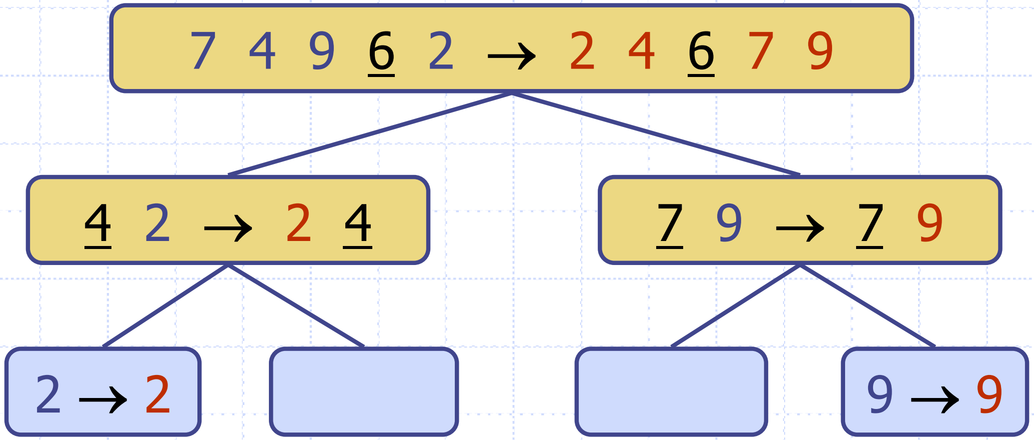
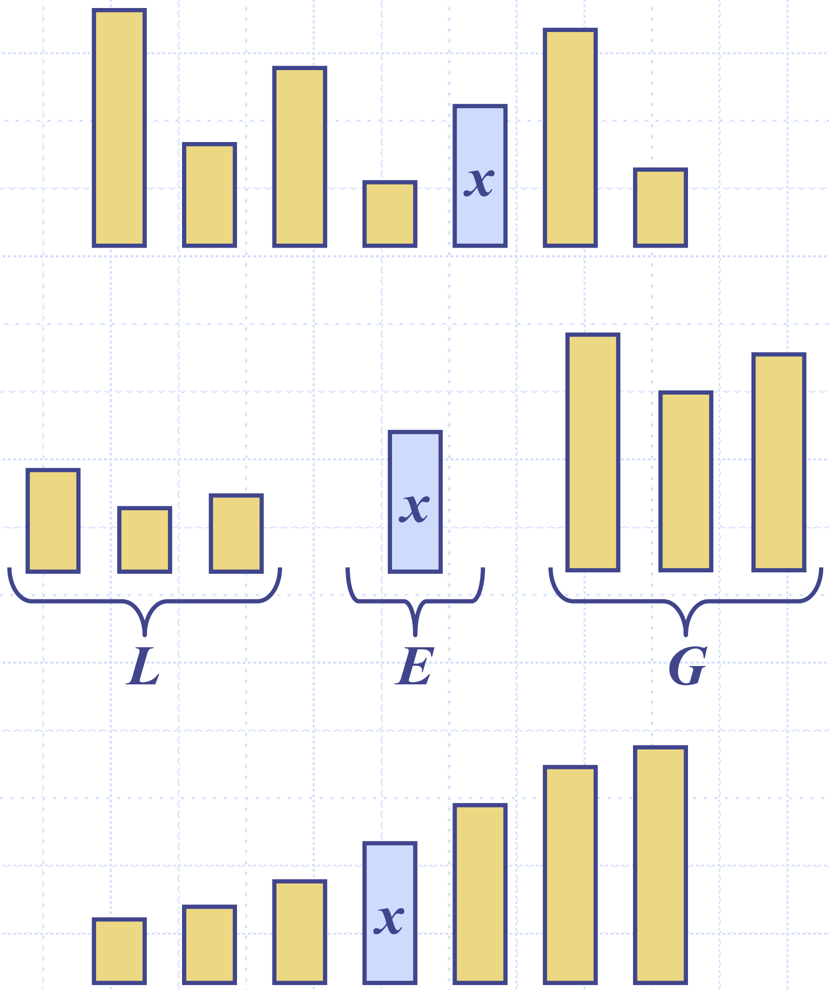
Quick-Sort



Quick-Sort

- Quick-sort è un algoritmo di ordinamento che opera scelte casuali
- Divide et impera
  - Dividi: scegli un elemento a caso x (detto pivot) e dividi S in tre insiemi
    - L elementi minori di x
    - E elementi uguali a x
    - G elementi maggiori di x
  - Ricorsione: ordina L e G
  - Impera: unisci L, E e G



Partizione

- Partiziona insieme dato nel seguente modo:
  - Togli ad uno ad uno elementi y da S e
  - Inserisci y in L, E or G, a seconda del risultato del confronto con il pivot x
- Ogni inserimento e rimozione avviene all'inizio o alla fine e quindi richiede tempo $O(1)$
- Pertanto, il partizionamento richiede tempo $O(n)$

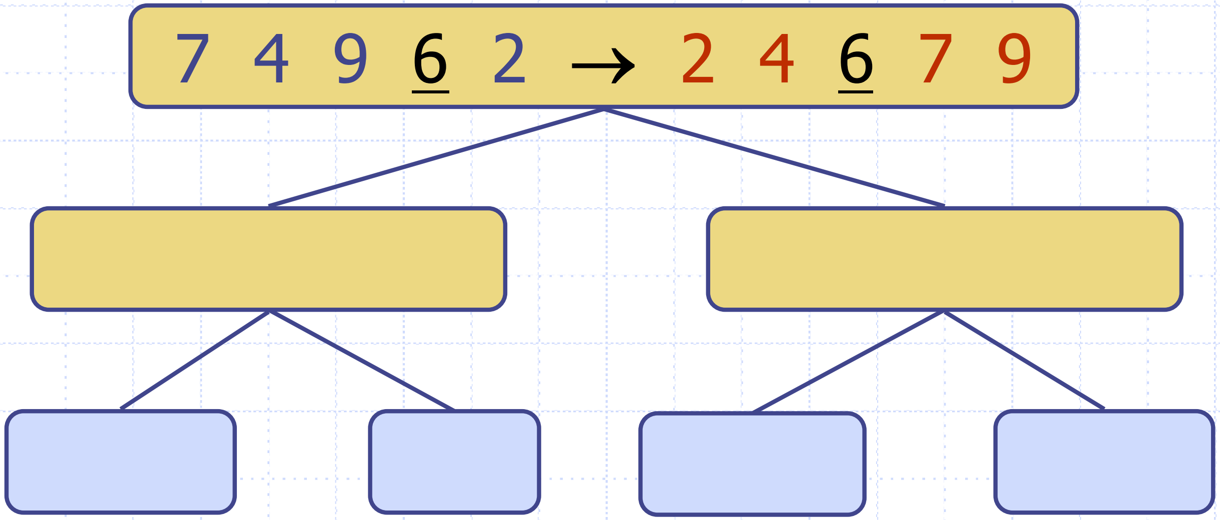
```
Algorithm partition(S, p)
    Input sequenza S, posizione p del
    pivot
    Output sottosequenze L, E, G di
    elementi di S minori, uguali o
    maggiori   del pivot
    L, E, G ← sequenze vuote
    x ← S.remove(p)
    while ¬S.isEmpty()
        y ← S.remove(S.first())
        if y < x
            L.addLast(y)
        else if y = x
            E.addLast(y)
        else { y > x }
            G.addLast(y)
    return L, E, G
```

Implementazione Java

```java
/** Quick-sort contents of a queue. */
public static <K> void quickSort(Queue<K> S, Comparator<K> comp) {
  int n = S.size();
  if (n < 2) return;                          // queue is trivially sorted
  // divide
  K pivot = S.first();                        // using first as arbitrary pivot
  Queue<K> L = new LinkedQueue<>();
  Queue<K> E = new LinkedQueue<>();
  Queue<K> G = new LinkedQueue<>();
  while (!S.isEmpty()) {                      // divide original into L, E, and G
    K element = S.dequeue();
    int c = comp.compare(element, pivot);
    if (c < 0)                                // element is less than pivot
      L.enqueue(element);
    else if (c == 0)                          // element is equal to pivot
      E.enqueue(element);
    else                                      // element is greater than pivot
      G.enqueue(element);
  }
  // conquer
  quickSort(L, comp);                         // sort elements less than pivot
  quickSort(G, comp);                         // sort elements greater than pivot
  // concatenate results
  while (!L.isEmpty())
    S.enqueue(L.dequeue());
  while (!E.isEmpty())
    S.enqueue(E.dequeue());
  while (!G.isEmpty())
    S.enqueue(G.dequeue());
}
```

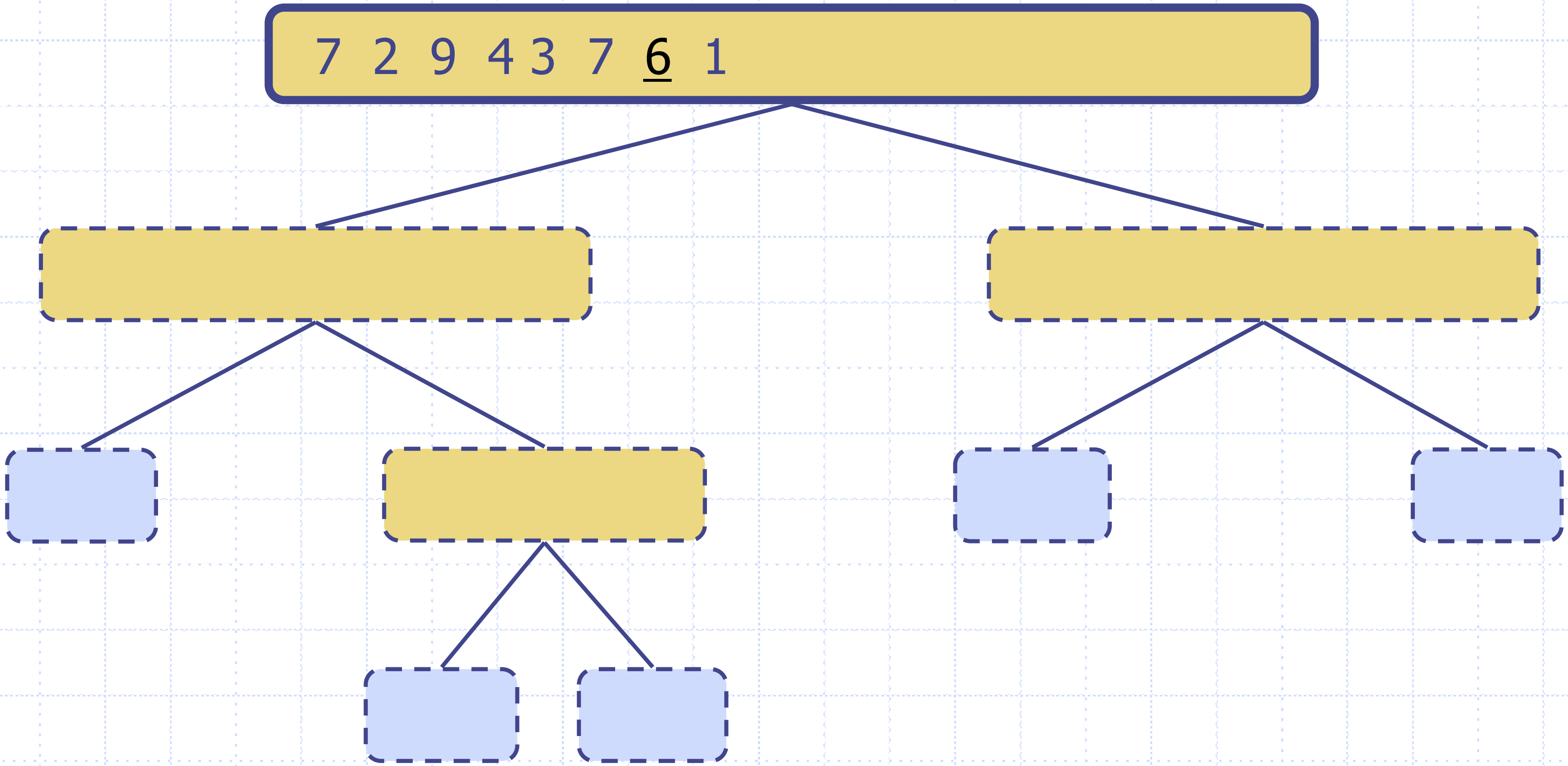
Albero chiamate Quick-Sort

- L'esecuzione è rappresentata da un albero binario
  - Ogni nodo rappresenta una attivazione ricorsiva e memorizza
    - Sequenze non ordinate prima dell'esecuzione
    - Sequenze ordinate alla fine dell'esecuzione
    - Nota: gli elementi uguali al pivot non danno attivazioni ricorsive
  - La radice rappresenta la prima chiamata
  - Le foglie rappresentano sequenze di 0 o 1 element



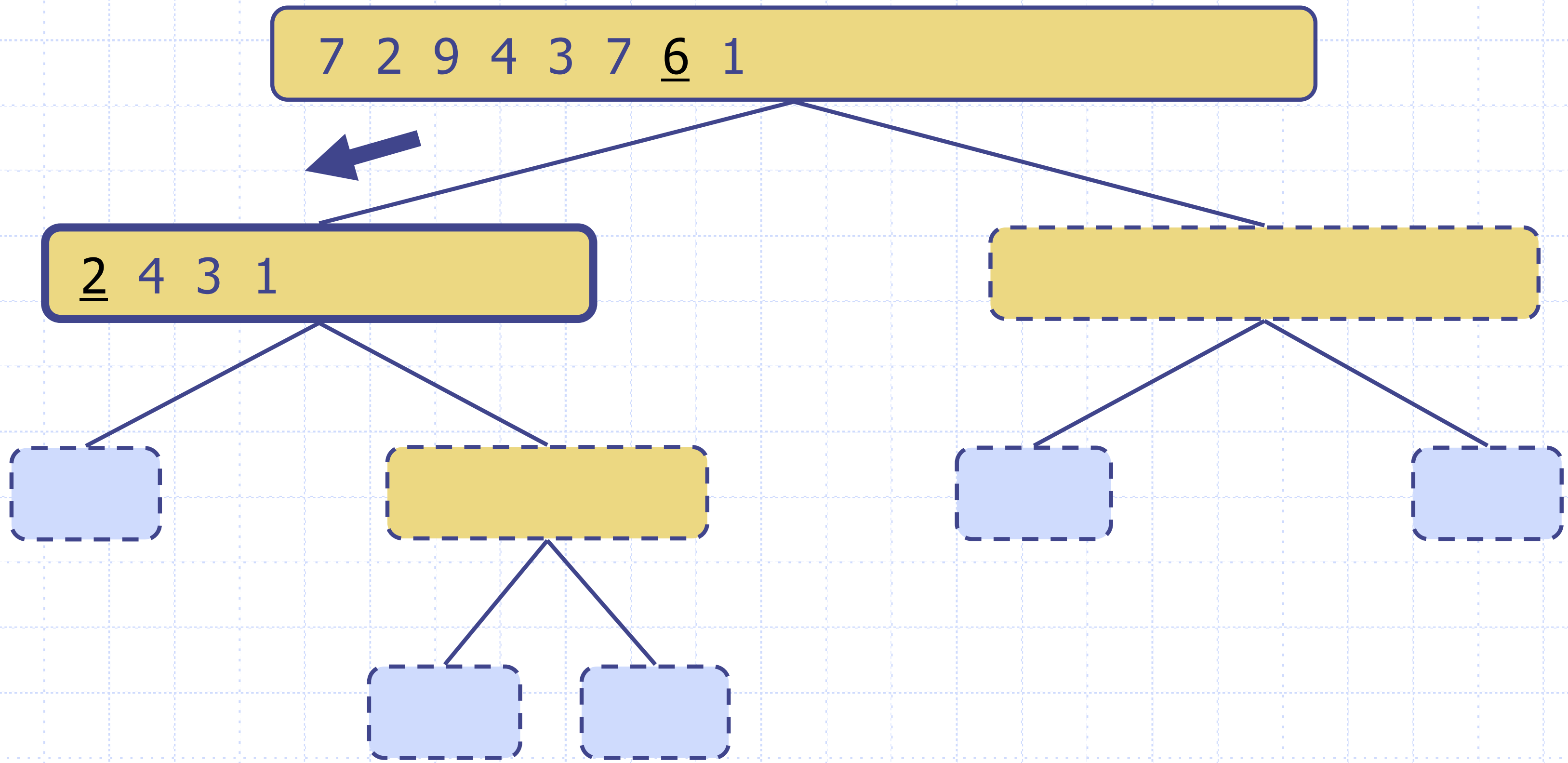
Esempio

- Selezione Pivot



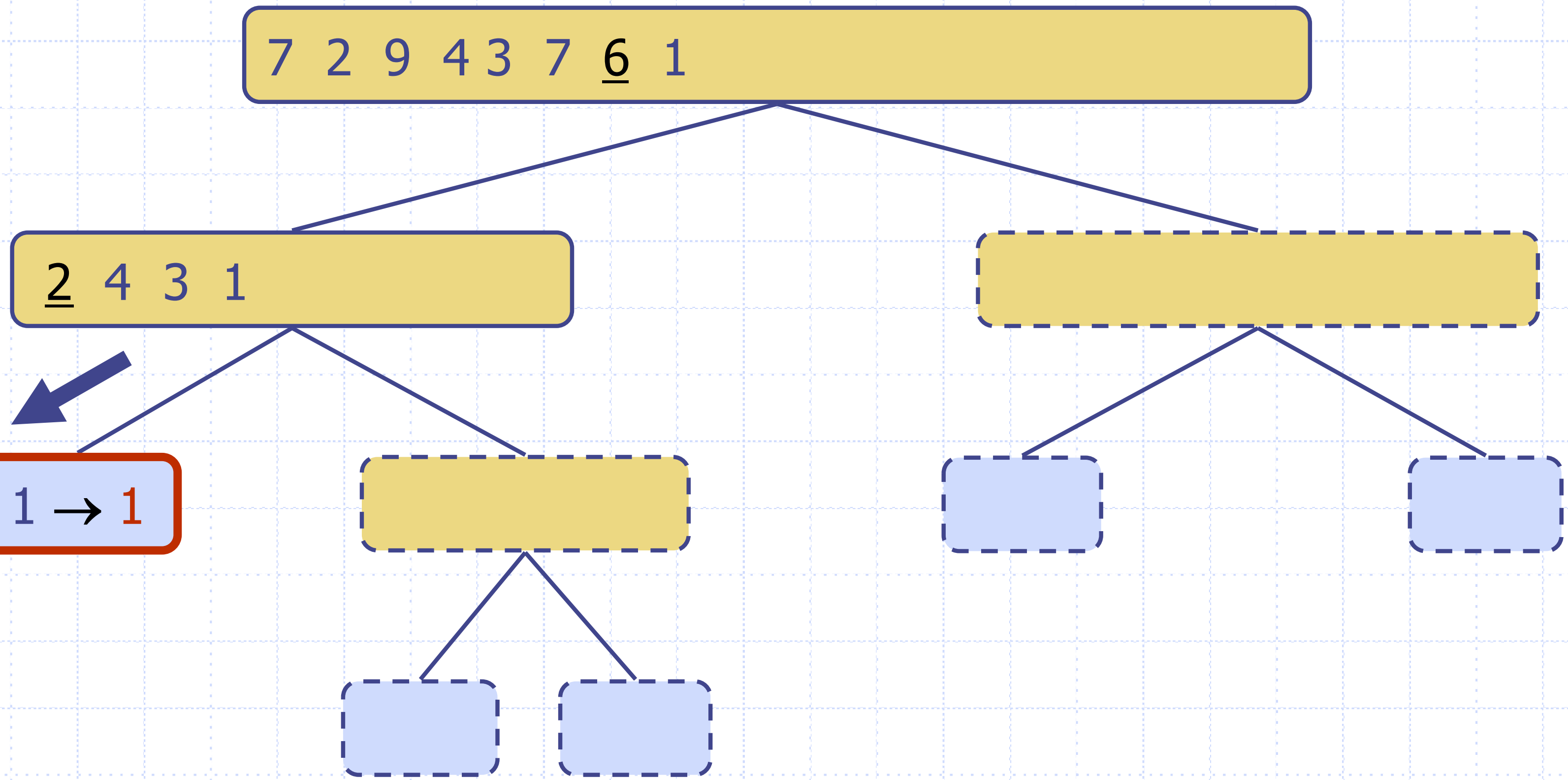
Esempio

- Partizione, ricorsione, selezione pivot



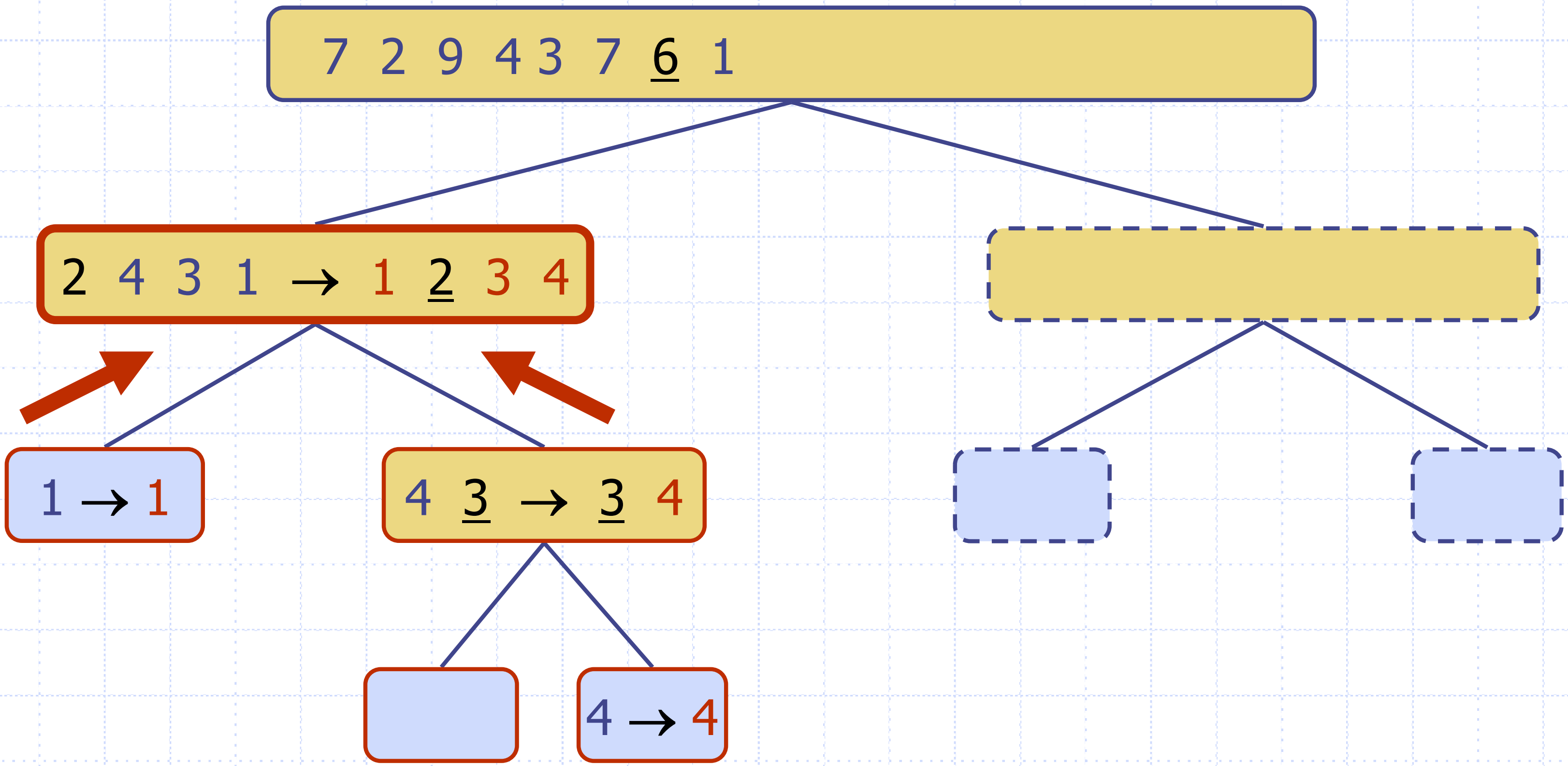
Esempio

- Partizione, ricorsione, caso base



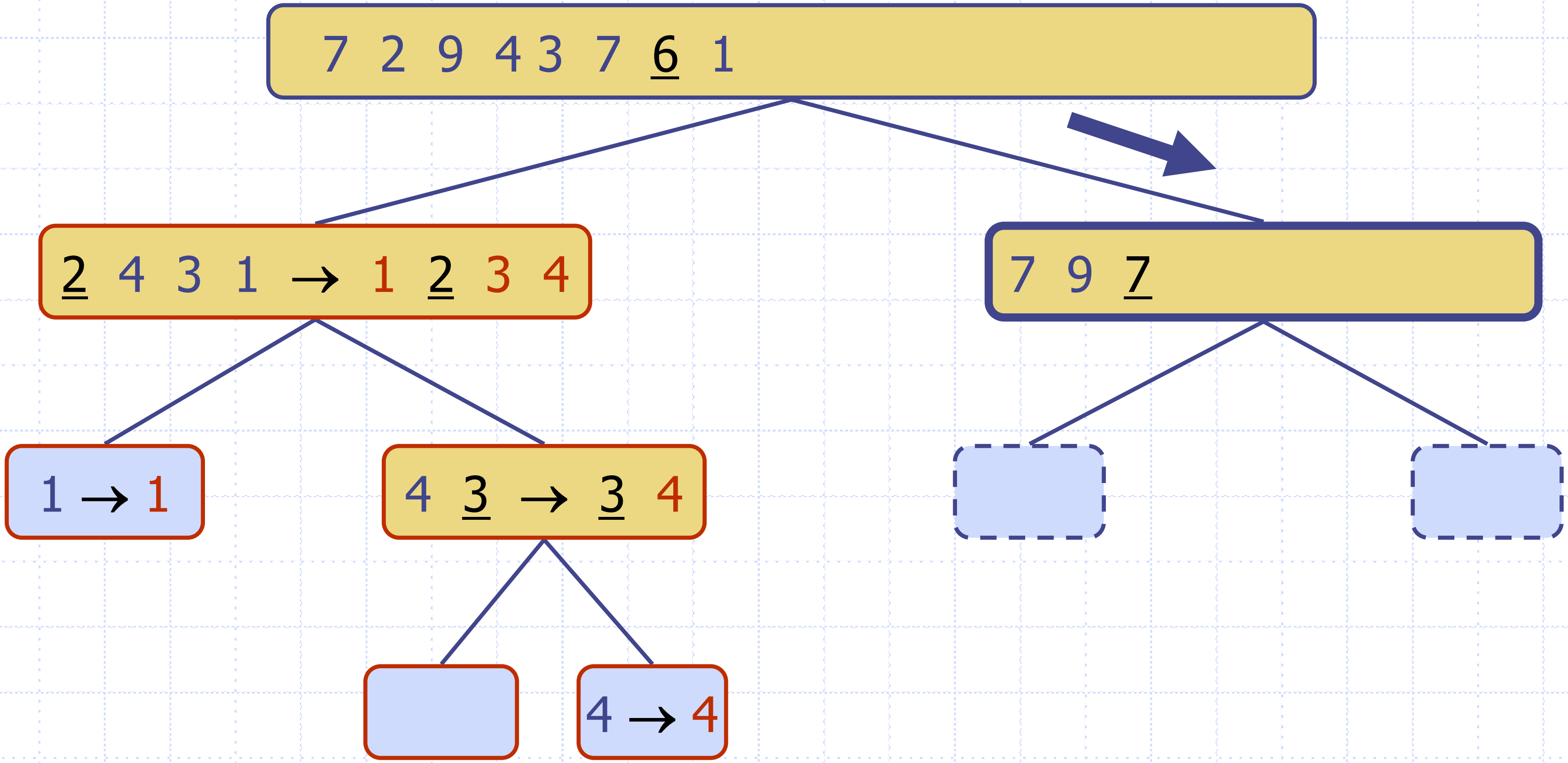
Esempio

- Partizione, ricorsione, unione



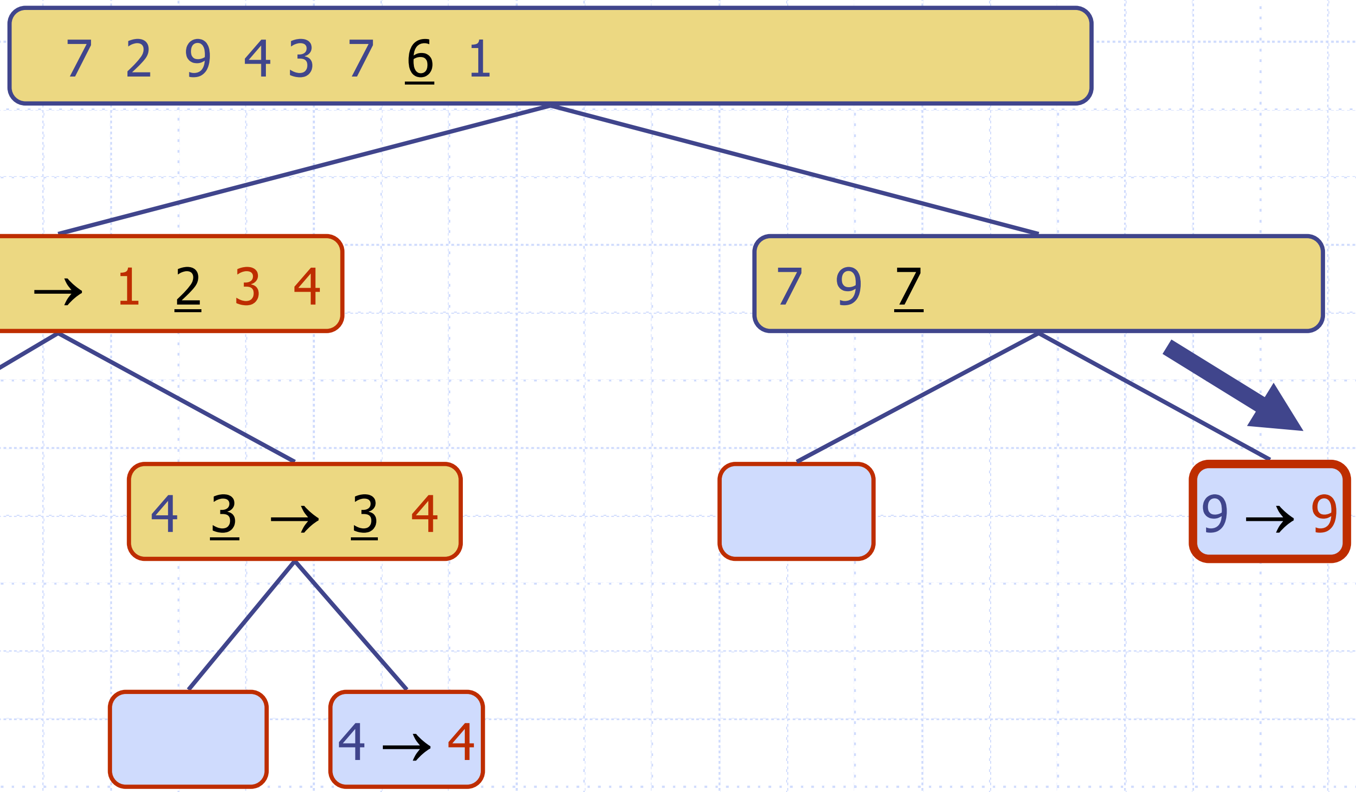
Esempio

- Partizione, ricorsione, selezione pivot



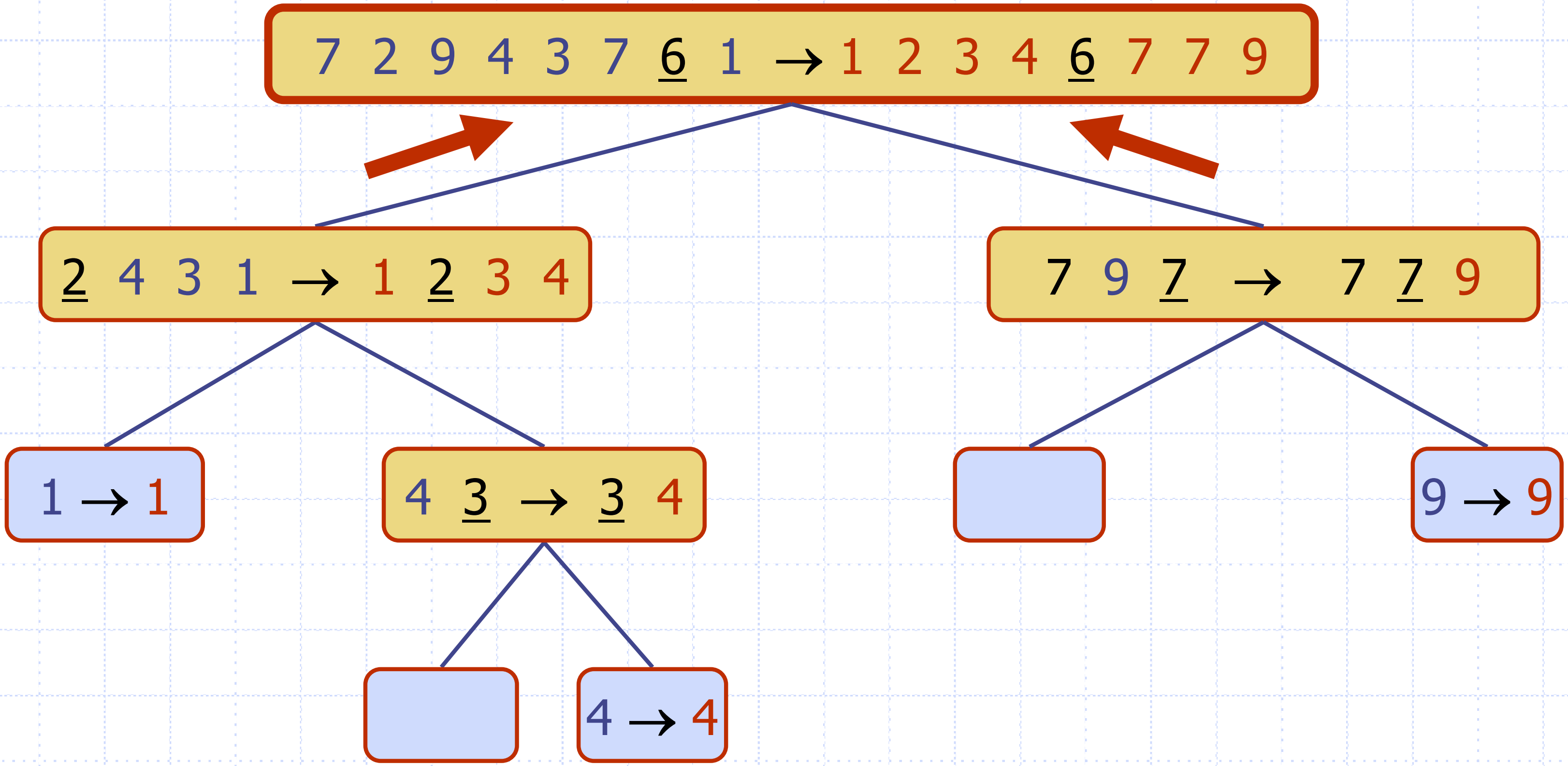
Esempio

- Partizione, ricorsione, caso base



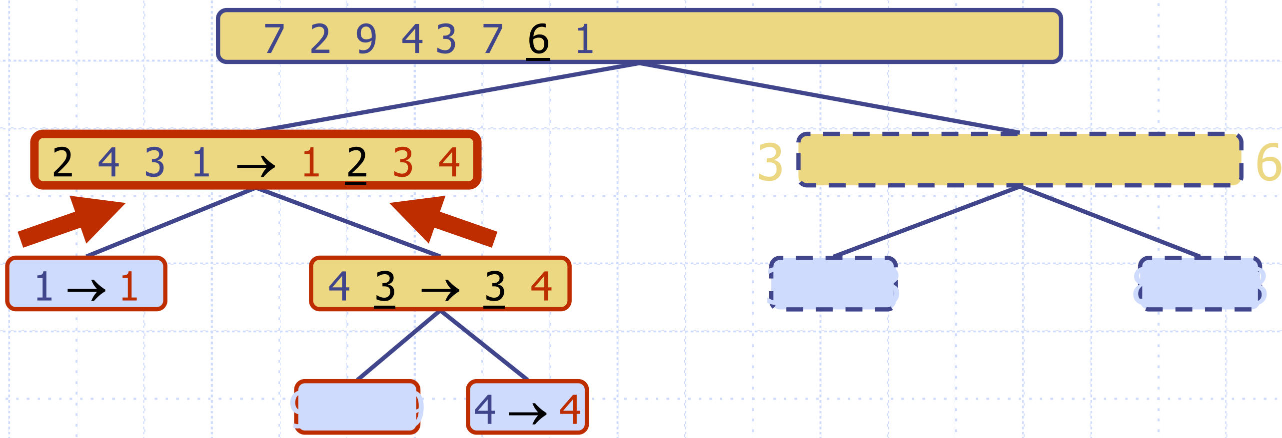
Esempio

- Unione, unione



Analisi costo

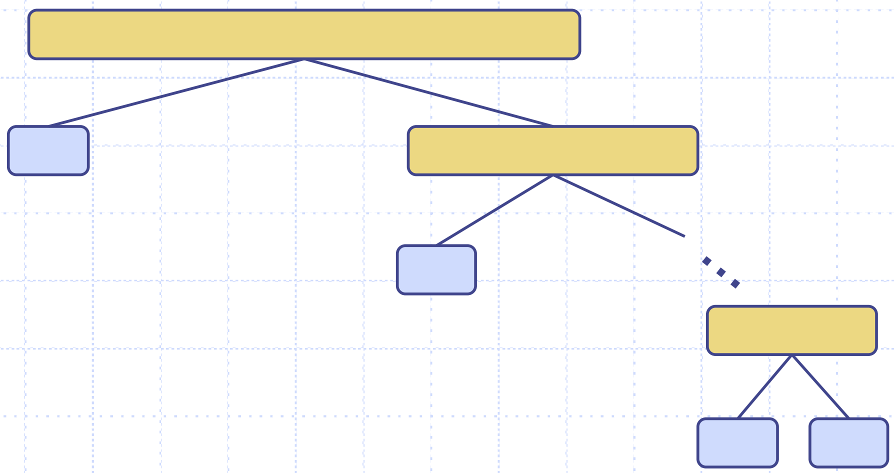
- Il costo dell'algorimo può essere espresso dal numero di elementi presenti (contando duplicazioni) nei nodi dell'albero di quick-sort
- Consideriamo un nodo dell'albero con k elementi; questo nodo viene esaminato due volte; la prima volta si esaminano gli elementi per definire gli insiemi L, E e G (costo lineare)
- La seconda volta per fare la fusione dei sottoinsiemi ordinati; anche questa operazione ha costo lineare nel numero di elementi associati al nodo



Analisi costo caso peggiore

- Il caso peggiore per quick-sort si verifica quando il pivot è il minimo o il massimo elemento
- In questo caso uno fra L o G ha dimensione $n - 1$ e

  l'altro ha dim. 0



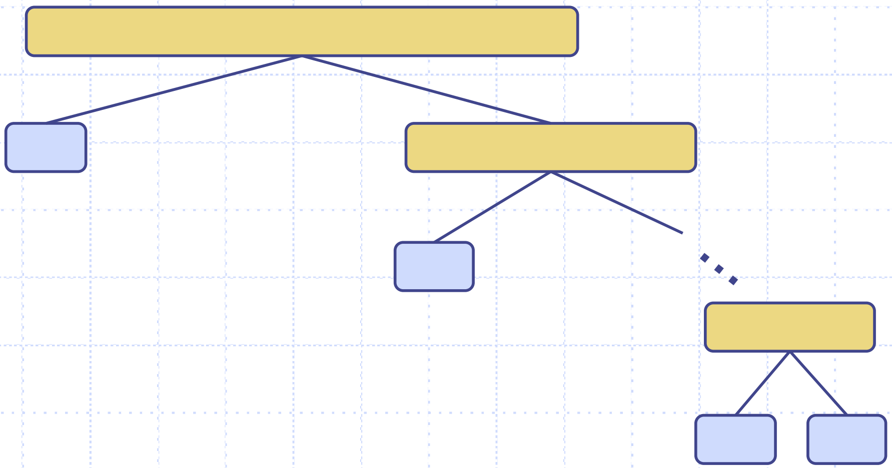
Analisi costo caso peggiore

- Il caso peggiore per quick-sort si verifica quando il pivot è il minimo o il massimo elemento
- In questo caso uno fra L o G ha dimens. $n - 1$ e l'altro ha dim. 0
- Il costo in questo caso è proporzionale alla somma

$$n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1$$

- Quindi il costo nel caso peggiore di quick-sort è $O(n^2)$

Profondità	tempo
0	n
1	$n - 1$
…	…
$n - 1$	1

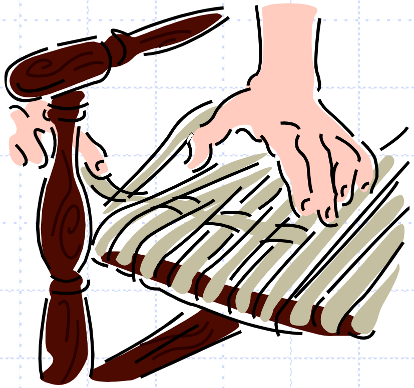


Partizione equivalente

- Solo due sottosequenze:
  L lista elementi < pivot,
  G lista elementi ≥ pivot
- Partiziona insieme dato nel seguente modo:
  - Togli ad uno ad uno elementi y da S e
  - Inserisci y in L O G, a seconda del risultato del confronto con il pivot x
- Ogni inserimento e rimozione avviene all'inizio o alla fine e quindi richiede tempo $O(1)$
- Pertanto, il partizionamento richiede tempo $O(n)$

Algorithm *partition*(S, p)
Input sequenza S, posizione p del pivot
Output sottosequenze L, G di elementi di S minori o maggiori uguali del pivot
$L, G \leftarrow$ sequenze vuote
$x \leftarrow S.remove(p)$
while $\neg S.isEmpty()$
$y \leftarrow S.remove(S.first())$
if $y < x$
$L.addLast(y)$
else $\{ y \geq x \}$
$G.addLast(y)$
return L, E, G

Quick-Sort In-Place

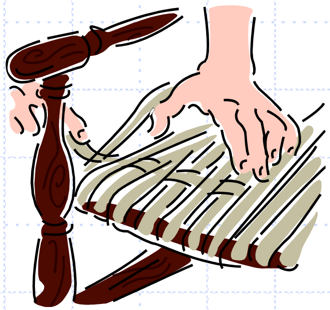


- Quick-sort si può implementare con esecuzione in-place
- Nel passo di partizione usa operazioni di scambio per riordinare gli elementi della sequenza in modo tale che
  - Gli elementi minori del pivot abbiano rango minore di h
  - Gli elementi uguali al pivot abbiano rango fra h e k
  - Gli elementi maggiori del pivot abbiano rango maggiore di k
- Le chiamate ricorsive sono su
  - elementi con rango minore di h
  - elementi con rango maggiore di k

Algorithm *inPlaceQuickSort*(S, l, r)
    Input sequenza S, ranghi l and r
    Output sequenza S con gli elementi di rango fra l e r riordinati in ordine crescente
    if $l \geq r$
        return
    $i \leftarrow$ un numero casuale fra l e r
    $x \leftarrow S.elemAtRank(i)$
    $(h, k) \leftarrow inPlacePartition(x)$
    $inPlaceQuickSort(S, l, h-1)$
    $inPlaceQuickSort(S, k+1, r)$

rango: posizione nell'ordinamento

Partizionamento In-Place



- Esegui il partizionamento usando due indici per dividere S in L e (E U G) (metodo simile divide (E U G) in E e G)

j k

3 2 5 1 0 7 3 5 9 2 7 9 8 9 7 **<u>6</u>** 9 (pivot = 6)

- Ripeti fino a quando j e k si scambiano :
  - Scorri j sulla destra fino a quando trovi un elemento $\geq$ pivot.
  - Scorri k sulla sinistra fino a quando trovi un elemento < pivot .
  - Scambia gli elementi con indici j e k

j k

3 2 5 1 0 $\boxed{7}$ 3 5 9 $\boxed{2}$ 7 9 8 9 7 **<u>6</u>** 9

Implementazione Java

```java
/** Sort the subarray S[a..b] inclusive. */
private static <K> void quickSortInPlace(K[ ] S, Comparator<K> comp,
                                                                  int a, int b) {
  if (a >= b) return;          // subarray is trivially sorted
  int left = a;
  int right = b-1;
  K pivot = S[b];
  K temp;                      // temp object used for swapping
  while (left <= right) {
    // scan until reaching value equal or larger than pivot (or right marker)
    while (left <= right && comp.compare(S[left], pivot) < 0) left++;
    // scan until reaching value equal or smaller than pivot (or left marker)
    while (left <= right && comp.compare(S[right], pivot) > 0) right--;
    if (left <= right) {       // indices did not strictly cross
      // so swap values and shrink range
      temp = S[left]; S[left] = S[right]; S[right] = temp;
      left++; right--;
    }
  }
  // put pivot into its final place (currently marked by left index)
  temp = S[left]; S[left] = S[b]; S[b] = temp;
  // make recursive calls
  quickSortInPlace(S, comp, a, left - 1);
  quickSortInPlace(S, comp, left + 1, b);
}
```

Tempo di esecuzione atteso

- Il quicksort ha un ottimo comportamento in pratica (molto veloce) e si può dimostrare che il suo costo atteso è O(n log n)
- Intuizione: analizzare il caso migliore
- caso migliore quicksort?

  quale pivot è quello migliore?

7 2 9 4 3 7 6 1 5

Tempo di esecuzione atteso

- Il quicksort ha un ottimo comportamento in pratica (molto veloce) e si può dimostrare che il suo costo atteso è O(n log n)
- Intuizione: caso migliore quicksort?

  quale pivot è quello migliore? **Il MEDIANO**

  7 2 9 4 3 7 6 1 5

- Scegliendo 5 come pivot abbiamo 2 4 3 1 e 7 9 7 6
- Iterando e scegliendo ogni volta l'elemento mediano segue che la ad ogni livello
  - la dimensione di ciascuna attivazione ricorsiva si dimezza
  - Il numero di nodi raddoppia

Costo diviene: n + 2 (n/2) + 4 (n/4) +. … n (1) = n log n

Tempo di esecuzione atteso

- Il quicksort ha un ottimo comportamento in pratica (molto veloce) e si può dimostrare che il suo costo atteso è O(n log n)
- Intuizione: caso migliore quicksort?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

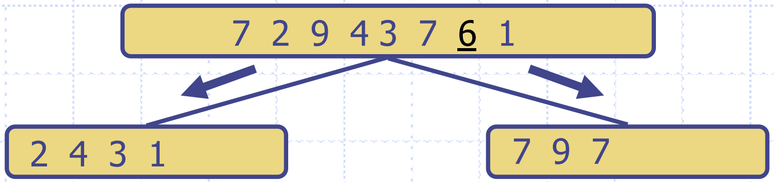
Caso buono **Caso cattivo**

- Una attivazione è buona con probabilità $1/2$
  - 1/2 di tutti i possibili pivot danno casi buoni:

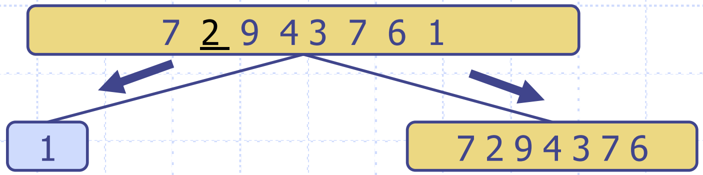
$$\underbrace{1\ 2\ 3\ 4}_{\textbf{Pivots cattivi}}\ \underbrace{5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12}_{\textbf{Pivots buoni}}\ \underbrace{13\ 14\ 15\ 16}_{\textbf{Pivots cattivi}}$$

Tempo di esecuzione atteso

- Considera una attivazione ricorsiva su una sequenza of dimensione s
  - **Caso buono:** le dimens. di L e G sono ambedue minori di $3s/4$
  - **Caso cattivo:** uno fra L e G ha dimesnione maggiore di $3s/4$

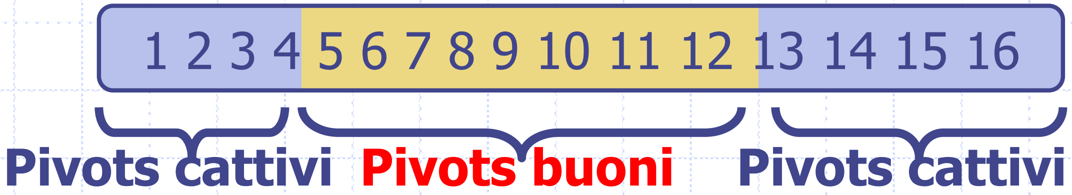


Caso buono



Caso cattivo

- Una attivazione è buona con probabilità $1/2$
  - 1/2 di tutti i possibili pivot danno casi buoni:

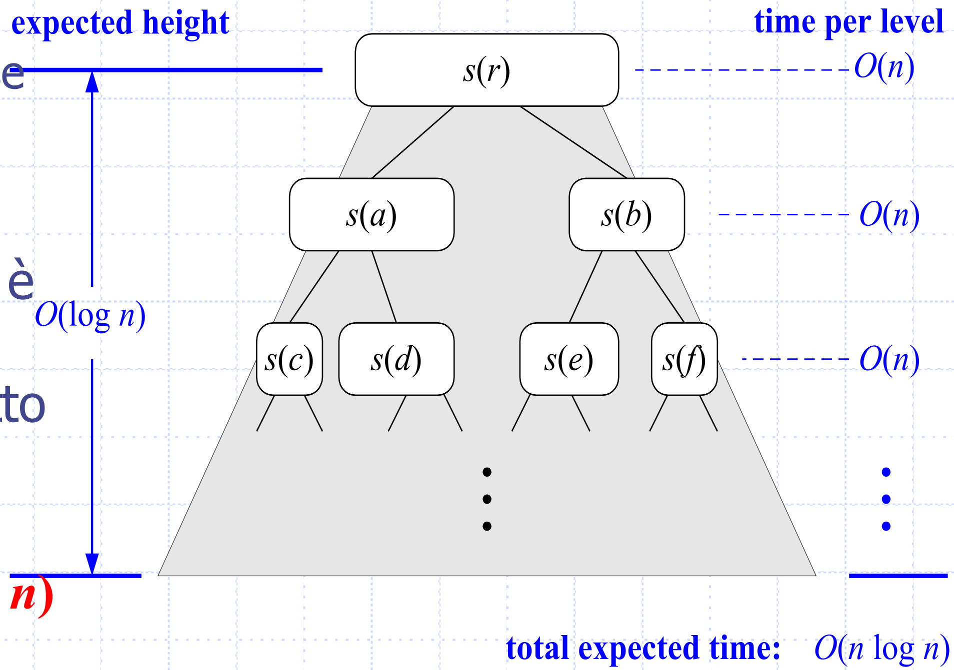


Tempo di esecuzione atteso - 2

- **Fatto di teoria della probabilità: Il numero atteso di monete da lanciare per avere k volte Testa è $2k$**
- Nel nostro caso ci aspettiamo che, per un nodo di profondità i,
  - $i/2$ antenati siano chiamate buone
  - dimensione attesa della sequenza da ordinare sia al più $(3/4)^{i/2}n$
- Pertanto, ci aspettiamo che
  - Per un nodo a profondità $2\log_{4/3}n$ la dimensione attesa del nodo sia uno (se $i=2\log_{4/3}n$ *sostituendo* i *in* $(3/4)^{i/2}\,n$

    otteniamo $(3/4)^{(2\log 4/3 n)/2}\,n = 1$)
  - Quindi la profondità attesa dell'albero è $O(\log n)$
- Per ogni profondità il lavoro totale fatto per tutti i nodi del livello è $O(n)$
- Quindi il tempo atteso di quick-sort è

  O((*prof. attesa*) x (*costo livello*)= $O(n \log n)$)



Cosa sappiamo

- Caso peggiore $O(n^2)$, caso medio $O(n \log n)$
- Il caso peggiore si verifica quando scelgo come pivot un elemento molto grande (o molto piccolo)
- L'ideale sarebbe scegliere ad ogni iterazione il mediano (sta a metà nella sequenza ordinata) ma scegliere il mediano costa
- IDEA: scegli 3 (o 5) elementi a caso e prendi come pivot il mediano fra quelli scelti
- Costa poco farlo ed in pratica funziona bene!
- Nota: potrei applicare l'idea scegliendo 11 o 101 elementi a caso; esperimenti fatti mostrano che non ne vale la pena

Algoritmi di Ordinamento

Algoritmo	Tempo	Note
selection-sort	$O(n^2)$	▪ in-place ▪ lento (solo per input piccoli)
insertion-sort	$O(n^2)$	▪ in-place ▪ lento (solo per input piccoli)
quick-sort	$O(n \log n)$ atteso	▪ in-place, fa scelte casuali ▪ il più veloce in pratica: la costante "nascosta" nella notaz. O() è piccola rispetto agli altri
heap-sort	$O(n \log n)$	▪ in-place ▪ veloce (buono per grandi input)
merge-sort	$O(n \log n)$	▪ accesso sequenziale ai dati ▪ veloce (buono per grandi input)