Fondamenti di Comunicazioni

Corso: Fondamenti di comunicazioni e Internet (canale I e II)
E Telecomunicazioni

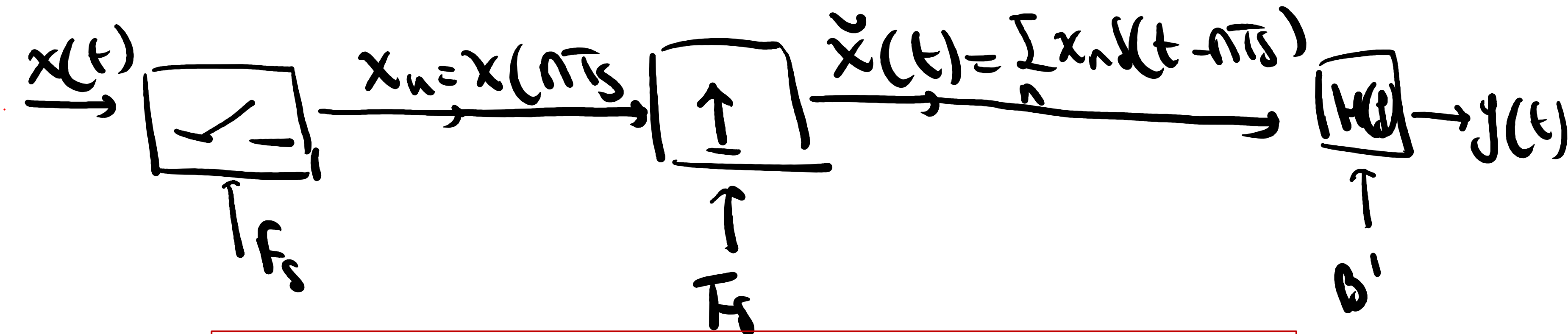
Argomento 10: Quantizzazione e codifica

Tiziana Cattai
email: tiziana.cattai@uniroma1.it

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Materiale didattico: Tiziana Cattai, Stefania Colonnese, Roberto Cusani

Teorema del campionamento

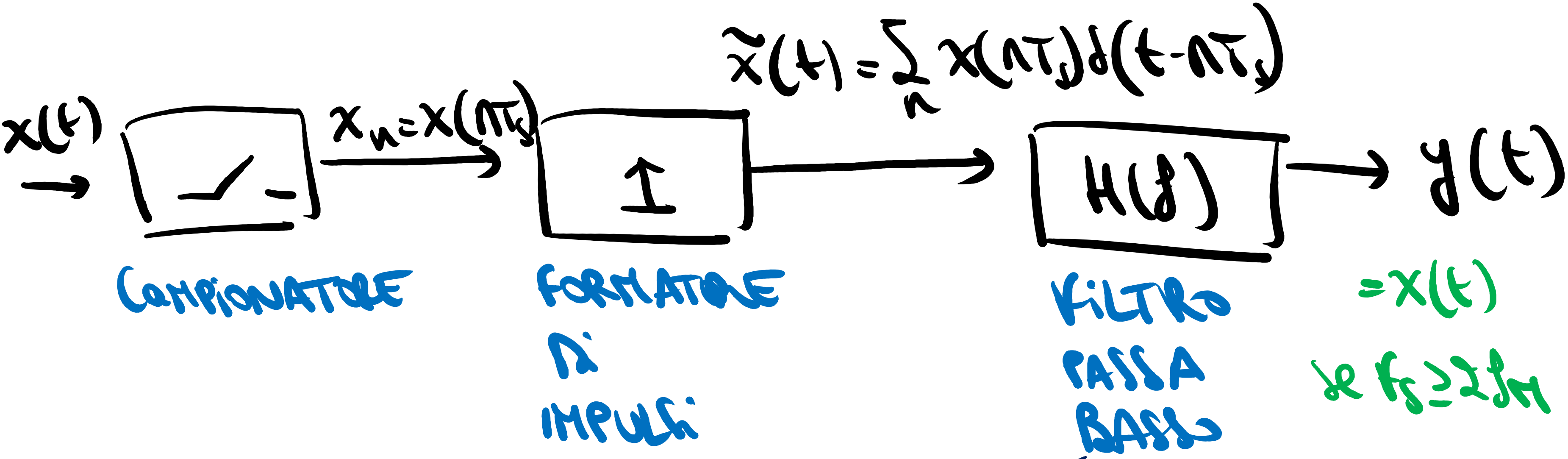


Teorema del campionamento (di Nyquist-Shannon).
Se il segnale tempo continuo di ingresso x(t) è limitato in banda con frequenza massima f_m e se la frequenza di campionamento F_s e' $F_s \geq 2f_m$, allora y(t)=x(t)

Condizione di Nyquist : $F_s \geq 2f_m$
Frequenza di Nyquist: $2f_m$

Teorema del campionamento: ricostruzione del segnale x(t)

Seguendo tutti gli step che abbiamo presentato



$$H(f) = \frac{1}{f_s}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) = T_s\,\mathrm{rect}(T_s f)$$

$$\Rightarrow h(t) = FT^{-1}(H(f)) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

Teorema del campionamento: ricostruzione del segnale x(t)

Ingresso: x(t)

Campionatore a passo T_s: $x_n = x(nT_s)$

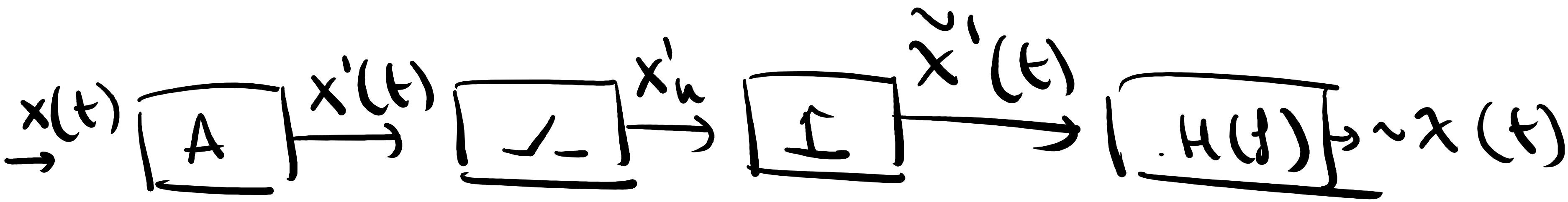
Formatore di impulsi: $\tilde{x}(t) = \sum_n x_n \cdot \delta(t - nT_s)$

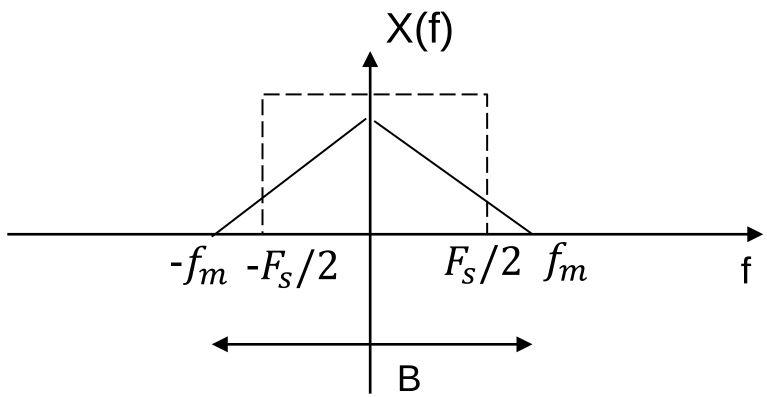
Uscita del filtro: $x(t) = \tilde{x}(t) * h(t) =$

$$\sum_n x_n \cdot \delta(t - nT_s) * sinc\left(\frac{t}{T_s}\right) = \sum_n x_n \cdot sinc\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

Filtro anti-aliasing

Si tratta di un filtro passa basso $[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}]$ che taglia la banda del segnale x(t) in ingresso. Viene applicato nella maggior parte dei sistemi reali direttamente al segnale x(t)





Filtro anti-aliasing

Si tratta di un filtro passa basso $[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}]$ che taglia la banda del segnale x(t) in ingresso. Viene applicato nella maggior parte dei sistemi reali direttamente al segnale x(t).

Intuitivamente, vogliamo tagliare minimamente la banda: vogliamo eliminare il minimo di banda necessario per eliminare il fenomeno dell'aliasing.

Sapendo che il teorema del campionamento dice che $F_s \geq 2f_m$

Tagliando la banda del segnale, la nuova frequenza massima contenuta dopo il passaggio nel filtro risulta $\frac{F_s}{2}$.

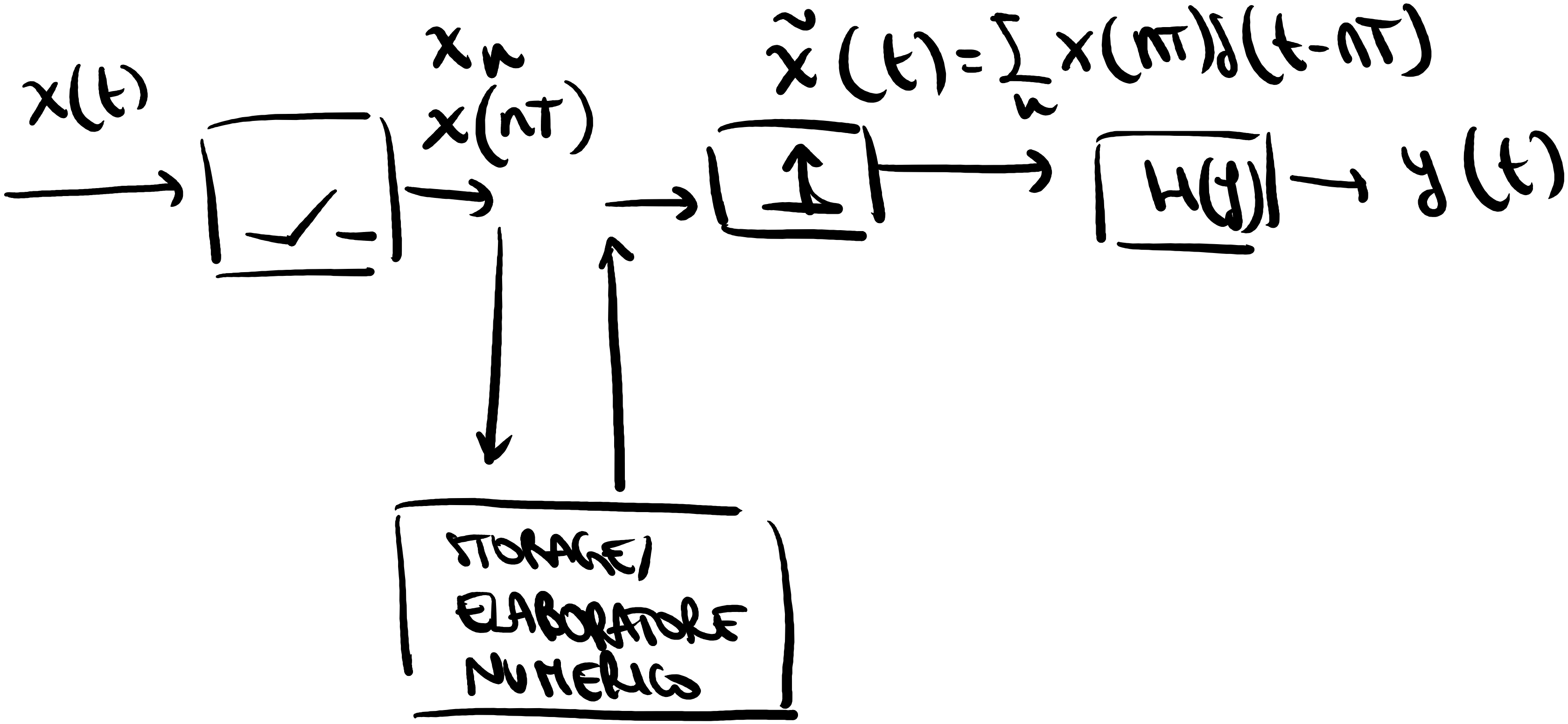
In questo caso ottengo $F_s \geq 2f_{m'} = 2\frac{F_s}{2}$ è la frequenza più alta che consente di verificare l'ipotesi del teorema del campionamento (rispettare l'ipotesi eliminando meno banda possibile)

Infatti:

per $\frac{3F_s}{2} > \frac{F_s}{2} \rightarrow F_s \geq 2f_{m'} = 2\frac{3F_s}{2}$ In questo caso elimino meno banda di segnale, ma l'ipotesi del teorema del campionamento non è rispettata

per $\frac{F_s}{3} < \frac{F_s}{2} \rightarrow F_s \geq 2f_{m'} = 2\frac{F_s}{3}$ In questo caso l'ipotesi del teorema del campionamento è rispettata ma elimino più banda del necessario

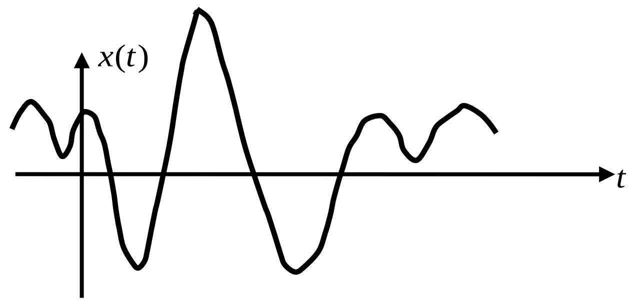
Utilizzo del campionamento



Conversione Analogico-Digitale

Una sorgente analogica che produce una grandezza fisica che trasporta informazioni, può essere modellizzata come un segnale tempo continuo che può assumere un insieme continuo di valori.
Per esempio la voce (segnale di pressione), telefono (segnale elettrico).

Segnale analogico



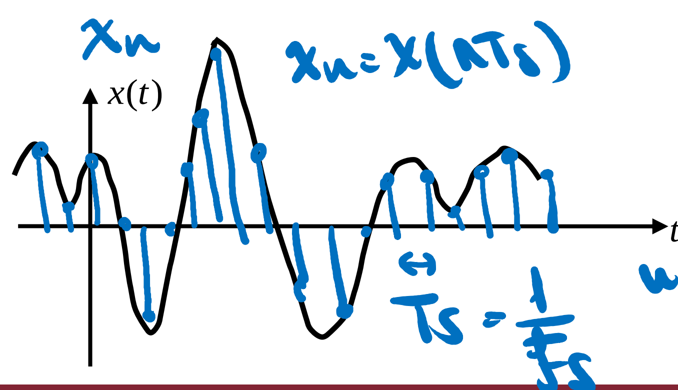
Continuo nel tempo

Insieme continuo di valori

La conversione analogico-digitale serve per utilizzare dei processori digitali a partire da segnali analogici, che utilizzano tecnologie più economiche e a minore consumo (flessibilità, compattezza)
Per fare questo è necessario trasformare segnali analogici in segnali digitali, dato che questi sistemi lavorano su seguenze (segnali discreti) con valori discreti.
Quindi bisogna avere un segnale discreto nell’asse orizzontale e verticale

Con il campionamento è possibile ottenere un segnale tempo discreto

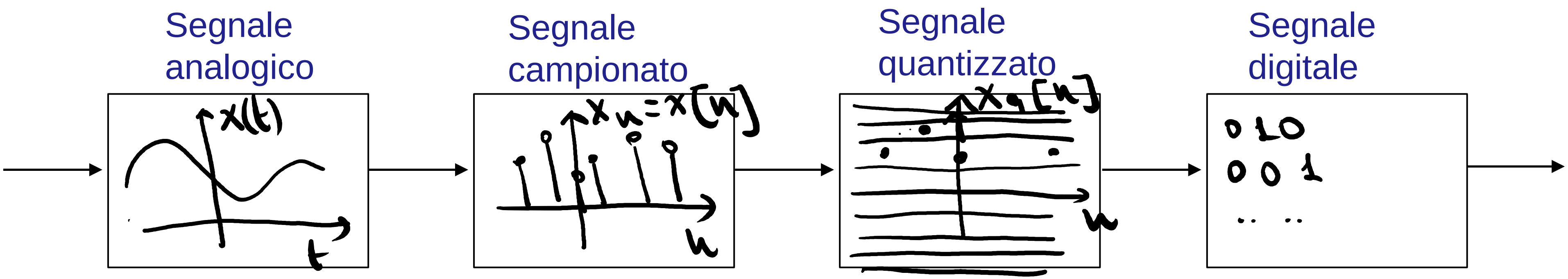
-> discretizzazione su asse x: campionamento



Insieme continuo di valori

Conversione analogico-digitale

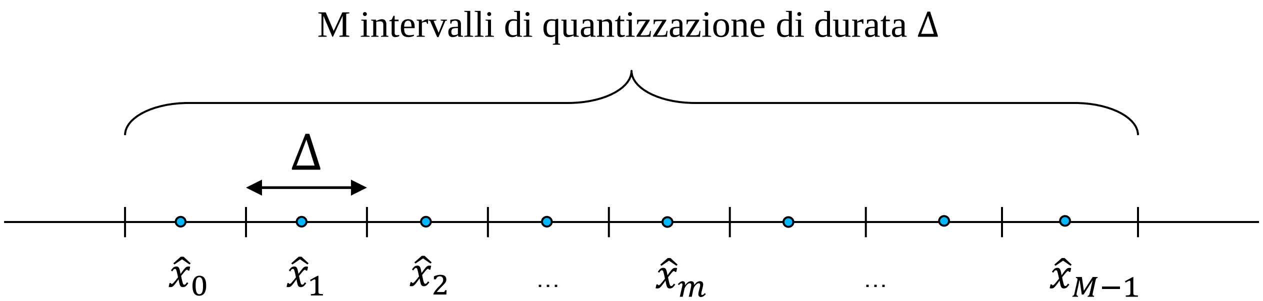
La discretizzazione sull'asse verticale è costituita da due step: quantizzazione e codifica



Quantizzazione

I valori continui che il segnale discreto può assumere vengono raggruppati in un fissato numero di insiemi, detti intervalli di quantizzazione, ognuno associato ad uno specifico valore (per esempio il centro dell’intervallo), che viene detto livello di restituzione.

→ si deve individuare per ogni valore del segnale discreto l’intervallo di quantizzazione e, di conseguenza, si associa il livello di restituzione.



Ipotizzando che $|x_n| < D$
L’intervallo [-D,D] è la dinamica del segnale

$$\Delta = \frac{2D}{M}$$

$$x_n \in \mathcal{R}, \qquad x_q[n] \in \{\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots \hat{x}_{M-1}\}$$

Quantizzazione

Avviene una discretizzazione dei valori del segnale tramite un'approssimazione del segnale ad un numero fissato di valori → Il segnale può assumere soltanto un insieme finito di valori.

Si introduce un errore di quantizzazione:

$$e_q[n] = x[n] - x_q[n]$$

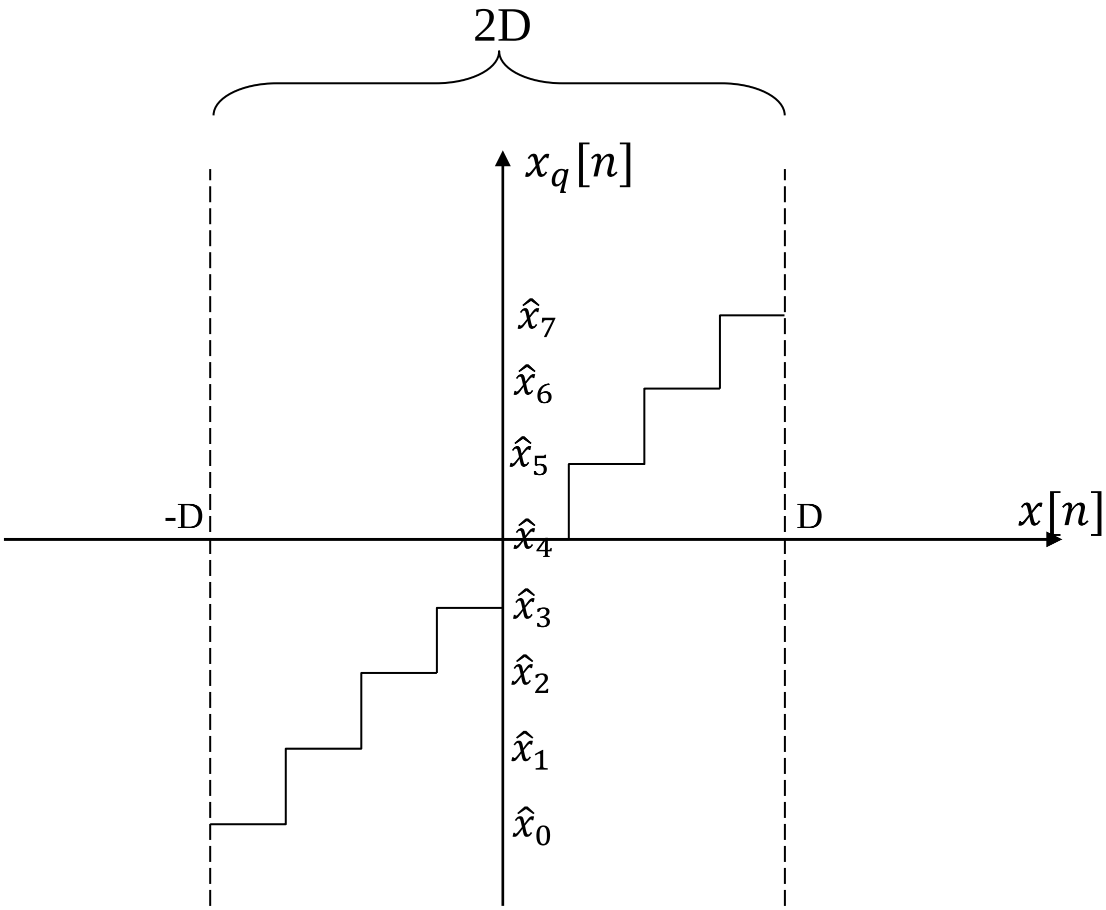
Questo errore è diverso per intervalli interni ed intervalli esterni.

Per gli intervalli interni (alla dinamica):

$$e_q[n] \leq \frac{\Delta}{2}$$

$\frac{\Delta}{2} = \frac{D}{M}$ → posso ridurre l'errore di quantizzazione andando ad agire sul numero degli intervalli di quantizzazione

È illimitato per gli intervalli esterni. Infatti qualunque valore al di fuori della dinamica (può succedere nei segnali reali)viene associato all'ultimo intervallo utile → saturazione



Questa operazione non è invertibile (senza commettere errore)

Codifica

La sequenza $x_q[n]$ quantizzata deve essere tradotta in una sequenza di bit (binary digit). Questo perché i processori numerici lavorano su sequenze di cifre binarie.

L'operazione di codifica trasforma i valori discreti di $x_q[n]$ in K bit

Sapendo che $x_q[n]$ può avere M valori (associati agli intervalli di quantizzazione) e che K bit possono assumere 2^K valori (perché ogni bit può avere due valori possibili),

per codificare il segnale quantizzato occorre che $M \leq 2^K$ → il numero di intervalli di quantizzazione deve essere inferiore (o uguale) ai valori che possono essere prodotti con K bit

$$2^K \geq M \rightarrow K \geq \log_2 M$$

In generale, affinché un codificatore sia efficiente è meglio è M sia una potenza di 2. In modo tale da usare $M = 2^K, K = \log_2 M$

(altrimenti alcune configurazioni di cifre binarie non sono associate ad un intervallo di quantizzazione)

Codifica

Consideriamo il caso in cui M=8 (ho 8 intervalli di quantizzazione) e K=3 (bit)

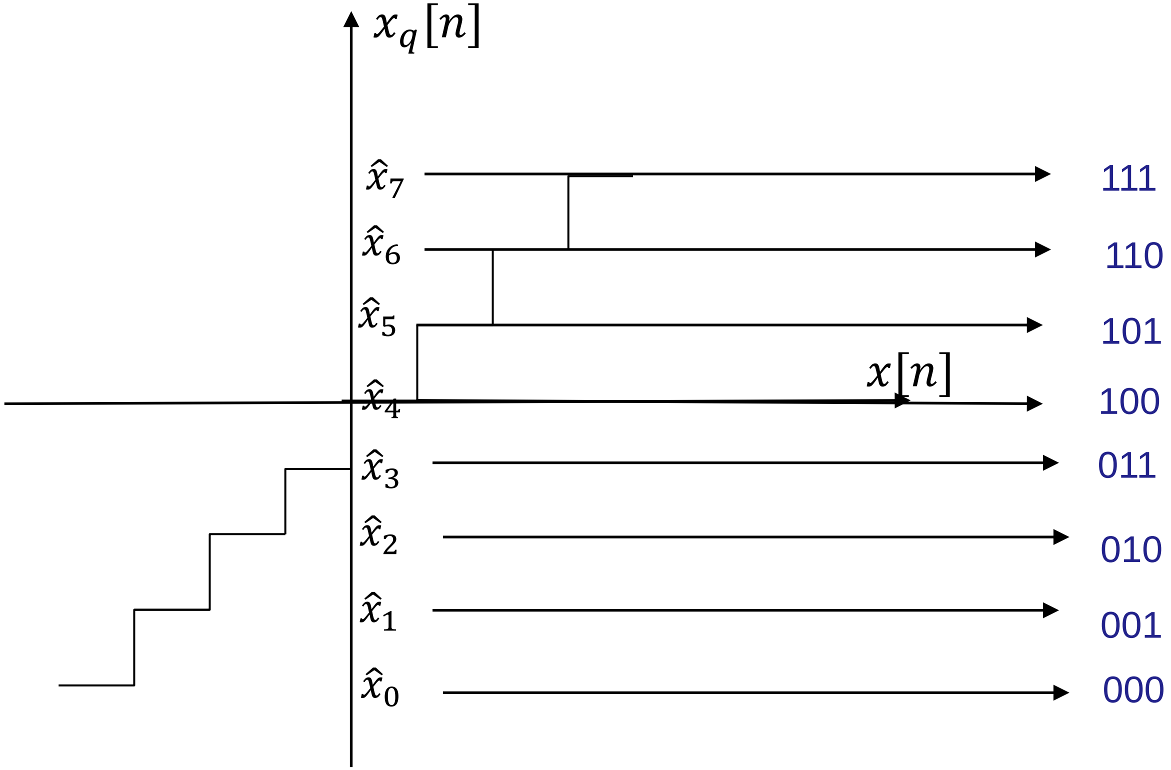
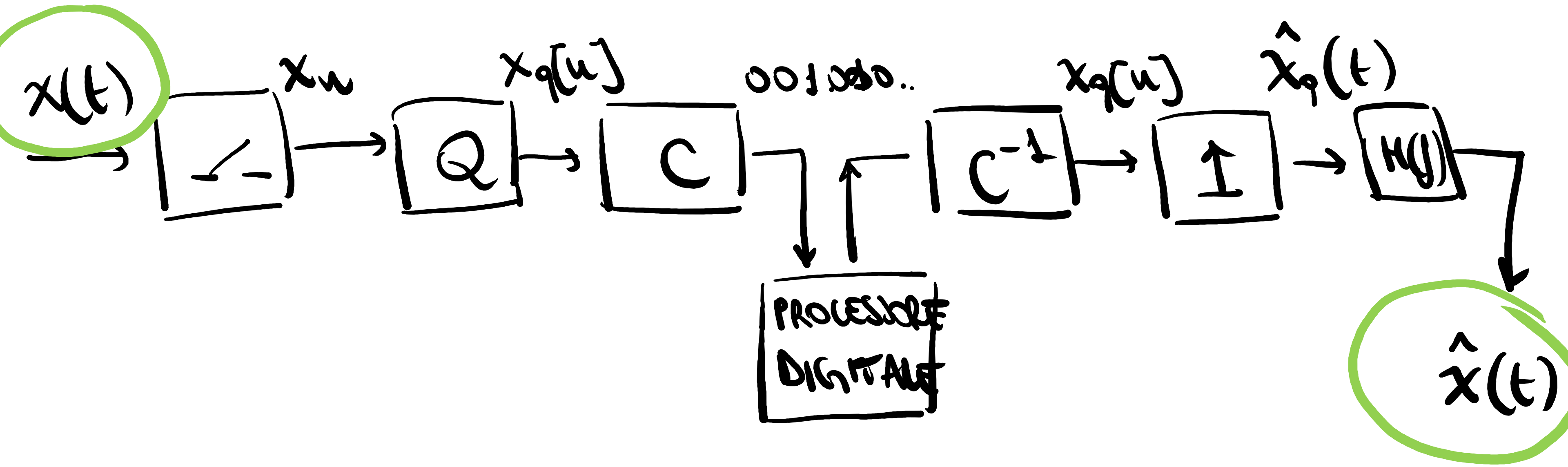


Tabella per la codifica

$\hat{x}_0$	000
$\hat{x}_1$	001
$\hat{x}_2$	010
$\hat{x}_3$	011
$\hat{x}_4$	100
$\hat{x}_5$	101
$\hat{x}_6$	110
$\hat{x}_7$	111

Questa operazione è invertibile, basta avere la tabella

Conversione analogico-digitale e conversione digitale analogico



$\hat{x}(t) \neq x(t)$ per via dell'errore di quantizzazione

→ Aumentando M, $\hat{x}(t) \to$ x(t)

Conversione analogico-digitale e conversione digitale analogico

Quindi aumento a piacere M ?

Sapendo che $K \geq \log_2 M$, aumentare M significa avere più bit prodotti dal sistema codificatore. Io ottengo K bit da ogni campione di $x_q[n]$

Possiamo identificare la frequenza di bit F_b, che dipende dalla frequenza di campionamento (frequenza con cui ho i campioni di $x[n]$ e $x_q[n]$):

$$F_b = KF_s$$

Quindi aumentare M, significa aumentare K, che significa a sua volta aumentare la frequenza di bit. Questo significa che saranno meno convenienti le operazioni del processore digitale.

Esercizi

Il segnale audio ha una banda di circa 40 kHz. Per mettere un segnale di questo tipo su CD questo deve essere reso digitale. Si campiona a 44,1 kHz e si utilizzano 16 bit per la codifica.
(Considerato un solo canale stereo). Qual è la frequenza di bit?

$$f_b = k f_s = 40\,\text{kHz} \cdot 16\,\text{bit} = 80\,\frac{\text{kByte}}{s}$$

$$40 \cdot 10^3\,\frac{1}{s} \cdot 2\,\text{Byte}$$

Esercizi

Una segnale audio di 3 minuti è stata campionato con una frequenza di campionamento di 44,1 kHz. Il segnale è stato quantizzato utilizzando 512 intervalli di quantizzazione.
Trovare la dimensione del segnale in bit

1) Trovare i campioni totali prodotti

$$n_{samples} = (3 \cdot 60)\,s \cdot 44{,}1 \cdot 10^3\,Hz = 7{,}938 \cdot 10^6 \text{ samples}$$

2) Trovare il # di bit per campione

$$M = 2^k \Rightarrow k = \log_2 M = 9 \frac{bit}{sample}$$

3) Trovare bit totali

$$N_{bit} = 9 \frac{bit}{sample} \cdot 7{,}938 \cdot 10^6 \text{ samples} = 71{,}442 \text{ Mbit}$$

$$= 8{,}9 \text{ Mbyte}$$

Esercizi

Il segnale audio ha una banda di circa 40 kHz. Campionando questo segnale a 50 kHz e utilizzando un quantizzatore con 1024 intervalli di quantizzazione.
Qual è la durata massima del segnale che riesco a salvare su un Hard-Disk di 500 MB

$$M = 2^K \rightarrow K = \log_2 M = 10 \ \frac{\text{bit}}{\text{sample}}$$

T: durata del segnale in secondi

$$\Rightarrow n_{samplesTOT} = T \cdot F_s = T \cdot 50 \cdot 10^3 \ \text{samples}$$

Calcolo la durata totale in bit del segnale:

$$n_{bitTOT} = T \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 10 = 8 \cdot 0{,}5 \cdot \cancel{10^6} \cdot T \ \text{Mbit}$$

$$T \cdot 0{,}5 \ \cancel{M}\text{bit} \leq 500 \cdot 8 \ \cancel{M}\text{bit}$$

$$T_{MAX} = 500 \cdot 2 \cdot 8 = 8000 \, s = 133{,}3 \, \text{min}$$

Esercizi

Un CD contiene segnali stereo, che sono prodotti da due canali. Il segnale audio (sapendo che la banda è intorno a 40kHz) è campionato a 44,1 kHz. Sapendo che un CD audio può contenere un massimo di 750 MB, qual è la durata massima di segnale audio hce posso inserire?

$$N_{bit_{TOT}} = \underbrace{T_{MAX} \cdot f_s}_{sample_{MAX}} \cdot \overset{\text{bit/campione}}{K} \cdot \underset{\text{2 canali}}{2} = T_{MAX} \cdot 44,1 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 2$$

$$= 705,6 \cdot 10^3 \cdot 2$$

$$N_{bit_{TOT}} \leq 750 \cdot 8 \text{ Mb}$$

$$N_{bit_{MAX}} = \cancel{2} \cdot 705,6 \cdot \cancel{10^3} \cdot T_{MAX} = 750 \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot 10^{\cancel{6}\,3}$$

$$\rightarrow \quad T_{MAX} = \frac{750 \cdot 4 \cdot 10^3}{705,6} = 70,8 \text{ min}$$

Esercizi

Un segnale x(t) ha una frequenza massima di 35 Hz. A che frequenza può essere campionato correttamente il segnale?

$f_s \geq 2 f_M$ $f_s \geq 70\,Hz$ $\Rightarrow$ Il segnale x(t) deve essere campionato almeno a 70 Hz

Esercizi

Un segnale x(t) ha una frequenza massima di 2 kHz. Qual è il passo di campionamento minimo a cui campionare il segnale?

$$f_s \geq 2 f_{MAX}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_s} = T_s \quad \text{passo di campionamento}$$

$$\rightarrow \frac{1}{f_s} = T_s \leq \frac{1}{2 f_{MAX}} \Rightarrow T_s \leq \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^3} = 0{,}25 \cdot 10^{-3}\,s$$

$$= 0{,}25\,ms$$

Esercizi

Dato il segnale x(t)=3cos($\pi 4t$)-sin($2\pi 3t$) quanti campioni devono essere presi su un intervallo di 2 s per soddisfare il teorema del campionamento?

$f_M = 3\,Hz \rightarrow f_s \geq 2 f_M \rightarrow f_s \geq 6\,Hz$

$\rightarrow T_s \leq \frac{1}{6}\,s \Rightarrow T_{MAX} = \frac{1}{6}\,s$

PASSO DI CAMP. MASSIMO

$N_{samples_{MIN}} = \frac{2s}{\frac{1}{6}s} = 12$ samples

$\Rightarrow$ su un intervallo di 2 secondi devo avere almeno 12 campioni