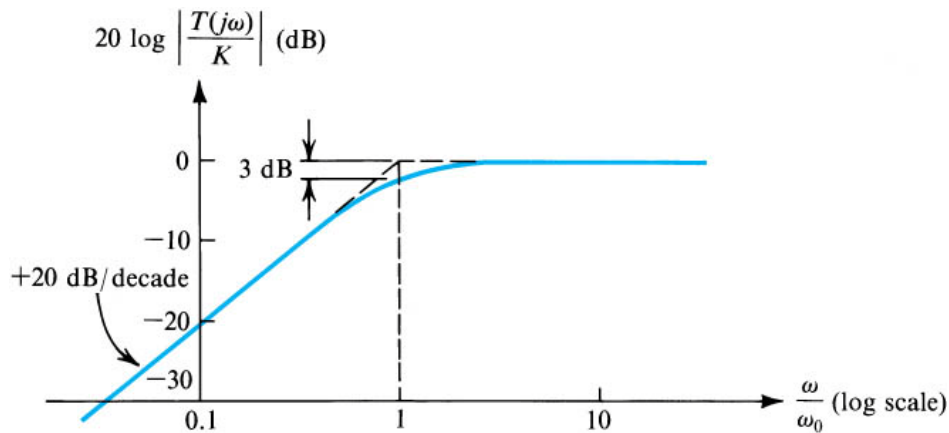
Risposta in frequenza di una rete STC di tipo passa-alto

$$T(s) = \frac{Ks}{s + \omega_0} \quad \text{per } s = j\omega \quad T(j\omega) = \frac{K}{1 - j\omega_0/\omega}$$

K : modulo della funzione di trasferimento per $\omega = \infty$

$\omega_0 = 1/\tau$: limite inferiore di banda a -3 dB

τ : costante di tempo



$$|T(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega_0/\omega)^2}}$$

$$|T(j\omega_0)| = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

$$|T(j\omega)|_{\omega \ll \omega_0} \approx \frac{K\omega}{\omega_0}$$

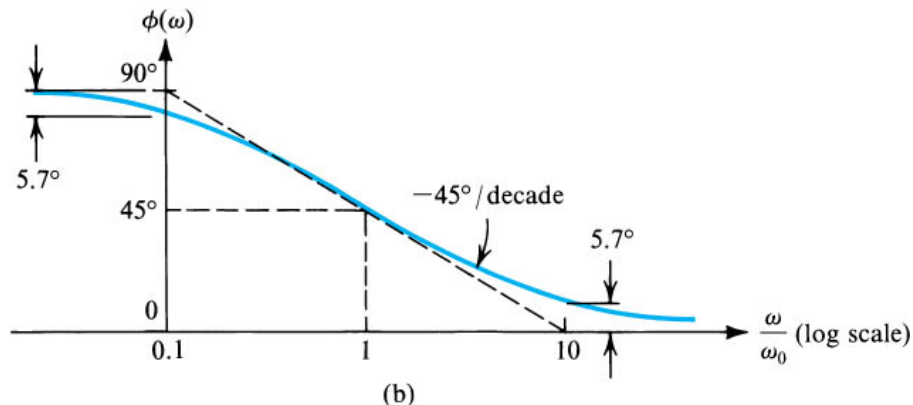
$$|T(j\omega)|_{\omega \gg \omega_0} \approx K$$

$$\angle T(j\omega) = -\arctan \frac{\omega_0}{\omega}$$

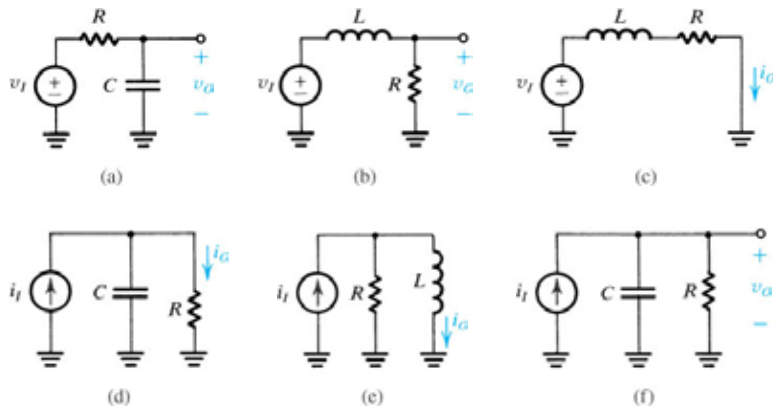
$$\angle T(j\omega_0) = -45^\circ$$

$$\angle T(j\omega) = 0 \text{ per } \omega \gg \omega_0$$

$$\angle T(j\omega) = 90^\circ \text{ per } \omega \ll \omega_0$$



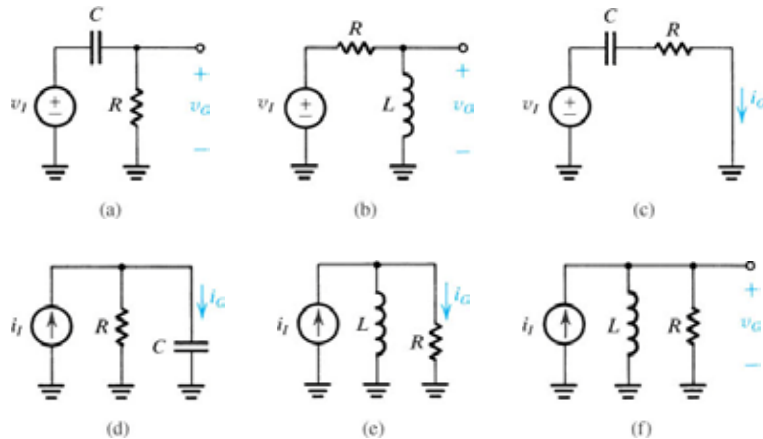
Classificazione delle reti STC



Reti STC di tipo passa-basso.

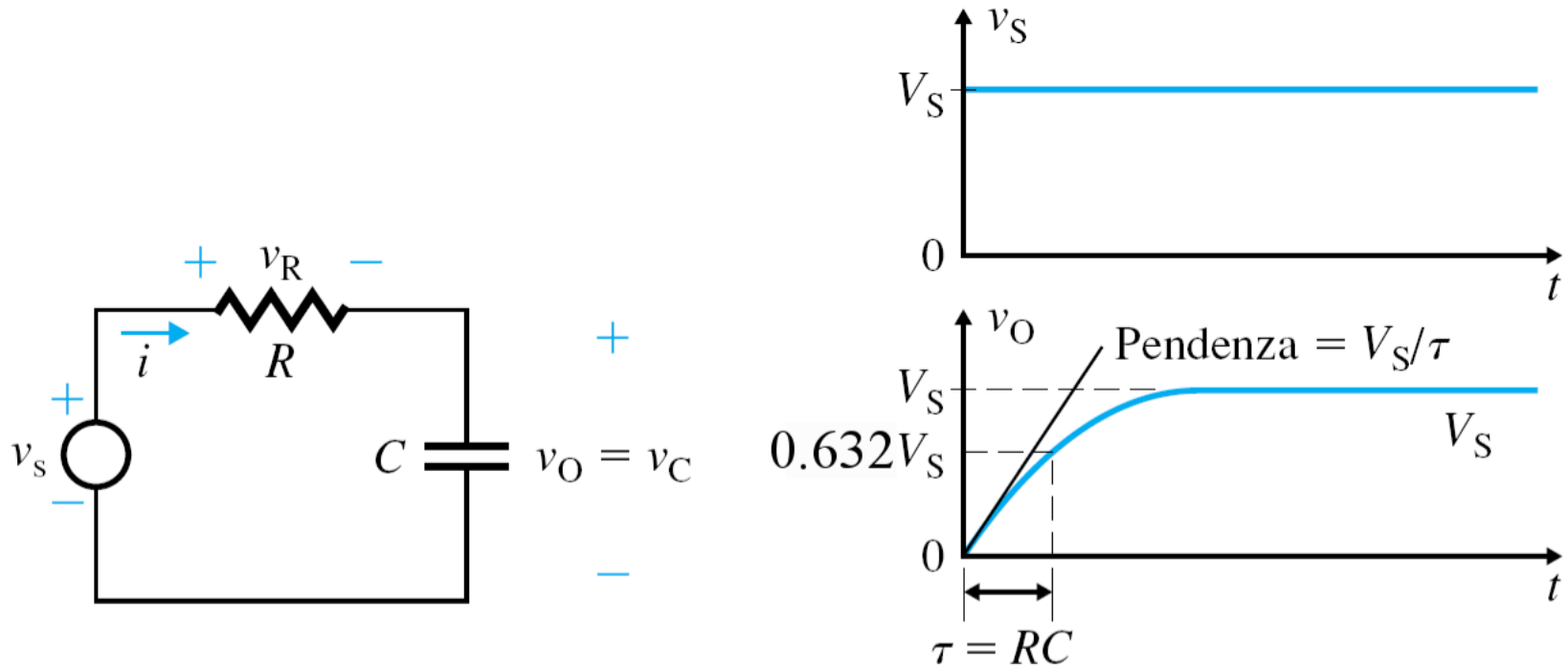
REGOLE PER TROVARE IL TIPO DI CIRCUITO STC

Verifica per	Sostituire	Il circuito è LP se	Il circuito è HP se
$\omega = 0$	C con un o.c. L con un s.c.	L'uscita è finita	L'uscita è zero
$\omega = \infty$	C con un s.c. L con un o.c.	L'uscita è zero	L'uscita è finita



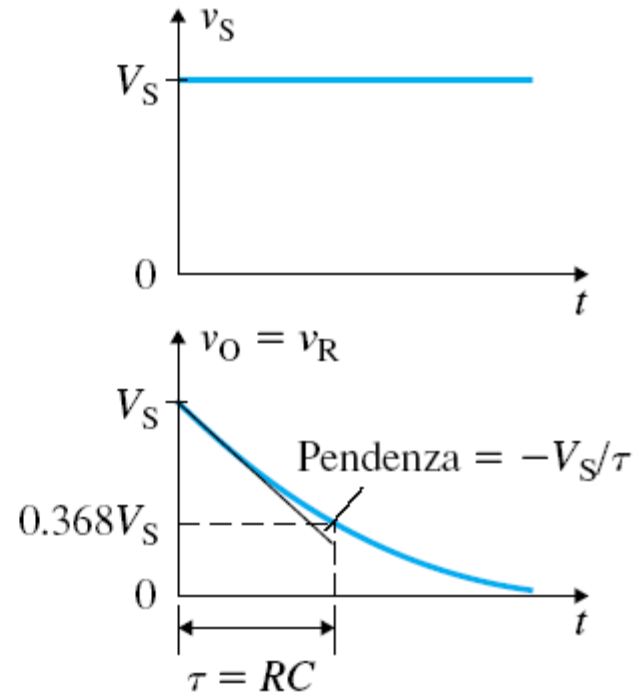
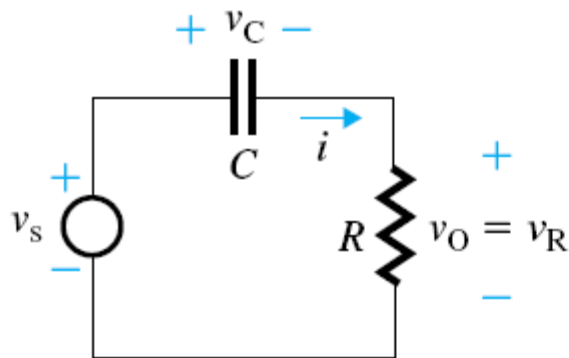
Reti STC di tipo passa-alto.

Risposta al gradino di un circuito RC passa-basso



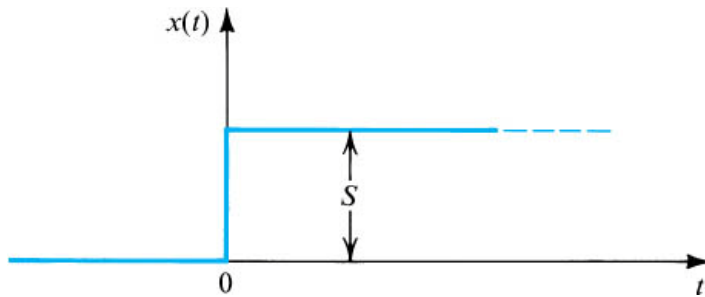
$$v_O(t) = V_S (1 - e^{-t/\tau})$$

Risposta al gradino di un circuito RC passa-alto

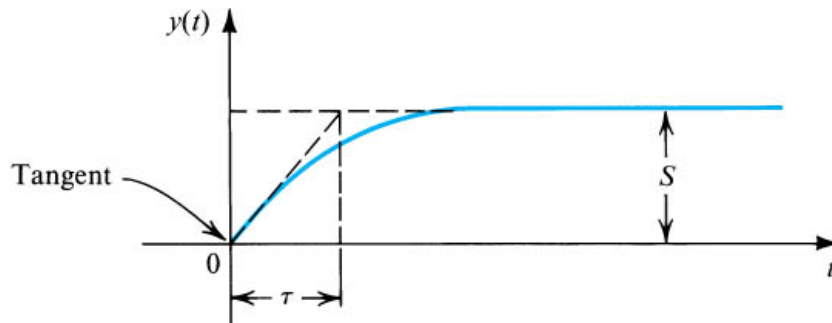


$$v_O(t) = V_S e^{-t/\tau}$$

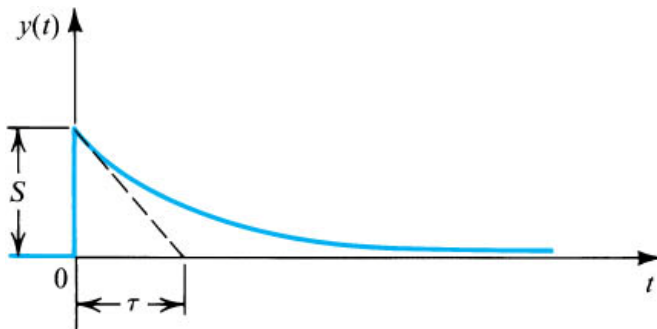
Risposta al gradino delle reti STC



$$y(t) = Y_{\infty} - (Y_{\infty} - Y_{0+})e^{-t/\tau}$$

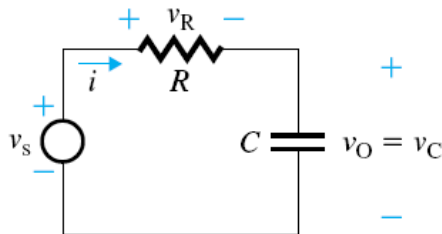


$$y(t) = S(1 - e^{-t/\tau})$$



$$y(t) = Se^{-t/\tau}$$

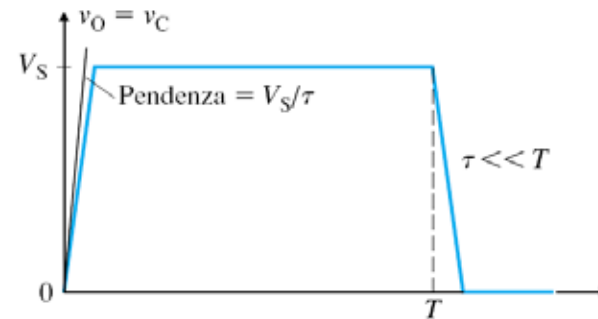
Risposta impulsiva di un circuito RC passa-basso



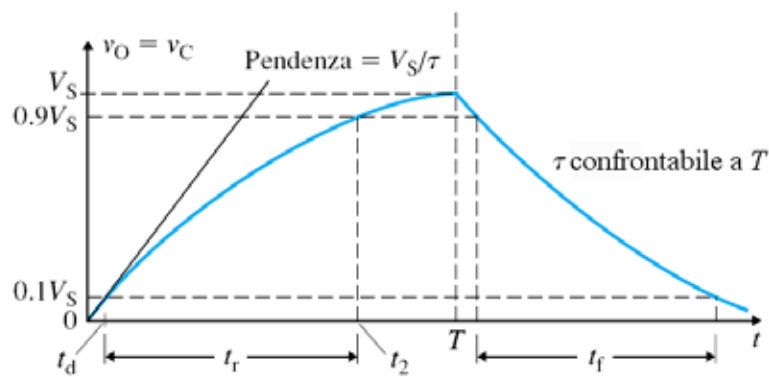
$$t_r = t_f @ 2, 2t @ \frac{0.35}{f_0}$$



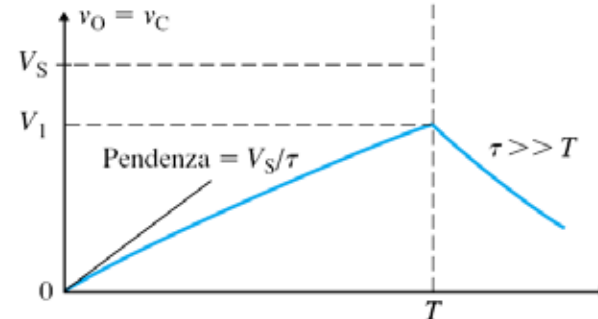
(a) Ingresso



(c) Tensione d'uscita per $\tau \ll T$

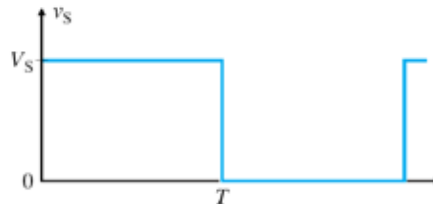
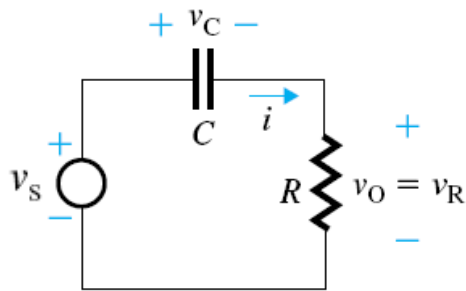


(b) Tensione d'uscita per τ confrontabile a T

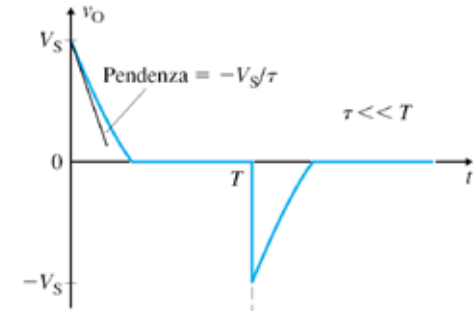


(d) Tensione d'uscita per $\tau \gg T$

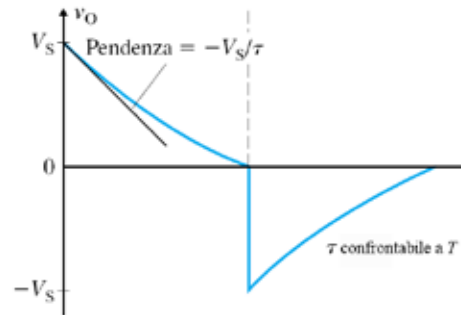
Risposta impulsiva di un circuito RC passa-alto



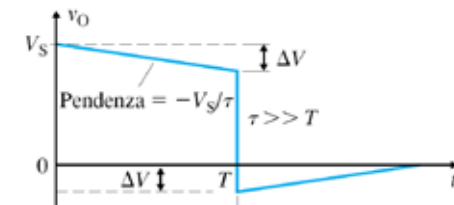
(a) Ingresso



(c) Uscita per $\tau \ll T$



(b) Uscita per τ confrontabile a T

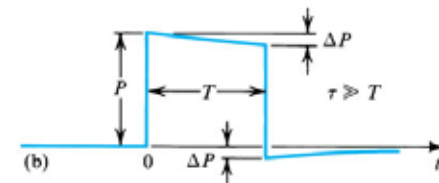
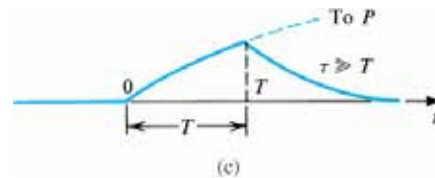
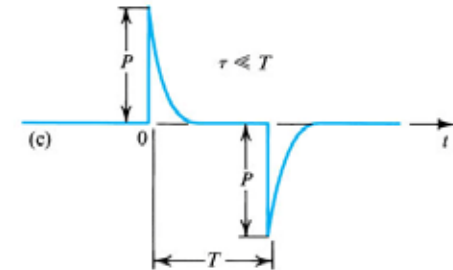
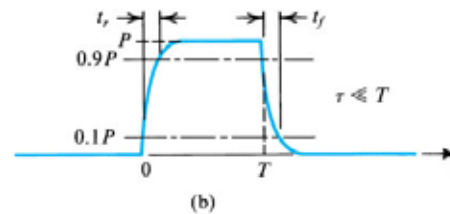
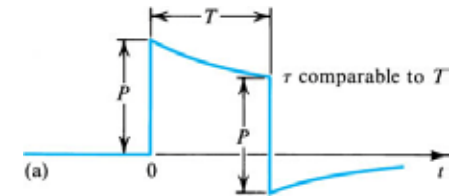
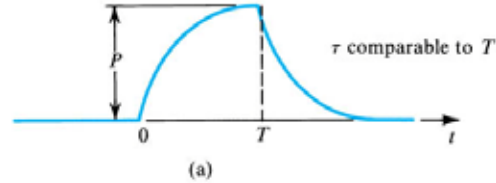
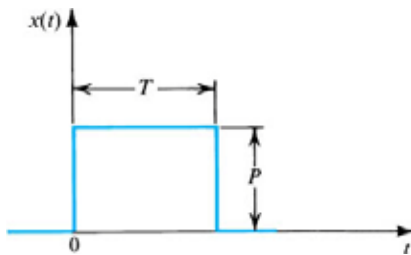


(d) Uscita per $\tau \gg T$

$$DV @ \frac{V_S}{t} T$$

$$\text{sag \%} = \frac{DV}{V} \times 100 = \frac{T}{t} \times 100$$

Risposta impulsiva delle reti STC



risposta a un impulso di
una rete STC passa-basso

risposta a un impulso di
una rete STC passa-alto

Trasformate di Laplace di uso frequente

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$
$\cos \alpha t$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$
$f'(t)$	$sF(s) - F(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sF(s) - F'(0)$