グラフの待ち行列数と整数計画　$(Queue\ numbers\ and\ IPs)$

[参考]　Dujmovic, Eppstein, Hickingbotham, Morin　(2022)
Stack-number is not bounded by queue-number　Combinatorica

※ 主に定義や諸性質について参考にしました

入力: 単純グラフ G
出力: 待ち行列数 qn(G) を与えるレイアウト $(\prec,\ \varphi)$

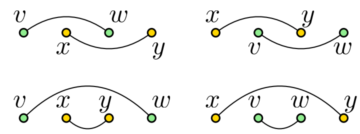
グラフのスタック数と待ち行列数

- $G=(V,E)$: グラフ
- $\prec$: V 上のとある全順序

互いに素な辺対 $vw,\ xy \in E$ に対する形容「交差」と「入れ子」

- $v \prec x \prec w \prec y$ もしくは $x \prec v \prec y \prec w$ を満たすとき
  vw と xy は互いに交差しているという
- $v \prec x \prec y \prec w$ もしくは $x \prec v \prec w \prec y$ を満たすとき
  vw と xy は入れ子にあるという

※ 互いに素な辺対: $\{v,w\}\cap\{x,y\}=\varnothing.$
※ 便宜で $v \prec w$ かつ $x \prec y$ とする



k-スタック・レイアウトとk-待ち行列レイアウト

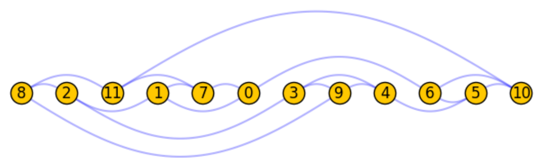
※ k は適当な自然数 $(k \in \mathbb{N})$

レイアウト $(\prec,\ \varphi)$: V 上の全順序 $\prec$ と割当て関数 $\varphi: E \to [k]$ の対

※ 任意の $k\in\mathbb{N}$ に関して
$[k] := \{1,\dots,k\} = \{i\in\mathbb{N} \mid i \le k\}$

- k-スタック・レイアウト: 割当て $\varphi: E\to[k]$ が次を満たすレイアウト $(\prec,\varphi)$
  $\forall (vw,xy) \in \binom{E}{2}\ [\varphi(vw)=\varphi(xy)$ なら vw と xy は交差しない$]$.
- k-待ち行列レイアウト:
  $\forall (vw,xy) \in \binom{E}{2}\ [\varphi(vw)=\varphi(xy)$ なら vw と xy は入れ子でない$]$.

フルフトグラフのキューレイアウトの例



グラフのスタック数 sn(G) と待ち行列数 qn(G)

- G のスタック数 sn(G) := min {k | G の k-スタック・レイアウト}.
- 待ち行列数 qn(G) も同様に定義される

ちょっと雰囲気すぎて残念すぎる
もう少し鍛錬が必要

待ち行列数を求める 01-整数計画

そも NP-困難

(彩色問題からのオマージュ)
この制約は「キューはインデックスが小さい順に使いましょう」
用意するキューの個数の上限は完全グラフの待ち行列数 (qn(Kₙ)) より

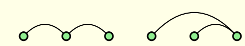
minimize　$\sum_i q_i$

$q_{i+1}-q_i \ge 0$	$i\in[q:=\lceil \frac{n}{2}\rceil]$
$x_{ij}+x_{ji}=1$	$\{i,j\}\in\binom{V}{2}$
$x_{ij}+x_{jk}-x_{ik}\le 1$	$(i,j,k)\in\{(i,j,k)\in V^3 \mid i\neq j \wedge j\neq k \wedge w\neq i\}$
$\sum_{i\in[q]} y_{i,uv}=x_{uv}$ $\sum_{i\in[q]} y_{i,vu}=x_{vu}$	$\{u,v\}\in E$
$y_{i,uv}+y_{i,vu}\le q_i$	$(i,uv)\in[q]\times E$
$y_{i,uv}+y_{i,wz}\le(x_{uw}+x_{wv}+x_{vz})+3(x_{wu}+x_{vw}+x_{zv})-2$	$(i,\{uv,xy\})\in[q]\times C := \left\{\{uv,xy\}\in\binom{E}{2} \,\middle|\, uv\cap xy=\varnothing\right\}$
$y_{i,uv}+y_{i,wz}\le(x_{wu}+x_{uz}+x_{zv})+3(x_{uw}+x_{zu}+x_{vz})-2$	
$y_{i,uv}+y_{i,zw}\le(x_{uz}+x_{zv}+x_{vw})+3(x_{zu}+x_{vz}+x_{wv})-2$	
$y_{i,uv}+y_{i,zw}\le(x_{zu}+x_{uw}+x_{wv})+3(x_{uz}+x_{wu}+x_{vw})-2$	
$y_{i,vu}+y_{i,wz}\le(x_{vw}+x_{wu}+x_{uz})+3(x_{vw}+x_{wu}+x_{zu})-2$	キュー内の交差制約
$y_{i,vu}+y_{i,wz}\le(x_{wv}+x_{vz}+x_{zu})+3(x_{vw}+x_{vz}+x_{uv})-2$	
$y_{i,vu}+y_{i,zw}\le(x_{vz}+x_{zu}+x_{uw})+3(x_{zv}+x_{uz}+x_{wu})-2$	
$y_{i,vu}+y_{i,zw}\le(x_{zv}+x_{vw}+x_{wu})+3(x_{vz}+x_{wv}+x_{uw})-2$	
$x_{uv}\in\{0,1\}$	$(u,v)\in V^2\setminus\{(v,v)\mid v\in V\}$
$y_{i,uv},\ y_{i,vu}\in\{0,1\}$	$(i,\{u,v\})\in[q]\times E$

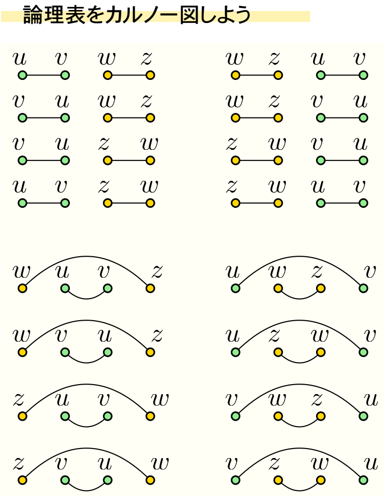
とりうるすべての全順序 $\prec$ を考慮したい

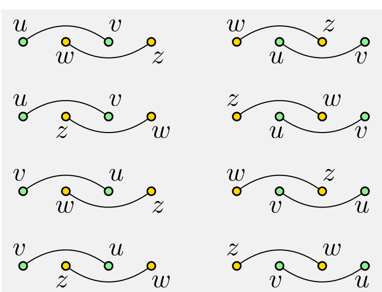
辺集合 E のキューへの集合分割の実現に向けて
アクティベートの条件と
漏れも重複もないことの条件

つまり　$uv\cap xy\neq\varnothing$ の場合はドンケア



論理表をカルノー図しよう





こっちがダメ
i.e., uv と wz が同じキューに属せない

$x_{uv}=1$ & $x_{wz}=1$

$x_{uw}=1$ & $x_{wv}=1$ & $x_{vz}=1$
or　$x_{wu}=1$ & $x_{uz}=1$ & $x_{zv}=1$

この2つは変数独立
↓
制約セットに並列できる

$x_{uv}=x_{wz}=x_{uw}=x_{wv}=x_{vz}=1$ のとき
$y_{i,uv}$ と $y_{i,xy}$ はいずれか一方しか 1 にできない

$♣=\{x_{uw},x_{wv},x_{vz}\}$

というわけで、とりあえず　$y_{i,uv}+y_{i,wz}\le 1+(\sum_{i\in♣}x_i-3)$

※ $y_{i,uv},\ y_{i,wz}$ がアクティベートするためには $x_{uv}=1,\ x_{wz}=1$ が前提
でも、$x_{uv}=0$ or $x_{wz}=0$ のとき左辺の変数いずれも 1 がとれない

つーこって　$y_{i,uv}+y_{i,wz}\le 1+(\sum_{i\in♣}x_i-3)$
$+3\sum_{i\in♠}x_i.$

$♠=\{x_{wu},x_{vw},x_{zv}\}$
位相反転！

ちょっとナイーブな気がしますが
上記 C 内の各辺対ごとに 8 種の制約を与えれば ok…

というわけで書き下し

$y_{i,uv}+y_{i,wz}\le(x_{uw}+x_{wv}+x_{vz})+3(x_{wu}+x_{vw}+x_{zv})-2$	$u\prec v$ $w\prec z$
$y_{i,uv}+y_{i,wz}\le(x_{wu}+x_{uz}+x_{zv})+3(x_{uw}+x_{zu}+x_{vz})-2$	
$y_{i,uv}+y_{i,zw}\le(x_{uz}+x_{zv}+x_{vw})+3(x_{zu}+x_{vz}+x_{wv})-2$	$u\prec v$ $z\prec w$
$y_{i,uv}+y_{i,zw}\le(x_{zu}+x_{uw}+x_{wv})+3(x_{uz}+x_{wu}+x_{vw})-2$	
$y_{i,vu}+y_{i,wz}\le(x_{vw}+x_{wu}+x_{uz})+3(x_{vw}+x_{wu}+x_{zu})-2$	$v\prec u$ $w\prec z$
$y_{i,vu}+y_{i,wz}\le(x_{wv}+x_{vz}+x_{zu})+3(x_{vw}+x_{vz}+x_{uv})-2$	
$y_{i,vu}+y_{i,zw}\le(x_{vz}+x_{zu}+x_{uw})+3(x_{zv}+x_{uz}+x_{wu})-2$	$v\prec u$ $z\prec w$
$y_{i,vu}+y_{i,zw}\le(x_{zv}+x_{vw}+x_{wu})+3(x_{vz}+x_{wv}+x_{uw})-2$	