

Il calcolo del TIR



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Francesca Di Pillo

Tasso interno di rendimento

Il tasso interno di rendimento (TIR o in inglese Internal Rate of Return - IRR) è definito come quel tasso d'interesse che rende identici i valori dei flussi positivi e negativi di un progetto.

Il TIR esprime il rendimento effettivo di un progetto o anche il costo massimo della raccolta, oltre il quale l'iniziativa sarebbe non economica.

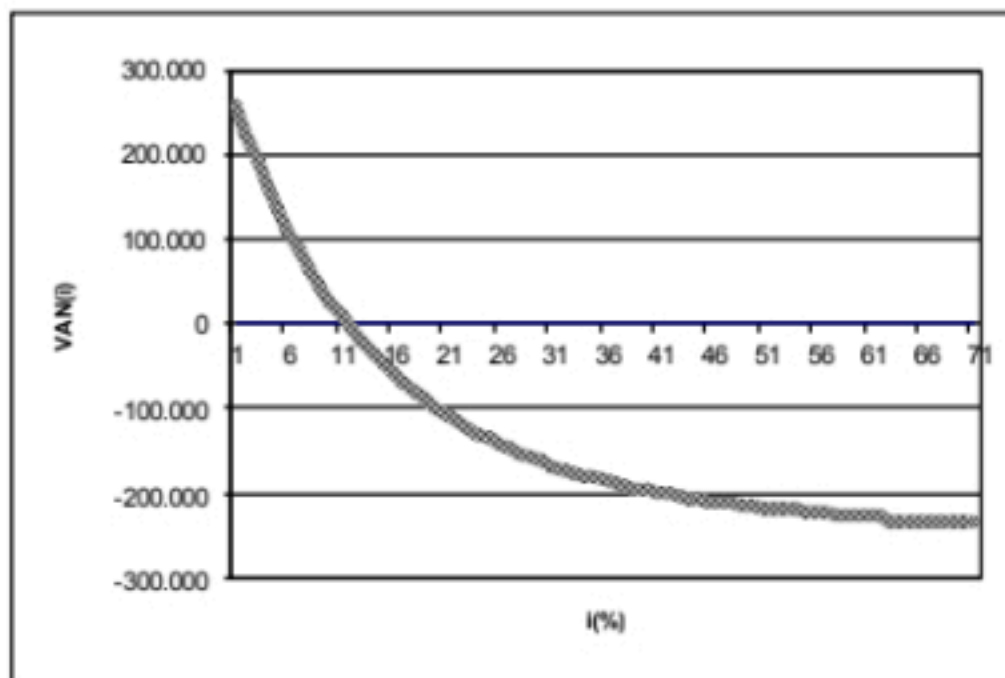
Tecnicamente è quel tasso d'interesse che rende pari a zero il valore attuale netto.

$$\sum_{t=0}^N \frac{F_t}{(1 + \text{TIR})^t} = 0$$

Tasso interno di rendimento

Criterio di accettazione

- Se $TIR > \text{costo opportunità del capitale}$ il progetto va accettato
- $TIR < \text{costo opportunità del capitale}$ il progetto va rifiutato



Il calcolo del TIR

Esempio 1

- Un'impresa sta considerando le seguenti alternative d'investimento mutuamente esclusive

| | A | B | C |
|------------------------------|----------|----------|----------|
| investimento iniziale | 45000 | 36000 | 57000 |
| reddito annuo | 13000 | 12000 | 14000 |

- La durata delle alternative è valutata in 6 anni, il costo opportunità del capitale è del 10%. Qual è l'alternativa più conveniente per l'impresa? Decidere utilizzando il TIR.

Esempio 1

$$VAN_A = -45.000 + 13.000x \left({}^P/A, TIR_A, 6 \right) = 0$$

$$\left({}^P/A, TIR_A, 6 \right) = \frac{45.000}{13.000} = 3,46 < 4,36 = \left({}^P/A, 10, 6 \right)$$

$$TIR_A > i$$

$$VAN_B = -36.000 + 12.000x \left({}^P/A, TIR_B, 6 \right) = 0$$

$$\left({}^P/A, TIR_B, 6 \right) = \frac{36.000}{12.000} = 3 < 4,36 = \left({}^P/A, 10, 6 \right)$$

$$TIR_B > i$$

Il calcolo del TIR

Esempio 1

$$VAN_C = -57.000 + 14.000x \left({}^P/A_{TIR_C,6} \right) = 0$$

$$\left({}^P/A, TIR_C, 6 \right) = \frac{57.000}{14.000} = 4,07 < 4,36 = \left({}^P/A, 10, 6 \right)$$

$$TIR_C > i$$

$$\left({}^P/A, TIR_B, 6 \right) < \left({}^P/A, TIR_A, 6 \right) < \left({}^P/A, TIR_C, 6 \right)$$
$$3 < 3,46 < 4,07$$

$$TIR_B > TIR_A > TIR_C > i$$

L'alternativa migliore è la B

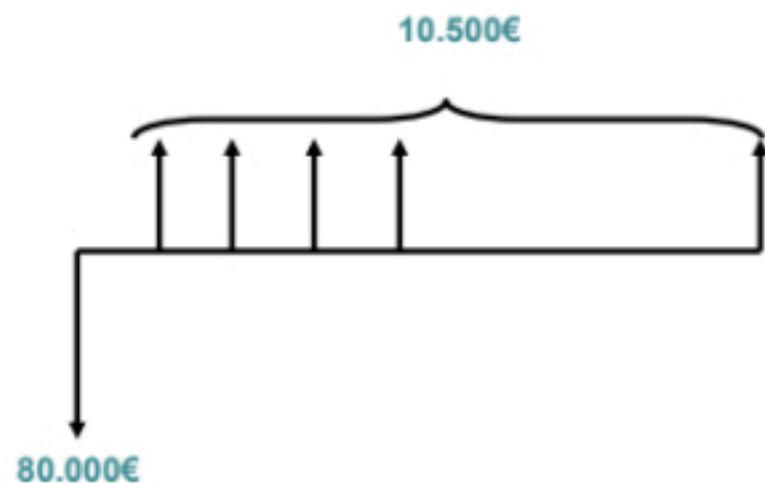
Il calcolo del TIR

Esempio 2

Un macchinario è stato progettato e costruito per 80.000€ con la stima che esso avrebbe consentito un risparmio di costi pari a 10.500€ l'anno per 15 anni. Se il valore di realizzo dopo 15 anni è pari a 0, qual era il tasso interno di rendimento previsto (TIR)?

Il calcolo del TIR

Esempio 2



$$VAN(i^*) = VAN(TIR) = 0$$

$$VAN(i^*) = -80.000 + 10.500 \left(P/A, i^*, 15 \right) = 0$$

$$\left(P/A, i^*, 15 \right) = \frac{80.000}{10.500} = 7,62$$

Il calcolo del TIR

Esempio 2

dalle tavole finanziarie

$$\left(P/A, 9, 15 \right) = 8,06$$

$$\left(P/A, 10, 15 \right) = 7,61$$

$$TIR = i^* = 9 + (10 - 9) \frac{7,62 - 8,06}{7,61 - 8,06} = 9,98\%$$

Il calcolo del TIR

Esempio 3

Considerare le seguenti alternative d'investimento ed operare una scelta in base al metodo del TIR.

| | t=0 | t=1 | t=2 |
|----------|------------|------------|------------|
| A | -1.300€ | 800€ | 900€ |
| B | -1.300€ | 600€ | 1.000€ |
| C | -900€ | 500€ | 800€ |

Il calcolo del TIR

Esempio 3

| | t=0 | t=1 | t=2 |
|----------|------------|------------|------------|
| A | -1.300€ | 800€ | 900€ |

$$VAN_A(i_A^*) = -1.300 + \frac{800}{(1+i_A^*)} + \frac{900}{(1+i_A^*)^2} = 0$$

$$x_A = \frac{1}{(1+i_A^*)} \quad 9x_A^2 + 8x_A - 13 = 0 \quad x_A = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 117}}{9}$$

$$i_A^* = \textcolor{red}{TIR}_A = \frac{1}{x_A} - 1 = \frac{9}{-4 + \sqrt{16 + 117}} - 1 = \textcolor{red}{19,48\%}$$

Il calcolo del TIR

Esempio 3

| | t=0 | t=1 | t=2 |
|----------|------------|------------|------------|
| B | -1.300€ | 600€ | 1.000€ |

$$VAN_B(i_B^*) = -1.300 + \frac{600}{(1+i_B^*)} + \frac{1.000}{(1+i_B^*)^2} = 0$$

$$x_B = \frac{1}{(1+i_B^*)} \quad 10x_B^2 + 6x_B - 13 = 0 \quad x_B = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 130}}{10}$$

$$i_B^* = \textcolor{red}{TIR}_B = \frac{1}{x_B} - 1 = \frac{10}{-3 + \sqrt{9 + 130}} - 1 = \textcolor{red}{13,77\%}$$

Il calcolo del TIR

Esempio 3

| | t=0 | t=1 | t=2 |
|----------|------------|------------|------------|
| C | -900€ | 500€ | 800€ |

$$VAN_C(i_C^*) = -900 + \frac{500}{(1+i_C^*)} + \frac{800}{(1+i_C^*)^2} = 0$$

$$x_C = \frac{1}{(1+i_C^*)} \quad 8x_C^2 + 5x_C - 9 = 0 \quad x_C = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 288}}{16}$$

$$i_C^* = \textcolor{red}{TIR}_C = \frac{1}{x_C} - 1 = \frac{16}{-5 + \sqrt{25 + 288}} - 1 = \textcolor{red}{26,07\%}$$

in base al TIR l'alternativa migliore è C

Il calcolo del TIR

Esempio 4

Una società sta vagliando 6 proposte d'investimento. Ogni proposta ha una vita utile stimata in 10 anni ed un valore di recupero nullo.

| | A | B | C | D | E | F |
|-------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Esborso iniziale | 80.000€ | 40.000€ | 10.000€ | 30.000€ | 15.000€ | 90.000€ |
| Introiti annui | 11.000€ | 8.000€ | 2.000€ | 7.150€ | 2.500€ | 14.000€ |

- a) Assumendo che la società abbia possibilità finanziarie illimitate e che i progetti siano indipendenti, si determinino le proposte accettabili utilizzando il metodo del TIR (considerando $i=12\%$).
- b) Si determini la proposta migliore (l'unica accettabile) nel caso in cui progetti risultino mutuamente esclusivi utilizzando il metodo del VAN (considerando $i=12\%$).

Il calcolo del TIR

Esempio 4

a) Se il **TIR (progetto)** $< i \rightarrow$ il progetto non è accettabile

$$VAN_A(TIR_A) = -80.000 + 11.000 \left({}^P/A, TIR_A, 10 \right) = 0$$

$$\left({}^P/A, TIR_A, 10 \right) = \frac{80.000}{11.000} = 7,27 > \left({}^P/A, i, 10 \right) = 5,65$$

Quindi $TIR_A < i$



A respinto

Il calcolo del TIR

Esempio 4

$$VAN_B(TIR_B) = -40.000 + 8.000 \left({}^P/A, TIR_B, 10 \right) = 0$$

$$\left({}^P/A, TIR_B, 10 \right) = \frac{40.000}{8.000} = 5 < \left({}^P/A, i, 10 \right) = 5,65 \quad TIR_B > i \quad \boxed{\text{B accolto}}$$

$$VAN_C(TIR_C) = -10.000 + 2.000 \left({}^P/A, TIR_C, 10 \right) = 0$$

$$\left({}^P/A, TIR_C, 10 \right) = \frac{10.000}{2.000} = 5 < \left({}^P/A, i, 10 \right) = 5,65 \quad TIR_C > i \quad \boxed{\text{C accolto}}$$

Il calcolo del TIR

Esempio 4

$$VAN_D(TIR_D) = -30.000 + 7.150 \left({}^{P/A,TIR_D,10} \right) = 0$$

$$\left({}^{P/A,TIR_D,10} \right) = \frac{30.000}{7.150} = 4,2 < 5,65 \quad TIR_D > i$$

D accolto

$$VAN_E(TIR_E) = -15.000 + 2.500 \left({}^{P/A,TIR_E,10} \right) = 0$$

$$\left({}^{P/A,TIR_E,10} \right) = \frac{15.000}{2.500} = 6 > 5,65 \quad TIR_E < i$$

E respinto

$$VAN_F(TIR_F) = -90.000 + 14.000 \left({}^{P/A,TIR_F,10} \right) = 0$$

$$\left({}^{P/A,TIR_F,10} \right) = \frac{90.000}{14.000} = 6,43 > 5,65 \quad TIR_F < i$$

F respinto

Il calcolo del TIR

Esempio 4

b) Per confrontare i progetti utilizziamo **VAN** senza prendere in considerazione i progetti respinti in **(a)**

$$VAN_B = -40.000 + 8.000 \left(\frac{P}{A, 12, 10} \right)_{5,65} = 5.200$$

$$VAN_C = -10.000 + 2.000 \left(\frac{P}{A, 12, 10} \right)_{5,65} = 1.300$$

$$VAN_D = -30.000 + 7.150 \left(\frac{P}{A, 12, 10} \right)_{5,65} = 10.397,5$$

$$VAN_D > VAN_B > VAN_C$$

D progetto migliore

Il calcolo del TIR

Esempio 5

Confrontare i seguenti flussi di cassa utilizzando VAN, AE (tasso di valutazione $i=10\%$) e TIR.

| | t=0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------|------------|----------|----------|----------|----------|
| A | -1.000€ | 500€ | 500€ | 500€ | 500€ |
| B | -1.200€ | 650€ | 650€ | 650€ | 650€ |

$$VAN_A = -1.000 + 500 \left(\frac{P/A, 10, 4}{3,17} \right) = 585$$

$$AE_A = VAN_A \left(\frac{A/P, 10, 4}{0,32} \right) = 187,2$$

$$VAN_B = -1.200 + 650 \left(\frac{P/A, 10, 4}{3,17} \right) = 860,5$$

$$AE_B = VAN_B \left(\frac{A/P, 10, 4}{0,32} \right) = 275,36$$

B progetto migliore

Il calcolo del TIR

Esempio 5

$$VAN_A(TIR_A) = -1.000 + 500 \left(\frac{P}{A, TIR_A, 4} \right) = 0 \quad \left(\frac{P}{A, TIR_A, 4} \right) = 2$$

$$VAN_B(TIR_B) = -1.200 + 650 \left(\frac{P}{A, TIR_B, 4} \right) = 0 \quad \left(\frac{P}{A, TIR_B, 4} \right) = 1,84$$

$$\left(\frac{P}{A, TIR_A, 4} \right)_2 > \left(\frac{P}{A, TIR_B, 4} \right)_{1,84} \quad TIR_B > TIR_A$$

B progetto migliore

$$\left(\frac{P}{A, 10, 4} \right)_{3,17} > \left(\frac{P}{A, TIR_A, 4} \right)_2 > \left(\frac{P}{A, TIR_B, 4} \right)_{1,84} \quad TIR_B > TIR_A > i$$

B accettabile

Il calcolo del TIR

Esempio 5

L'esercizio si poteva risolvere anche calcolando i due TIR tramite l'interpolazione lineare.
Avremmo così ottenuto:

$$TIR_A = 35\%$$

B progetto migliore

$$TIR_B = 40\%$$

Il calcolo del TIR

Esempio 6

Un'azienda deve attivare un progetto d'investimento da scegliere tra i due seguenti che prevedono:

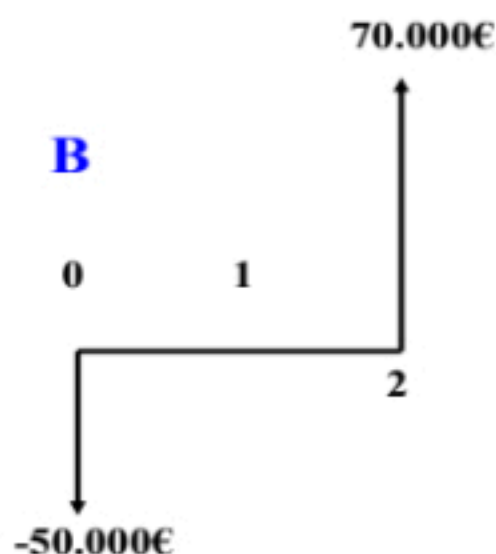
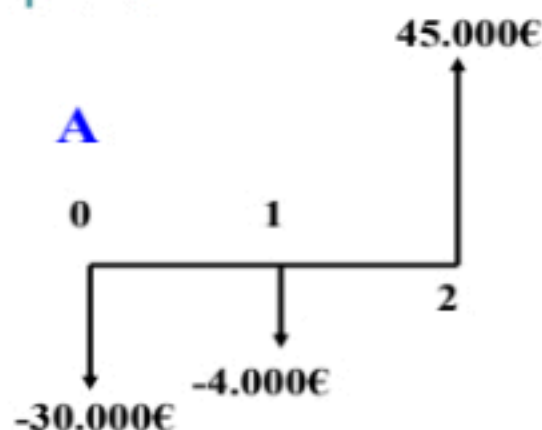
- a) un versamento immediato di 30.000€, un ulteriore versamento di 4.000€ dopo un anno ed una entrata di 45.000€ fra 2 anni;
- b) un versamento immediato di 50.000€ ed una sola entrata di 70.000€ dopo 2 anni.

Calcolare:

- 1) quale progetto è migliore usando il TIR;
- 2) quali valori del tasso "i" avrebbero condotto alla stessa scelta utilizzando il VAN.

Il calcolo del TIR

Esempio 6



$$VAN_A = -30.000 - 4.000(1+i)^{-1} + 45.000(1+i)^{-2} = 0$$

$$x = (1+i)^{-1} \quad 45x^2 - 4x - 30 = 0 \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 45 \cdot 30}}{45}$$

$$i = TIR_A = \frac{1}{x} - 1 = \frac{45}{2 + \sqrt{4 + 1350}} - 1 = 15,99\%$$

Il calcolo del TIR

Esempio 6

$$VAN_B = -50.000 + 70.000(1+i)^{-2} = 0$$

$$x = (1+i)^{-1} \quad -5 + 7x^2 = 0 \quad x^2 = \frac{5}{7} \quad x = \pm \sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$i = TIR_B = \frac{1}{x} - 1 = \sqrt{\frac{7}{5}} - 1 = 18,32\% > TIR_A = 15,99\%$$

Per risolvere il secondo quesito si deve risolvere una disequazione con i incognita

$$VAN_B(i) > VAN_A(i) \quad 70x^2 - 50 > 45x^2 - 4x - 30$$

Il calcolo del TIR

Esempio 6

$$25x^2 + 4x - 20 > 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 500}}{25} = \begin{cases} \frac{-2 + \sqrt{4 + 500}}{25} \\ \frac{-2 - \sqrt{4 + 500}}{25} \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{1+i} > \frac{-2 + \sqrt{4 + 500}}{25}$$

$$i < \frac{25}{-2 + \sqrt{504}} - 1 = 22,25\%$$

Per $i < 22,25\%$ il metodo del VAN restituisce lo stesso risultato del metodo del TIR

