Студентка:	Лицеванова Милана
Группа:	1307
Вариант:	37
Дата:	31 мая 2023 г.

Теория вероятностей и математическая статистика
Индивидуальное домашнее задание №4

Задание 1. *В результате эксперимента получены данные, приведенные в таблице 1.*

a) *Построить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения и гисторгамму частот.*
b) *Вычислить выборочные аналоги следующих числовых характеристик:*
   (i) *математического ожидания*
   (ii) *дисперсии*
   (iii) *медианы*
   (iv) *асимметрии*
   (v) *эксцесса*
   (vi) *вероятности* $Pr(X \in [a, b])$
c) *В предположении, что исходные наблюдения являются выборкой из распределения Пуассона, построить оценку максимального правдоподобия параметра* λ, *а также оценку* λ *по методу моментов.*
d) *Построить асимптотический доверительный интервал уровня значимости* α_1 *для параметра* λ *на базе оценки максимального правдоподобия.*
e) *Используя гистограмму частот, построить критерий значимости* χ^2 *проверки простой гипотезы согласия с распределением Пуассона с параметром* λ_0. *Проверить гипотезу на уровне значимости* α_1. *Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть данную гипотезу.*
f) *Построить критерий значимости* χ^2 *проверки сложной гипотезы согласия с распределением Пуассона. Проверить гипотезу на уровне значимости* α_1. *Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть данную гипотезу.*
g) *В пунктах (c)-(f) заменить семейство распределений Пуассона на семейство геометрических распределений*

$$Pr_\lambda(X = k) = \frac{\lambda^k}{(\lambda + 1)^{k+1}}, k = 0, 1, ...$$

Таблица 1 $\alpha_1 = 0.20; a = 0.00; b = 2.41; \lambda_0 = 1.00; \lambda_1 = 2.00$
1 0 3 0 0 0 1 3 1 1 3 1 1 1 3 0 0 0 1 3 0 0 0 0 4 0 0 1 0 0 0 0 1 0 2 5 0 7 0 0 0 0 0 1 1 0 2 3 0 1

Решение. a) Выборка:

$X = (1; 0; 3; 0; 0; 0; 1; 3; 1; 1; 3; 1; 1; 1; 3; 0; 0; 0; 1; 3; 0; 0; 0; 0; 4; 0; 0;\ 1; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 2; 5; 0; 7; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 0; 2; 3; 0; 1)$.

Вариационный ряд:

$(0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;\ 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 5; 7)$.

Количество элементов выборки $n = 50$.

$$\nu^*_{X_i} = \frac{\#\{X : X = X_i\}}{n}$$

X_i	0	1	2	3	4	5	7	$\sum$
$\nu^*_{X_i}$	$\frac{26}{50}$	$\frac{13}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	1

Эмпирическая функция распределения:

$$F_n^*(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0] \\ \frac{26}{50} & y \in (0, 1], \\ \frac{39}{50} & y \in (1, 2], \\ \frac{41}{50} & y \in (2, 3], \\ \frac{47}{50} & y \in (3, 4], \\ \frac{48}{50} & y \in (4, 5], \\ \frac{49}{50} & y \in (5, 7], \\ 1 & y \in (7, +\infty) \end{cases}$$

Имеется вариационный ряд:

$$(0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;\ 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 5; 7).$$

Разобьем отрезок [0,8] на 4 равных отрезка. В отрезок $A_1 = [0; 2)$ попали 2 элемента выборки, в $A_2 = [2; 4)$ — 2, в $A_3 = [4; 6)$ — 2, и в отрезок $A_4 = [6; 8]$ попал 1 элемент выборки.

$$H(A_i) = \frac{\#\{X_j : X_j \in A_i\}}{h \cdot n}$$

Длинна отрезка $h = 2$, количество элементов выборки $n = 50$.
$H(A_1) = \frac{39}{2 \cdot 50} = 0.39$
$H(A_2) = \frac{8}{2 \cdot 50} = 0.08$
$H(A_3) = \frac{2}{2 \cdot 50} = 0.02$
$H(A_4) = \frac{1}{2 \cdot 50} = 0.01$

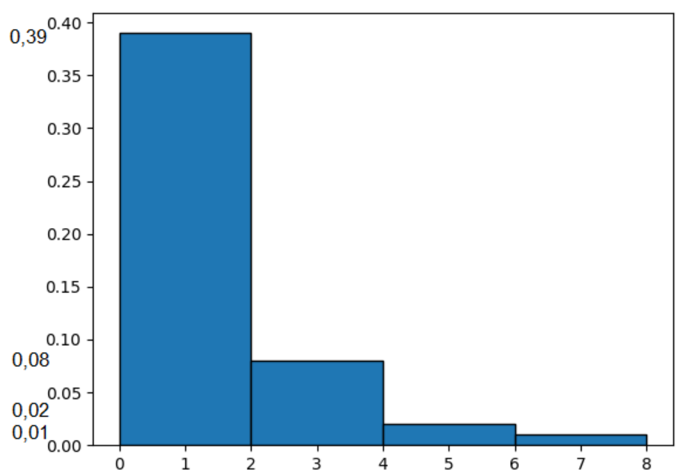

Рис. 1 – Гистограмма частот для задания 1.

b) Выборочные аналоги числовых характеристик:
   (i) математического ожидания
   Выборочное среднее:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{51}{50} = 1.02$$

   (ii) дисперсии Выборочная дисперсия:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = 2.2596$$

(iii) медианы
median $= 0.0$

(iv) асимметрии
$A = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^3}{\sqrt{S^2}^3} = 1.9091$

(v) эксцесса
$E_k = \frac{m_4}{\sigma^4} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^4}{\sqrt{S^2}^4} = 3.7797$

(vi) вероятности $Pr(X \in [a,b])$
$Pr(X \in [0, 2.41]) = F_n^*(2.41) - F_n^*(0) = \frac{41}{50} - 0 = \frac{41}{50}$

c) Выборка $X = X_1, ..., X_n$

Метод максимального правдоподобия:

$f(X_i, \lambda) = \mathbb{P}(X = X_i) = \frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}\exp(-\lambda)$
$L(X_1, ..., X_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i,\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}\exp(-\lambda)$
$LL(X_1, ..., X_n, \lambda) = \ln(\prod_{i=1}^{n} f(X_i,\lambda)) = \sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}\exp(-\lambda)) = \ln\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i - \sum_{i=1}^{n}\ln X_i! - \lambda n$
$\frac{dLL(X_1,...,X_n,\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}X_i - n = 0$
$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n} = \overline{X} = 1.02$
$\frac{d^2LL(X_1,...,X_n,\lambda)}{d^2\lambda} = -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}X_i < 0$

Метод моментов:

$g(X_k) = X_k$, $\mathbb{E}g(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g(X_k) = \overline{X}$
$\hat{\lambda} = \overline{X} = 1.02$

d) $\alpha_1 = 0.20$, $\hat{\lambda} = 1.02$

$X_1, ..., X_n \sim P(\lambda)$
$\mathbb{E}X_1 = \lambda$, $\mathbb{D}X_1 = \lambda$
$G(X,\lambda) = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mathbb{E}X_1}{\sqrt{\mathbb{D}X_1}} = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim N(0{,}1)$
$x_{\alpha_1} : \Phi_0(x_{\alpha_1}) = \frac{1-\alpha_1}{2} = \frac{1-0.20}{2} = 0.4$
$x_{\alpha_1} = \Phi_0^{-1}(0.4) = 1.28$
$|\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}| \leq x_{\alpha_1}$
$\mathbb{P}_\lambda(n\frac{(\overline{X}-\lambda)^2}{\lambda} \leq x_{\alpha_1}^2) = 1 - \alpha_1$
$\lambda^2 - \lambda(2\overline{X} + \frac{x_{\alpha_1}^2}{n}) + \overline{X} \leq 0$
$D = (4\overline{X} + \frac{x_{\alpha_1}^2}{n})\frac{x_{\alpha_1}^2}{n}$
$\lambda_{1,2} = \frac{2\overline{X} + \frac{x_{\alpha_1}^2}{n} \pm \sqrt{(4\overline{X} + \frac{x_{\alpha_1}^2}{n})\frac{x_{\alpha_1}^2}{n}}}{2}$
$\mathbb{P}_\lambda(\frac{2\overline{X} + \frac{x_{\alpha_1}^2}{n} - \sqrt{(4\overline{X} + \frac{x_{\alpha_1}^2}{n})\frac{x_{\alpha_1}^2}{n}}}{2} < \lambda < \frac{2\overline{X} + \frac{x_{\alpha_1}^2}{n} + \sqrt{(4\overline{X} + \frac{x_{\alpha_1}^2}{n})\frac{x_{\alpha_1}^2}{n}}}{2}) = 1 - \alpha_1$

$\hat{\lambda} \in (0.8741, 1.1986)$

e) $H_0 : X \sim Pios(\lambda_0)$
$H_A : X \not\sim Pios(\lambda_0)$
$p_i = \frac{\lambda^i}{i!}\exp(-\lambda)$

i	I_i	n_i	p_i	$n \cdot p_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
0	$(-\inf; 2]$	41	0.3679	18.3940	27.7826
1	$(2; 4]$	7	0.3679	18.3940	7.0579
2	$(4; 6]$	1	0.1839	9.1970	7.3057
3	$(6; +\inf)$	1	0.0613	3.0657	1.3919
		50	1	50	43.5381

$\hat{X}^2 = \sum_{i=0}^{n} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 43.5381$
$df = k - l - 1 = 3$
$x_\alpha = \chi_2^2(1 - \alpha_1) = 4.64$
$\hat{X}^2 \not< x_\alpha$
H_0 отвергается на основании данных
$pv = 1 - \chi_2^2(\hat{X}^2) = 1.8917 \cdot 10^{-9}$ - наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть H_0

f) $H_0 : X \sim Pios(\lambda)$
$H_A : X \not\sim Pios(\lambda)$
$p_i = \frac{\lambda^i}{i!} \exp(-\lambda)$
Для нахождения параметра λ минимизируем функцию $\hat{X}^2(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(n_i - np_i(\lambda))^2}{np_i(\lambda)}$
$\hat{X}^2 = 6.0281$
$\lambda = 0.334$

i	I_i	n_i	p_i	$n \cdot p_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
0	$(-\inf; 2]$	41	0.7161	35.8027	0.7545
1	$(2; 4]$	7	0.2392	11.9581	2.0557
2	$(4; 6]$	1	0.0399	1.9970	0.4977
3	$(6; +\inf)$	1	0.0044	0.4978	0.2223
		50	1	50	6.0281

$df = k - l - 1 = 2$
$\hat{X}^2(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(n_i - np_i(\lambda))^2}{np_i(\lambda)} = 6.0281$
$x_\alpha = \chi_1^2(1 - \alpha_1) = 3.22$
$\hat{X}^2 \not< x_\alpha$
H_0 отвергается на основании данных
$pv = 1 - \chi_1^2(\hat{X}^2) = 0.0491$ - наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть H_0

g) $\mathbb{P}_\lambda(X = k) = \frac{\lambda^k}{(\lambda+1)^{k+1}} = \frac{1}{\lambda+1} \cdot (1 - \frac{1}{\lambda+1})^k; k = 0, 1, 2, ...$

g.c) По методу моментов
$g(X_k) = X_k$
$\mathbb{E}g(X_k) = \lambda$
$\mathbb{E}g(X_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} X_k$
$\lambda = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} X_k$
$\hat{\lambda} = \overline{X} = 1.02$
По методу максимального правдоподобия
$f(X_k; \lambda) = \mathbb{P}(X = X_k) = \frac{\lambda^{X_k}}{(\lambda+1)^{X_k+1}}$

$L(X_k;\lambda) = f(X_k;\lambda)$
$LL(X_k;\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \ln(\frac{\lambda^{X_k}}{(\lambda+1)^{X_k+1}}) =$
$= \ln\lambda \sum_{k=0}^{n} X_k - \sum_{k=0}^{n} (\lambda+1)^{X_k+1} =$
$= \ln\lambda \sum_{k=0}^{n} X_k - (\lambda+1) \sum_{k=0}^{n} (X_k+1)$
$LL'(X_k;\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n} X_k - \frac{1}{\lambda+1} \sum_{k=0}^{n} (X_k+1)$
$\lambda = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} X_k = \overline{X} = 1.02$
$LL''(X_k;\lambda) =$

g.d) $X_1, ..., X_n \sim Geom(\lambda)$
$\mathbb{E}X_k = \lambda$
$\mathbb{D}X_k = \lambda(\lambda+1)$
$G(X,\lambda) = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mathbb{E}X_1}{\sqrt{\mathbb{D}X_1}} = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda+1)}} \sim N(0{,}1)$
$I_{\alpha_1} = [-x_{\alpha_1}; x_{\alpha_1}]$
$x_{\alpha_1} : F_G(x_{\alpha_1}) = 1 - \frac{\alpha_1}{2} = 0.4$
$x_{\alpha_1} = 1.28$
$|\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda+1)}}| < x_{\alpha_1}$

$\lambda \in (0.8023, 1{,}3407)$

g.e) $H_0 : X \sim Geom(\lambda_0)$
$H_A : X \not\sim Geom(\lambda_0)$
$p_i = \frac{\lambda_0^i}{(\lambda_0+1)^{i+1}}$

i	I_i	n_i	p_i	$n \cdot p_i$	$\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$
0	$(-\inf;2]$	41	0.5	25.0	10.24
1	$(2;4]$	7	0.25	12.5	2.42
2	$(4;6]$	1	0.125	6.25	4.41
3	$(6;+\inf)$	1	0.0625	3.125	1.445
		50	1	50	18.515

$\hat{X}^2 = \sum_{i=0}^{n} \frac{(n_i-np_i)^2}{np_i} = 18.515$
$df = k - l - 1 = 3$
$x_\alpha = \chi_2^2(1-\alpha_1) = 4.64$
$\hat{X}^2 \not< x_\alpha$
H_0 отвергается на основании данных
$pv = 1 - \chi_2^2(\hat{X}^2) = 0.0003$ - наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть H_0

g.f) $H_0 : X \sim Geom(\lambda)$
$H_A : X \not\sim Geom(\lambda)$
$p_i = \frac{\lambda^i}{(\lambda+1)^{i+1}}$ Для нахождения параметра λ минимизируем функцию $\hat{X}^2(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(n_i-np_i(\lambda))^2}{np_i(\lambda)}$
$\hat{X}^2 = 1.6340$
$\lambda = 0.281$

i	I_i	n_i	p_i	$n \cdot p_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
0	$(-\inf; 2]$	41	0.7806	39.0320	0.0992
1	$(2; 4]$	7	0.1712	8.5621	0.2850
2	$(4; 6]$	1	0.0376	1.8782	0.4106
3	$(6; +\inf)$	1	0.0082	0.4120	0.8392
		50	1	50	1.6340

$df = k - l - 1 = 2$
$\hat{X}^2(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(n_i - np_i(\lambda))^2}{np_i(\lambda)} = 1.6340$
$x_\alpha = \chi^2_1(1 - \alpha_1) = 3.22$
$\hat{X}^2 < x_\alpha$
Нет оснований отвергнуть H_0 на основании данных
$pv = 1 - \chi^2_1(\hat{X}^2) = 0.4418$ - наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть H_0

□

Задание 2. *В результате эксперимента получены данные, приведенные в таблице 2.*

a) *Построить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения, гисторгамму и полигон частот с шагом h.*
b) *Вычислить выборочные аналоги следующих числовых характеристик:*
   (i) *математического ожидания*
   (ii) *дисперсии*
   (iii) *медианы*
   (iv) *асимметрии*
   (v) *эксцесса*
   (vi) *вероятности $Pr(X \in [c, d])$*
c) *В предположении, что исходные наблюдения являются выборкой из показательного распределения, построить оценку максимального правдоподобия параметра λ, а также оценку λ по методу моментов.*
d) *Построить асимптотический доверительный интервал уровня значимости α_2 для параметра λ на базе оценки максимального правдоподобия.*
e) *Используя гистограмму частот, построить критерий значимости χ^2 проверки простой гипотезы согласия с показательным распределением с параметром λ_0. Проверить гипотезу на уровне значимости α_2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть данную гипотезу.*
f) *Построить критерий значимости χ^2 проверки сложной гипотезы согласия с показательным распределением. Проверить гипотезу на уровне значимости α_2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть данную гипотезу.*
g) *В пунктах (c)-(f) заменить семейство показательных распределений на семейство гамма-распределений с плотностями*

$$f(x) = \frac{\sqrt{\lambda}\exp(-\lambda x/2)}{\sqrt{2\pi x}}$$

(использовать таблицу распределений χ^2_1)

Таблица 2 $\alpha_2 = 0.01; c = 3.20; d = 6.40; h = 1.60; \lambda_0 = 0.14; \lambda_1 = 0.25$
5.67 0.73 2.31 3.42 0.96 1.51 5.37 10.83 2.76 0.96 3.49 10.38 2.47 4.19 10.63 5.62 1.77 1.75 9.26 3.50 0.32 2.09 1.73 1.04 4.62 1.39 5.09 1.10 8.60 2.83 3.91 4.03 4.95 1.68 1.79 1.27 3.15 1.25 1.55 4.64 1.23 22.51 13.88 7.38 0.54 0.87 8.48 0.46 4.55 2.19

Решение. a) Выборка:

$$X = (5.67; 0.73; 2.31; 3.42; 0.96; 1.51; 5.37; 10.83; 2.76; 0.96; 3.49; 10.38; 2.47; 4.19; 10.63; 5.62;$$
$$1.77; 1.75; 9.26; 3.5; 0.32; 2.09; 1.73; 1.04; 4.62; 1.39; 5.09; 1.1; 8.6; 2.83; 3.91; 4.03; 4.95;$$

1.68; 1.79; 1.27; 3.15; 1.25; 1.55; 4.64; 1.23; 22.51; 13.88; 7.38; 0.54; 0.87; 8.48; 0.46; 4.55; 2.19).

Вариационный ряд:

(0.32; 0.46; 0.54; 0.73; 0.87; 0.96; 0.96; 1.04; 1.1; 1.23; 1.25; 1.27; 1.39; 1.51; 1.55; 1.68; 1.73; 1.75; 1.77; 1.79; 2.09; 2.19; 2.31; 2.47; 2.76; 2.83; 3.15; 3.42; 3.49; 3.5; 3.91; 4.03; 4.19; 4.55; 4.62; 4.64; 4.95; 5.09; 5.37; 5.62; 5.67; 7.38; 8.48; 8.6; 9.26; 10.38; 10.63; 10.83; 13.88; 22.51).

Количество элементов выборки $n = 50$.

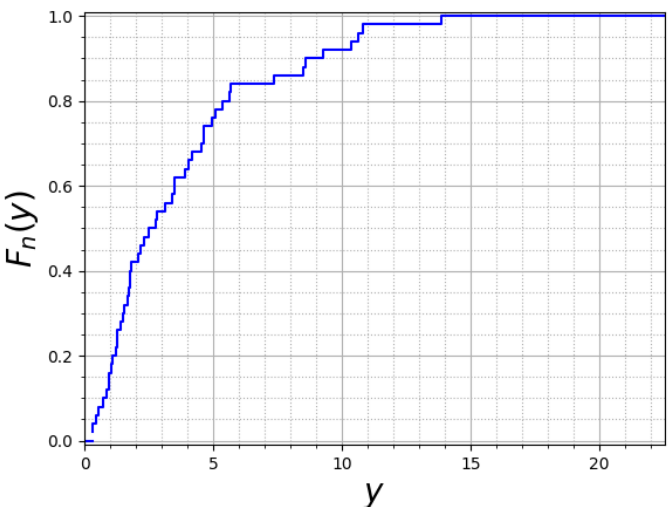

Рис. 2 – Эмпирическая функция распределения для задания 2.

$k = 15$
$h = 1.6$

b) Выборочные аналоги числовых характеристик:
   (i) математического ожидания
   Выборочное среднее:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{206.7}{50} = 4.1340$$

   (ii) дисперсии Выборочная дисперсия:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = 16.7887$$

   (iii) медианы
   median $= 2.795$
   (iv) асимметрии
   $A = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^3}{\sqrt{S^2}^3} = 2.2453$
   (v) эксцесса
   $E_k = \frac{m_4}{\sigma^4} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^4}{\sqrt{S^2}^4} = 6.3448$
   (vi) вероятности $Pr(X \in [c, d])$
   $Pr(X \in [3.20, 6.40]) = F_n^*(6.40) - F_n^*(3.20) = 0.82 - 0.54 = 0.28$

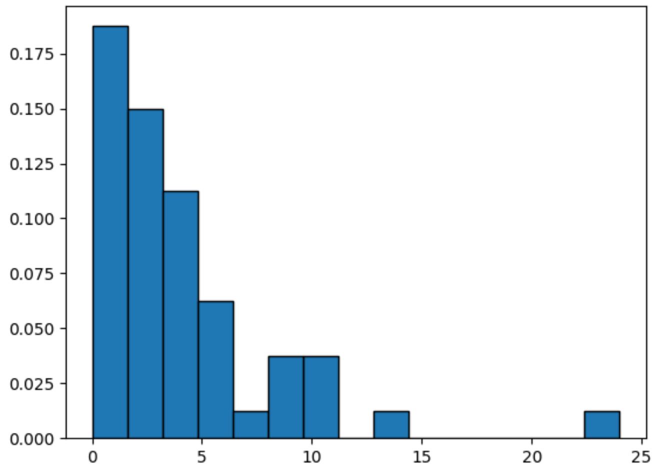

Рис. 3 – Гистограмма частот для задания 2.

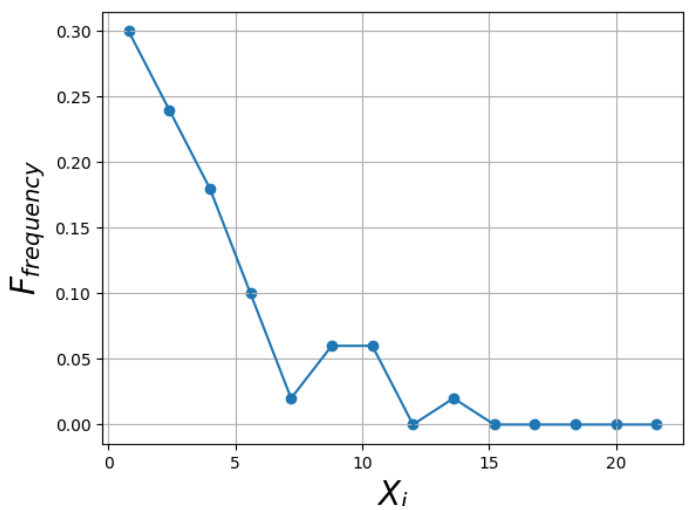

Рис. 4 – Полигон частот для задания 2.

c) Выборка $X = X_1, ..., X_n$

Метод максимального правдоподобия:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \exp{(-\lambda x)} & x \geq 0, \end{cases}$$

$$I_{\{X_i \geq 0\}} = \begin{cases} 1, & X_i \geq 0 \\ 0 & else, \end{cases}$$

$f(X_i,\lambda) = \mathbb{P}(X = X_i) = \lambda \exp(-\lambda X_i) I_{\{X_i \ge 0\}} = \lambda \exp(-\lambda X_i) I_{\{X_{(1)} \ge 0\}} = \lambda \exp(-\lambda X_i)$
$L(X_1, ..., X_n, \lambda) = \prod_{i=1}^n f(X_i, \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda \exp(-\lambda X_i)$
$LL(X_1, ..., X_n, \lambda) = \ln(\prod_{i=1}^n f(X_i, \lambda)) = \sum_{i=1}^n \ln(\lambda \exp(-\lambda X_i)) = n \cdot \ln \lambda - \lambda \cdot \sum_{i=1}^n X_i$
$\frac{dLL(X_1,...,X_n,\lambda)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n X_i = 0$
$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{\overline{X}} = \frac{1}{4.1340} = 0.2419$
$\frac{d^2LL(X_1,...,X_n,\lambda)}{d^2\lambda} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$

Метод моментов:

$g(X_k) = X_k$, $\mathbb{E}g(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g(X_k) = \overline{X}$
$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}} = 0.2419$

d) $\alpha_2 = 0.01$, $\hat{\lambda} = 0.2419$

$X_1, ..., X_n \sim P(\lambda)$
$\mathbb{E}X_1 = \frac{1}{\lambda}$, $\mathbb{D}X_1 = \frac{1}{\lambda^2}$
$G(X,\lambda) = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mathbb{E}X_1}{\sqrt{\mathbb{D}X_1}} = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}} \sim N(0{,}1)$
$I_\alpha = [-x_{\alpha_2}, x_{\alpha_2}]$
$x_{\alpha_2} : \Phi_0(x_{\alpha_2}) = \frac{1-\alpha_2}{2} = \frac{1-0.01}{2} = 0.485$
$x_{\alpha_1} = \Phi_0^{-1}(0.485) = 2.17$
$\mathbb{P}_\lambda(-x_{\alpha_2} < \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}} < x_{\alpha_2}) = 1 - \alpha_2$
$\mathbb{P}_\lambda(\frac{-x_{\alpha_2}}{\overline{X}\sqrt{n}} + \frac{1}{\overline{X}} < \lambda < \frac{x_{\alpha_2}}{\overline{X}\sqrt{n}} + \frac{1}{\overline{X}}) = 1 - \alpha_2$

$\hat{\lambda} \in (0.1677, 0.3161)$

e) $H_0 : X \sim Exp(\lambda_0)$
$H_A : X \not\sim Exp(\lambda_0)$
$p_i = \lambda_0 \exp(-\lambda_0 X_i) I_{\{X_i > 0\}}$

i	I_i	n_i	p_i	$n \cdot p_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
0	$(-\inf; 1.6]$	15	0.8881	44.4048	19.4718
1	$(1.6; 3.2]$	12	0.0225	1.1229	105.3653
2	$(3.2; 4.8]$	9	0.0180	0.8975	73.1453
3	$(4.8; 6.4]$	5	0.0143	0.7174	25.5650
4	$(6.4; +\inf)$	9	0.0523	2.6142	15.5983
		50	1	50	239.1457

$\hat{X}^2 = \sum_{i=0}^n \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 239.1457$
$df = k - l - 1 = 4$
$x_\alpha = \chi_2^2(1 - \alpha_1) = 13.27$
$\hat{X}^2 \not< x_\alpha$
H_0 отвергается на основании данных
$pv = 1 - \chi_2^2(\hat{X}^2) = 0.0$ - наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть H_0

f) $H_0 : X \sim Exp(\lambda)$
$H_A : X \nsim Exp(\lambda)$
$p_i = \lambda \exp(-\lambda I_i^r) I_{\{X_i>0\}} - \lambda \exp(-\lambda I_i^l) I_{\{X_i>0\}}$

i	I_i	n_i	p_i	$n \cdot p_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
0	$(-\inf; 1.6]$	15	0.7981	39.9054	15.5437
1	$(1.6; 3.2]$	12	0.0880	4.4018	13.1156
2	$(3.2; 4.8]$	9	0.0496	2.4824	17.1124
3	$(4.8; 6.4]$	5	0.0280	1.3999	9.2581
4	$(6.4; +\inf)$	9	0.0361	1.8071	28.6285
		50	1	50	83.6584

$\hat{X}^2 = \sum_{i=0}^{n} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 83.6584$
$df = k - l - 1 = 3$
$x_\alpha = \chi_2^2(1 - \alpha_1) = 11.35$
$\hat{X}^2 < x_\alpha$
H_0 отвергается на основании данных
$pv = 1 - \chi_2^2(\hat{X}^2) = 0.0$ - наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть H_0

g)

$$f(x) = \frac{\sqrt{\lambda}\exp(-\lambda x/2)}{\sqrt{2\pi x}} = [\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}] =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})(\frac{2}{\lambda})^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}-1} \exp(-\frac{x}{\frac{2}{\lambda}})$$

g.c) По методу моментов
$g(X_k) = X_k$
$\mathbb{E}g(X_k) = \frac{1}{\lambda}$
$\mathbb{E}g(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} X_k$
$\lambda = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} X_k$
$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}} = 0.2419$
По методу максимального правдоподобия
$f(X_k; \lambda) = \mathbb{P}(X = X_k) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})(\frac{2}{\lambda})^{\frac{1}{2}}} X_k^{\frac{1}{2}-1} \exp(-\frac{X_k}{\frac{2}{\lambda}})$
$L(X_k; \lambda) = f(X_k; \lambda)$
$LL(X_k; \lambda) = \sum_{k=0}^{n} \ln(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})(\frac{2}{\lambda})^{\frac{1}{2}}} X_k^{\frac{1}{2}-1} \exp(-\frac{X_k}{\frac{2}{\lambda}})) = \frac{n}{2}\ln\lambda - n\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln X_k - \frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{n} X_k$
$LL'(X_k; \lambda) = \frac{n}{2\lambda} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} X_k = 0$
$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} X_k} = \frac{1}{\overline{X}} = 0.2419$
$LL''(X_k; \lambda) = -\frac{n}{2\lambda^2} < 0$

g.d) $X_1, ..., X_n \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{2}{\lambda})$
$\mathbb{E}X_k = \frac{1}{2}\frac{2}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$
$\mathbb{D}X_k = \frac{1}{2}(\frac{2}{\lambda})^2 = \frac{2}{\lambda^2}$
$G(X, \lambda) = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mathbb{E}X_1}{\sqrt{\mathbb{D}X_1}} = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\frac{2}{\lambda^2}}} \sim N(0,1)$
$I_{\alpha_1} = [-x_{\alpha_1}; x_{\alpha_1}]$

$x_{\alpha_1} : F_G(x_{\alpha_1}) = 1 - \frac{\alpha_1}{2} = 0.485$
$x_{\alpha_1} = 2.17$
$|\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\frac{2}{\lambda^2}}}| < x_{\alpha_1}$
$\lambda \in (0.1369, 0.3469)$

g.e) $H_0 : X \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{2}{\lambda_0})$
$H_A : X \not\sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{2}{\lambda_0})$
$p_i = F_\Gamma(I_i^r) - F_\Gamma(I_i^l)$

i	I_i	n_i	p_i	$n \cdot p_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
0	$(-\inf; 1.6]$	15	0.3640	18.1996	0.5625
1	$(1.6; 3.2]$	12	0.1327	6.6361	4.3355
2	$(3.2; 4.8]$	9	0.0909	4.5466	4.3622
3	$(4.8; 6.4]$	5	0.0685	3.4249	0.7243
4	$(6.4; +\inf)$	9	0.2771	13.8529	1.7001
		50	1	50	11.6847

$\hat{X}^2 = \sum_{i=0}^{n} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 11.6847$
$df = k - l - 1 = 4$
$x_\alpha = \chi_2^2(1 - \alpha_1) = 13.28$
$\hat{X}^2 < x_\alpha$
Нет оснований отвергнуть H_0 на основании данных
$pv = 1 - \chi_2^2(\hat{X}^2) = 0.0199$ - наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть H_0

g.f) $H_0 : X \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{2}{\lambda})$
$H_A : X \not\sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{2}{\lambda})$
$p_i = F_\Gamma(I_i^r) - F_\Gamma(I_i^l)$
Для нахождения параметра λ минимизируем функцию $\hat{X}^2(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(n_i - np_i(\lambda))^2}{np_i(\lambda)}$
$\hat{X}^2 = 9.4902$
$\lambda = 0.221$

i	I_i	n_i	p_i	$n \cdot p_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
0	$(-\inf; 1.6]$	15	0.4479	22.3959	2.4424
1	$(1.6; 3.2]$	12	0.1517	7.5854	2.5693
2	$(3.2; 4.8]$	9	0.0973	4.8671	3.5094
3	$(4.8; 6.4]$	5	0.0687	3.4353	0.7127
4	$(6.4; +\inf)$	9	0.2131	10.6525	0.2564
		50	1	50	9.4902

$df = k - l - 1 = 3$
$\hat{X}^2(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(n_i - np_i(\lambda))^2}{np_i(\lambda)} = 9.4902$
$x_\alpha = \chi_1^2(1 - \alpha_1) = 11.34$
$\hat{X}^2 < x_\alpha$
Нет оснований отвергнуть H_0 на основании данных
$pv = 1 - \chi_1^2(\hat{X}^2) = 0.0234$ - наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть H_0

$\square$

Решение. #Лицеванова Милана 1307

```
#ТВиМС ИДЗ №4
#Задание 1 (a-c)

import math
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.stats import kurtosis, skew
import statsmodels.distributions.empirical_distribution as ed

a = 0.0
b = 2.41

sample = list(map(int, ('1 0 3 0 0 0 1 3 1 1 3 1 1 1 3 0 0 0 1 3 0 0 0 0 4 0 0 1 0 0 0 0 1 0 2 5 0 7 0 0
sample.sort()

print("a)")

variationalSeries = sorted(sample)
print("Вариационный ряд: ", variationalSeries)          #Вариационный ряд
n = len(sample)

ecdf = ed.ECDF(sample)

plt.minorticks_on()
plt.xlim([-0.10, 8.0])
plt.ylim([-0.01, 1.01])
plt.grid(which='major')
# включаем дополнительную сетку
plt.grid(which='minor', linestyle=':')
plt.step(ecdf.x, ecdf.y, color="blue")
plt.ylabel('$F_n(y)$', fontsize=20)
plt.xlabel('$y$', fontsize=20)

plt.plot([-5, 0], [0, 0], color="blue")
plt.plot([7, 10], [1, 1], color="blue")

plt.show()   # Эмпирическая функция распределения

bin_ranges = [0, 2, 4, 6, 8]     # интервалы по гистограмме

plt.hist(variationalSeries, bins = bin_ranges, edgecolor='black', density=True)

plt.show()  # Гистограмма частот

print("b)")

print("Величина выборки:", n)
E = sum(sample) / n
print("Выборочное мат. ожидание (выборочное среднее):", E)
D = sum((xi - E)*(xi - E) for xi in sample) / n
print("Выборочная дисперсия:", D)
medain = np.median(sample)
```

```
print("Медиана: " + str(medain))
print("Ассиметрия: " + str(skew(sample)))
print("Эксцесса: " + str(kurtosis(sample)))
print("Pr(X in [a; b]):", ecdf(b) , "-", ecdf(a), "=", ecdf(b) - ecdf(a))

print("c)")

print("Метод максимального правдоподобия")

print("Оценка lambda равна выборочному среднему: ", E)

print("Метод моментов")

print("Оценка lambda равна выборочному среднему: ", E)

print("d)")

xa = 1.28   # значение x_alpha

def c():
    return (2*E + (xa**2)/n + math.sqrt((4*E + (xa**2)/n) * xa/n))/2

def cmin():
    return (2*E + (xa**2)/n - math.sqrt((4*E + (xa**2)/n) * xa/n))/2

print("Доверительный интервал: (", cmin(), ", ", c(), ")")


#Лицеванова Милана 1307
#ТВиМС ИДЗ №4
#Задание 1 (e-f)

import statsmodels.distributions.empirical_distribution as ed
from  scipy.stats import poisson
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy. stats import chi2

intervals = [0, 2, 4, 6, 8]
k = len(intervals) - 1

lam = 1.0   # значение lambda_0

sample = list(map(int, ('1 0 3 0 0 0 1 3 1 1 3 1 1 1 3 0 0 0 1 3 0 0 0 0 4 0 0 1 0 0 0 0 1 0 2 5 0 7 0 0
sample.sort()

ecdf = ed.ECDF(sample)

print("e)")

n = [41, 7, 1, 1]
```

```
print("ni: ", n)

# Функция X^2
def Chi2(lam):
    res = 0
    for i in range(len(n)):
        res += (n[i] - sum(n) * p(i, lam))**2 / (sum(n) * p(i, lam))
    return res

# Вероятность
def p(i, lam):
    return (lam**i/math.factorial(i))*math.exp(-lam)

N = sum(n)
pArray = [p(i, lam) for i in range(len(n))]
npArray = [N * pArray[i] for i in range(len(n))]
func = [((n[i] - npArray[i])**2)/(npArray[i]) for i in range(len(n))]

x = np.arange (-5, 5, 0.001)
plt.plot (x, poisson.cdf (x, mu=lam ), label=str(lam))
plt.show()

print("p_i ", pArray, " sum: ", sum(pArray))
print("n_i ", n, " sum: ", sum(n))
print("np_i ", npArray, " sum: ", sum(npArray))
print("func_i ", func, " sum: ", sum(func))

df = k - 0 - 1
print("df: ", df)

alpha1 = 0.2   # значение alpha_1

# Подсчёт критического значения
for xi in range(0, 10000):
    e = 0.001
    x = xi/100
    if ( (1 - alpha1) - e <= chi2.cdf(x, df=df) <= (1 - alpha1) + e):
        print("x_alpha: ", end = "")
        print(x, chi2.cdf(x, df=df))

X2 = Chi2(lam)

print("max_alpha", 1 - chi2.cdf(X2, df=df))
print("X^2: ", X2)

print("f)")
print("Минимизация")

min_X2 = 99999
true_lam = 0
for lam_newI in range(1, 10000):
    lam_new = lam_newI / 1000
    X2_new = Chi2(lam_new)
```

```
    if (X2_new < min_X2):
        min_X2 = X2_new
        true_lam = lam_new

print("min_X2:", min_X2)
print("lam:", true_lam)

lam = true_lam

N = sum(n)
pArray = [p(i, lam) for i in range(len(n))]
npArray = [N * pArray[i] for i in range(len(n))]
func = [((n[i] - npArray[i])**2)/(npArray[i]) for i in range(len(n))]

print("p_i ", pArray, " sum: ", sum(pArray))
print("n_i ", n, " sum: ", sum(n))
print("np_i ", npArray, " sum: ", sum(npArray))
print("func_i ", func, " sum: ", sum(func))

df = k - 1 - 1
print("df: ", df)

alpha1 = 0.2        #значеие alpha_1

for xi in range(0, 10000):
    e = 0.001
    x = xi/100
    if ( (1 - alpha1) - e <= chi2.cdf(x, df=df) <= (1 - alpha1) + e):
        print("x_alpha: ", end = "")
        print(x, chi2.cdf(x, df=df))

X2 = Chi2(lam)

print("max_alpha", 1 - chi2.cdf(X2, df=df))
print("X^2: ", X2)




#Лицеванова Милана 1307
#ТВиМС ИДЗ №4
#Задание 1 (g.e-g.f)

import statsmodels.distributions.empirical_distribution as ed
from  scipy.stats import poisson
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy. stats import chi2
import math

intervals = [0, 2, 4, 6, 8]  #интервалы по гистограмме
k = len(intervals) - 1
lam = 1.0     # значение lambda_0
```

```
sample = list(map(int, ('1 0 3 0 0 0 1 3 1 1 3 1 1 1 3 0 0 0 1 3 0 0 0 0 4 0 0 1 0 0 0 0 1 0 2 5 0 7 0 0
sample.sort()

ecdf = ed.ECDF(sample)

print("g.e)")

n = [41, 7, 1, 1]  # количество элементов выборки в каждом интервале
print("ni: ", n)

# Функция X^2
def Chi2(lam):
    res = 0
    for i in range(len(n)):
        res += (n[i] - sum(n) * p(i, lam))**2 / (sum(n) * p(i, lam))
    return res

# Вероятность
def p(i, lam):
    return lam**i / ((lam + 1)**(i + 1))

N = sum(n)   # должны равнять n элементов выборки
pArray = [p(i, lam) for i in range(len(n))]       # pi
npArray = [N * pArray[i] for i in range(len(n))]   #npi
func = [((n[i] - npArray[i])**2)/(npArray[i]) for i in range(len(n))]


x = np.arange (-5, 5, 0.001)
plt.plot (x, poisson.cdf (x, mu=lam ), label=str(lam))
plt.show()  # функция распределения Пуассона

print("p_i ", pArray, " sum: ", sum(pArray))
print("n_i ", n, " sum: ", sum(n))
print("np_i ", npArray, " sum: ", sum(npArray))
print("func_i ", func, " sum: ", sum(func))

df = k - 0 - 1
print("df: ", df)   # степени свободы

alpha1 = 0.2    # значение alpha_1

# Подсчёт критического значения
for xi in range(0, 10000):
    e = 0.001
    x = xi/100
    if ( (1 - alpha1) - e <= chi2.cdf(x, df=df) <= (1 - alpha1) + e):
        print("x_alpha: ", end = "")
        print(x, chi2.cdf(x, df=df))

X2 = Chi2(lam)

print("max_alpha", 1 - chi2.cdf(X2, df=df))
```

```
print("X^2: ", X2)

print("g.f)")
print("Минимизация")

min_X2 = 99999
true_lam = 0
for lam_newI in range(1, 10000):
    lam_new = lam_newI / 1000
    X2_new = Chi2(lam_new)
    if (X2_new < min_X2):
        min_X2 = X2_new
        true_lam = lam_new

print("min_X2:", min_X2)
print("lam:", true_lam)

lam = true_lam   # найденное значение lambda

N = sum(n)
pArray = [p(i, lam) for i in range(len(n))]
npArray = [N * pArray[i] for i in range(len(n))]
func = [((n[i] - npArray[i])**2)/(npArray[i]) for i in range(len(n))]

print("p_i ", pArray, " sum: ", sum(pArray))
print("n_i ", n, " sum: ", sum(n))
print("np_i ", npArray, " sum: ", sum(npArray))
print("func_i ", func, " sum: ", sum(func))

df = k - 1 - 1
print("df: ", df)

alpha1 = 0.2   # значение alpha_1

for xi in range(0, 10000):
    e = 0.001
    x = xi/100
    if ( (1 - alpha1) - e <= chi2.cdf(x, df=df) <= (1 - alpha1) + e):
        print("x_alpha: ", end = "")
        print(x, chi2.cdf(x, df=df))

X2 = Chi2(lam)

print("max_alpha", 1 - chi2.cdf(X2, df=df))

print("X^2: ", X2)



#Лицеванова Милана 1307
#ТВиМС ИДЗ №4
#Задание 2 (a-c)
```

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.stats import kurtosis, skew
import statsmodels.distributions.empirical_distribution as ed

d = 3.2
c = 6.4

sample = list(map(float, ('5.67 0.73 2.31 3.42 0.96 1.51 5.37 10.83 2.76 0.96 3.49 10.38 2.47 4.19 10.63
sample.sort()

print("a)")

variationalSeries = sorted(sample)
print("Вариационный ряд: ", variationalSeries)

n = len(sample)
print("Величина выборки:", n)

k = 15   # количество интервалов
h = 1.6  #шаг

intervals = [0, 1.6, 3.2, 4.8, 6.4, 8.0, 9.6, 11.2, 12.8, 14.4, 16.0, 17.6, 19.2, 20.8, 22.4, 24.0]  #ин

xi = [0]*k
for i in range(0, k):
    xi[i] = intervals[i] + h/2
ni = [0]*k
wi = [0]*k
j = 0
for i in range(0, k):
    while j < 50 and (intervals[i] <= sample[j] < intervals[i+1]):
        ni[i] += 1
        j += 1
    if ni[i] != 0:
        wi[i] = ni[i]/n

print("Сумма ni: ", sum(ni))   #должна равняться n

xi.pop()
wi.pop()

plt.grid(which='major')
plt.grid(which='minor', linestyle=':')
plt.ylabel('$F_{frequency}$', fontsize=20)
plt.xlabel('$X_i$', fontsize=20)
plt.plot(xi, wi)
plt.scatter(xi, wi)
plt.show()        #Полигон частот
```

```
bin_ranges = [0, 1.6, 3.2, 4.8, 6.4, 8.0, 9.6, 11.2, 12.8, 14.4, 16.0, 17.6, 19.2, 20.8, 22.4, 24.0]
plt.hist(variationalSeries, bins = bin_ranges, edgecolor='black', density=True)

plt.show()  #Гистограмма частот


ecdf = ed.ECDF(sample)
plt.minorticks_on()
plt.xlim([-0.01, 22.55])
plt.ylim([-0.01, 1.01])
plt.grid(which='major')
# включаем дополнительную сетку
plt.grid(which='minor', linestyle=':')
plt.step(ecdf.x, ecdf.y, color="blue")
plt.ylabel('$F_n(y)$', fontsize=20)
plt.xlabel('$y$', fontsize=20)

plt.plot([-5, 0.32], [0, 0], color="blue")
plt.plot([22.51, 25], [1, 1], color="blue")

plt.show()    # Эмперическая функция распределения

print("b)")

E = sum(sample) / n
print("Выборочное мат. ожидание:", E)
D = sum((xi - E)*(xi - E) for xi in sample) / n
print("Выборочная дисперсия:", D)
medain = np.median(sample)
print("Медиана: " + str(medain))
print("Ассиметрия: " + str(skew(sample)))
print("Эксцесса: " + str(kurtosis(sample)))
print("Pr(X in [a; b]):",  ecdf(c) , "-", ecdf(d), "=", ecdf(c) - ecdf(d))

print("c)")

print("Метод максимального правдоподобия")

print("Оценка lambda равна 1 деленному на выборочное среднее: ", 1/E)

print("Метод моментов")

print("Оценка lambda равна 1 деленному на выборочное среднее: ", 1/E)

print("d)")

xa = 2.17   # значение x_alpha

def c():
    return xa/(E*math.sqrt(n)) + 1/E

def cmin():
    return -xa/(E*math.sqrt(n)) + 1/E
```

```
print("Доверительный интервал: (", cmin(), ", ", c(), ")")



#Лицеванова Милана 1307
#ТВиМС ИДЗ №4
#Задание 2 (e-f)

import math
import statsmodels.distributions.empirical_distribution as ed
from scipy. stats import chi2

sample = list(map(float, ('5.67 0.73 2.31 3.42 0.96 1.51 5.37 10.83 2.76 0.96 3.49 10.38 2.47 4.19 10.63

sample.sort()

print("e)")

intervals = [0, 1.6, 3.2, 4.8, 6.4, 24.0]
k = 5
ni = [0]*k
j = 0
for i in range(0, k):
    while j < 50 and (intervals[i] <= sample[j] < intervals[i+1]):
        ni[i] += 1
        j += 1
print(ni)
k = len(intervals) - 1
lam = 0.14

ecdf = ed.ECDF(sample)

def ni():
    n = 50
    ni = [0]*k
    wi = [0]*k
    j = 0
    for i in range(0, k):
        while j < 50 and (intervals[i] <= sample[j] < intervals[i+1]):
            ni[i] += 1
            j += 1
        if ni[i] != 0:
            wi[i] = ni[i]/n
    wi.pop()
    return ni
n = ni()
print("ni: ", n)

# Функция X^2
def Chi2(lam):
    res = 0
    for i in range(len(n)):
```

```
        res += (n[i] - sum(n) * p(i, lam))**2 / (sum(n) * p(i, lam))
    return res

# Вероятность
def p(i, lam):
    r = intervals[i + 1]
    l = intervals[i]
    if l <= 0:
        return 1 - lam * math.exp(-lam * r)
    return - lam * math.exp(-lam*r) + lam * math.exp(-lam*l)

N = sum(n)
pArray = [p(i, lam) for i in range(len(n))]
npArray = [N * pArray[i] for i in range(len(n))]
func = [((n[i] - npArray[i])**2)/(npArray[i]) for i in range(len(n))]

print("p_i ", pArray, " sum: ", sum(pArray))
print("n_i ", n, " sum: ", sum(n))
print("np_i ", npArray, " sum: ", sum(npArray))
print("func_i ", func, " sum: ", sum(func))

df = k - 0 - 1
print("df: ", df)

alpha2 = 0.01   # значение alpha_2

for xi in range(0, 10000):
    e = 0.0001
    x = xi/100
    if ( (1 - alpha2) - e <= chi2.cdf(x, df=df) <= (1 - alpha2) + e):
        print("x_alpha: ", end = "")
        print(x, chi2.cdf(x, df=df))

X2 = Chi2(lam)
print("max_alpha", 1 - chi2.cdf(X2, df=df))
print("X^2: ", X2)

print("f)")
print("Минимизация")

min_X2 = 99999
true_lam = 0
for lam_newI in range(1, 10000):
    lam_new = lam_newI / 1000
    X2_new = Chi2(lam_new)
    if (X2_new < min_X2):
        min_X2 = X2_new
        true_lam = lam_new

print("min_X2:", min_X2)
print("lam:", true_lam)

lam = true_lam
```

```
N = sum(n)
pArray = [p(i, lam) for i in range(len(n))]
npArray = [N * pArray[i] for i in range(len(n))]
func = [((n[i] - npArray[i])**2)/(npArray[i]) for i in range(len(n))]

print("p_i ", pArray, " sum: ", sum(pArray))
print("n_i ", n, " sum: ", sum(n))
print("np_i ", npArray, " sum: ", sum(npArray))
print("func_i ", func, " sum: ", sum(func))

df = k - 1 - 1
print("df: ", df)

alpha2 = 0.01   # значение alpha_2


for xi in range(0, 10000):
    e = 0.0001
    x = xi/100
    if ( (1 - alpha2) - e <= chi2.cdf(x, df=df) <= (1 - alpha2) + e):
        print("x_alpha: ", end = "")
        print(x, chi2.cdf(x, df=df))

X2 = Chi2(lam)
print("max_alpha", 1 - chi2.cdf(X2, df=df))
print("X^2: ", X2)



#Лицеванова Милана 1307
#ТВиМС ИДЗ №4
#Задание 2 (g.e-g.f)

import scipy.stats
import statsmodels.distributions.empirical_distribution as ed
from scipy.stats import chi2

sample = list(map(float, ('5.67 0.73 2.31 3.42 0.96 1.51 5.37 10.83 2.76 0.96 3.49 10.38 2.47 4.19 10.63
sample.sort()

print("g.e)")

intervals = [0, 1.6, 3.2, 4.8, 6.4, 24.0]   # объединенные интервалы
k = 5   # количество интервалов
k = len(intervals) - 1

lam = 0.14 #значение lambda_0

ecdf = ed.ECDF(sample)

def ni():
    n = 50
```

```
    ni = [0] * k
    wi = [0] * k
    j = 0
    for i in range(0, k):
        while j < 50 and (intervals[i] <= sample[j] < intervals[i + 1]):
            ni[i] += 1
            j += 1
        if ni[i] != 0:
            wi[i] = ni[i] / n
    wi.pop()
    return ni

n = ni()
print("ni: ", n)


# Функция X^2
def Chi2(lam):
    res = 0
    for i in range(len(n)):
        res += (n[i] - sum(n) * p(i, lam)) ** 2 / (sum(n) * p(i, lam))
    return res

# Вероятность
def p(i, lam):
    r = intervals[i + 1]
    l = intervals[i]
    return scipy.stats.gamma.cdf(x=r,a=0.5,scale=2/lam) - scipy.stats.gamma.cdf(x=l,a=0.5,scale=2/lam)

N = sum(n)
pArray = [p(i, lam) for i in range(len(n))]
npArray = [N * pArray[i] for i in range(len(n))]
func = [((n[i] - npArray[i]) ** 2) / (npArray[i]) for i in range(len(n))]

print("p_i ", pArray, " sum: ", sum(pArray))
print("n_i ", n, " sum: ", sum(n))
print("np_i ", npArray, " sum: ", sum(npArray))
print("func_i ", func, " sum: ", sum(func))

df = k - 0 - 1
print("df: ", df)

alpha2 = 0.01   # значение alpha_2

for xi in range(0, 10000):
    e = 0.0001
    x = xi / 100
    if ((1 - alpha2) - e <= chi2.cdf(x, df=df) <= (1 - alpha2) + e):
        print("x_alpha: ", end="")
        print(x, chi2.cdf(x, df=df))

X2 = Chi2(lam)
```

```
print("max_alpha", 1 - chi2.cdf(X2, df=df))
print("X^2: ", X2)

print("g.f)")
print("Минимизация")

min_X2 = 99999
true_lam = 0
for lam_newI in range(1, 10000):
    lam_new = lam_newI / 1000
    X2_new = Chi2(lam_new)
    if (X2_new < min_X2):
        min_X2 = X2_new
        true_lam = lam_new

print("min_X2:", min_X2)
print("lam:", true_lam)

lam = true_lam

N = sum(n)
pArray = [p(i, lam) for i in range(len(n))]
npArray = [N * pArray[i] for i in range(len(n))]
func = [((n[i] - npArray[i]) ** 2) / (npArray[i]) for i in range(len(n))]

print("p_i ", pArray, " sum: ", sum(pArray))
print("n_i ", n, " sum: ", sum(n))
print("np_i ", npArray, " sum: ", sum(npArray))
print("func_i ", func, " sum: ", sum(func))

df = k - 1 - 1
print("df: ", df)
alpha2 = 0.01

for xi in range(0, 10000):
    e = 0.0001
    x = xi / 100
    if ((1 - alpha2) - e <= chi2.cdf(x, df=df) <= (1 - alpha2) + e):
        print("x_alpha: ", end="")
        print(x, chi2.cdf(x, df=df))

X2 = Chi2(lam)

print("max_alpha", 1 - chi2.cdf(X2, df=df))

print("X^2: ", X2)
```

□