Fondamenti di Comunicazioni

Corso: Fondamenti di comunicazioni e Internet (canale I e II)
E Telecomunicazioni

Lezione 4-5: correlazione, convoluzione, filtri + esercitazione

Tiziana Cattai
email: tiziana.cattai@uniroma1.it

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Materiale didattico: Tiziana Cattai, Stefania Colonnese, Roberto Cusani

Valore medio di un segnale e di una sequenza

Segnale a durata finita

Il valore medio di un segnale continuo x(t) è calcolato come l'integrale del segnale diviso per la sua durata totale T=b-a:

- $\mu_x^I = \frac{1}{T}\int_a^b x(t)dt$

Definizione analoga per una sequenza:

- $\mu_x^I = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n$

Segnale a durata infinita

- $\mu_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$

- Definizione analoga per una sequenza
- $\mu_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N}\sum_{-N}^{N} x_n$

Energia di un segnale

- Definition: $\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt \geq 0$ $\varepsilon_x = \sum_n |x_n|^2$
- Definition: **Energy signal**: $0 < \mathcal{E}_x < +\infty$
- Definition: **Impulsive signal** $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$

Potenza di un segnale

- ✓ Def: $$P_x = \lim_{\Delta t \to +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \left| x(t) \right|^2 dt \geq 0$$

$$P_x = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} |x_n|^2$$

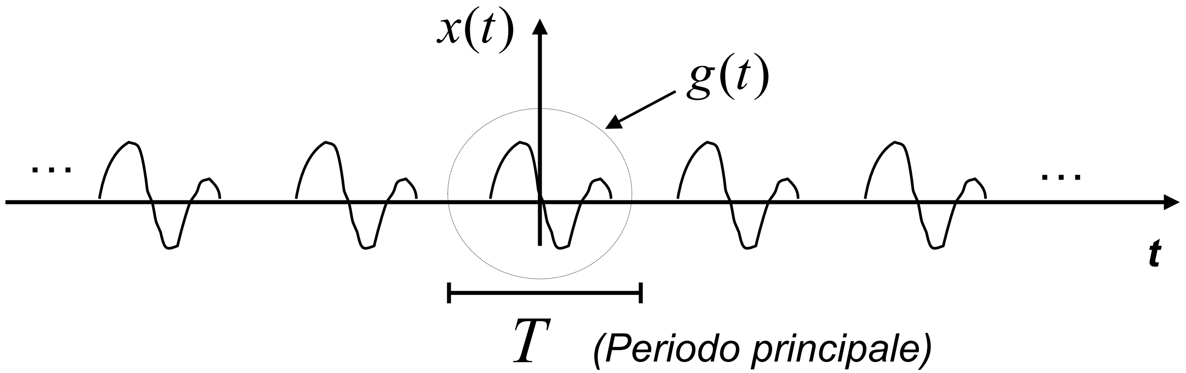
- ✓ Def: Power signal $0 < P_x < +\infty$

<u>Constant:</u> $x(t) = c$

$$P_x = \lim_{\Delta t \to +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \left| c \right|^2 dt = \left| c \right|^2 \lim_{\Delta t \to +\infty} \frac{1}{\Delta t} \Delta t = \left| c \right|^2$$

Segnale periodico

$$x(t) = x(t + nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t - nT) \qquad T \equiv periodo$$



- ✓ Potenza di un segnale periodico

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

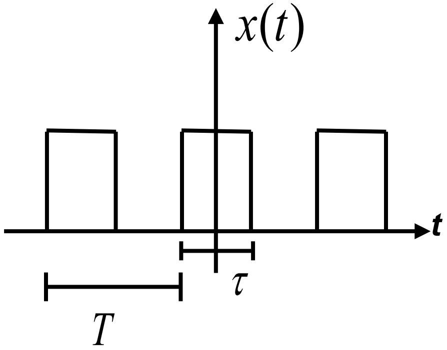
- ✓ Un segnale periodico è un segnale di potenza

Segnali periodici

Treno di "impulsi" rettangolari:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} rect_{\tau}(t - nT)$$

$$\tau / T \equiv \text{"duty cycle"} \leq 1$$



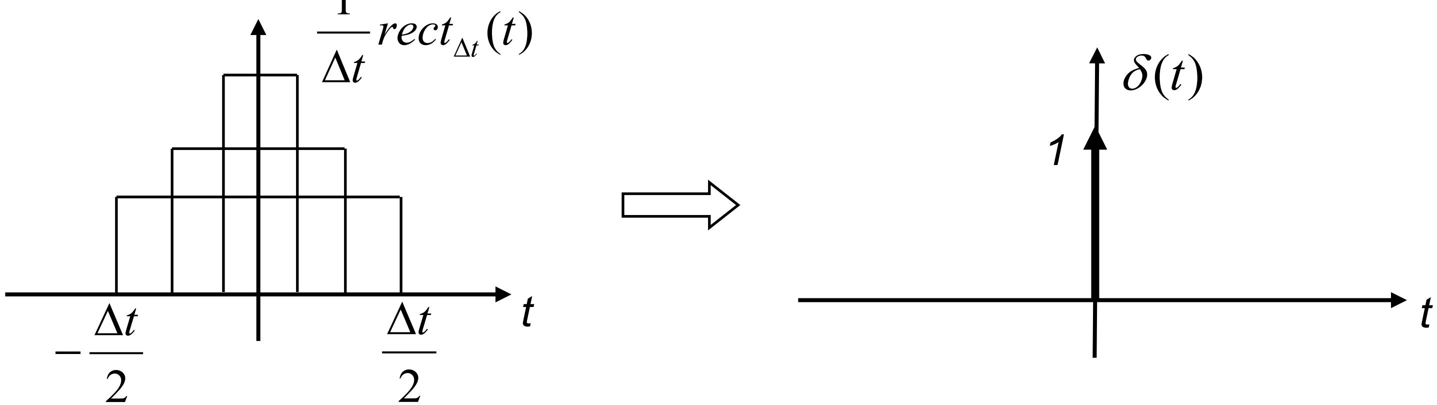
$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [rect_{\tau}(t - nT)]^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1^2 dt = \frac{1}{T}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = \frac{\tau}{T}$$

Impulso matematico

✓ E' un segnale di durata brevissima (al limite, zero) e di ampiezza elevatissima (al limite, infinita) con integrale unitario in un intervallo comprendente l'origine unitario

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{1}{\Delta t} rect_{\Delta t}(t)}_{\textit{area 1}}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



Proprietà dell'impulso matematico

- ✓ $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$ (l'impulso matematico ha area unitaria)
- ✓ $$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0)dt = 1, \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$
- ✓ $$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$ (proprietà di campionamento)

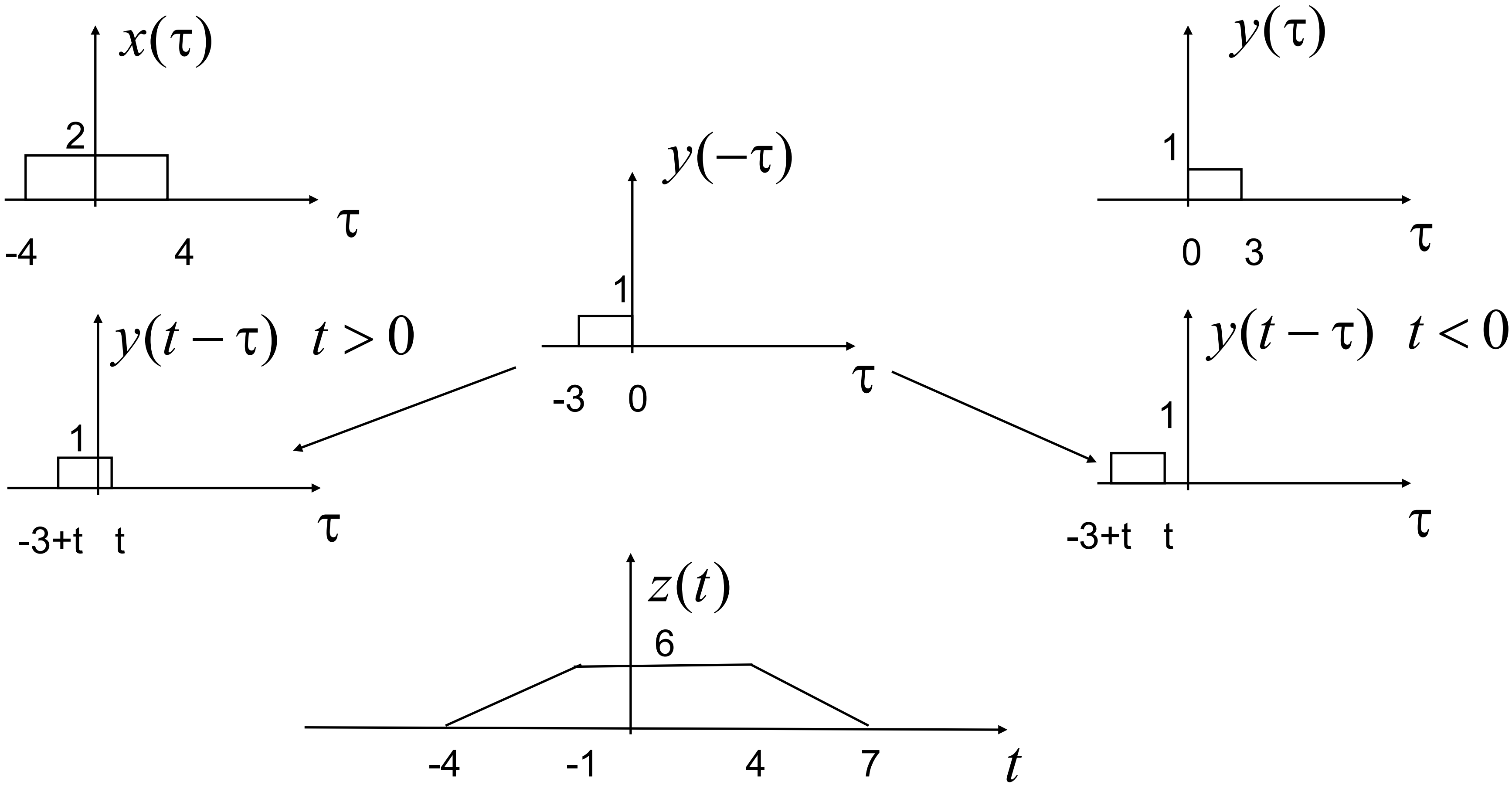
Convoluzione: Definizione e calcolo

- ✓ Def: $$\varphi_{xy}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau)d\tau = x(t) * y(t)$$

$$\varphi_n = \sum_k x_k y_{n-k}$$

1. Graficare i due segnali $x(.)$ e $y(.)$ come funzioni di τ ottenendo così $x(\tau)$ ed $y(\tau)$
2. Ribaltare il segnale $y(\tau)$ rispetto all'asse delle ordinate ottenendo $y(-\tau)$
3. Traslare $y(-\tau)$ della quantità t lungo l'asse τ. Quando $t > 0$ allora $y(t-\tau)$ va traslato di t verso destra. Quando invece $t < 0$, $h(-\tau)$ va traslata di t verso sinistra
4. Per ogni valore di $\tau \in (-\infty, +\infty)$si calcola il prodotto $x(\tau)y(t-\tau)$
5. Si integra rispetto a τ la funzione $x(\tau)y(t-\tau)$ e cioè si calcola l'area sottesa dalla funzione $x(\tau)y(t-\tau)$. La suddetta area è proprio il valore $z(t)$ assunto dalla convoluzione all'istante t.

Convoluzione: Esempio di calcolo



https://mathworld.wolfram.com/Convolution.html

Convoluzione: Proprietà

- L'operazione di convoluzione è commutativa, ossia

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

- L'operazione di convoluzione è associativa, cioè

$$[x(t) * y(t)] * z(t) = x(t) * [y(t) * z(t)]$$

- L'operazione di convoluzione è distributiva rispetto alla somma di segnali

$$[x(t) + z(t)] * y(t) = [x(t) * y(t)] + [y(t) * z(t)]$$

- La convoluzione di $x(t)$ con $\delta(t - t_0)$ trasla $x(t)$ di t_0, ossia

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

- Dati due segnali $x(t)$, $y(t)$ di durata Δ_x e Δ_y ,la convoluzione dei due segnali ha durata

$$\Delta_x + \Delta_y$$

Attraversamento di un sistema tempo-continuo da parte di un segnale analogico

- ✓ Un sistema S è un blocco che trasforma un segnale di ingresso: x(t) in uno di uscita: y(t) = f (x(t))

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\;S\;} \longrightarrow y(t) = f(x(t))$$

- ✓ Sistema Lineare:

$$\begin{matrix} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

(sovrapposizione degli effetti)

- ✓ Sistema Permanente:

$$x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t-\tau) \rightarrow y(t-\tau)$$ (invarianza nel tempo)

- ✓ Un sistema lineare e permanente (LP) è detto “**filtro**”

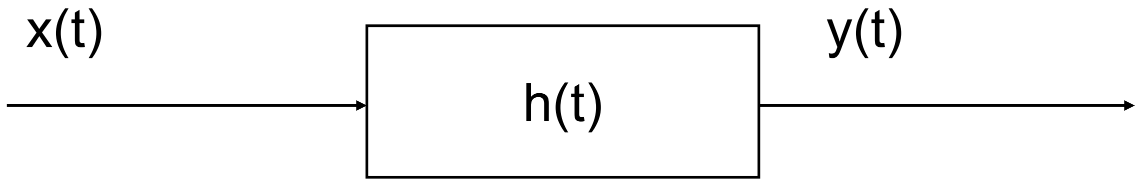
Risposta impulsiva di un sistema lineare e permanente

- ✓ La risposta impulsiva h(t) di un sistema lineare e permanente (filtro) è definita come l'uscita y(t) del sistema quando all'ingresso è applicato un impulso matematico $x(t)=\delta(t)$

<u>Proprietà elementari di h(t)</u>

- ✓ Permanenza $\quad x(t)=\delta(t-t_0)\rightarrow y(t)=h\left(t-t_0\right)$
- ✓ Linearità $\quad x(t)=a\delta(t_0)+b\delta(t_0)\rightarrow y(t)=ah\left(t\right)+bh\left(t\right)$

Uscita di un Sistema LP



- ✓ Se il sistema è LP con risposta impulsiva h(t), allora l'uscita y(t) corrispondente ad un generico segnale di ingresso x(t) è pari a

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t), \quad -\infty < t < +\infty$$

- ✓ L'uscita è data dall'integrale di convoluzione tra l'ingresso x(t) e la risposta impulsiva h(t) del filtro.

Uscita di un Sistema LP

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Filtro h(t)}} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

- ✓ campionamento dell'impulso matematico

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

- ✓ permanenza del sistema

$$x(t) = \delta(t-\tau) \rightarrow y(t) = h(t-\tau)$$

- ✓ linearità del sistema

$$d\tau\, x(\tau)\delta(t-\tau) \rightarrow d\tau\, x(\tau)\, h(t-\tau)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)d\tau = y(t)$$

Trasformazione istantanee (senza memoria)

Un filtro, tramite la sua h(t), fa dipendere l'uscita da un tratto significativo del segnale di ingresso (da tutto il segnale se h(t) è illimitata nel tempo) e non solo dal valore che la x(t) assume in un certo istante.

Esiste poi una categoria di trasformazioni istantanee (senza memoria) in cui il valore dell'uscita all'istante t dipende solo dal valore dell'ingresso x(t) allo stesso istante.

$$y(t) = T\{x(\tau)\}$$

- ✓ Ritardo $\quad x(t) \to y(t) = x(t - t_0) \quad$ è LP con $h(t) = \delta(t - t_0)$
- ✓ Moltiplicazione per costante $\quad x(t) \to \underset{\substack{\uparrow \\ c}}{\otimes} \to y(t) = cx(t) \quad$ è LP con $h(t) = c\delta(t)$
- ✓ Quadratore $\quad y(t) = x^2(t) \quad$ no L, sì P
- ✓ Lineare $\quad y(t) = ax(t) + b \quad$ sì L, sì P
- ✓ Segno $\quad y(t) = \mathrm{sign}[\mathrm{x(t)}] = \begin{cases} +1, \text{ se } \mathrm{x(t)} \geq 0 \\ -1, \text{ se } \mathrm{x(t)} < 0 \end{cases} \quad$ no L, sì P

Convoluzione e Correlazione (segnali di energia)

Convoluzione:

$$\varphi_{xy}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau)d\tau = x(t) * y(t)$$

Correlazione:

$$R_{xy}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x^*(\tau) \cdot y(t+\tau)d\tau = x(t) \circledast y(t)$$

La correlazione si può esprimere come un'opportuna convoluzione:

$$R_{xy}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x^*(\tau) \cdot y(t+\tau)d\tau \overset{\boxed{\xi = -\tau}}{=} \int_{\xi=+\infty}^{\xi=-\infty} x^*(-\xi) \cdot y(t-\xi)d(-\xi) =$$

$$= \int_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} x^*(-\xi) \cdot y(t-\xi)d\,\xi = x^*(-t) * y(t)$$

Correlazione (segnali di energia)

Correlazione:

$$R_{xy}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x^*(\tau) \cdot y(t+\tau) d\tau = x(t) \circledast y(t)$$

Teorema: $R_{xy}(t) = R_{yx}^*(t)$ (non gode della proprietà commutativa)

Autocorrelazione:

$$R_{xx}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x^*(\tau) \cdot x(t+\tau) d\tau$$

Proprietà di simmetria coniugata: $R_{xx}(t) = R_{xx}^*(-t)$

Se x(t) è un segnale reale: $R_{xx}(t)$= $R_{xx}(-t)$

Correlazione

Una proprietà importante si ottiene calcolando l'autocorrelazione di un segnale per t=0:

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) \cdot x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 = \varepsilon_x$$

L'autocorrelazione calcolata nell'origine è pari all'energia del segnale

Disuguaglianza di Schwartz:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) \cdot y(\tau) d\tau \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |y(\tau)|^2 d\tau$$

Per $x(t) = c \cdot y(t)$

Correlazione

Calcoliamo il modulo quadro della crosscorrelazione dei due segnali:

$$\left|R_{xy}(t)\right|^2 = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau)\cdot y(t+\tau)\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|x(\tau)|^2 d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}|y(\tau)|^2 d\tau =$$

$= \varepsilon_x\ \varepsilon_y$ →(essendo l'energia di un segnale pari all'autocorrelazione calcolata nell'origine) $\left|R_{xy}(t)\right|^2 \leq R_{xx}(0)\cdot R_{yy}(0)$

In modo analogo, per l'autocorrelazione possiamo scrivere:

$$|R_{xx}(t)|^2 = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau)\cdot x(t+\tau)\right|^2$$
$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty}|x(\tau)|^2 d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}|x(\tau)|^2 d\tau = \varepsilon_x\ \varepsilon_x$$

Dato che $\varepsilon_x \geq 0$, possiamo togliere i quadrati e scrivere:

$|R_{xx}(t)| \leq |R_{xx}(0)|$

Questo significa che il modulo dell'autocorrelazione di un segnale è limitato superiormente dal valore che l'autocorrelazione assume nell'origine

Correlazione

Definiamo l'**energia incrociata** di due segnali la seguente quantità:

$$\varepsilon_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) \cdot y(\tau) d\tau = R_{xy}(0)$$

Da questa grandezza ricaviamo il coefficiente di crosscorrelazione tra due segnali x e y:

$$\rho_{xy} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y}} = \frac{R_{xy}(0)}{\sqrt{\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y}}$$

È una misura di somiglianza tra i segnali x(t) e y(t) nel tempo

ρ_{xy} è compreso tra -1 e $+1$

$\rho_{xy} = 0$ →segnali ortogonali

$\rho_{xy} = -1$ → segnali antipodali

Correlazione

Esempio: calcolare il coefficiente di correlazione tra i due segnali x(t) e y(t) cosi definiti:

$$x(t) = rect(t)$$
$$y(t) = -rect(t)$$

$$\varepsilon_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(t) \cdot \left(-rect(t)\right) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} -1 dt = -1$$

$$\varepsilon_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 dt = 1$$

$$\varepsilon_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 dt = 1$$

$$\rho_{xy} = \frac{-1}{\sqrt{1 \cdot 1}} = -1$$

Correlazione (segnali di potenza)

Finora abbiamo visto la deifnizione di crosscorrelazione e autocorrelazione per segnali di energia. Possiamo estendere al caso di segnali di potenza:

$$R_{xy}(t) = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} x^*(t) \cdot y(t+\tau) d\tau = x(t) \circledast y(t)$$

Anche in questo caso possiamo definire le relazioni fondamentali viste precedentemente

Coefficiente di correlazione:

$$\rho_{xy} = \frac{R_{xy}(0)}{\sqrt{P_x \cdot P_y}}$$