Fondamenti di Comunicazioni

Corso: Fondamenti di comunicazioni e Internet (canale I e II)
E Telecomunicazioni

Argomento 8: Richiami trasformata di Fourier e correlazione, spettro

Tiziana Cattai
email: tiziana.cattai@uniroma1.it

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

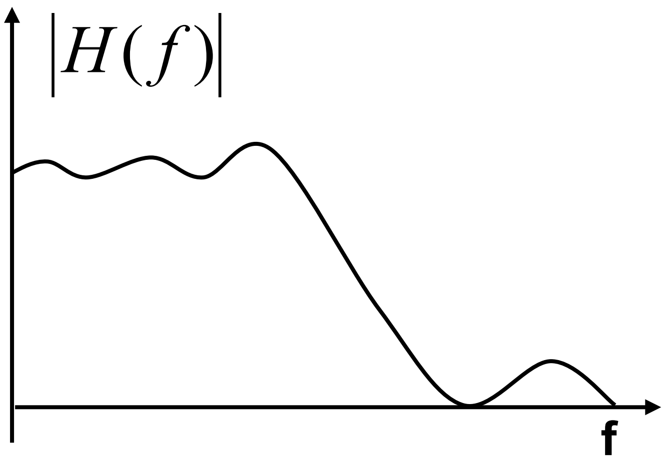
Esercizi

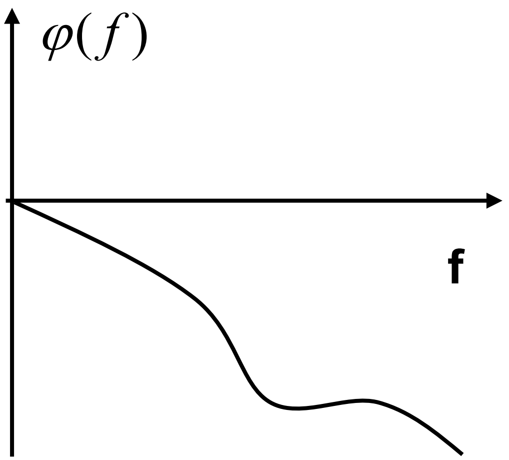
1) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = rect\left(\frac{t}{2}\right)$ e graficarla
2) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = \delta(t - 1000)$ e graficarla
3) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = sinc(t + 1)$e graficarla
4) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = sinc(2t)$ e graficarla
5) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = \sin(2\pi 5t)$e graficarla
6) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = \cos(2\pi 3t)$ e graficarla
7) Calcolare la DTFT di $x_n = \delta(n - 1) + \delta(n + 1)$
8) Calcolare la DTFT di $x_n = \delta(n - 1) - \delta(n + 1)$
9) Calcolare la DTFT di $x_n = \delta(n - 2) + \delta(n + 2)$

Filtraggio analogico

- ✓ $h(t)$ reale $\Longrightarrow$ $H(f) = H^*(-f)$ (simmetria coniugata)

- ✓ E' sufficiente conoscere $H(f)$ solo per le frequenze positive, perché le f negative si deducono dalla simmetria coniugata



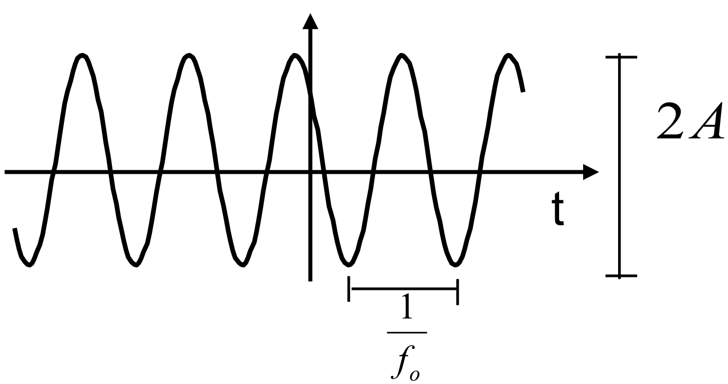


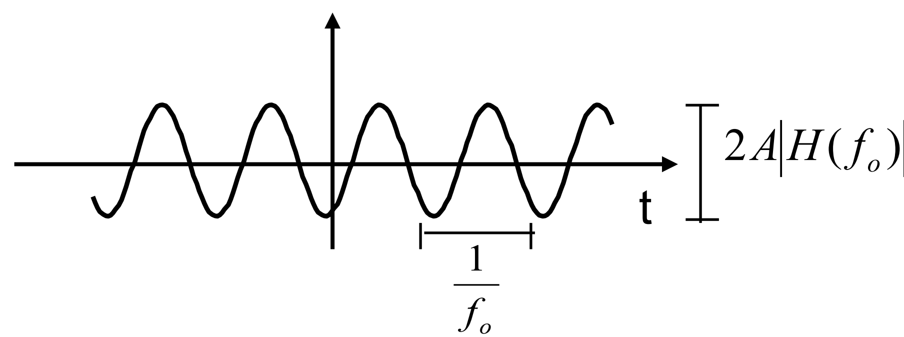
Filtraggio analogico

✓ Le sinusoidi sono largamente impiegate nelle trasmissioni (esempi: fax, tastiera telefono, GSM, …)

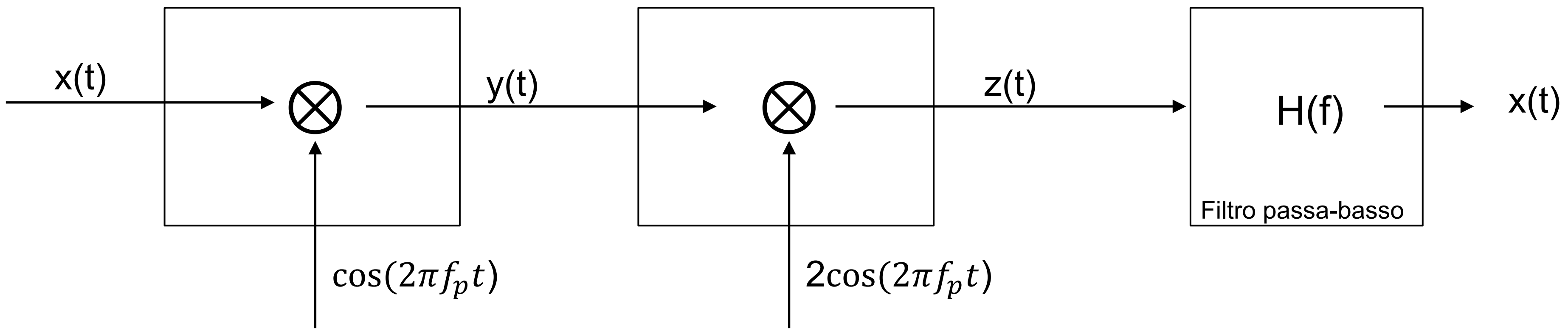
$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y(t)$$

$$x(t) = A\cos(2\pi f_o t + \theta) \qquad y(t) = A\left|H(f_o)\right|\cos(2\pi f_o t + \theta + \varphi(f_o))$$





Demodulatore



$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_p t)$$
$$z(t) = 2x(t) \cdot \cos^2(2\pi f_p t) = x(t)(1 + 2\cos(2\pi 2 f_p t)) = x(t) + 2\mathrm{x(t)}\cos(2\pi 2 f_p t)$$

Calcolo la trasformata di Fourier

$$Z(f) \leftrightarrow X(f) + \frac{X(f - 2f_p)}{2} + \frac{X(f + 2f_p)}{2}$$

Con un filtro passa basso è possibile eliminare le frequenze alte

Esercizio filtraggio

Dato un segnale $x(t) = sinc^2(t)[1 - e^{j2\pi5t}]$ e un filtro con risposta impulsiva $h(t) = 3sinc(3t)$.

Calcolare e graficare l'uscita $y(t)$ del filtro

Richiami energia e potenza di segnali tempo continui/tempo discreti

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt \geq 0$$

$$E_x = \sum_n |x_n|^2$$

$$P_x = \lim_{\Delta t \to +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} |x(t)|^2 \, dt \geq 0$$

$$P_x = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} |x_n|^2$$

Richiami correlazione e autocorrelazione per segnali tempo continui/tempo discreti

$$R_{xy}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x^*(\tau) \cdot y(t+\tau) d\tau = x(t) \circledast y(t)$$

Segnale x(t) di energia

$$R_{xy}[n] = \sum_n x_n^* \cdot y_{n+k} = x_n \circledast y_n$$

Segnale x_n di energia

$$R_{xy}(t) = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} x^*(t) \cdot y(t+\tau) d\tau = x(t) \circledast y(t)$$

Segnale x(t) di potenza

$$R_{xy}[n] = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} x_n^* \cdot y_{n+k} = x_n \circledast y_n$$

Segnale x_n di potenza

Richiami correlazione (segnali di energia)

Correlazione:

$$R_{xy}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x^*(\tau) \cdot y(t+\tau) d\tau = x(t) \circledast y(t)$$

Teorema: $R_{xy}(t) = R_{yx}^*(t)$ (non gode della proprietà commutativa)

Autocorrelazione:

$$R_{xx}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x^*(\tau) \cdot x(t+\tau) d\tau$$

Proprietà di simmetria coniugata: $R_{xx}(t) = R_{xx}^*(-t)$

Se x(t) è un segnale reale: $R_{xx}(t)$= $R_{xx}(-t)$

Spettro

Lo spettro è la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione di un segnale (continuo, discreto, di energia o di potenza)

$$E_x(f) = FT\{R_{xx}(t)\}$$

Segnale x(t) di energia

$$E_x\left(e^{j\omega}\right) = FT\{R_{xx}[n]\}$$

Segnale x_n di energia

$$P_x(f) = FT\{R_{xx}(t)\}$$

Segnale x(t) di potenza

$$P_x\left(e^{j\omega}\right) = FT\{R_{xx}[n]\}$$

Segnale x_n di potenza

L'autocorrelazione gode della simmetria Hermitiana → la sua FT (lo spettro) è reale

Spettro

Sapendo che $R_{xx}(0) = E_x \; oppure \; P_x$,

Per segnali di energia $\int E_x(f)df = E_x$, (nel caso discreto l'integrale è sul periodo)

Per segnali di potenza $\int P_x(f)df = P_x$ (nel caso discreto l'integrale è sul periodo)

Sapendo che $R_{xx}(t) = x(t) \circledast x(t) = x^*(-t) * x(t)$

$$FT\{R_{xx}(t)\} = E_x(f) = |X(f)|^2$$

Integrando si ottiene che $\int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 = E_x$

Teorema di Parseval

1. E’ possibile calcolare l’energia di un segnale “impulsivo” o “di energia” x(t) mediante la sua trasformata X(f).
2. In particolare, vale il seguente risultato noto come “Teorema di Parseval per segnali impulsivi e/o di energia”:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2$$