Fondamenti di Comunicazioni

Corso: Fondamenti di comunicazioni e Internet (canale I e II)
E Telecomunicazioni

Argomento 9: Teorema del campionamento

Tiziana Cattai
email: tiziana.cattai@uniroma1.it

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Materiale didattico: Tiziana Cattai, Stefania Colonnese, Roberto Cusani

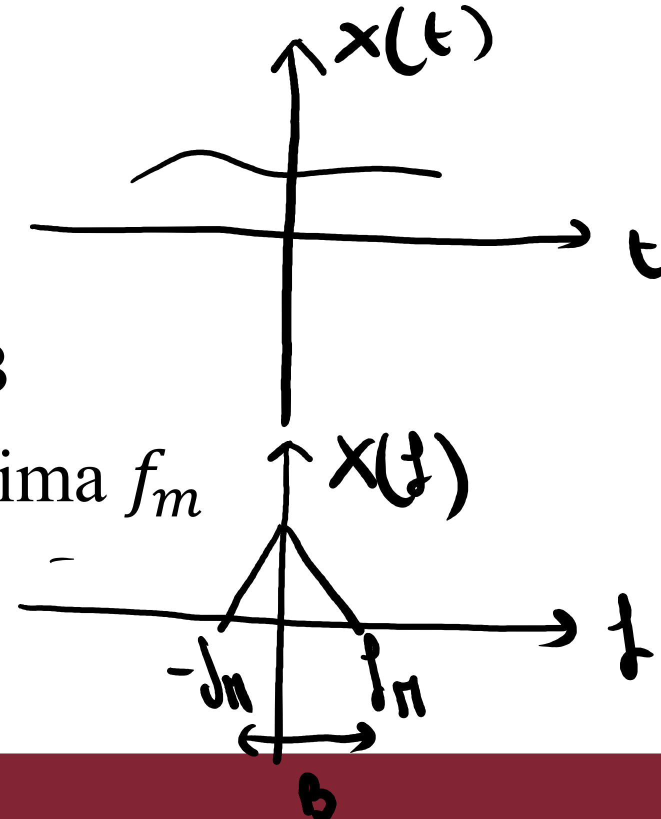
Campionamento

Ci occupiamo di capire come passare da un segnale continuo x(t) ad uno discreto x_n senza perdita di informazioni. Questo ci permette di ritornare dal segnale campionato x_n a quello iniziale x(t).

Consideriamo un generico segnale x(t)

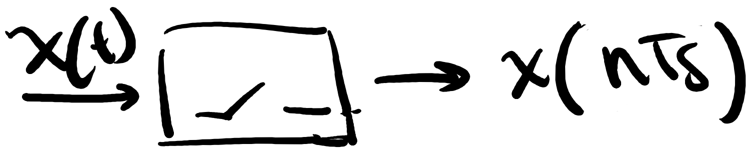
Che sia limitato in banda: banda finita B

Con una componente di frequenza massima f_m

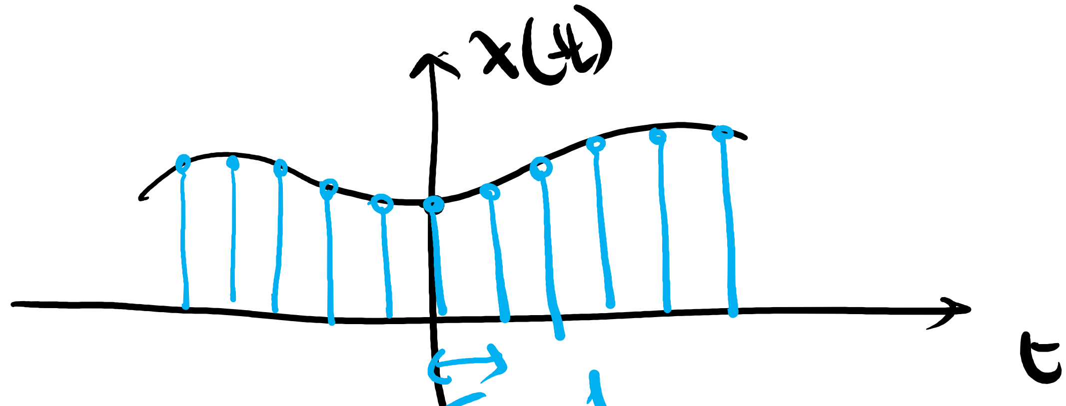


Campionamento

Questo segnale viene fatto passare in un campionatore, che è un sistema misto che prende in ingresso un segnale continuo e dà in uscita un segnale discreto



attenzione alla notazione!



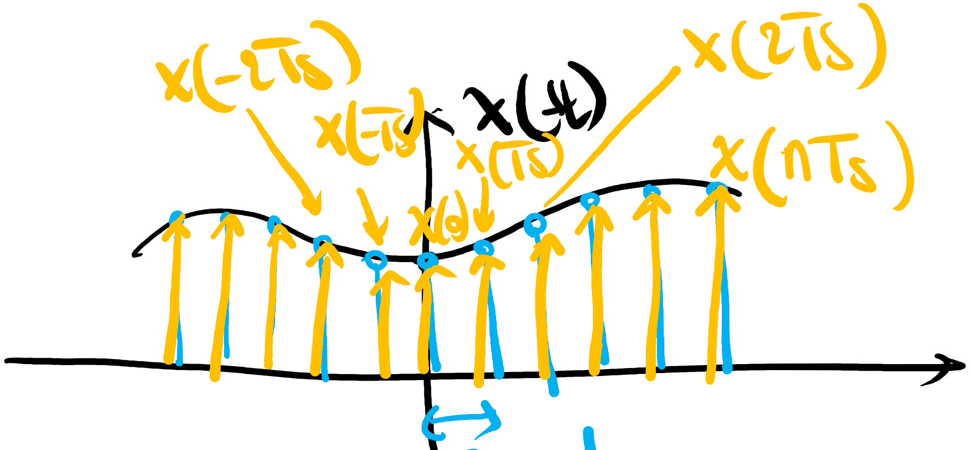
$T_s = \frac{1}{f_s}$

f_s : sampling frequency

(FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO)

Campionamento

Il segnale in uscita dal campionatore, entra in un formatore di impulsi. Un sistema misto che prende in ingresso un segnale discreto e dà in uscita un segnale continuo, in cui in ogni campione discreto c'è un impulso matematico con area pari al valore che la sequenza x assume in quel punto



$T_s = \frac{1}{f_s}$

f_s : sampling frequency (FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO)

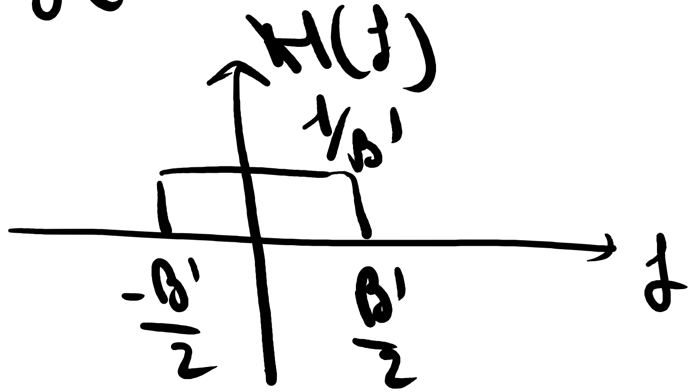
$$\tilde{x} = \sum_n x_n \delta(t - nT_s)$$

Campionamento

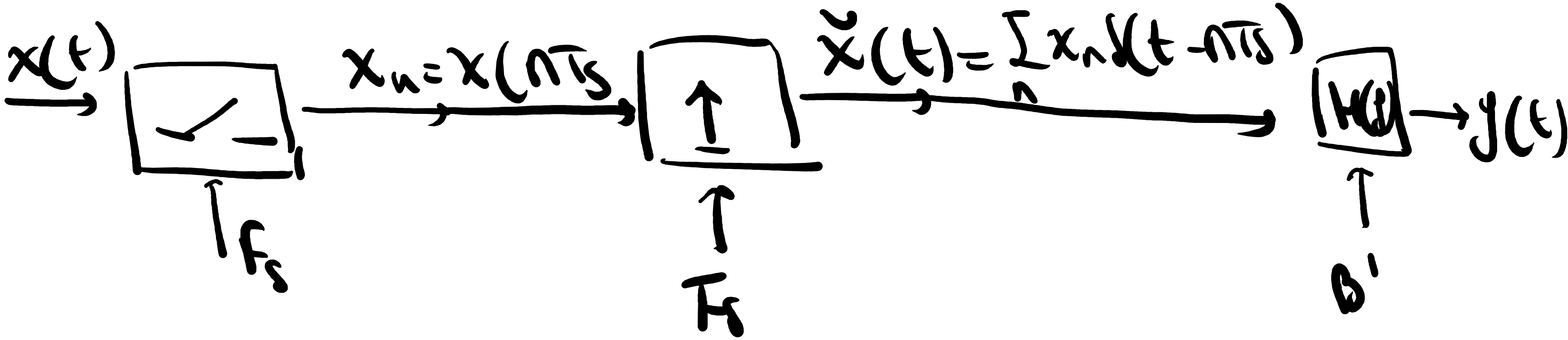
Il segnale $\tilde{x}(t)$ passa infine in un filtro passa basso con banda B’, ed esce il segnale y(t). Sotto le ipotesi del teorema del Campionamento il segnale y(t)=x(t)

$$\tilde{x}(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y(t)$$

$$H(f) = \frac{1}{B'}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B'}\right)$$

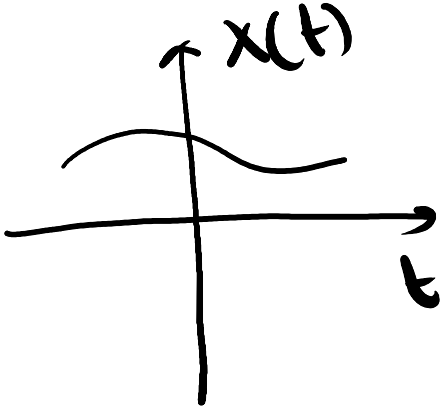


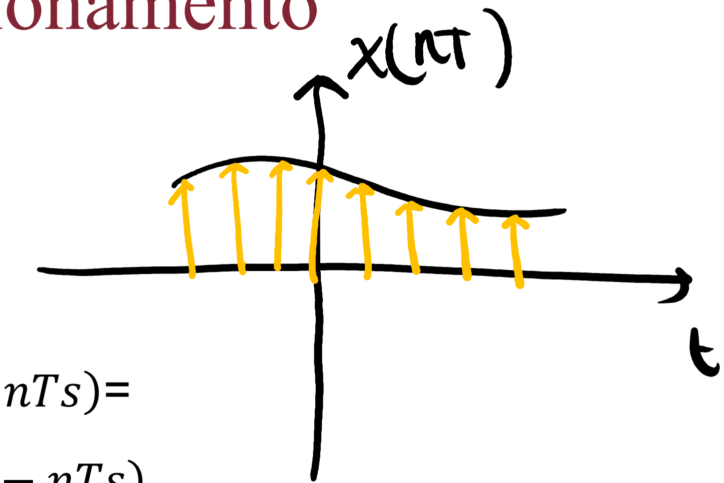
Teorema del Campionamento



Teorema del campionamento. Se il segnale tempo continuo di ingresso x(t) e' limitato in banda con frequenza massima f_m e se la frequenza di campionamento F_s e' $F_s \geq 2f_m$, allora y(t)=x(t)

Teorema del campionamento



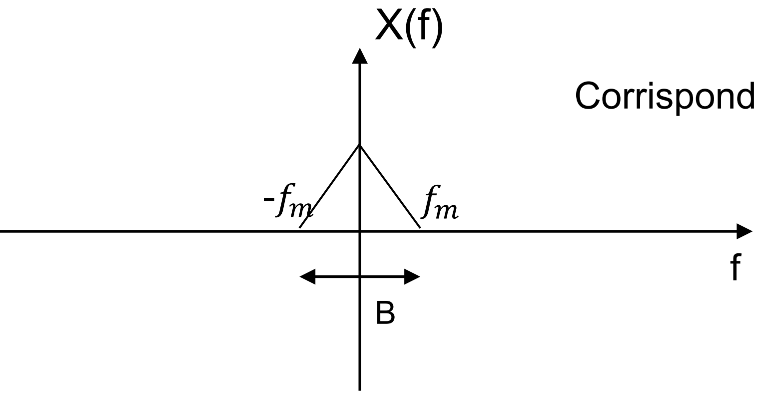


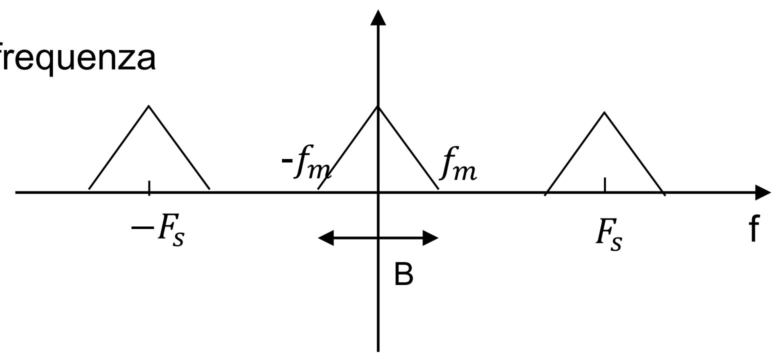
$$\tilde{x}(t) = \sum_n x_n.\delta(t - nTs) =$$

$$= \sum_n x(nTs) \cdot \delta(t - nTs)$$

La moltiplicazione nel tempo del segnale per un treno di impulsi

Corrisponde a convoluzione in frequenza





Teorema del campionamento

Vediamo con le formule

$$\tilde{x}(t) = \sum_n x_n . \delta(t - nTs) = \sum_n x(nT_s) \cdot \delta(t - nTs) = \sum_n x(t) \cdot \delta(t - nTs)$$

$$= \quad x(t) \sum_n \delta(t - nTs) = x(t) \cdot \Gamma_{T_s}(t)$$

Ora facciamone la trasformata di Fourier CTFT:

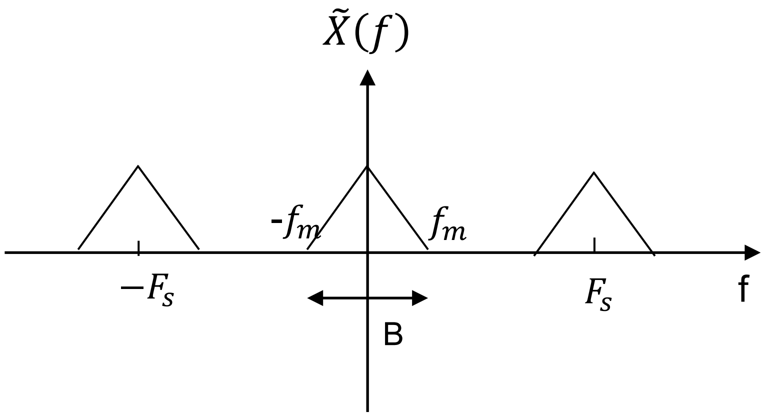
$$\tilde{X}(f) = FT\{\tilde{x}(t)\} = FT\{x(t) \cdot \Gamma_{T_s}(t)\} = FT\{x(t)\} * FT\{\Gamma_{T_s}(t)\} = X(f) * F_s \Gamma_{F_s}(f)$$

$$= X(f) * \mathrm{F}_s \sum_n \delta(f - nFs) = F_s \sum_n X(f) * \delta(f - nFs) = Fs \sum_n X(f - nFs)$$

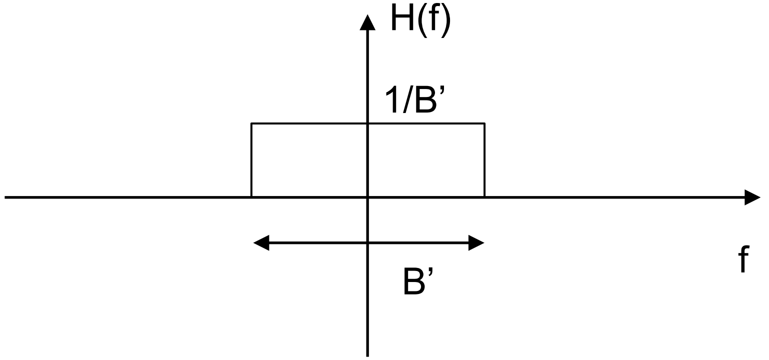
Questo significa che ho infinite repliche della trasformata di Fourier del segnale in ingresso centrate nei multipli della frequenza di campionamento F_s

Teorema del campionamento

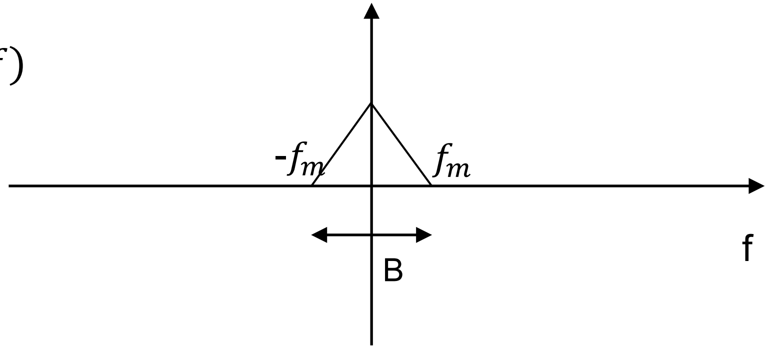
$$\tilde{X}(f) = F_s \sum_n X(f - nFs)$$



$$H(f) = \frac{1}{B'} rect(\frac{f}{B'})$$

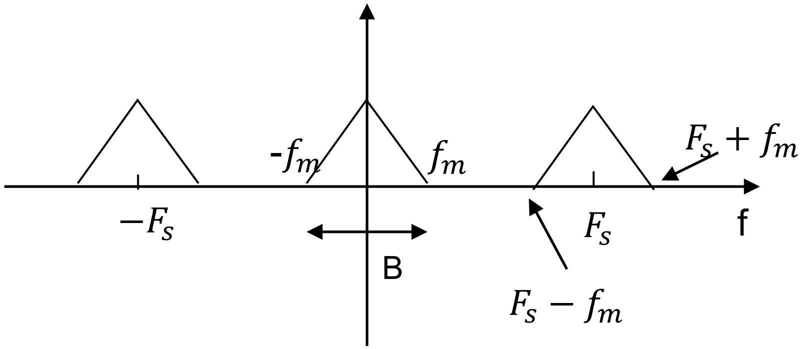


$$Y(f) = \tilde{X}(f) \cdot H(f) = X(f)$$

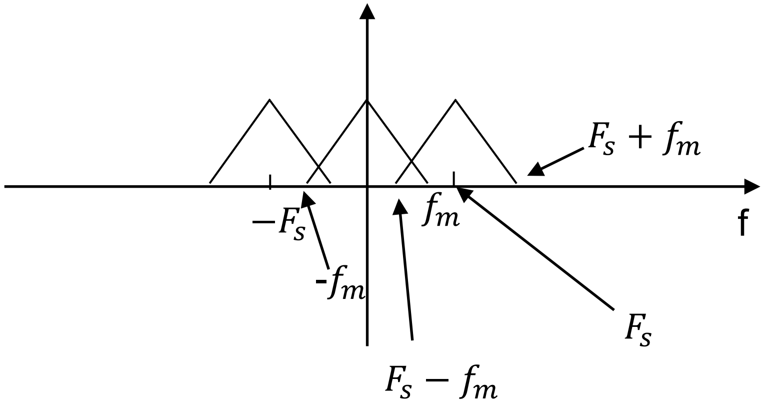


Teorema del campionamento
ipotesi del teorema del campionamento

$$\tilde{X}(f) = F_s \sum_n X(f - nFs)$$

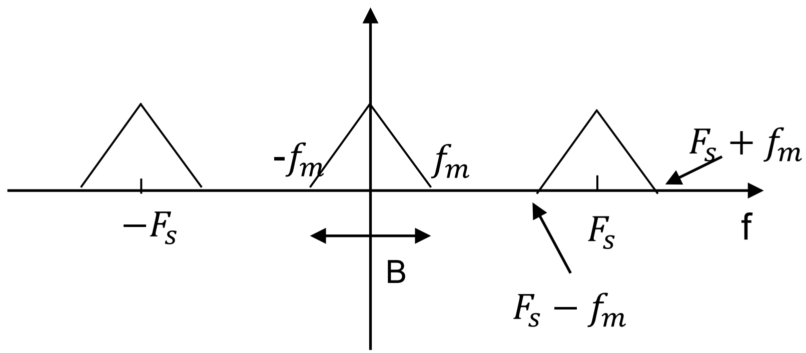


Se $F_s - f_m \geq f_m \rightarrow F_s \geq 2f_m = B$ allora riesco a ricostruire correttamente. Altrimenti no.
Vediamo caso $F_s < 2f_m$

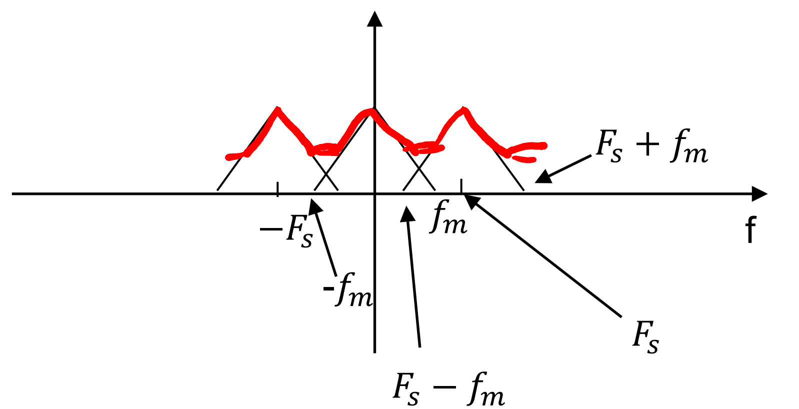


Teorema del campionamento
ipotesi del teorema del campionamento

$$\tilde{X}(f) = F_s \sum_n X(f - nFs)$$

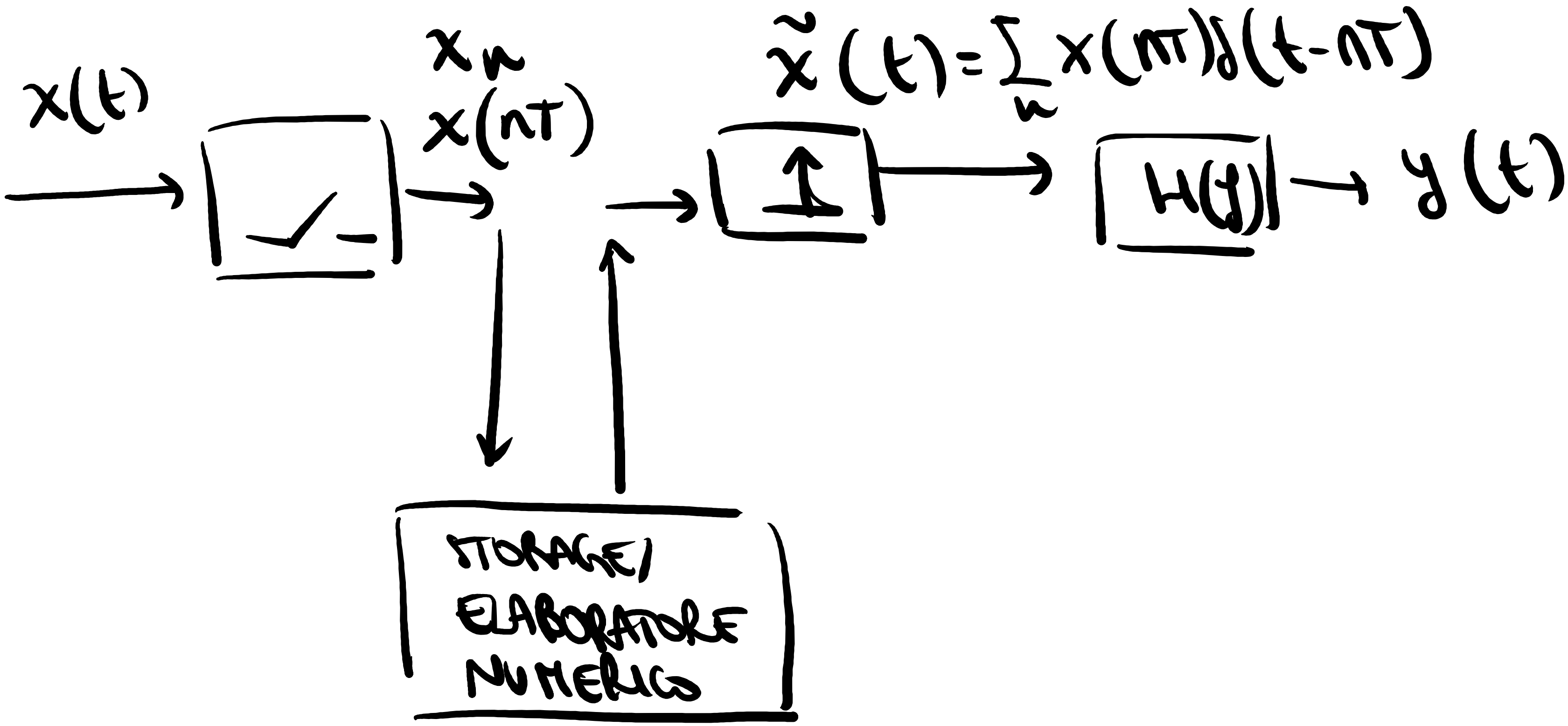


Se $F_s - f_m \geq f_m \rightarrow F_s \geq 2f_m = B$ allora riesco a ricostruire correttamente. Altrimenti no.
Vediamo caso $F_s < 2f_m$



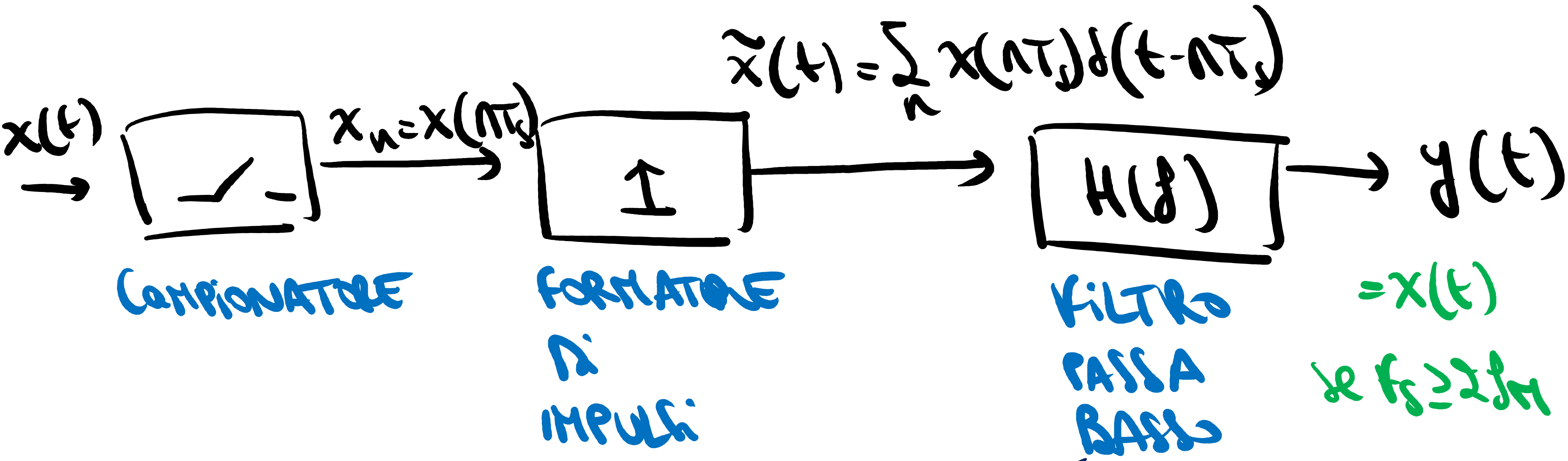
In questo caso non è possibile ricostruire il segnale di partenza perché le repliche sono sovrapposte → quando si fa passare il segnale in un filtro passa basso non si recupera una replica

Utilizzo del campionamento



Teorema del campionamento: ricostruzione del segnale x(t)

Seguendo tutti gli step che abbiamo presentato



$$H(f) = \frac{1}{f_s}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) = T_s\,\mathrm{rect}(T_s f)$$

$$\Rightarrow h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H(f)) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

Teorema del campionamento: ricostruzione del segnale x(t)

Ingresso: x(t)

Campionatore a passo T_s: $x_n = x(nT_s)$

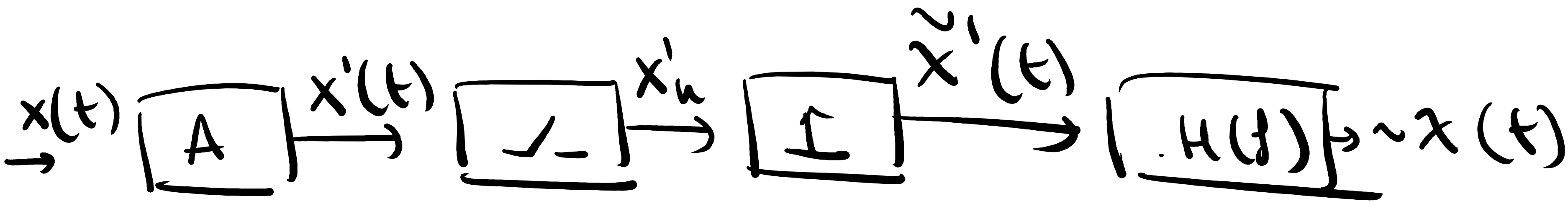
Formatore di impulsi: $\tilde{x}(t) = \sum_n x_n \cdot \delta(t - nT_s)$

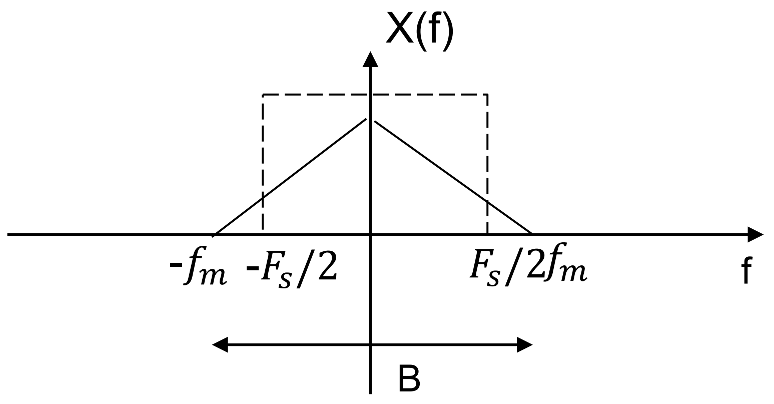
Uscita del filtro: $x(t) = \tilde{x}(t) * h(t) =$

$$\sum_n x_n \cdot \delta(t - nT_s) * sinc\left(\frac{t}{T_s}\right) = \sum_n x_n \cdot sinc(\frac{t - nT_s}{T_s})$$

Filtro anti-aliasing

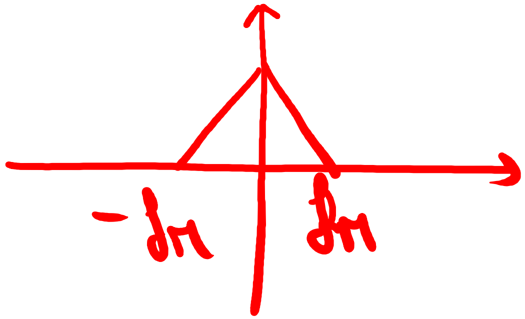
Si tratta di un filtro passa basso $[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}]$ che taglia la banda del segnale x(t) in ingresso. Viene applicato nella maggior parte dei sistemi reali direttamente al segnale x(t)





Esercizi

Un segnale x(t) ha una frequenza massima di 20kHz. Determinare il massimo intervallo di campionamento per avere una perfetta ricostruzione del segnale.



$F_s \geq 2 f_M \quad F_s \geq 40 kHz$

$T_s \leq \frac{1}{40 \cdot 10^3} s \Rightarrow$

$= \frac{1}{4} \cdot 10^{-3} s$

$= 0.25 ms$

T_s massimo : 0.25 ms

Esercizi

Dato il segnale x(t)=3cos($2\pi 4t$)-sin($2\pi 3t$) quanti campioni devono essere presi su un intervallo di 5 s per soddisfare il teorema del campionamento?

$f_M = 4 Hz$ $f_s \geq 2 f_M \rightarrow f_s \geq 8 Hz \Rightarrow T_s \leq \frac{1}{8} s$

$n_{samples\,MIN} = \frac{5s}{\frac{1}{8}s} = 40$ samples