5

EQUIVALENZA FINANZIARIA
FATTORI FINANZIARI

EQUIVALENZA

- Due o più somme di denaro, che si susseguono nel tempo, possono essere confrontate con altre sulla base del principio di equivalenza dei rispettivi flussi di cassa.
- Il tasso d'interesse è il fattore che rende equivalenti due somme di denaro nel tempo.
- Lo scambio fra prestazioni finanziarie presuppone che tra queste esista equivalenza.

FATTORE DI CAPITALIZZAZIONE DI UN SINGOLO PAGAMENTO

- Ricorrendo al principio di equivalenza, due somme possedute in istanti di tempo diversi, producono gli stessi effetti se sono legate dal **fattore di capitalizzazione di un singolo pagamento**

$$F = P(1+i)^n$$

- nel caso di equivalenza con un solo pagamento.

FATTORE DI ATTUALIZZAZIONE DI UN SINGOLO PAGAMENTO

- Per la formula inversa abbiamo il **fattore di attualizzazione di un singolo pagamento**

$$P = F(1+i)^{-n}$$

Fattore	Trovare	Noto	Formula
Capitalizzazione	**F**	**P**	**$F = P(1+i)^{n} = P\ (^{F/P,\ i,\ n})$**
Attualizzazione	**P**	**F**	**$P = F(1+i)^{-n} = F\ (^{P/F,\ i,\ n})$**

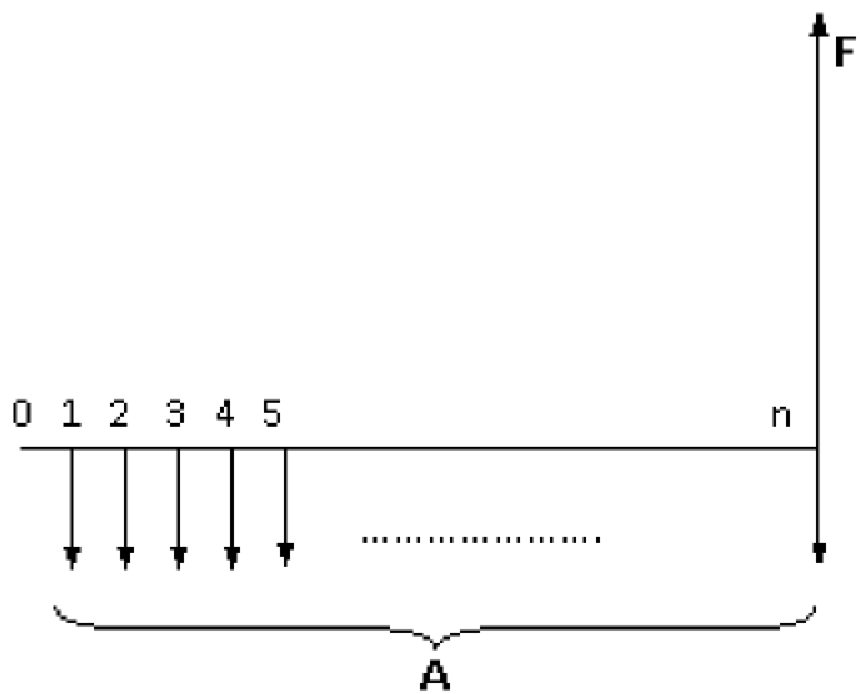
PRESTAZIONI MULTIPLE

- L’equivalenza con prestazioni multiple (più pagamenti) riguarda scambi di denaro (debito/credito) di pari entità che si susseguono più volte nel tempo ad intervalli regolari.
- Caratteristiche:
- regolarità nelle quantità scambiate
- regolarità nell’intervallo di tempo fra un’operazione e l’altra

SERIE DI PAGAMENTI UGUALI

- **A** è il pagamento singolo di una serie di pagamenti uguali effettuato alla fine di ogni periodo di interesse
- **A** contraddistingue somme uguali che si susseguono nel tempo ad intervalli regolari (le rate costanti del nostro mutuo, la somma mensile che accantoniamo a fini previdenziali, ecc.)
- La fine di un periodo d'interesse coincide con l'inizio del successivo (P coincide con l'inizio, F coincide con la fine del progetto di investimento)
- ***A*** si verifica alla fine di ciascun periodo d'interesse considerato

SERIE DI PAGAMENTI UGUALI

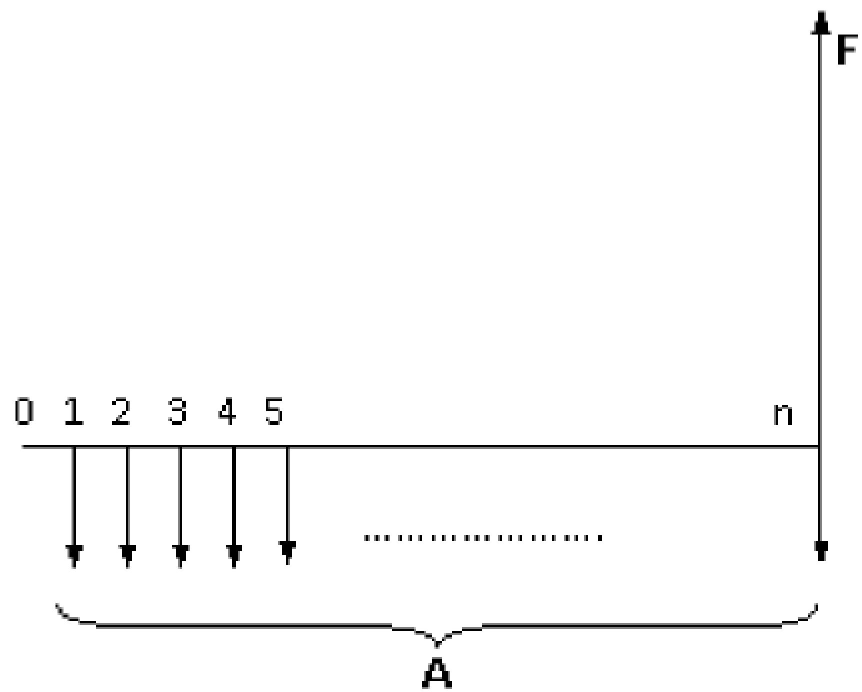


PRESTAZIONI MULTIPLE

- Per il calcolo dell'equivalenza con prestazioni multiple, tecnicamente ci riferiremo ad una famiglia di fattori. Nella fattispecie ci riferiamo al:
  - **Fattore di capitalizzazione composta di una serie di pagamenti uguali**
  - **Fattore di ammortamento di una serie di pagamenti uguali**
  - **Fattore di attualizzazione di una serie di pagamenti uguali**
  - **Fattore di recupero del capitale**

FATTORE DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA DI UNA SERIE DI PAGAMENTI UGUALI

- Consideriamo una serie di *n* pagamenti uguali pari ad *A* ed esaminiamo il diagramma dei flussi di cassa



FATTORE DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA DI UNA SERIE DI PAGAMENTI UGUALI

- Con ***A*** indichiamo ***n*** prestazioni uguali, con valore futuro ***F***, quindi:

$$F = A[(1+(1+i)+...+(1+i)^{n\text{-}2}+(1+i)^{n\text{-}1}]$$

$$F(1+i) = A[(1+i)+(1+i)^{2}+...+(1+i)^{n\text{-}1}+(1+i)^{n}]$$

$$F(1+i)\text{-}F = A[(1+i)^{n}-1]$$

$$F \cdot i = A[(1+i)^{n}\text{-}1]$$

$$F = A\frac{(1+i)^{n}\text{-}1}{i} = A\left({}^{F/A,i,n}\right)$$

ESEMPIO

- Calcolare il montante *F* di 5 pagamenti da 100 euro ciascuno, considerando un tasso i = 12%.

$$F = A\frac{(1+i)^{n} - 1}{i} = 100\frac{(1+0,12)^{5} - 1}{0,12} = 100\left(\overset{F/A,12,5}{6,35}\right) = 635€$$

FATTORE DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA DI UNA SERIE DI PAGAMENTI UGUALI

- è possibile calcolare il montante anche eseguendo le singole operazioni :

1. $100\,(1{,}12)^{4} = 157€$
2. $100\,(1{,}12)^{3} = 140€$
3. $100\,(1{,}12)^{2} = 125€$
4. $100\,(1{,}12)^{1} = 112€$
5. $100\,(1{,}12)^{0} = 100€$

____

TOTALE =634€

FATTORE DI AMMORTAMENTO DI UNA SERIE DI PAGAMENTI UGUALI

- Il fattore permette di determinare A, cioè l'ammontare della rata di una serie di pagamenti eguali *equivalenti* ad una somma futura F.
- E' il problema inverso del precedente:

$$F = A\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow A = F\frac{i}{(1+i)^n - 1} = F\binom{A/F,i,n}{}$$

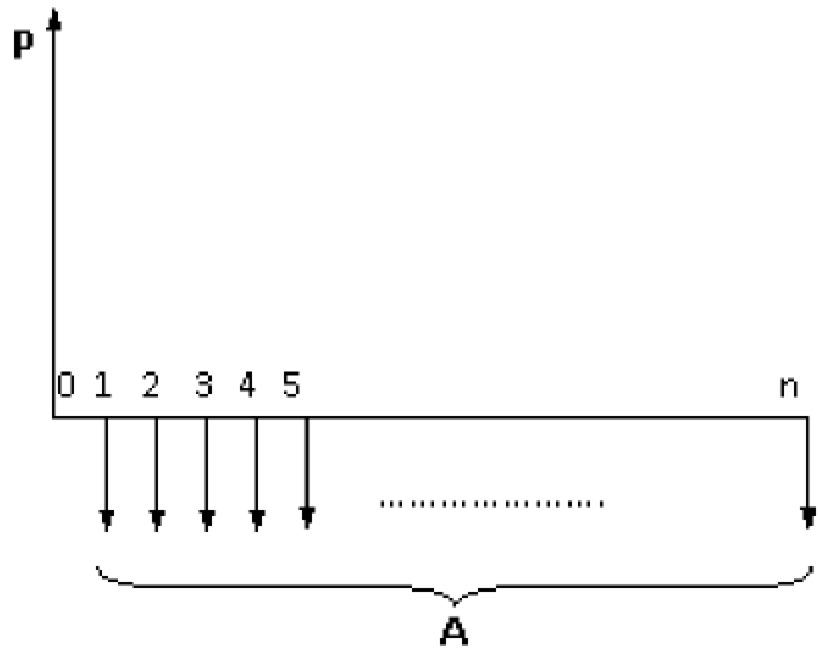
ESEMPIO

- Calcolare l'ammontare delle 7 rate costanti con valore futuro pari a 336€ in presenza di un tasso d'interesse del 6%.

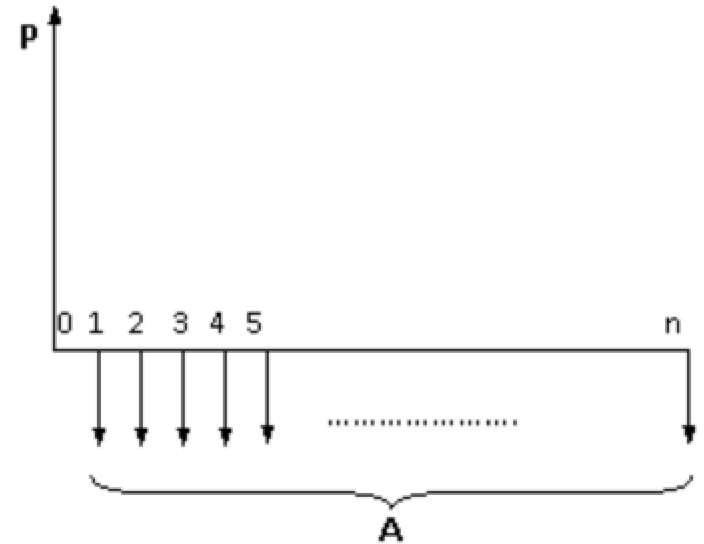
$$A = F\frac{i}{(1+i)^n - 1} = 336\frac{0,06}{(1+0,06)^7 - 1} = 336\left(\overset{A/F,6,7}{0,12}\right) = 40,32€$$

FATTORE DI ATTUALIZZAZIONE DI UNA SERIE DI PAGAMENTI UGUALI

- Il fattore permette di individuare il valore attuale *P* di una serie di pagamenti uguali *A*, che si susseguono ad intervalli regolari



FATTORE DI ATTUALIZZAZIONE DI UNA SERIE DI PAGAMENTI UGUALI



$$P = F(1+i)^{-n}$$

$$F = A\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

$$P = A\frac{(1+i)^{n}-1}{i}(1+i)^{-n} = A\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{n}\cdot i} = A\left(^{P/A,i,n}\right)$$

ESEMPIO

- Qual è il valore attuale *P* di una serie di 5 pagamenti annuali uguali pari a 60€ ciascuno, sulla base di un tasso d'interesse annuo del 10%?

$$P = A\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = 60\,\frac{(1+0,1)^5 - 1}{0,1\cdot(1+0,1)^5} = 60\cdot\left(\overset{P/A,10,5}{3,79}\right) = 227,4€$$

FATTORE DI RECUPERO DEL CAPITALE

- Il fattore permette di determinare *A*, ovvero il valore della rata annuale che rende *n* pagamenti uguali equivalenti al valore attuale *P*

$$P = A\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \Rightarrow A = P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = P\left({}^{A/P,i,n}\right)$$

ESEMPIO

- Calcolare l'ammontare A delle 5 rate annuali uguali necessarie per l'acquisto di un bene del valore di 18000€ ad un tasso d'interesse annuo pari a 15%.

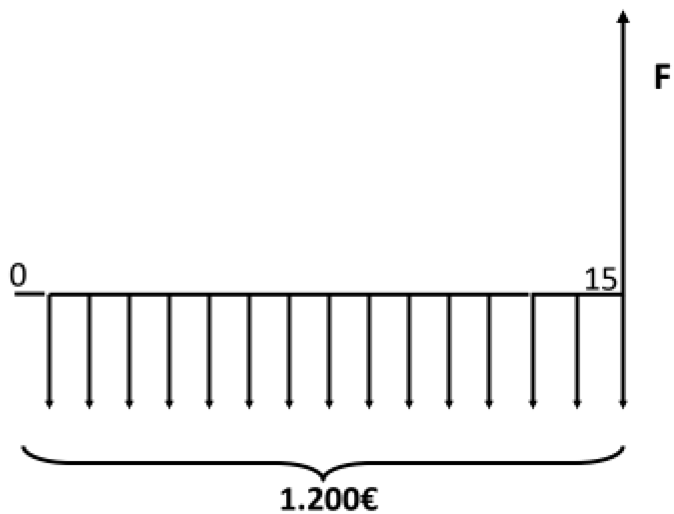
$$A = 18000 \frac{(1+0,15)^5 \cdot 0,15}{(1+0,15)^5 - 1} = 18000 \left(\overset{A/P,15,5}{0,3} \right) = 5400€$$

EQUIVALENZA CON PRESTAZIONI MULTIPLE

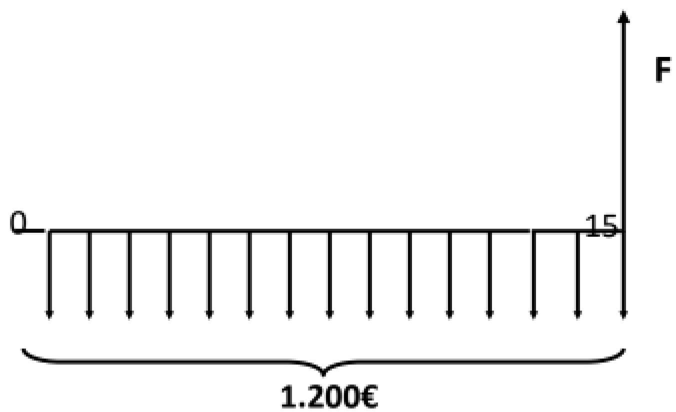
Fattore	Trovare	Noto	Formula
Capitalizzazione composta di una serie di pagamenti uguali	**F**	**A**	$F = A\frac{(1+i)^n - 1}{i} = A\left(^{F/A,i,n}\right)$
Ammortamento per una serie di pagamenti uguali	**A**	**F**	$A = F\frac{i}{(1+i)^n - 1} = F\left(^{A/F,i,n}\right)$
Attualizzazione di una serie di pagamenti uguali	**P**	**A**	$P = A\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = A\left(^{P/A,i,n}\right)$
Recupero del capitale con una serie di pagamenti uguali	**A**	**P**	$A = P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = P\left(^{A/P,i,n}\right)$

Esercizio 1

Qual è il valore futuro di una rendita annua di 1.200€, durata di 15 anni e che si capitalizza al tasso effettivo annuo del 12%.



Esercizio 1



$$F = A\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) = 1.200\left(\frac{(1+0{,}12)^{15} - 1}{0{,}12}\right)$$

$$= 1.200\begin{pmatrix} F/A{,}12{,}15 \\ 37{,}28 \\ \end{pmatrix} = 44.736€$$

Esercizio 2

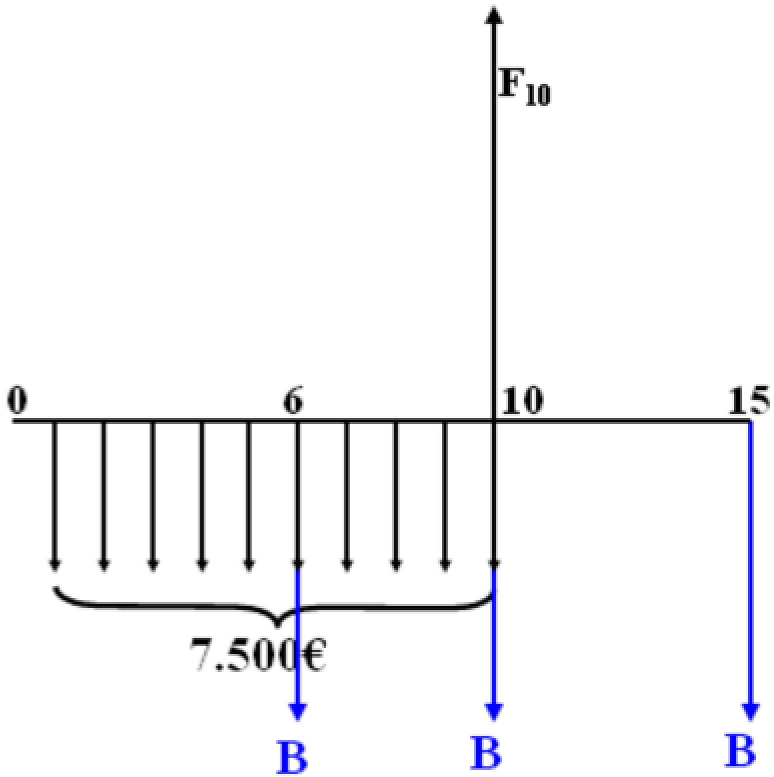
Qual è il pagamento annuale richiesto per rimborsare un premio di 2.500€ in tre anni se il tasso d'interesse è dell'8% composto annualmente?

$$A = P\left(\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right) = 2.500\begin{pmatrix} A/P,8,3 \\ 0,39 \\ \end{pmatrix} = 975€$$

Esercizio 3

Una serie di 10 pagamenti annuali di 7.500€ è equivalente a 3 pagamenti annuali alla fine degli anni 6, 10, 15, al tasso d'interesse del 15% composto annualmente. Qual è l'ammontare dei tre pagamenti?

- serie di 10 pagamenti annuali di 7.500€
- 3 pagamenti annuali alla fine degli anni 6, 10, 15

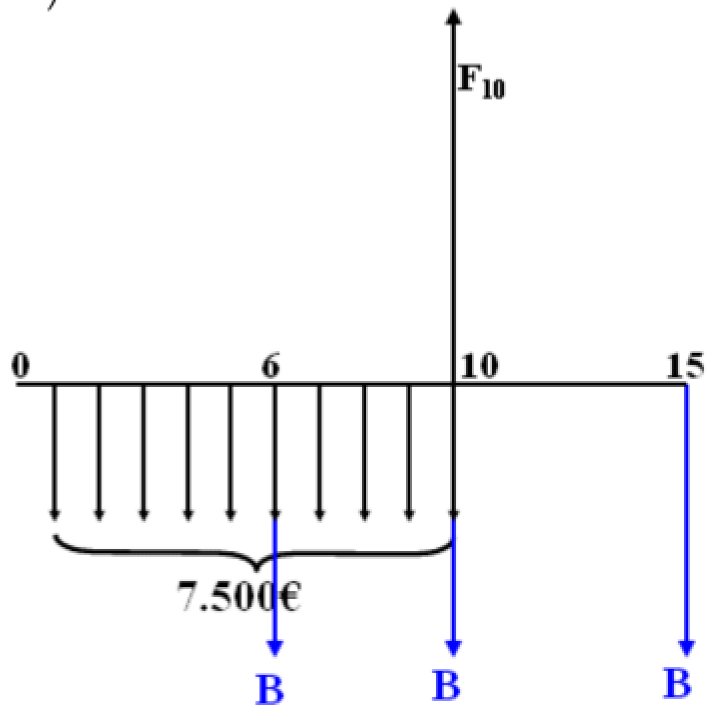


$$F_{10} = A\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) = 7.500\left(\overset{F/A,15,10}{20{,}3}\right) = 152.250€$$

$$F_{10} = B + B(1+i)^4 + B(1+i)^{-5} =$$

$$= B + B\left(\overset{F/P,15,4}{1{,}75}\right) + B\left(\overset{P/F,15,5}{0{,}5}\right) =$$

$$= B \cdot 3{,}25$$



$$B = \frac{152.250}{3{,}25} = 46.846{,}15€$$

Esercizio 4

Trovare A affinché le due serie di pagamenti siano equivalenti considerando un tasso d'interesse del 7% composto annualmente:

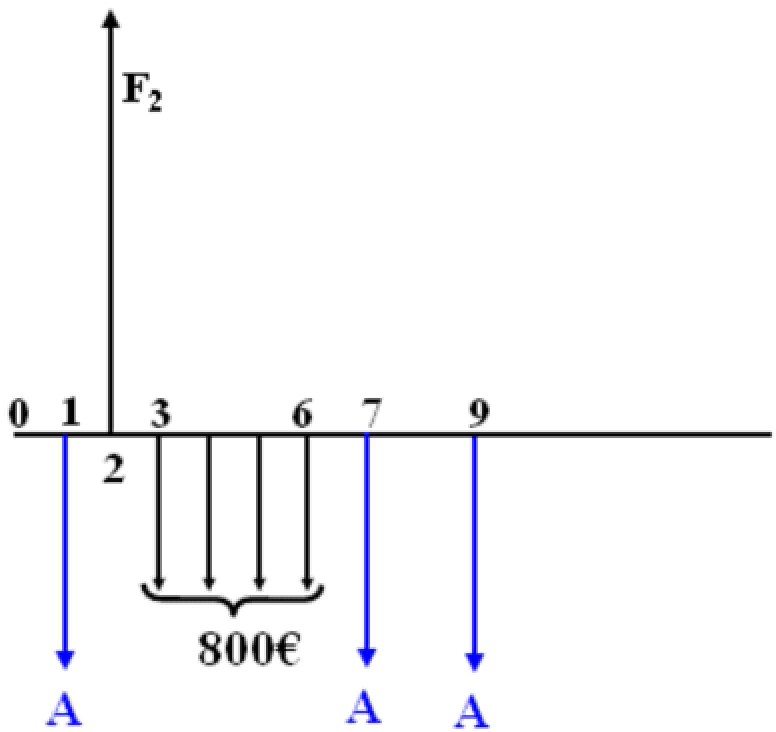
a) 4 pagamenti annuali da 800€ dalla fine 3° alla fine 6° anno,

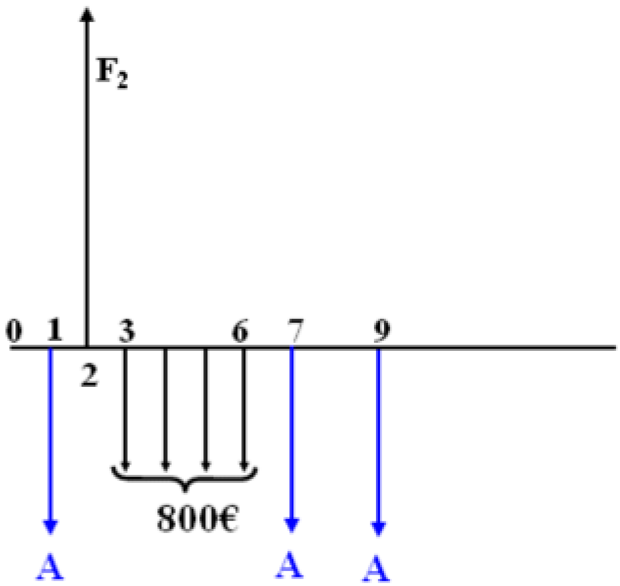
b) 3 pagamenti uguali A alla fine del 1°, 7° e 9° anno.

Calcolare l'equivalenza in t=2 e t=4.

- 4 pagamenti annuali da 800€ dalla fine 3° alla fine 6° anno,
- 3 pagamenti uguali A alla fine del 1°, 7° e 9° anno.

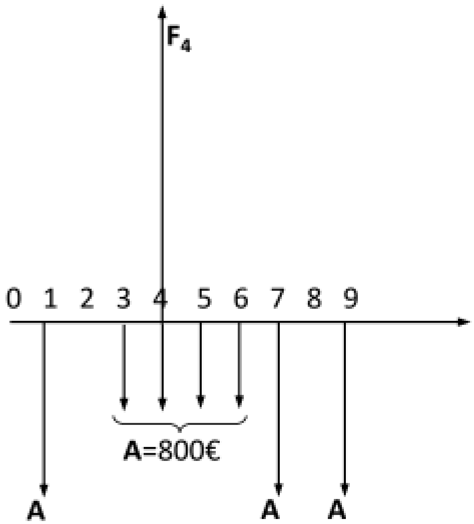
t=2 per l'equivalenza





$$F_2 = 800\overset{P/A,7,4}{\left(3{,}39\right)} = A\left[\overset{F/P,7,1}{\left(1{,}07\right)} + \overset{P/F,7,5}{\left(0{,}71\right)} + \overset{P/F,7,7}{\left(0{,}62\right)}\right]$$

$$A = \frac{2712}{2{,}4} = 1130€$$

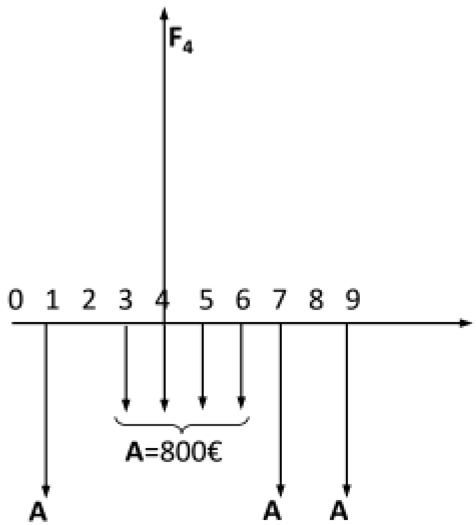


t=4

caso 1)

$$800\overset{P/A,7,4}{\left(3{,}39\right)}\overset{F/P,7,2}{\left(1{,}14\right)}=A\left[\overset{F/P,7,3}{\left(1{,}23\right)}+\overset{P/F,7,3}{\left(0{,}82\right)}+\overset{P/F,7,5}{\left(0{,}71\right)}\right]$$

$$A=\frac{3.091{,}68}{2{,}76}=1.120{,}17€$$

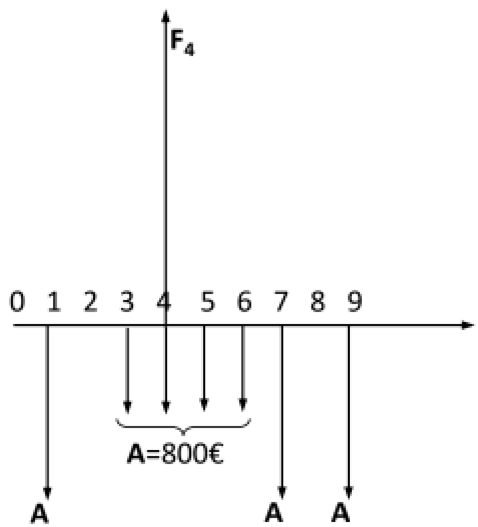


t=4

caso 2)

$$800\left(\overset{F/A,7,4}{4{,}44}\right)\left(\overset{P/F,7,2}{0{,}87}\right)=A\left[\left(\overset{F/P,7,3}{1{,}23}\right)+\left(\overset{P/F,7,3}{0{,}82}\right)+\left(\overset{P/F,7,5}{0{,}71}\right)\right]$$

$$A=\frac{3.090{,}24}{2{,}76}=1.119{,}65€$$



t=4

caso 3)

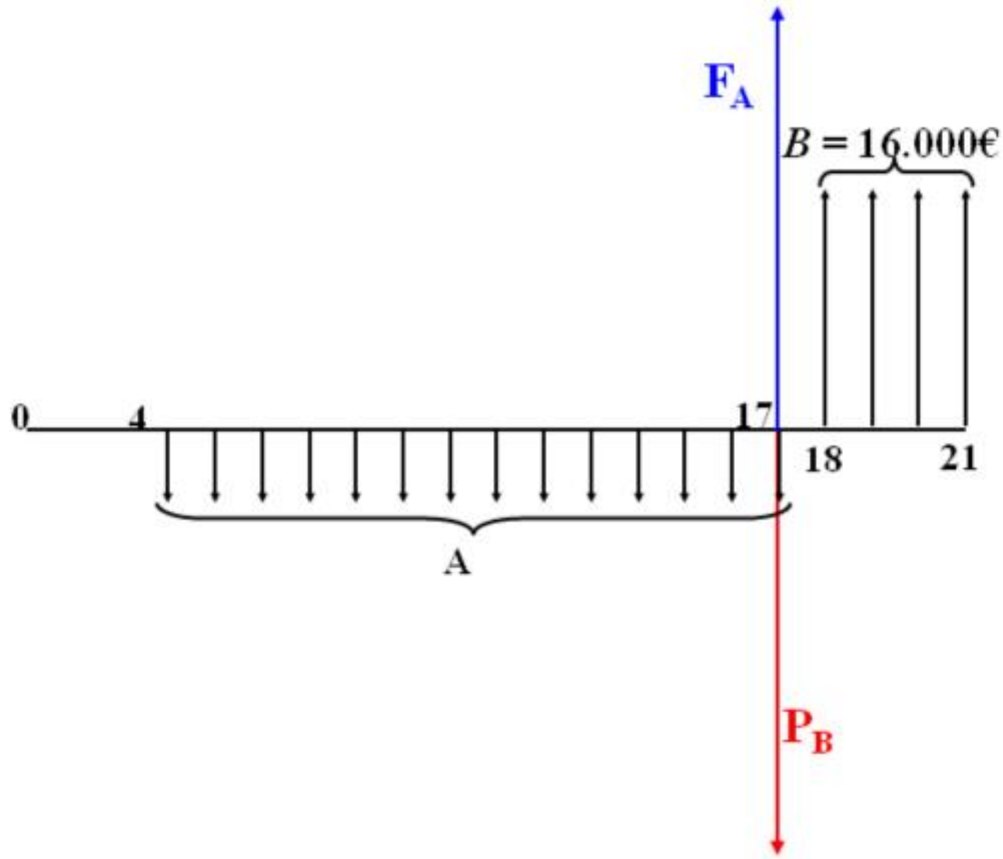
$$800\overset{F/A,7,2}{\left(2{,}07\right)}+800\overset{P/A,7,2}{\left(1{,}81\right)}=A\left[\overset{F/P,7,3}{\left(1{,}23\right)}+\overset{P/F,7,3}{\left(0{,}82\right)}+\overset{P/F,7,5}{\left(0{,}71\right)}\right]$$

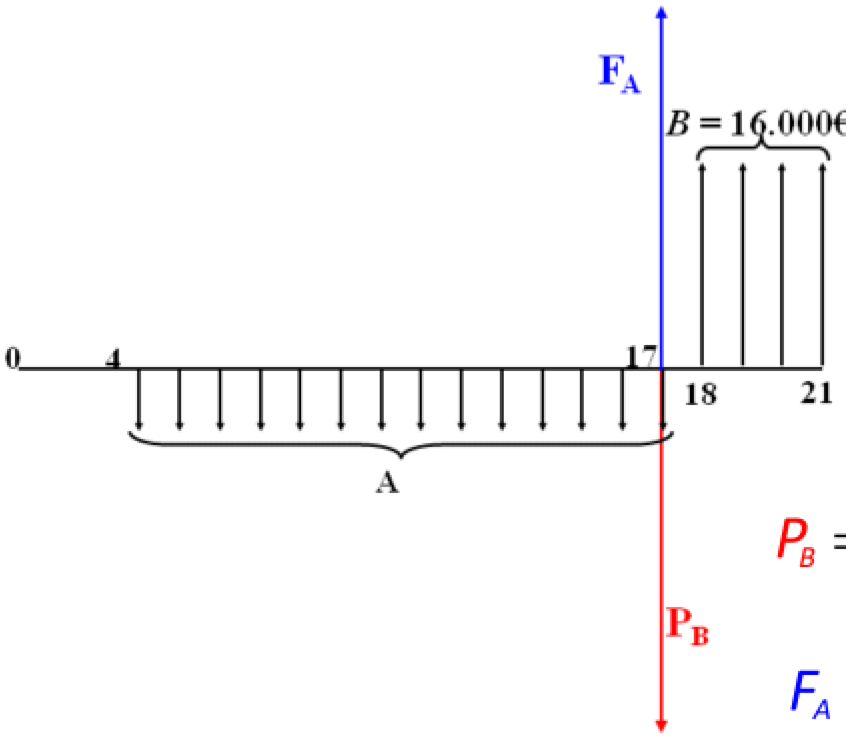
$$A=\frac{3.104}{2{,}76}=1.124{,}64€$$

Esercizio 5

Una giovane coppia decide di depositare del denaro per finanziare l'istruzione in un college del proprio figlio di 3 anni. Il denaro può essere depositato al 7% composto annualmente. Quale deposito annuale deve essere effettuato ad ogni compleanno dal 4° al 17° compreso, per avere 16.000€ ad ogni compleanno dal 18° al 21° compreso?

- versamento dal 4° al 17° anno
- 16.000€ ad ogni compleanno dal 18° al 21° anno





$$F_A = A\overset{F/A,7,14}{\left(22{,}55\right)}$$

$$P_B = 16.000\overset{P/A,7,4}{\left(3{,}39\right)} = 54.240€$$

$$F_A = P_B$$

$$A = \frac{54.240}{22{,}55} = 2.405{,}32€$$