

3

IL TASSO D'INTERESSE

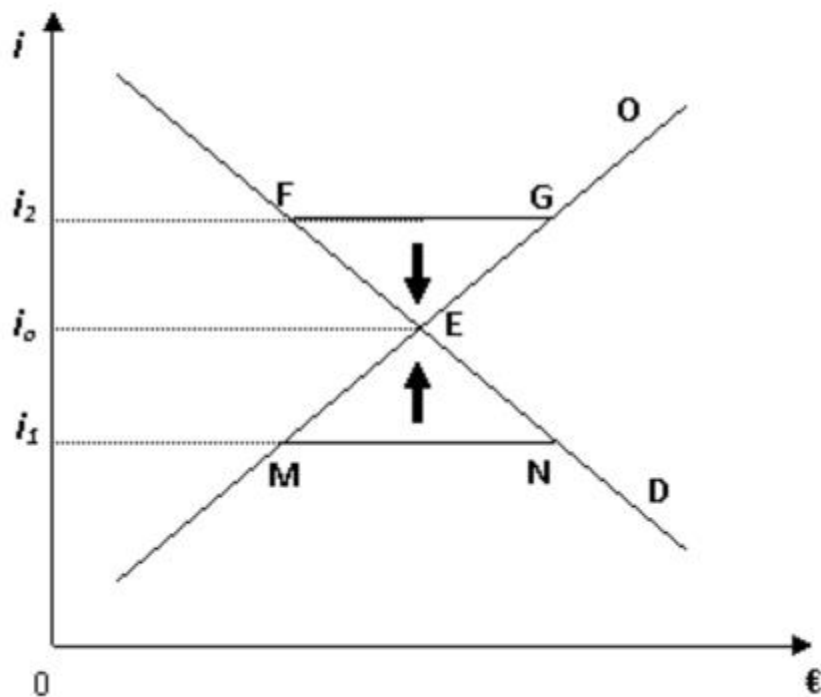
Interesse semplice e composto
Interesse nominale ed effettivo

L'ANALISI DEGLI INVESTIMENTI

L'ANALISI DEGLI INVESTIMENTI rappresenta il processo decisionale di un investitore che, sulla base delle diverse opzioni, dei rischi e dei rendimenti attesi, deve scegliere l'alternativa che ottimizza il proprio profitto.

L'INTERESSE

Il costo del denaro dipenderà da quanti sono disposti a cederlo e da quanti lo richiedono nello stesso momento.



CAPITALE E INTERESSE

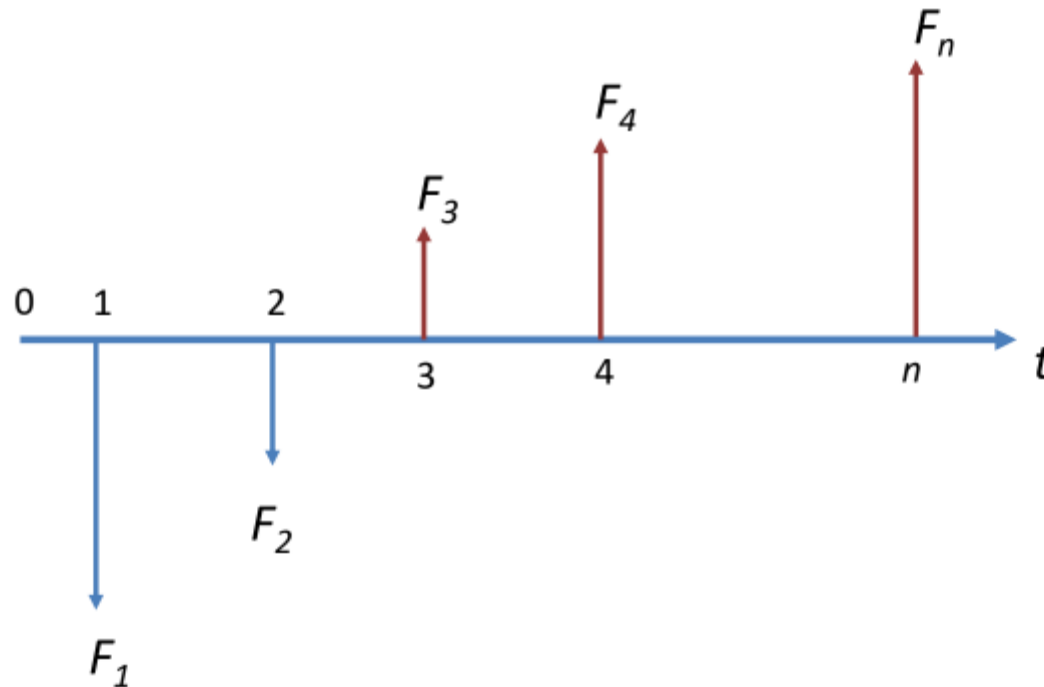
- Siamo in presenza di un'operazione di prestito quando:
 - un soggetto detto **creditore** o **mutuante** concede in prestito ad un altro soggetto detto **debitore** o **mutuatario** una certa somma **P** (capitale) per un certo tempo **n** (durata, scadenza).
 - Il debitore si impegna a restituire oltre al capitale gli interessi **I**.
 - Complessivamente il debitore deve restituire una somma pari ad **F** (montante).

CREDITORE vs DEBITORE

- Il **creditore** o **mutuante** è un individuo con preferenza temporale bassa: è propenso a cedere il suo attuale sovrappiù (P) in cambio di maggiori vantaggi futuri (I).
- Il **debitore** o **mutuatario** è un individuo con preferenza temporale alta: è propenso ad acquisire vantaggi attuali (P) in cambio dei suoi sovrappiù futuri (I).

Il diagramma dei flussi di cassa

Il diagramma dei flussi di cassa è la sequenza delle entrate e delle uscite di cassa che si susseguono nell'arco del ciclo di vita del progetto



L'INTERESSE SEMPLICE

- Si dice che un prestito è concesso ad interesse semplice quando questo è proporzionale al capitale ed al tempo.
- Soffermiamoci sul caso più semplice, una unica operazione in un unico periodo:

$$n = 1 \quad F = P + I_S \quad I_S = F - P = Pi$$

L'INTERESSE SEMPLICE

- Nel caso in cui la restituzione del prestito sia differito di n anni, gli accordi basati sull'interesse semplice comportano, invece:

$$I_s = F - P = Pin$$

$$F = P + Pin = P(1 + in)$$

L'INTERESSE COMPOSTO

- Gli interessi non vengono restituiti alla fine di ogni periodo di riferimento ma vengono sommati alla somma originaria: vengono **capitalizzati**.
- Adottiamo le seguenti notazioni:

all'anno 1

$$P = F_0$$

.....

.....

all'anno n

$$F = F_n$$

L'INTERESSE COMPOSTO

- L'investitore, in regime di capitalizzazione composta, fa fruttare anno dopo anno gli interessi maturati:

$$\text{anno 1} \qquad F_1 = P(1+i)$$

$$\text{anno 2} \qquad F_2 = F_1(1+i) = P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2$$

$$\text{anno 3} \qquad F_3 = F_2(1+i) = F_1(1+i)(1+i) = P(1+i)^3$$

.....

.....

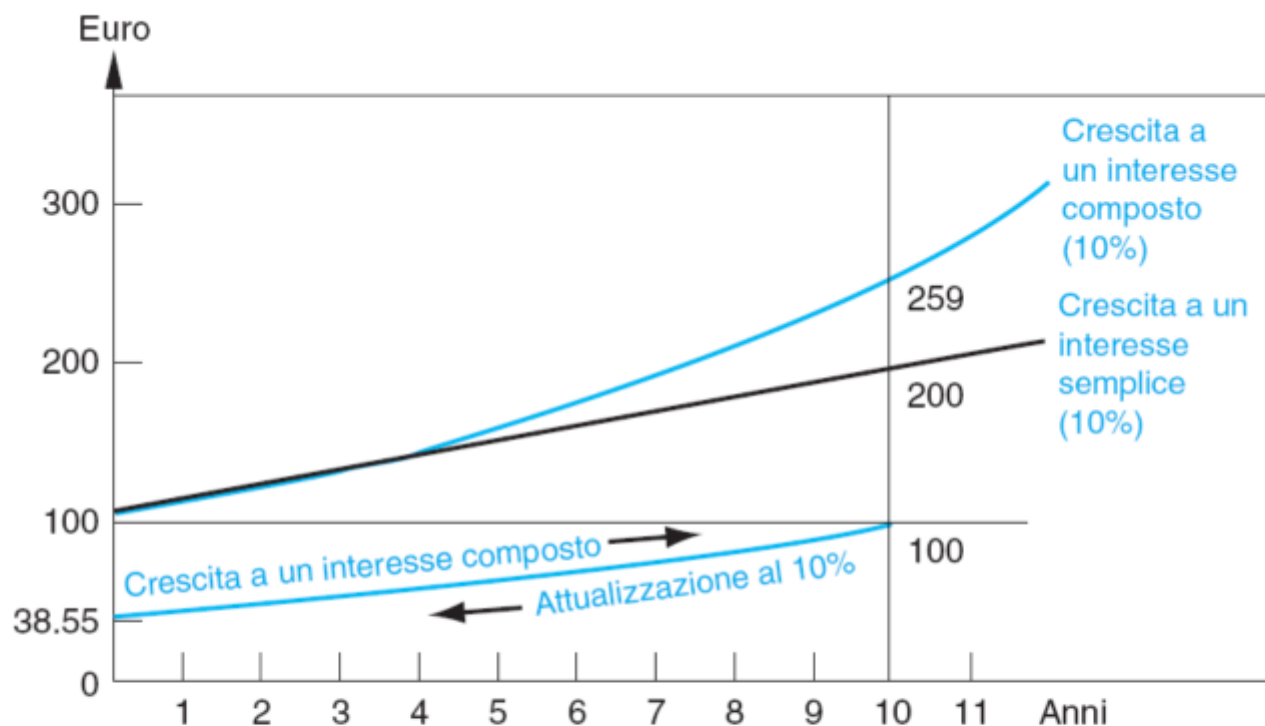
$$\text{anno } n \qquad F = F_n = P(1+i)^n$$

INTERESSE SEMPLICE VS COMPOSTO

INTERESSE SEMPLICE				INTERESSE COMPOSTO		
Anno	Valore iniziale	i	Valore finale	Valore iniziale	i	Valore finale
1	100	10	110	100	10	110
2	110	10	120	110	11	121
3	120	10	130	121	12.1	133.1
10	190	10	200	236	24	259
20	290	10	300	612	61	673
50	590	10	600	10 672	1 067	11 739
100	1090	10	1100	1 252 783	125 278	1 378 061
200	2090	10	2100	17 264 116 042	1 726 411 604	18 990 527 646
230	2240	10	2400	301 248 505 631	30 124 850 563	331 373 356 194

LA DIFFERENZA TRA I DUE REGIMI E' NULLA PER IL PRIMO ANNO, LIEVE PER IL SECONDO ANNO E DIVENTA GRANDISSIMA ALL'AUMENTARE DEGLI ANNI

Interesse composto vs Interesse semplice



Le due curve ascendenti mostrano l'aumento di valore di € 100 investiti a un tasso di interesse semplice e composto. Più a lungo sono investiti i fondi, maggiori sono i vantaggi dell'interesse composto. La curva in basso mostra che per ottenere € 100 tra 10 periodi devono essere investiti € 38.55 oggi. Leggendo la curva in senso opposto, si ricava che il valore attuale di € 100 da riceversi tra 10 anni è € 38.55.

ESEMPIO 1

- A capodanno del 2020, Sofia ha depositato 100€ in una banca ed è andata via con Alice, per tre anni, in Nuova Zelanda. Al suo ritorno troverà con la somma versata anche gli interessi maturati.
- Calcolare il montante di 100 € dopo tre anni in presenza di un tasso d'interesse annuo del 5% in regime di capitalizzazione semplice e composto.
- Valutare la differenza prodotta sul capitale finale.

ESEMPIO 1

- Calcolo del montante nell'ipotesi di interesse semplice:
- dati: $P=100$; $n=3$; $i=5\%$

$$F = P(1 + in) = 100 \cdot (1 + 0,05 \cdot 3) = 115\text{€}$$

$$I_s = 15\text{€}$$

ESEMPIO 1

- Calcolo del montante nell'ipotesi di interesse composto:

dopo 1 anno $F_1 = 100 \cdot (1,05) = 105\text{€}$

dopo 2 anni $F_2 = 105 \cdot (1,05) = 110,25\text{€}$

dopo 3 anni $F_3 = 110,25 \cdot (1,05) = 115,76\text{€}$

- oppure

$$F = P(1+i)^n = 100 \cdot (1,05)^3 = 115,76\text{€}$$

$$I_c = F - P = 15,76\text{€}$$

ESEMPIO 1

- La differenza (0,76€) fra I_s (15€) e I_c (15,76€) è dovuta, quindi, all'accumularsi di interessi su interessi nel corso del secondo e terzo periodo.
- Il divario fra gli interessi composti e semplici crescerà al crescere dell'orizzonte temporale n e del tasso i così come evidenziato dalla formula:

$$\Delta = I_c - I_s = P [(1 + i)^n - 1] - Pin = P[(1 + i)^n - 1 - in]$$

ESEMPIO 1

- Problema inverso:
- Sofia riceverà all'inizio del 2023 una somma pari a 115,76€ e ha dimenticato di annotare la somma appena versata. Sofia ricorda anche che il tasso di interesse applicato sarà del 5% composto annualmente. Quanto ha versato alla fine del 2019?

ESEMPIO 1

- La fine del 2019 coincide con l'inizio del 2020.

$$n = 3$$

$$F = 115,76\text{€}$$

$$P = F(1+i)^{-n} = 115,76(1,05)^{-3} = 100\text{€}$$

Anatocismo e interesse composto

- L'anatocismo è il calcolo degli interessi sugli interessi che sono già maturati su una somma dovuta.
- Gli interessi maturati si trasformano in capitale (in linguaggio tecnico si dice che si “capitalizzano”) ossia sono sommati all'importo dovuto e producono a loro volta interessi: è in questo caso che si parla di interesse composto.
- Fonte: www.bancaditalia.it

Anatocismo e interesse composto

- Il 1° gennaio il cliente deve alla banca una somma di 1.000 euro (capitale) sulla quale maturano nel corso dell'anno gli interessi al tasso dell'1% su base annuale.
- Il 31 dicembre la somma dovuta dal cliente sarà di 1.010 euro: 10 euro di interessi + 1.000 euro di capitale iniziale.
- Alla fine dell'anno successivo il debito del cliente produrrà interessi per 10 euro e 10 centesimi: la somma di 10 centesimi che si è aggiunta rappresenta proprio l'interesse maturato sui 10 euro di interessi aggiunti al capitale alla fine dell'anno precedente.
- Il debito complessivo del cliente è così salito a 1.020,10 euro.
- Fonte: www.bancaditalia.it

Il divieto di anatocismo

- **Per tutte le operazioni bancarie** le nuove regole* **vietano** qualsiasi forma di produzione di interessi sugli interessi dovuti dal cliente alla banca.
- Le nuove regole non cambiano il regime degli **interessi di mora**, ossia quelli previsti se il cliente non paga quanto dovuto alla scadenza prevista dal contratto (ad esempio in caso di mancato pagamento della rata di un mutuo o di un altro finanziamento).
- Fonte: www.bancaditalia.it

* Introdotte con il Decreto d'urgenza del Ministro dell'Economia e delle Finanze, Presidente del CICR, n. 343/2016

La produzione di interessi nei rapporti di conto corrente

- Nei rapporti di conto corrente il cliente, oltre a depositare somme, può anche utilizzare in modo flessibile un credito accordato dalla banca (scoperto di conto o apertura di credito).
- Pertanto quando parliamo di interessi parliamo sia degli **interessi creditorî o attivi**, ossia quelli spettanti al cliente sulle somme depositate (il cosiddetto saldo attivo), sia degli **interessi debitori o passivi**, ossia quelli che sono **dovuti dal cliente** per l'utilizzo delle somme messe a disposizione dalla banca.
- Fonte: www.bancaditalia.it

Calcolo e pagamento degli interessi

- **Regola 1.** Gli **interessi passivi** maturati **non possono produrre altri interessi**.
- **Regola 2.** Gli **interessi passivi e attivi** devono essere calcolati con la **stessa periodicità**, ossia secondo lo stesso intervallo di tempo. Questa regola valeva anche prima.
- **Regola 3.** Il periodo di **conteggio degli interessi non può essere inferiore a un anno** e il termine per il calcolo è fissato a una data certa, che è il **31 dicembre** di ciascun anno. Ciò significa che per il calcolo degli interessi passivi il periodo di riferimento **non può più essere**, ad esempio, **il trimestre**.
- **Regola 4.** Gli interessi passivi sono calcolati al 31 dicembre anche in caso di **contratti stipulati in corso d'anno** e, comunque, **al termine del rapporto**.
- **Regola 5.** Gli **interessi passivi** calcolati al 31 dicembre non sono dovuti a questa data, ma **al 1° marzo dell'anno successivo** a quello in cui sono maturati.
- Fonte: www.bancaditalia.it

Calcolo e pagamento degli interessi

- *Come si pagano gli interessi passivi*
- **Il cliente ha tre strade** per pagare e far proseguire normalmente il rapporto di credito con la banca, evitando gli effetti negativi di un inadempimento:
- se ha disponibilità sufficienti può pagare subito il debito da interessi, in contanti o con un bonifico da un altro conto, evitando qualsiasi forma di capitalizzazione e quindi qualsiasi effetto di aumento del debito;
- può estinguerlo autorizzando l'addebito in conto;
- può concordare con la banca, con un'apposita clausola contrattuale, che le somme in entrata sul suo conto (ad esempio bonifici in arrivo) siano impiegate per estinguere il debito da interessi. È utile verificare cosa prevede il proprio contratto al riguardo.
- Fonte: www.bancaditalia.it

Calcolo e pagamento degli interessi

Cosa accade nel caso in cui il cliente autorizza l'addebito in conto?

- In caso di conto capiente, ossia con un saldo attivo uguale o superiore alla somma dovuta a titolo di interessi, gli interessi dovuti dal cliente sono pagati perché si compensano con il saldo attivo, che quindi si azzerava o si riduce dell'importo corrispondente al debito da interessi.
- In caso di conto con un saldo negativo, dal 1° marzo la somma dovuta a titolo di interessi si somma al capitale (si "trasforma" in capitale) e produce a sua volta interessi. La somma inizialmente dovuta quindi aumenta.
- Fonte: www.bancaditalia.it

TASSO NOMINALE E TASSO EFFETTIVO

- Il **tasso d'interesse effettivo** è il tasso a cui il denaro viene concretamente prestato ed è definito per periodo d'interesse (mensile, trimestrale, annuo ecc.)
- Il **tasso d'interesse nominale** non coincide con il tasso effettivo ed è definito solo su base annua. E' pari al tasso effettivo (per periodo di interesse) moltiplicato per il numero di periodi di interesse contenuti in un anno. Per esempio:
 - Tasso d'interesse effettivo mensile = 1%
 - Tasso d'interesse nominale = $1 \times 12 = 12\%$

TASSO NOMINALE E TASSO EFFETTIVO

- Il **tasso effettivo** considera il frazionamento dei periodi di pagamento e comprende anche le spese di istruttoria e di erogazione del prestito
- Il **tasso d'interesse nominale** è ingannevole perché più basso di quello reale



TAN (Tasso Annuale Netto) contrassegna il tasso annuale al netto delle spese

TAEG (Tasso Annuale Effettivo Globale) contrassegna il tasso annuale effettivo al lordo delle spese

TASSO NOMINALE E TASSO EFFETTIVO

- r è il tasso d'interesse nominale annuo,
- $i_{\text{eff},l}$ è il tasso d'interesse effettivo nell'intervallo di tempo l ,
- l è la durata dell'intervallo di tempo (espresso in anni).
Quindi se la durata dell'intervallo di tempo è un anno $l=1$; se è 2 anni o 24 mesi $l=2$; se è 6 mesi $l=0,5=1/2$, ecc.
- m è il reciproco della durata del periodo di capitalizzazione (espresso in anni) e, quindi, il numero di periodi di composizione in un anno. In regime di capitalizzazione semestrale $m=1/(1/2)=1/(0,5)=2$, mentre in regime di capitalizzazione mensile $m=1/(1/12)=12$

TASSO NOMINALE E TASSO EFFETTIVO

- r/m è il tasso d'interesse effettivo nel periodo di capitalizzazione.
- Per esempio:
 - un tasso nominale del 12% composto mensilmente corrisponde ad un tasso effettivo mensile del 1%;
 - un tasso nominale del 18% composto semestralmente corrisponde ad un tasso effettivo semestrale del 9%.
 - Se $m=1$ siamo in presenza di un tasso nominale con un unico periodo di capitalizzazione. In questo caso particolare, il tasso nominale ed il tasso effettivo coincidono.

TASSO NOMINALE E TASSO EFFETTIVO

- Per calcolare il tasso di interesse effettivo nell'intervallo di tempo l si usa la seguente relazione:

$$i_{eff,l} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{lm} - 1$$

- dove **lm** è il numero dei periodi di capitalizzazione nell'intervallo di tempo l .

ESEMPIO 1

- Calcoliamo insieme il tasso effettivo annuale ($l=1$) equivalente ad un tasso nominale del 12% composto mensilmente ($m=12$):

$$i_{eff,l} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{lm} - 1$$

$$i_{eff,l=1} = \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12} - 1 = 0,1268 = 12,68\%$$

ESEMPIO 2

- Nella tabella è possibile osservare la differenza tra tasso nominale e tasso effettivo annuale per vari valori di m (numero di periodi di composizione) e di r (tasso nominale).

<i>Frequenza di composizione</i>	<i>Numero di periodi di composizione, m</i>	<i>Tasso effettivo annuale per un tasso nominale di</i>				
		3%	4%	5%	6%	12%
Annuale	1	3,000%	4,000%	5,000%	6,000%	12,000%
Semestrale	2	3,022%	4,040%	5,062%	6,090%	12,360%
Trimestrale	4	3,030%	4,054%	5,084%	6,121%	12,486%
Bimestrale	6	3,034%	4,060%	5,095%	6,136%	12,551%
Mensile	12	3,036%	4,065%	5,101%	6,146%	12,590%
Quotidiana	365	3,038%	4,067%	5,105%	6,152%	12,616%

Esercizi

1. Calcolare il montante F di 10.000 € con un interesse semplice del 15% annuo, dopo 4 anni.
2. Del precedente esercizio calcolare il montante in regime di capitalizzazione composta.
3. Qual è il tasso d'interesse composto annualmente se investendo 5.000€ otterrò 7.693€ dopo 5 anni?
4. Risolvere l'esercizio precedente in regime di capitalizzazione semplice.
5. Se l'interesse è pari al 10% composto annualmente, quanti anni sono necessari affinché un investimento di 2.000€ cresca fino a 3.221€?
6. Risolvere l'esercizio precedente in regime di capitalizzazione semplice.

Esercizio 1

Calcolare il montante F di 10.000 € con un interesse semplice del 15% annuo, dopo 4 anni.

$$I = P \cdot i \cdot n = 10.000 \cdot 0,15 \cdot 4 = 6.000\text{€}$$

$$F = P + I = 16.000\text{€}$$

Esercizio 2

Del precedente esercizio calcolare il montante in regime di capitalizzazione composta.

$$F = P(1 + i)^n = 10.000 \left(\overset{F/P, 15, 4}{1,75} \right) = 17.500\text{€}$$



Fattore di capitalizzazione
di un singolo pagamento

$$\left(\overset{F}{P}, i, n \right)$$

Esercizio 3

Qual è il tasso d'interesse composto annualmente se investendo 5.000€ otterrò 7.693€ dopo 5 anni?

$$F = P(1+i)^n$$

$$\frac{F}{P} = (1+i)^n = \frac{7693}{5000} = 1,54$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 = \sqrt[5]{1,54} - 1 = 9,02\%$$

Esercizio 4

Risolvere l'esercizio precedente in regime di capitalizzazione semplice.

$$F = P(1 + ni)$$

$$\frac{F}{P} = (1 + ni)$$

$$i = \frac{\left(\frac{F}{P} - 1\right)}{n} = \frac{0,54}{5} = 10,8\%$$

Esercizio 5

Se l'interesse è pari al 10% composto annualmente, quanti anni sono necessari affinché un investimento di 2.000€ cresca fino a 3.221€?

$$\ln\left(\frac{F}{P}\right) = n \ln(1+i)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{F}{P}\right)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left(\frac{3.221}{2.000}\right)}{\ln(1,1)} = \frac{\ln(1,61)}{\ln(1,1)} \cong 5 \text{anni}$$

Esercizio 6

Risolvere l'esercizio precedente in regime di capitalizzazione semplice.

$$F = P(1 + ni)$$

$$n = \frac{\left(\frac{F}{P} - 1\right)}{i} = \frac{0,61}{0,1} \cong 6anni$$