

# Filtrage de signaux à échantillonnage irrégulier

---

## Filtering of irregularly sampled signals

par L. FONTAINE, J. RAGOT

Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN), Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL), 2 avenue de la Forêt de Haye  
54516 Vandœuvre-les-Nancy Cedex, Email : Ludovic.Fontaine, Jose.Ragot}@ensem.inpl-nancy.fr

### *résumé et mots clés*

Certains systèmes ne fournissent des informations qu'à des intervalles de temps irréguliers, ou ne conservent d'un signal que les échantillons les plus représentatifs dans le but de réduire la quantité d'informations enregistrées. Par conséquent, les signaux issus de ces systèmes, sont échantillonnés irrégulièrement ou à pas variable et il est nécessaire de les traiter sous cette forme. Nous proposons ici un outil de filtrage passe-bas et passe-bande d'ordre  $N$  s'appliquant à de tels signaux échantillonnés à pas variable. L'originalité de la procédure réside en l'absence de reconstruction totale du signal d'origine par une quelconque interpolation. Nous traitons en effet directement le signal dont les informations ne sont connues qu'à certains instants à intervalles de temps irréguliers. Pour cela, à partir d'une fonction de transfert continue représentant le traitement à effectuer (filtrage), nous déterminons le système d'état correspondant, puis nous le résolvons et le discrétoissons avec des intervalles de temps non constants. Nous développons alors des filtres passe-bas et passe-bande de type général et de type Butterworth, et nous comparons le filtrage de signaux échantillonnés à pas variable au filtrage classique de signaux à pas d'échantillonnage fixe.

Échantillonnage irrégulier, échantillonnage à pas variable, filtrage, analyse spectrale, compression d'information, discrétoisation de la représentation d'état.

### *abstract and key words*

Some systems are capable to provide information only at irregular time intervals, or to preserve only the most representative samples of a signal, in a way to reduce the amount of recorded information. Consequently, signals stemming from these systems, are irregularly sampled and need to be processed under this form. The aim of our paper is to propose a  $N$ -order low-pass and band-pass filtering tool applied to such irregularly sampled signals. The originality of the procedure resides in the absence of total reconstruction of the original signal by any interpolation method. The signal, whose information are only known at some instants, is directly processed. From an analogical transfer function representing the processing to undertake (filtering), the corresponding state space system is first determined, then solved and discretised with nonuniform time intervals. Thus, general and Butterworth low-pass and band-pass filters are developed. The irregularly sampled filter is compared to the normal filter having fixed sample intervals.

Irregular sampling, nonequispaced data, filtering, Fourier transform, data compression.

## 1. introduction

Il arrive fréquemment d'être confronté à des systèmes ne permettant des mesures qu'à des intervalles de temps non constants, du fait de la technologie d'un capteur ou d'une défaillance de la procédure de transmission du signal. De plus, dans un objectif de compression, d'autres systèmes ne conservent d'un signal que les échantillons les plus représentatifs. Par conséquent, il peut être utile d'avoir à traiter des signaux échantillonés irrégulièrement ou à pas variable.

Deux aspects du traitement numérique du signal échantillonné irrégulièrement ont été abordés depuis une trentaine d'années : la reconstruction d'un signal continu  $x(t)$  à partir du signal échantillonné irrégulièrement, ou la reconstruction d'un signal régulièrement échantilloné  $x(t_k)$  à intervalles de temps constants à partir du signal échantillonné irrégulièrement, ainsi que l'analyse spectrale de signaux à échantillonnage non uniforme ; l'analyse spectrale servant souvent à la reconstruction du signal.

Jones [Jones 1962], [Jones 1972] propose une analyse spectrale sur des signaux dont il manque des échantillons. Marvasti [Marvasti 1984], [Marvasti 1986] s'attache à la reconstruction de ces signaux à partir de leur transformée de Fourier. Dutt et Rokhlin [Dutt 1993] exposent un algorithme de transformée de Fourier discrète rapide ainsi que la transformée inverse.

La majeure partie des travaux concerne cependant la reconstruction / ré-échantillonnage des signaux contenus dans une bande spectrale limitée. Cette reconstruction s'effectue en associant plusieurs outils comme l'interpolation, l'analyse spectrale, le filtrage et la récursivité. Généralement, à partir du signal échantillonné irrégulièrement, une première interpolation (polynomiale [Bensaoud 1994], par spline [Sankur 1973]) est effectuée afin d'obtenir un signal à échantillonnage régulier. Une analyse spectrale de ce signal est ensuite réalisée. Puis, à partir de la largeur de bande théorique du signal original, une projection spectrale (filtrage) est appliquée afin de ne tenir compte que des fréquences effectivement contenues dans la bande spectrale. Enfin, par itérations récursives, la reconstruction est affinée en tenant compte du signal, de son spectre et de sa bande spectrale théorique  $\Omega$ . Ainsi, la première étape consiste en une reconstruction sommaire du signal échantillonné à pas fixe  $S_{EPF}(t)$  à partir du signal échantillonné à pas variable  $S_{EPV}(t)$  et du spectre explicite ou de la largeur de bande du signal. La deuxième étape consiste à optimiser la reconstruction par une procédure itérative de la forme :

$$S_{EPF}^{(r+1)}(t_i) = P_\Omega \left( A \cdot S_{EPF}^{(r)}(t_i) \right)$$

$S_{EPF}^{(0)}(t_i)$  étant déterminé par l'interpolation polynomiale du signal  $S_{EPV}(t)$

$A$  est un opérateur d'approximation utilisant les échantillons à l'itération  $(r)$ , et  $P_\Omega$  est une projection orthogonale du signal  $S_{EPF}^{(r)}(t)$  vers l'espace des signaux à bande limitée de spectre  $\Omega$ . Des opérateurs  $A$  fixes ont été élaborés par Wiley/Marvasti [Wiley 1978], [Maravsti 1989] et Sauer/Allebach [Sauer 1989], et des opérateurs  $A$  adaptatifs d'une itération à l'autre ont été développés comme ceux de Feichtinger et Cenker [Feichtinger 1991].

Enfin, Feichtinger, Strohmer et Gröchenig ont développé une base d'outils de reconstruction des signaux dans l'environnement logiciel MATLAB de Mathworks, nommée IRSATOL [Feichtinger 1992a], et une théorie de l'échantillonnage irrégulier [Marvasti 1996], [Feichtinger 1990], [Feichtinger 1992b], [Feichtinger 1992c].

D'une manière générale, il peut sembler logique d'essayer de reconstruire tous les échantillons intermédiaires manquants. Le signal ainsi reconstruit peut alors être traité grâce aux outils numériques à disposition. Enfin, le lecteur pourra consulter les références [Unser 2000] et [Adorf 1995] qui présentent respectivement un inventaire des méthodes d'échantillonnage et d'interpolation de signaux irrégulièrement échantillonnés.

Une manière originale de procéder consiste à traiter directement le signal échantillonné irrégulièrement ou à pas variable en inhibant l'étape de reconstruction / interpolation. Dans le cadre d'un projet de développement d'outils de traitement des signaux échantillonnés à pas variable (SEPV), identiques aux outils de traitement des signaux échantillonnés à pas fixe (SEPF), nous proposons ici de réaliser des filtres numériques pour des signaux échantillonnés à pas variable, établis à partir de la fonction de transfert continue, transformée en un système d'état, résolu puis discrétilisé avec une base de temps non constante [Fontaine 1999]. Dans un premier temps, nous établirons la procédure de filtrage d'un SEPV. Nous justifierons ensuite la pertinence de la réalisation de filtres passe-bas et passe-bande. Nous développerons alors les étapes d'obtention d'un filtre numérique EPV à partir d'une forme différentielle ou d'une fonction de transfert continue. Puis nous examinerons le cas des filtres généraux et des filtres de type Butterworth avec application sur des SEPV et comparaison à des SEPF. Enfin, nous conclurons et donnerons quelques perspectives.

## 2. construction du filtrage d'un SEPV

### 2.1. échantillonnage et ré-échantillonnage à pas variable

L'échantillonnage à pas variable (EPV) consiste à échantillonner irrégulièrement un signal à partir d'un signal échantillonné à pas

fixe (SEPF) ou à partir d'un signal analogique (figure 1). Cette opération d'échantillonnage provoque alors une compression d'information puisque les algorithmes, à partir d'une analyse de redondance, ne conservent que les échantillons les plus représentatifs du signal ; le terme représentatif étant à définir en terme de contenu spectral ou temporel.



Figure 1. – Échantillonnage à pas variable (EPV).

La méthode d'échantillonnage à pas variable que nous utilisons, basée sur la méthode FAN, a été développée par [Manœuvre 1994] [Manœuvre 1995], à laquelle nous avons apporté quelques modifications concernant l'adaptation de la marge d'erreur  $\varepsilon$ .

La méthode FAN (« éventail » en anglais) est basée sur l'interpolation du premier ordre. Le signal est approximé par une suite de polynômes d'ordre 1 [Gardenhire 1965] [Sateh 1990] [Saxena 1997]. Puis, l'algorithme détermine le segment de droite le plus long entre un échantillon de départ  $M_D$  et un échantillon final  $M_F$  afin que tous les échantillons intermédiaires soient dans une marge de tolérance  $\varepsilon$  spécifiée.

Le principe de l'échantillonnage à pas variable, comme celui de la méthode FAN, est de supprimer une partie des échantillons du signal qui sont considérés comme peu représentatifs de l'information contenue dans ce signal. À la différence des méthodes de compression destructives, l'échantillonnage à pas variable se propose de stocker le signal sous une certaine forme de manière à être traité sans passer par une phase de décompression. De ce fait, l'échantillonnage à pas variable s'apparente plus à une transformation irréversible du signal qu'à une compression.

Originellement, la méthode FAN utilise une marge d'erreur  $\varepsilon$  fixée par l'utilisateur et ne s'adaptant pas en cours de traitement. Dans le cas de l'EPV, la marge d'erreur est calculée en fonction du contenu du signal et, plus particulièrement, à partir de la moyenne des variations du signal enregistrées sur une courte durée précédant l'échantillon courant  $M_C$  du signal d'amplitude  $x_C$  à l'instant  $t_C$ . Ainsi, on obtient une grandeur  $\varepsilon$  qui augmente avec l'amplitude des variations du signal, et diminue lorsque l'amplitude des variations diminue. La marge d'erreur  $\varepsilon_C$  pour l'échantillon courant  $M_C$  est :

$$\varepsilon_C = \frac{1}{\eta} \sum_{i=C-\eta+1}^C \left| \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right|.$$

Le paramètre  $\eta$  permet de régler le nombre d'échantillons pris en compte dans le calcul de la moyenne. Le taux de compression

CR et la fidélité de reconstruction PRD permettent de quantifier la qualité d'une compression [Kulkarni 1997]. Le taux de compression donne le gain de place réalisé entre le stockage du signal original et celui du signal compressé, soit :

$$CR = \frac{\text{nombre d'échantillons du signal original}}{\text{nombre d'échantillons du signal compressé}}$$

La fidélité de reconstruction est communément définie par la différence au sens des moindres carrés entre le signal original  $x_{org}$  et le signal reconstruit  $x_{rec}$  à partir du signal compressé, soit :

$$PRD(\%) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{ech}} (x_{org}(i) - x_{rec}(i))^2}{\sum_{i=1}^{N_{ech}} (x_{org}(i))^2}}$$

En traçant le taux de compression CR et la fidélité de reconstruction PRD [Kulkarni 1997] [Sateh 1990] en fonction du nombre d'échantillons  $\eta$  pris en compte, pour un signal télégraphique bruité, nous relevons une valeur  $\eta = 256$  échantillons, offrant un compromis entre le taux de compression, la fidélité de reconstruction et le temps de calcul de la marge d'erreur  $\varepsilon$  liée au nombre d'échantillons  $\eta$  (figure 2).

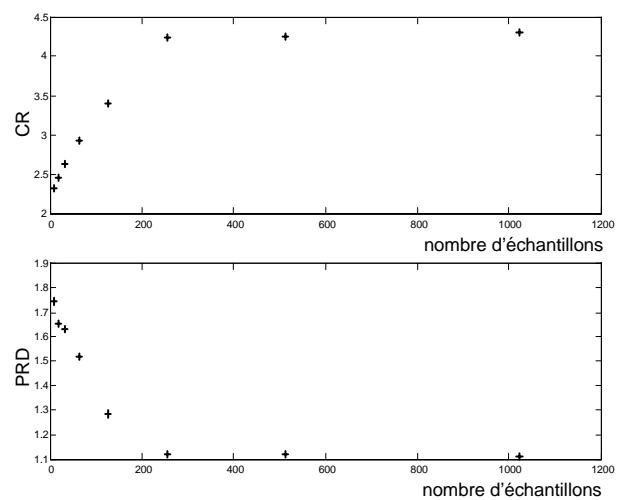


Figure 2. – Taux de compression CR et fidélité de reconstruction PRD en fonction du nombre d'échantillons  $\eta$ .

Dans la suite, nous utiliserons aussi le ré-échantillonnage à pas variable (REPV) qui est le fait d'échantillonner irrégulièrement un signal à partir d'un signal déjà échantillonné à pas variable (figure 3). Cette opération sert à optimiser le nombre d'échantillons à conserver, généralement après filtrage d'un SEPV.



Figure 3. – Ré-échantillonnage à pas variable (REPV).

## 2.2. représentation temporelle d'un SEPV

Que le signal soit issu d'un système ne fournissant l'information qu'à des instants non constants, ou qu'il soit issu d'un système de compression par échantillonnage à pas variable, celui-ci se présente sous la forme de deux suites temporelles : l'une comprenant les instants d'échantillonnage  $\check{t}_n$  du signal et l'autre comprenant les amplitudes correspondantes  $\check{x}_n$  (le symbole  $\check{\cdot}$  au dessus d'une variable désignera toujours une variable échantillonnée irrégulièrement), soit :

$$\check{x}(\check{t}_n) = \{\check{t}_n, \check{x}_n\} \text{ avec } n \in \{1, 2, \dots, N\}$$

À partir de cette représentation, on peut retrouver une forme continue  $x(t)$  en bloquant le signal  $\check{x}(\check{t}_n)$ . Dans la suite, nous utiliserons des bloqueurs d'ordre 0 et 1 afin d'obtenir une reconstruction du signal lorsque cela sera nécessaire.

## 2.3. spectre d'un SEPV

Le spectre d'un SEPV est déterminé à partir de la transformée de Fourier d'un SEPV définie en fonction de l'ordre du bloqueur.

La transformée de Fourier d'un signal continu  $x(t)$  est :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

En considérant  $N$  instants d'échantillonnage à pas non constant  $\check{t}_i$ , le signal  $x(t)$  devient le signal échantillonné à pas variable  $\check{x}(t)$  connu entre les instants  $\check{t}_1$  et  $\check{t}_N$ . La transformée de Fourier se décompose comme suit :

$$X(f) = \sum_{i=2}^N \left\{ \int_{\check{t}_{i-1}}^{\check{t}_i} \check{x}(t) e^{-j2\pi f t} dt \right\}$$

Considérons dans un premier temps le bloqueur d'ordre 0. Celui-ci conserve l'amplitude  $\check{x}_{i-1}$  du signal à l'instant  $\check{t}_{i-1}$  jusqu'à l'instant  $\check{t}_i$ . La transformée de Fourier  $X_0(f)$  du signal  $\check{x}(t)$  muni d'un échantillonneur bloqueur d'ordre 0 est alors définie par :

$$X_0(f) = \sum_{i=2}^N \left\{ \int_{\check{t}_{i-1}}^{\check{t}_i} \check{x}_{i-1} e^{-j2\pi f t} dt \right\},$$

soit encore :

$$X_0(f) = \frac{1}{-j2\pi f} \sum_{i=2}^N \check{x}_{i-1} \left( e^{-j2\pi f \check{t}_i} - e^{-j2\pi f \check{t}_{i-1}} \right).$$

Considérons maintenant le bloqueur d'ordre 1 qui impose une interpolation linéaire de l'amplitude du signal  $x(t)$  entre les instants  $\check{t}_{i-1}$  et  $\check{t}_i$ , soit  $x(t) = a_i t + b_i$  pour  $t \in [\check{t}_{i-1}; \check{t}_i]$  avec  $a_i = \frac{\check{x}_i - \check{x}_{i-1}}{\check{t}_i - \check{t}_{i-1}}$  et  $b_i = \frac{\check{x}_{i-1} \check{t}_i - \check{x}_i \check{t}_{i-1}}{\check{t}_i - \check{t}_{i-1}}$ . La transformée de Fourier  $X_1(f)$  par bloqueur d'ordre 1 est alors définie par :

$$X_1(f) = \sum_{i=2}^N \left\{ \int_{\check{t}_{i-1}}^{\check{t}_i} (a_i t + b_i) e^{-j2\pi f t} dt \right\},$$

soit, après calcul :

$$X_1(f) = \frac{1}{j2\pi f} \sum_{i=2}^N \left\{ -e^{-j2\pi f \check{t}_i} \left( \check{x}_i + \frac{a_i}{j2\pi f} \right) + e^{-j2\pi f \check{t}_{i-1}} \left( \check{x}_{i-1} + \frac{a_i}{j2\pi f} \right) \right\}$$

cette expression évitant le calcul des coefficients  $b_i$ .

Le spectre fréquentiel en amplitude  $S(f)$  définissant l'amplitude en fonction de la fréquence positive est caractérisé par le module  $S(f) = \frac{2|X(f)|}{N}$  pour une fréquence  $f \in [0; F_e/2]$ , où  $F_e$  est la fréquence d'échantillonnage originelle du signal  $x(t)$ . Nous avons choisi le spectre en amplitude car il permet de faire facilement le lien avec l'amplitude des signaux sinusoïdaux. Nous aurions aussi pu prendre un spectre en puissance.

La transformée de Fourier par bloqueur d'ordre 1 et son spectre associé permettra de comparer les spectres des SEPV entre eux ou à ceux des SEPF. Comme les signaux utilisés sont réels, nous définissons le critère de comparaison des spectres  $S_1(f)$  et  $S_2(f)$  dans la bande de fréquences  $f \in [0; F_e/2]$  par :

$$\Phi = \frac{\int_0^{\frac{F_e}{2}} (S_1(f) - S_2(f))^2 df}{\int_0^{\frac{F_e}{2}} (S_1(f))^2 df}. \quad (1)$$

Nous avons choisi un critère normé, basé sur le carré de l'écart entre les deux spectres.

## 2.4. filtrage d'un SEPV

En tenant compte des définitions et observations faites jusqu'à présent, les différentes étapes du filtrage d'un SEPV se résument ainsi :

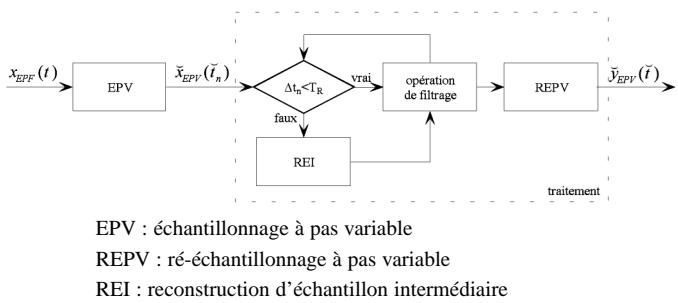


Figure 4. – Procédure de filtrage des SEPV.

Dans le cas où nous avons à filtrer un SEPV, celui-ci constituera alors le signal d'entrée  $\check{x}_{EPV}(t_n)$  du traitement. Dans le cas où nous avons à filtrer un SEPF, il peut être utile au préalable de l'échantillonner à pas variable (EPV) afin d'obtenir le signal  $\check{x}_{EPV}(t_n)$ .

Vient alors un comparateur d'intervalle de temps  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  au pas de reconstruction  $T_R$  fonction de l'opération (filtrage) à réaliser. Lorsque les intervalles de temps  $t_n - t_{n-1}$  sont trop grands pour réaliser le filtrage, ce dernier peut générer des instabilités ou fournir une sortie qui ne soit pas fidèle à la sortie issue du même filtrage pour un SEPF. Dans le cas où  $\Delta t_n$  est supérieur à  $T_R$ , il convient de reconstruire un échantillon intermédiaire (REI) par interpolation linéaire en considérant que le signal peut être assimilé à un segment de droite entre deux échantillons successifs. On procède ensuite à l'opération de filtrage. Nous déterminerons ultérieurement la relation entre l'opération à réaliser et l'intervalle de temps à considérer.

Enfin, à l'issu du filtrage, il convient éventuellement d'optimiser le nombre d'échantillons représentatifs du signal par ré-échantillonnage à pas variable (REPV) et obtenir le signal de sortie  $\check{y}_{EPV}(t)$ .

L'ensemble de ces modules assure le filtrage général des SEPV.

### 3. pertinence de la réalisation des différents types de filtres

Un signal échantillonné à la fréquence  $F_e$  contient des composantes de fréquences comprises entre 0 Hz (signal continu) et la moitié de la fréquence d'échantillonnage ( $F_e/2$ ).

Nous allons examiner, dans ce qui suit, si les quatre types de filtres (passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande) sont réalisables en EPV et s'ils méritent d'être réalisés. Puis nous nous intéresserons à l'adaptation de la fréquence de reconstruction de telle sorte que l'écart entre le signal EPV obtenu après traitement et le signal EPF obtenu par le même traitement soit inférieur à un seuil donné.

#### 3.1. filtres passe-bas et passe-bande

Pour un SEPV, afin de conserver les fréquences comprises entre 0 et la fréquence de coupure  $F_c$  pour le filtre passe-bas (ou les fréquences comprises entre les deux fréquences de coupure  $F_{C_B} > 0$  et  $F_{C_H} < F_e/2$  pour le filtre passe-bande), il conviendra de reconstruire le signal à une fréquence d'échantillonnage au moins double de la fréquence la plus élevée du signal filtré, soit le double de la fréquence de coupure  $F_c$  (ou  $F_{C_H}$  pour le filtre passe-bande). Cette fréquence de reconstruction sera alors comprise entre  $2F_c$  et  $F_e$  (ou entre  $2F_{C_H}$  et  $F_e$  pour le filtre passe-bande), ce qui est tout à fait possible. Le développement de filtres passe-bas EPV et passe-bande EPV est alors pertinent.

#### 3.2. filtres passe-haut et coupe-bande

Afin de conserver les fréquences comprises entre la fréquence de coupure  $F_c$  et  $F_e/2$  pour un filtre passe-haut (ou les fréquences comprises entre 0 et  $F_{C_B}$ , et entre  $F_{C_H}$  et  $F_e/2$  pour le filtre coupe-bande), il conviendra de reconstruire le SEPV à une fréquence d'échantillonnage au moins double de la fréquence la plus élevée du signal filtré. Or, pour les filtres passe-haut et coupe-bande, la fréquence la plus élevée du signal filtré est  $F_e/2$ . La fréquence de reconstruction sera alors le double de  $F_e/2$ , soit la fréquence d'échantillonnage d'origine  $F_e$ . Il semble donc nécessaire de reconstruire tous les échantillons pour réaliser un filtre passe-haut EPV (ou un filtre coupe-bande EPV). Ceci n'est pas le but recherché ; il est préférable d'utiliser une méthode de reconstruction d'un signal EPF puis d'effectuer un traitement conventionnel de filtrage. Dans le cas où le filtre passe-haut EPV est associé à un filtre passe-bas EPV de manière à former un passe-bande EPV, la fréquence de reconstruction ne sera plus fonction de la fréquence de coupure du filtre passe-haut. Elle sera fonction de la fréquence de coupure du filtre passe-bas. Par conséquent, l'élaboration du filtre passe-haut n'a de sens que lorsqu'il est associé à un filtre passe-bas EPV. En revanche, l'élaboration de filtres coupe-bande EPV ne présente pas d'intérêt.

#### 3.3. choix du pas de reconstruction des échantillons intermédiaires

Dans le cas où nous conservons en sortie du filtre les mêmes instants d'échantillonnage  $t_n$  qu'à l'entrée de ce filtre, la plage de fréquences dans laquelle sera choisie la fréquence de coupure  $f_0$  du filtre, sera limitée du fait de la durée des pas d'échantillonnage. En effet, soit  $T_0$  le plus grand pas d'échantillonnage :  $T_0 = \max_n \{t_n - t_{n-1}\}$ . Ce pas correspond à une fréquence  $F_0 = \frac{1}{T_0}$ . D'après le théorème de Shannon, la fréquence de

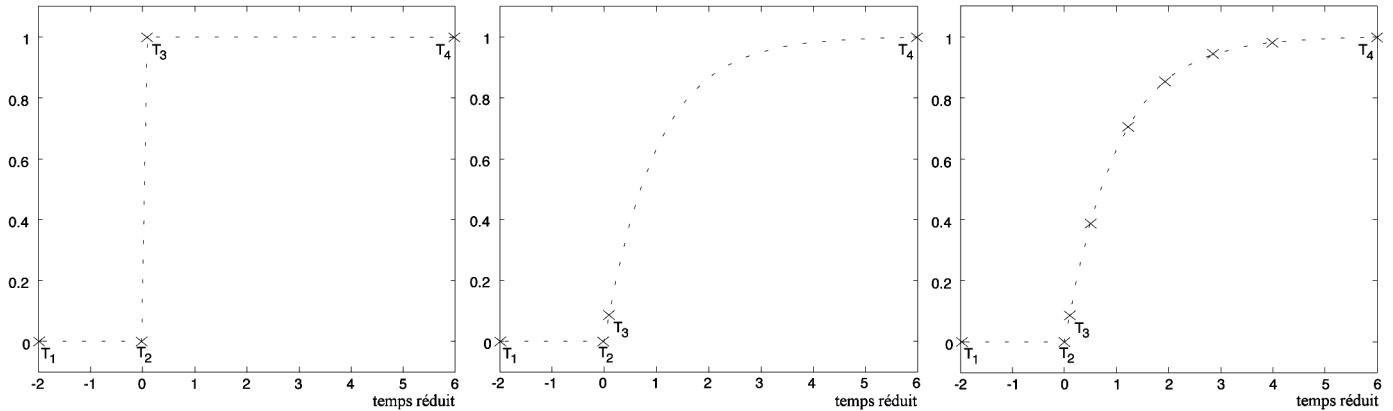


Figure 5. – Échelon unitaire et réponse d'un filtre passe-bas à cet échelon en fonction du temps réduit.

coupure  $f_0$  du filtre devra donc être inférieure à  $\frac{F_0}{2}$ , c'est-à-dire

$$f_0 \leq \frac{1}{2 \max_n \{\tau_n - \tau_{n-1}\}}.$$

Afin de ne pas limiter la fréquence de coupure et de la choisir dans la plage de fréquences définie par chacun des deux types de filtres passe-bas et passe-bande, il est nécessaire de reconstruire des échantillons d'entrée intermédiaires lorsque le pas d'échantillonnage est trop grand par rapport au temps de réponse du filtre à une entrée en échelon (voir chaîne de traitement de la figure 4). Ce temps de réponse est fonction de la fréquence de coupure  $f_0$ .

À titre d'exemple, considérons le cas d'un filtre passe-bas d'ordre 1, de gain statique unité dont l'entrée est un échelon et traçons sa réponse en fonction de la variable sans dimension temps réduit  $\frac{t}{\tau}$ ,  $\tau = \frac{1}{2\pi f_0}$  étant la constante de temps du filtre (figure 5).

On vérifie facilement que l'amplitude du signal de sortie atteint 66 % de sa valeur finale au bout d'une durée  $\tau$ , 95 % au bout de  $3\tau$ , et 99 % au bout de  $5\tau$ .

Pour un SEPV, l'échelon en entrée du filtre sera composé de quatre instants d'échantillonnage : l'instant initial  $T_1$  correspondant à une amplitude 0 du signal, l'instant  $T_2$  juste avant la commutation, l'instant  $T_3$  juste après la commutation et l'instant final  $T_4$  correspondant à une amplitude 1 du signal (premier graphique de la figure 5). Considérons l'instant  $T_3$  juste après la commutation et l'instant  $T_4$  en fin du signal. En sortie du filtre, dans le cas où le pas  $T_4 - T_3$  est trop grand, l'amplitude à l'instant  $T_3$  vaudra  $y(T_3) = 0$  et celle à l'instant  $T_4$  vaudra  $y(T_4) = 1$ , mais aucun échantillon ne traduira l'évolution entre ces deux instants (deuxième graphique de la figure 5). Pour pallier ce manque d'information, on peut alors générer un échantillon intermédiaire en entrée à  $5\tau$ , à  $3\tau$  ou à  $\tau$ , correspondant respectivement à des erreurs de reconstruction élevées, moyennes ou faibles (troisième graphique de la figure 5).

Ainsi, en prenant une fréquence de reconstruction au moins égale à  $2f_0$  (ici,  $\pi$  est un facteur multiplicatif), nous choisissons la fréquence de reconstruction

$$F_R = \frac{1}{\tau} = 2\pi f_0, \quad (2)$$

correspondant au pas de reconstruction

$$T_R = \frac{1}{F_R} = \frac{1}{2\pi f_0},$$

nous pouvons utiliser les fréquences de coupure dans les plages définies pour chaque type de filtre, tout en s'assurant de la bonne réponse du filtre à de fortes variations du signal d'entrée. Par conséquent, nous reconstruisons, par interpolation linéaire d'ordre 1, un échantillon intermédiaire (REI) lorsque  $\tau_n - \tau_{n-1} > T_R$ . Nous remarquons que la fréquence de reconstruction est au moins double de la fréquence de coupure, soit  $F_R \geq 2f_0$ . Bien sûr, si la fréquence de reconstruction  $F_R$  est supérieure à la fréquence d'échantillonnage  $F_e$ , nous reconstruirons alors le signal à la fréquence d'échantillonnage d'origine  $F_e$ .

En résumé, à partir du filtrage à réaliser, le pas de reconstruction défini dans la section 3.3. est  $T_R = \frac{1}{2\pi f_0}$  où  $f_0$  est la fréquence de coupure la plus élevée du filtre. On compare ensuite chaque intervalle de temps  $\tau_n - \tau_{n-1}$  au pas de reconstruction  $T_R$ . Si  $\tau_n - \tau_{n-1}$  est inférieur ou égal à  $T_R$ , on calcule l'échantillon de sortie du filtre à l'instant  $\tau_n$ . En revanche, si  $\tau_n - \tau_{n-1}$  est supérieur à  $T_R$ , on reconstruit un échantillon intermédiaire du signal d'entrée, par interpolation linéaire, à l'instant  $\tau_{n-1} + T_R$ . Cet instant forme le nouvel instant  $\tau_n$  où l'échantillon de sortie du filtre est alors calculé. Les indices des instants postérieurs sont incrémentés d'une unité.

## 4. réalisation du filtre numérique EPV

### 4.1. passage des équations différentielles à une représentation d'état

On rappelle dans ce paragraphe comment obtenir une représentation d'état continue d'un système linéaire invariant à partir de l'équation différentielle ou de la fonction de transfert correspondante de ce système. Soit  $u \in \mathcal{R}^1$  la grandeur d'entrée du système et  $y \in \mathcal{R}^1$  sa grandeur de sortie. Nous considérons un système à une seule entrée et une seule sortie, caractérisé par l'équation différentielle d'ordre  $N$  :

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^M b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} \text{ avec } a_N = 1$$

Cette équation différentielle d'ordre  $N$  s'écrit sous la forme d'une représentation d'état [Labarrere 1982] [Borne 1990] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (3)$$

où  $x \in \mathcal{R}^{N \times 1}$  est un vecteur d'état et  $A \in \mathcal{R}^{N \times N}$ ,  $B \in \mathcal{R}^{N \times 1}$ ,  $C \in \mathcal{R}^{1 \times N}$ ,  $D \in \mathcal{R}^1$  sont les matrices et vecteurs d'état dont les expressions sont connues [Borne 1990].

### 4.2. résolution et discréétisation de la représentation d'état en EPV

Dans ce paragraphe, on montre comment, à partir de la représentation d'état continue obtenue précédemment, obtenir l'expression de la sortie  $y$  en fonction de l'entrée  $u$  échantillonnée à pas variable.

Afin d'obtenir la sortie  $y(t)$  en fonction de l'entrée  $u(t)$ , nous intégrons le système d'état (3) entre les instant  $t_0$  et  $t$ .

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Pour obtenir une représentation discrète des équations continues précédentes, avec un pas d'échantillonnage variable, nous posons  $t = \check{t}_n$  et  $t_0 = \check{t}_{n-1}$ . Les équations continues précédentes deviennent :

$$\begin{aligned} \check{x}(\check{t}_n) &= e^{A(\check{t}_n-\check{t}_{n-1})}x(\check{t}_{n-1}) + \int_{\check{t}_{n-1}}^{\check{t}_n} e^{A(\check{t}_n-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ \check{y}(\check{t}_n) &= C\check{x}(\check{t}_n) + D\check{u}(\check{t}_n) \end{aligned}$$

Afin de calculer l'intégrale de l'équation discrète, on munie l'entrée  $u(t)$  d'un échantillonneur bloqueur d'ordre 0. Sachant que :

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{At} dt = A^{-1} (e^{At_1} - e^{At_0}),$$

nous obtenons les équations discrètes EPV récurrentes :

$$\check{x}(\check{t}_n) = e^{A(\check{t}_n-\check{t}_{n-1})} \check{x}(\check{t}_{n-1}) - A^{-1} (I - e^{A(\check{t}_n-\check{t}_{n-1})}) B \check{u}(\check{t}_{n-1}) \quad (4)$$

$$\check{y}(\check{t}_n) = C\check{x}(\check{t}_n) + D\check{u}(\check{t}_n) \quad (5)$$

Si cela s'avère nécessaire, on peut étendre les expressions (4) et (5) au cas d'un système dont l'entrée serait munie d'un échantillonneur bloqueur d'ordre 1.

Ainsi, à partir de l'une des trois formes : fonction de transfert continue, équations différentielles ou représentation d'état, il est possible d'obtenir une forme discrète récurrente avec un pas d'échantillonnage variable, de la sortie  $\check{y}(\check{t}_n)$  à l'instant  $\check{t}_n$  en fonction de l'entrée  $\check{u}(\check{t}_{n-1})$  à l'instant quelconque  $\check{t}_{n-1}$  précédent  $\check{t}_n$ . Les équations (4) et (5) montrent cette relation. Grâce aux équations d'état, nous pouvons filtrer un signal échantilloné à pas variable.

La fonction de transfert continue est stable lorsque les racines du polynôme du dénominateur ont leur partie réelle négative. Le filtre EPV est alors stable si la fonction de transfert continue est stable, puisqu'elle en découle.

Afin de ne pas perdre trop d'informations entre le signal de sortie  $\check{y}_{EPV}(\check{t})$  et le signal de sortie  $y_{EPF}(t)$ , il est nécessaire, lorsque  $\check{t}_n - \check{t}_{n-1}$  est trop grand par rapport à une valeur dépendante des fréquences de coupure, de reconstruire un échantillon intermédiaire du signal d'entrée à un instant compris entre  $\check{t}_{n-1}$  et  $\check{t}_n$ . Ainsi, le filtre peut répondre à de brusques variations du signal d'entrée  $\check{x}_{EPV}(\check{t})$  comme il l'aurait fait avec le signal d'entrée  $x_{EPF}(t)$ .

## 5. réalisation de filtres EPV

Nous allons maintenant nous intéresser à la réalisation de différents filtres en appliquant la méthode décrite ci-dessus. Nous nous limiterons aux filtres classiques et aux filtres de type Butterworth. Nous appliquerons les divers types de filtres réalisés à deux sortes de signaux. Le premier signal de synthèse, échantillonné à  $F_e = 300$  Hz, est la somme de signaux sinusoïdaux ayant des fréquences comprises entre 1 Hz et 150 Hz. Ce signal présente l'avantage d'avoir des composantes fréquentielles réparties sur tout le spectre. Ainsi, en regardant l'amplitude du spectre en sortie du filtre, il est aisément de voir le gabarit spectral du filtre. Aussi, dans le domaine temporel, le signal pré-

sente à la fois de fortes variations et de faibles variations. Nous pouvons alors voir comment réagit le filtre à un tel signal. Le deuxième signal de synthèse, échantillonné à  $F_e = 300$  Hz, est un signal de style télégraphique ayant des variations lentes auxquelles est superposé un bruit blanc. Nous examinerons l'effet des filtres sur ces deux signaux et comparerons le filtrage EPF au filtrage EPV.

## 5.1. réalisation de filtres classiques

Les filtres classiques se décomposent souvent en produits de filtres du premier et du deuxième ordre. Nous verrons le filtre passe-haut et nous nous intéresserons plus particulièrement aux filtres passe-bas et passe-bande.

### 5.1.1. filtre passe-bas classique d'ordre $N$

Le filtre passe-bas du premier ordre est caractérisé par un gain statique  $G_0$ , une fréquence de coupure  $f_0$ , et a pour fonction de transfert :

$$FT_{\text{Passe Bas Ordre } 1}(s) = \frac{G_0}{1 + \frac{s}{2\pi f_0}}$$

Le passage au filtre passe-bas du premier ordre échantillonné à pas variable se déduit de l'équation (4). Nous retrouvons alors l'équation récurrente obtenue auparavant en EPV [Fontaine 1998] :

$$\check{y}(\check{t}_n) = K_n \check{y}(\check{t}_{n-1}) + G_0(1 - K_n) \check{u}(\check{t}_{n-1})$$

$$\text{avec } K_n = e^{-2\pi f_0(\check{t}_n - \check{t}_{n-1})}.$$

La fréquence de reconstruction  $F_R$  est supérieure ou égale au double de la fréquence de coupure  $f_0$ , soit  $F_R \geqslant 2f_0$ . Conformément à l'équation (2), il convient de prendre  $F_R = 2\pi f_0$ . De façon générale, la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre  $N$  peut être prise sous la forme :

$$FT_{\text{Passe Bas Ordre } N}(s) = \frac{G_0}{\prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{s}{2\pi f_i}\right)} \quad (6)$$

où  $G_0$  est le gain statique,  $f_1$  à  $f_N$  les  $N$  fréquences de coupure. En prenant des fréquences de coupure réelles, nous obtenons un filtre apériodique qui se décompose en une succession de filtres passe-bas du premier ordre. Si l'on prend des fréquences de coupure réelles et complexes conjuguées, nous obtenons un filtre qui se décompose en une succession de filtres passe-bas du premier ordre et de filtres passe-bas du deuxième ordre.

La généralisation au filtre passe-bas d'ordre  $N$  échantillonné à pas variable se fait en mettant la fonction de transfert continue précédente (6) sous forme d'état, puis en utilisant les équations discrètes EPV donnant la sortie  $y$  en fonction de l'entrée  $u$  et des 4 matrices et vecteurs d'état  $A, B, C$  et  $D$  déduites de la fonction de transfert (4) et (5).

La fréquence de reconstruction doit être au moins égale au double de la fréquence de coupure la plus élevée, soit  $F_R \geqslant 2 \max\{f_1, \dots, f_N\}$ . Conformément à l'équation (2), nous prenons  $F_R \geqslant 2\pi \max\{f_1, \dots, f_N\}$ .

La figure 6 montre les signaux d'entrée et de sortie issus du filtrage passe-bas d'ordre 3 pour le premier signal de synthèse (signal résultant de la somme de signaux sinusoïdaux), en EPF et en EPV. Les fréquences de coupures sont  $f_1 = f_2 = f_3 = 20$  Hz ; la fonction de transfert s'obtient à partir de l'équation (6) et a pour expression :

$$FT(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{40\pi}\right)^3}.$$

Sur la partie gauche de la figure, nous avons représenté respectivement de haut en bas :

- le signal original ayant 901 échantillons en EPF et comportant seulement 250 échantillons en EPV,
- le signal EPF filtré comportant 901 échantillons,
- le signal EPV filtré par les équations d'état (4) et (5), et ayant 122 échantillons.

Le nombre d'échantillons est indiqué à droite de chacun des graphiques.

Sur la partie droite de la figure sont représentés les spectres des signaux de la partie de gauche dont les graduations sont marquées sur les axes des ordonnées à gauche des graphiques, ainsi que le gabarit spectral du filtre utilisé, en trait pointillé, et dont

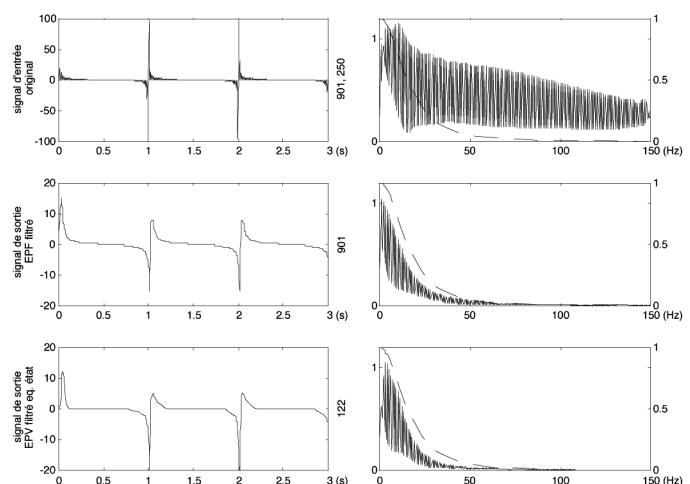


Figure 6. – Filtre passe-bas d'ordre 3,  $f_i = 20, 20, 20$  Hz.

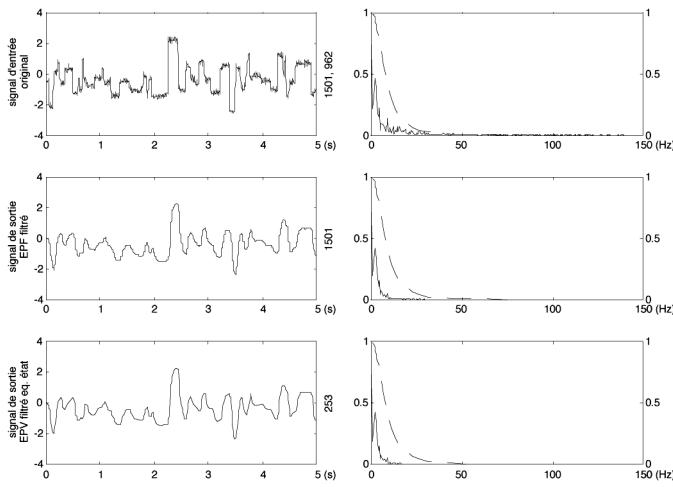


Figure 7. – Filtre passe-bas d’ordre 3,  $f_i = 10, 10, 10$  Hz.

les graduations sont marquées sur les axes des ordonnées à droite des graphiques. Nous remarquons visuellement que les spectres des deux signaux filtrés sont similaires et que le signal EPF filtré et le signal EPV filtré par équations d’état sont très ressemblant malgré leur nombre d’échantillons différents.

Le critère de comparaison des spectres défini à l’équation (1) permet de quantifier l’écart entre deux spectres. Prenons comme spectre de référence celui du signal filtré EPF. En le comparant au spectre du signal EPV filtré par équations d’état, nous obtenons le critère  $\Phi = 3,06\%$ . Nous remarquons que cette valeur est faible.

La figure 7 montre les signaux d’entrée et de sortie issus du filtrage passe-bas d’ordre 3 pour le deuxième signal de synthèse (signal télégraphique). Nous remarquons que le filtre a eu pour effet d’éliminer le bruit hautes fréquences. Les signaux EPF filtré et EPV filtré par équations d’état ainsi que leurs spectres sont visuellement semblables malgré les 253 échantillons du signal EPV filtré et les 962 échantillons du signal EPV original, comparés aux 1501 échantillons des signaux EPF.

Prenons comme spectre de référence celui du signal filtré EPF. Comme précédemment, nous le comparons au spectre du signal EPV filtré par équations d’état. Nous obtenons alors le critère  $\Phi = 0,045\%$ , ce qui montre le faible écart entre les deux spectres.

### 5.1.2. filtre passe-haut classique d’ordre $N$

Comme nous l’avons vu précédemment, le filtre passe-haut n’a pas lieu d’être développé pour des SEPV. Néanmoins, nous le présentons ici afin qu’il puisse servir à la réalisation de filtres passe-bande par la suite.

Le filtre passe-haut du premier ordre est caractérisé par un gain statique  $G_0$ , une fréquence de coupure  $f_0$ , et a pour fonction de transfert :

$$FT_{\text{Passe Haut Ordre } 1}(s) = \frac{G_0 \frac{s}{2\pi f_0}}{1 + \frac{s}{2\pi f_0}}$$

Le passage au signal de sortie échantillonné à pas variable issu du filtre passe-haut du premier ordre s’effectue à l’aide des équations d’état et de la résolution (4) et (5). Nous trouvons l’équation récurrente analogue à celle du filtre passe-bas du premier ordre, c’est-à-dire :

$$\begin{aligned} \check{y}(\check{t}_n) &= K_n \check{y}(\check{t}_{n-1}) + G_0 K_n \check{u}(\check{t}_{n-1}) - G_0 K_n \check{u}(\check{t}_{n-2}) \\ \text{avec } K_n &= e^{-2\pi f_0 (\check{t}_n - \check{t}_{n-1})} \end{aligned}$$

Dans le cas où le filtre passe-haut n’est pas associé à un filtre passe-bas, la fréquence de reconstruction  $F_R$  est supérieure ou égale au double de la fréquence d’échantillonnage  $F_e$ , soit  $F_R \geq 2F_e$ . Dans le cas où le filtre passe-haut est associé à un ou plusieurs filtres passe-bas, la fréquence de reconstruction  $F_R$  est supérieure ou égale au double de la fréquence de coupure basse  $f_0$  la plus élevée, soit  $F_R \geq 2f_0$ .

Un filtre passe-haut d’ordre  $N$  est caractérisé par un gain statique  $G_0$  et  $N$  fréquences de coupure  $f_1$  à  $f_N$ . Sa fonction de transfert peut s’écrire :

$$FT_{\text{Passe Haut Ordre } N}(s) = \frac{G_0 S^N}{\prod_{i=1}^N (s + 2\pi f_i)}$$

En prenant des fréquences de coupure réelles, nous obtenons un filtre apériodique qui se décompose en une succession de filtres passe-haut du premier ordre. Si l’on prend des fréquences de coupure réelles et complexes conjuguées, nous obtenons un filtre qui se décompose en une succession de filtres passe-haut du premier ordre et de filtres passe-haut du deuxième ordre.

La généralisation à un filtre passe-haut d’ordre  $N$  se fait en mettant la fonction de transfert continue sous forme d’équations d’état puis en utilisant les équations discrètes EPV donnant la sortie  $y$  en fonction de l’entrée  $u$  et des 4 matrices et vecteurs d’état  $A, B, C$  et  $D$  déduites de la fonction de transfert.

### 5.1.3. filtre passe-bande classique d’ordre $N + M$

Un filtre passe-bande d’ordre  $N + M$  est caractérisé par un gain statique  $G_0$ ,  $N$  fréquences de coupure basse  $f_{B1}$  à  $f_{BN}$  et  $M$  fréquences de coupure haute  $f_{H1}$  à  $f_{HM}$ . Sa fonction de transfert peut, par exemple, se mettre sous la forme :

$$FT_{\text{Passe Bande Ordre } N+M}(s) =$$

$$\frac{G_0 s^M}{\prod_{i=1}^N (s + 2\pi f_{Bi}) \prod_{j=1}^M (s + 2\pi f_{Hi})} \quad (7)$$

La fréquence de reconstruction est au moins égale au double de la fréquence de coupure la plus élevée, soit  $F_R \geq 2 \max\{f_{B1}, \dots, f_{BN}, f_{H1}, \dots, f_{HM}\}$ . Conformément à l'équation (2), nous prenons  $F_R = 2\pi \max\{f_{B1}, \dots, f_{BN}, f_{H1}, \dots, f_{HM}\}$ .

La figure 8 montre les signaux d'entrée et de sortie résultant du filtrage passe-bande d'ordre 5 du premier signal de synthèse, en EPF et en EPV. Les fréquences de coupure du filtre passe-bas sont  $f_{B1} = f_{B2} = f_{B3} = 10 \text{ Hz}$ ; les fréquences de coupure du filtre passe-haut sont  $f_{H1} = f_{H2} = 5 \text{ Hz}$ . L'expression de la fonction de transfert est obtenue à partir de l'équation (7). Ceci a pour effet d'éliminer les fluctuations lentes proches du continu ainsi que les fluctuations rapides. Nous remarquons que les allures spectrales des signaux filtrés sont semblables.

En prenant toujours comme référence le spectre du signal EPF filtré, nous comparons ce spectre à celui du signal EPV filtré par équations d'état. Nous obtenons le critère normé  $\Phi = 2,84 \%$ , montrant le bon respect du filtrage EPV par rapport au filtrage EPF.

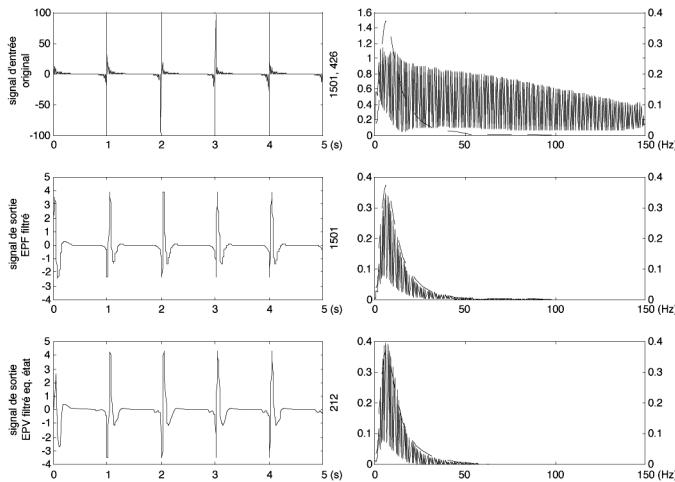


Figure 8. – Filtrage passe-bande d'ordre 5,  $f_H = 5, 5 \text{ Hz}$  et  $f_B = 10, 10, 10 \text{ Hz}$ .

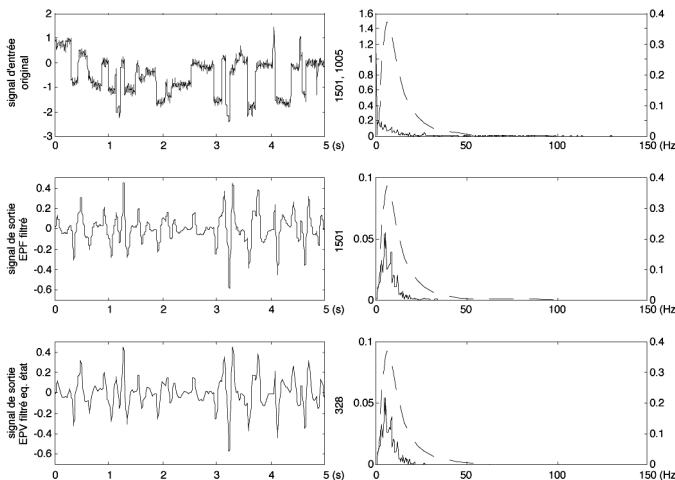


Figure 9. – Filtrage passe-bande d'ordre 5,  $f_H = 5, 5 \text{ Hz}$  et  $f_B = 10, 10, 10 \text{ Hz}$ .

La figure 9 montre les signaux d'entrée et de sortie résultant du même filtrage passe-bande d'ordre 5 du signal télégraphique. Nous remarquons que les fluctuations lentes et le bruit hautes fréquences sont éliminés, et que les signaux EPF filtré et EPV filtré par équations d'état sont identiques tant dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel.

En comparant le spectre du signal EPF filtré au spectre du signal EPV filtré, la quantification du critère donne  $\Phi = 0,21 \%$ , montrant l'équivalence du filtrage EPV au filtrage EPF.

## 5.2. réalisation de filtres de type Butterworth

### 5.2.1. filtre passe-bas de Butterworth d'ordre $N$

Les filtres passe-bas de type Butterworth sont caractérisés par le gain statique  $G_0$ , la fréquence de coupure  $f_0$  et l'ordre  $N$  [Labarrere 1982]. La courbe de réponse fréquentielle d'un tel filtre est :

$$|H(f)| = \frac{G_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^N}}$$

Sa fonction de transfert est :

si  $N$  est pair,

$$FT_{\text{pair}}(s) =$$

$$\frac{G_0}{\prod_{n=1}^{\frac{N}{2}} \left\{ \left( \frac{s}{2\pi f_0} - e^{i\left(\frac{(2n-1)\pi}{2N} + \frac{\pi}{2}\right)} \right) \left( \frac{s}{2\pi f_0} - e^{-i\left(\frac{(2n-1)\pi}{2N} + \frac{\pi}{2}\right)} \right) \right\}}$$

si  $N$  est impair,

$$FT_{\text{impair}}(s) = \frac{G_0}{\left( \frac{s}{2\pi f_0} + 1 \right)} \times \dots \times \frac{1}{\prod_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \left\{ \left( \frac{s}{2\pi f_0} - e^{i\left(\frac{(2n-1)\pi}{2N} + \frac{\pi}{2}\right)} \right) \left( \frac{s}{2\pi f_0} - e^{-i\left(\frac{(2n-1)\pi}{2N} + \frac{\pi}{2}\right)} \right) \right\}}$$

Une fois la fonction de transfert continue obtenue, on procède de la même manière que pour le filtre passe-bas classique d'ordre  $N$  : conversion en représentation d'état, puis utilisation des équations discrètes EPV donnant la sortie  $y$  en fonction de l'entrée  $u$  et des 4 matrices et vecteurs d'état  $A, B, C$  et  $D$  déduits de la fonction de transfert (4) et (5).

La fréquence de reconstruction  $F_R$  est supérieure ou égale au double de la fréquence de coupure  $f_0$ , soit  $F_R \geq 2f_0$ . Selon l'équation (2), nous prenons  $F_R = 2\pi f_0$ .

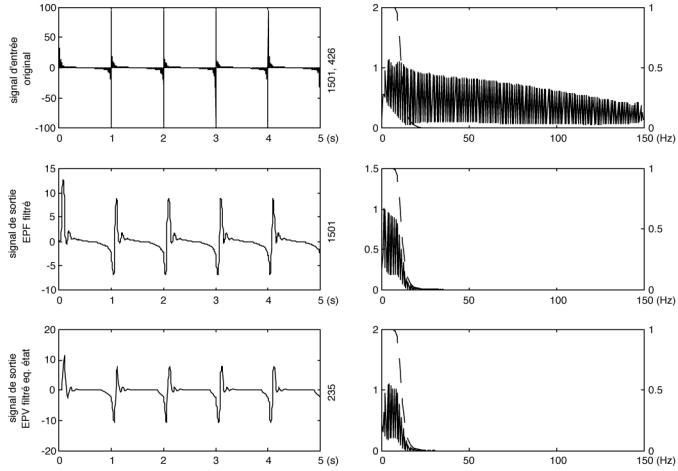


Figure 10. – Filtrage passe-bas d’ordre 6 de type Butterworth,  $f_0 = 10$  Hz.

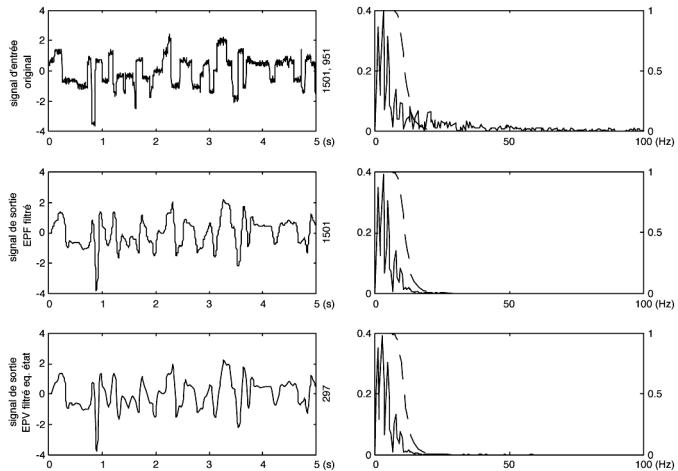


Figure 11. – Filtrage passe-bas d’ordre 6 de type Butterworth,  $f_0 = 10$  Hz.

La figure 10 montre les signaux de sortie issus du filtrage passe-bas de type Butterworth d’ordre 6 du premier signal de synthèse (signal résultant de la somme de signaux sinusoïdaux), en EPF et en EPV, et la figure 11 montre les signaux de ce même filtrage sur le signal télégraphique. Nous remarquons, dans les deux cas, l’élimination des composantes fréquentielles supérieures à la fréquence de coupure  $f_0$  et la bonne conservation des autres composantes fréquentielles. Dans le domaine temporel, les allures des signaux EPF filtré et EPV filtré par équations d’état sont très semblables.

L’application du critère de comparaison des spectres entre celui du signal EPF filtré et celui du signal EPV filtré par équations d’état, donne  $\Phi = 3,64\%$  dans le cas du signal résultant de la somme de signaux sinusoïdaux, et  $\Phi = 0,05\%$  dans le cas du signal télégraphique.

### 5.2.2. filtre passe-bande de Butterworth d’ordre $N$

On obtient la fonction de transfert d’un filtre passe-bande de type Butterworth d’ordre  $N$ , de fréquence de coupure  $f_0$  et de bande passante  $B$ , à partir de la fonction de transfert d’un filtre passe-bas de type Butterworth d’ordre  $N$  et de fréquence de coupure  $f_0$ , dans laquelle on substitue le rapport entre l’opérateur de Laplace  $s$  et la pulsation de coupure  $2\pi f_0$ , soit  $\frac{s}{2\pi f_0}$ , à  $\frac{1}{B_N} \left( \frac{s}{2\pi f_0} + \frac{2\pi f_0}{s} \right)$ , où  $B_N$  est la bande passante normalisée  $B_N = \frac{f_H - f_B}{f_0}$ , la fréquence de coupure  $f_0$  devenant la fréquence centrale et valant  $f_0 = \sqrt{f_H f_B}$ . La bande passante est  $B = f_H - f_B$ ,  $f_H$  et  $f_B$  sont respectivement les fréquences de coupure haute et basse à  $-3$  dB.

$$\text{À l'inverse, } f_B = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4f_0^2}}{2}$$

$$\text{et } f_H = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4f_0^2}}{2}.$$

La figure 12 montre les signaux d’entrée et de sortie résultant du filtrage passe-bande de type Butterworth d’ordre 3 du premier signal de synthèse, en EPF et en EPV, tandis que la figure 13 montre les signaux issus du même filtrage sur le signal télégraphique. Nous remarquons que les composantes spectrales à l’extérieur de la bande passante sont éliminées et que les deux types de filtrage EPF et EPV sont très semblables.

De manière analogue, le critère de comparaison des spectres donne  $\Phi = 2,83\%$  dans le cas de la somme de signaux sinusoïdaux, et  $\Phi = 0,45\%$  dans le cas du signal télégraphique, montrant une bonne adéquation entre le filtrage EPF et le filtrage EPV.

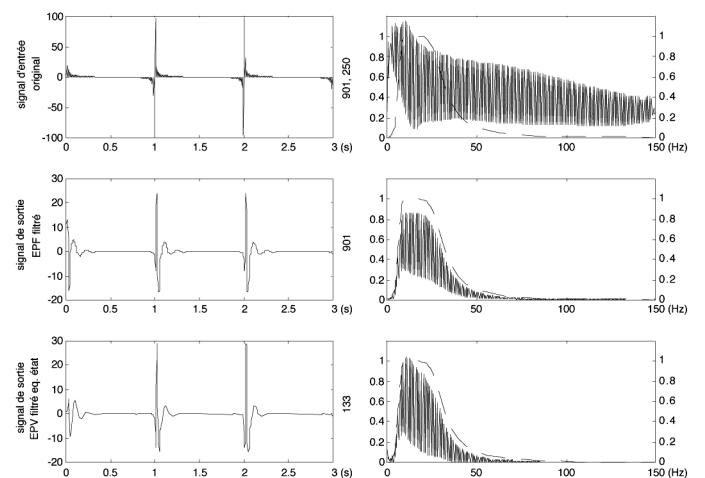


Figure 12. – Filtrage passe-bande d’ordre 3 de type Butterworth,  $f_0 = 14$  Hz,  $B = 22$  Hz.

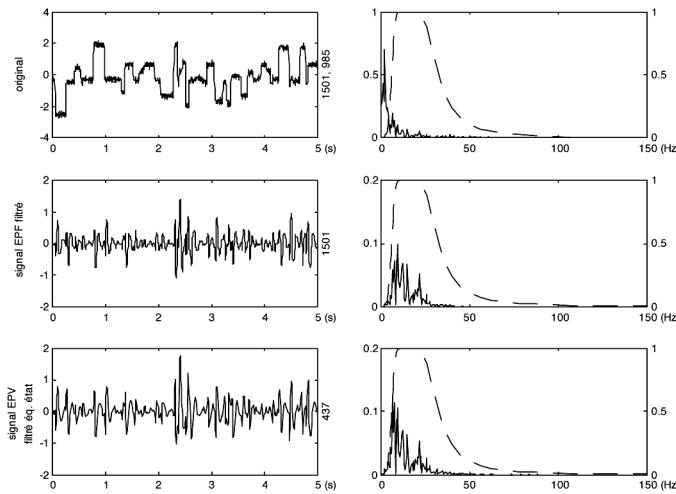


Figure 13. – Filtrage passe-bande d’ordre 3 de type Butterworth,  $f_0 = 14$  Hz,  $B = 22$  Hz.

### 5.3. réalisation d’autres types de filtres

Nous avons vu, dans les paragraphes précédents, les fonctions de transfert des filtres classiques se décomposant en produits de filtres du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>ème</sup> ordre ainsi que les fonctions de transfert des filtres de type Butterworth.

Dans tous les cas, nous avons pu, à partir de la fonction de transfert, réaliser le filtre numérique échantillonné à pas variable équivalent en passant par une représentation d’état.

Il existe d’autres types de filtres analogiques tels que les filtres de Legendre, Bessel, Tchebyscheff et Cauer dont les coefficients polynomiaux des fonctions de transfert sont connus [Labarrere 1982]. Nous ne développons pas ici les expressions de leurs fonctions de transfert respectives ; on imagine aisément que l’on peut procéder de la même manière à partir de la fonction de transfert continue pour obtenir le filtre numérique équivalent échantillonné à pas variable.

## 6. conclusion et perspectives

Nous avons montré comment élaborer des filtres passe-bas et passe-bande d’ordre  $N$  sur des signaux échantillonnés à pas variable. Des essais ont été réalisés avec des filtres classiques et de type Butterworth. Dans certains cas, la reconstruction d’échantillons intermédiaires s’avère utile voire nécessaire afin de suivre fidèlement la réponse du filtre, et le ré-échantillonnage permet d’optimiser le nombre d’échantillons à conserver pour représenter le signal filtré. La comparaison entre filtrage EPF et filtrage EPV donne de bons résultats, sans perdre notamment d’informations et en travaillant avec un nombre réduit d’échantillons. Les signaux obtenus par filtrage à pas variable et

ceux obtenus par filtrage à pas fixe sont très semblables que ce soit du point de vue temporel comme du point de vue fréquentiel. Des filtres passe-bas et passe-bande, classiques ou de type Butterworth, peuvent donc s’appliquer à des signaux échantillonnés à pas variable.

Enfin, nous remarquons qu’il est possible de filtrer un signal échantillonné à pas variable sans avoir recours à une reconstruction totale d’un signal échantillonné à pas fixe. Néanmoins, les calculs à entreprendre pour un filtre EPV sont plus complexes comparés aux calculs liés au filtre numérique classique équivalent, avec des pas d’échantillonnage fixes. Cette complexité se ressent dans le temps de calcul. Celui-ci est légèrement plus long pour un filtre EPV que pour un filtre EPF, selon la fonction de transfert utilisée et le taux de compression du signal d’entrée. Ce temps de calcul est non seulement dû aux calculs matriciels dans la représentation d’état, mais aussi à la reconstruction de certains instants d’échantillonnage intermédiaires, nécessaire au bon suivi de la sortie du filtre. Il n’est peut-être pas nécessaire de reconstruire en permanence au pas  $T_R$ . C’est pourquoi nous suggérons, en perspective, une amélioration à apporter en prédisant l’instant de reconstruction d’un échantillon à partir des fluctuations du signal d’entrée EPV, du signal de sortie EPV, et de la fonction de transfert du filtre ; tout ceci en satisfaisant le ré-échantillonnage à pas variable du signal de sortie. Un autre développement envisagé concerne l’analyse, en général, des systèmes de type EPV. L’étude des modes de représentation est envisagée, selon que l’on considère des systèmes à entrée et réponse impulsionale EPV dont les instants d’échantillonnage sont multiples ou non d’un pas d’échantillonnage. De façon générale, il s’agit donc d’étudier la convolution de deux signaux discrets dont les instants d’échantillonnage sont quelconques. Inversement, l’identification de la fonction de transfert d’un système à partir de ses entrées et sorties connues sous forme EPV fait partie de nos objectifs.

## BIBLIOGRAPHIE

- [Adorf 1995] H.M. Adorf, « Interpolation of Irregularly Sampled Data Series – A Survey », *ASP Conference Series*, vol. 77, 1995.
- [Bensaoud 1994] O. Bensaoud, J. Oksman , « Reconstruction en temps réel de signaux à échantillonnage non périodique », *Traitemet du Signal*, vol. 11, fasc. 3, 1994, p. 283-293.
- [Borne 1990] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, *et al.*, « Commande et optimisation des processus », *Méthodes et techniques de l’ingénieur*, 1990, Editions Technip 27 rue Ginoux, 75737 Paris Cedex 15, ISBN 2-7108-0599-5.
- [Deluzurieux 1990] A. Deluzurieux, M. Rami, « Cours d’électronique analogique, Tome 1 : étude temporelle et fréquentielle des signaux et systèmes, Cours d’électronique analogique, Tome 2 : analyse fréquentielle des signaux et des systèmes, analyse de Laplace », *BTS, IUT, Maîtrise EEA, Ecoles d’ingénieurs*, Editions Eyrolles, 61 boulevard Saint Germain, 75005 PARIS, 1990.
- [Dutt 1993] A. Dutt, V. Rokhlin, « Fast Fourier transform for nonequispaced data », *SIAM Journal on Scientific Computing*, Nov. 1993, vol. 14, fasc. 6, p. 1368-1393.

- [Feichtinger 1990] H.G. Feichtinger, K. Gröchenig, M. Hermann, « Iterative methods in irregular sampling theory : numerical results, Aachener Symposium für Signalthorie », *ASST 1990*, Aachen, Informatik Fachber, 1990, p. 160-166.
- [Feichtinger 1991] H.G. Feichtinger, C. Cenker, H. Steier, « Fast iterative and non-iterative reconstruction methods in irregular sampling », *Conf. ICASSP'91, Toronto, May 1991*, p. 1773-1776.
- [Feichtinger 1992a] H.G. Feichtinger, T. Strohmer, « IRSATOL – Irregular sampling of band-limited signals toolbox », In K. Dette, D. Haupt, C. Polze, editors, *Conf. Computers for teaching*, Berlin, 1992, p. 277-284.
- [Feichtinger 1992b] H.G. Feichtinger, K. Gröchenig, « Irregular sampling theorems and series expansions of band-limited functions », *J. Math. Anal. Appl.*, 1992, vol. 167, p. 530-556.
- [Feichtinger 1992c] H.G. Feichtinger, K. Gröchenig, « Error analysis in regular and irregular sampling theory », *Applicable analysis*, 1992, vol. 50, p. 167-189.
- [Fontaine 1998] L. Fontaine, Y. Granjon, J. Ragot, « Filtrage passe-bas du premier ordre de l'électrocardiogramme échantillonné à pas variable », *9ème Forum de Jeunes Chercheurs en Génie Biologique et Médical*, Brest 14-15 mai 1998, p. 46-47, 1998.
- [Fontaine 1999] L. Fontaine, « Traitement des signaux à échantillonnage irrégulier ; application au suivi temporel de paramètres cardiaques », *thèse de l'Institut National Polytechnique de Lorraine* soutenue publiquement le 30 novembre 1999.
- [Gardenhire 1965a] L.W. Gardenhire, « Data compression for biomedical telemetry », *Biomedical telemetry*, C.A. Caceres, ed. New York : academic, chapter 11, 1965.
- [Gardenhire 1965b] L.W. Gardenhire, « Redundancy reduction – the key to adaptive telemetry, Biomedical telemetry – Data compression for biomedical telemetry » – *Proceedings of the National telemetry conference*, CA Caceres, ed. New York : academic, chapter 11, 1965, p. 1-16.
- [Jones 1962] G.H. Jones, « Spectral analysis with regularly missed observations », *Ann. Math. Statist.*, vol. 3, p. 455-461, 1962.
- [Jones 1972] R.H. Jones, « Spectrum estimation with missing observations », *Ann. Instit. Statist. Math.*, vol. 23, p. 387-398, 1972.
- [Kulkarni 1997] P.K. Kulkarni, K. Vinod, H.K. Verma, « Direct data compression techniques for ECG signals : effect of sampling frequency on performances », *International Journal of Systems Science*, vol. 28, fasc. 3, 1997, p. 217-228.
- [Kunt 1984] M. Kunt, « Traitement numérique des signaux », *ISBN Bordas 2-04-011588-9*, 1984.
- [Manœuvre 1994] D. Manœuvre, L. Muller, Y. Granjon, E. Yvroud, « Study of a method of optimal sampling for biomedical signals », *Abstract of the World Congress on Medical Physics an Biomedical Engineering*, 21-26 August 1994, Rio de Janeiro, Brazil, Physics in Medicine and Biology, 1994, vol 39a, p. 918.
- [Manœuvre 1995] D. Manœuvre, M. Tasler, L. Muller, Y. Granjon, « Optimization of memory space for long time data collects by adaptive sampling : application to a new strains sensor for hip join », *21<sup>st</sup> Proceedings of the 1995 IEEE Annual Northeast Bioengineering Conference*, May 22 - 23, 1995, pp 53-54.
- [Marvasti 1984] F. MARVASTI, "Spectrum of nonuniform samples", *Electron. Lett.*, 1984, vol. 20, N°. 21, p. 896-897
- [Marvasti 1986] F. Marvasti, « Signal recovery from nonuniform samples and spectral analysis of random samples », *IEEE Proceedings on ICASSP*, Tokyo, Apr. 1986, p. 1649-1652.
- [Marvasti 1989] F. Marvasti, « An iterative method to compensate for the interpolation distortion », *IEEE Trans. ASSP 37/10*, 1989, p. 1617-1621.
- [Marvasti 1996] F. Marvasti, « Nonuniform sampling theorems for bandpass signals at or below the Nyquist density », *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 44, N°. 3, March 1996, p. 572-576.
- [Sankur 1973] B. Sankur, L.A. Gerhardt, « Reconstruction of signals from non-uniform samples », *IEEE Int. Conf. Commun., Conf. Rec.*, vol. 9.1, 1973, p. 15.13-15.18.
- [Sateh 1990] Sateh M.S. Jalaleddine et al., « ECG data compression techniques. A unified approach », *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol 37, n°4, p. 329-343, 1990.
- [Sauer 1989] K.D. Sauer, J.P. Allebach, « Iterative reconstruction of band-limited images from nonuniformly spaced samples », *IEEE Trans. ASSP 37/10*, 1989, p. 1617-1621.
- [Saxena 1997] S.C. Saxena, A. Sharma, S.C. Chaudhary, « Data compression and feature extraction of ECG signals », *International Journal of Systems Science*, vol. 28, fasc. 5, p. 483-498, 1997.
- [Unser 2000] M. Unser, « Sampling – 50 Years After Shannon », *Proceedings of the IEEE*, vol. 88, Issue 4, April 2000, p. 569-587.
- [Wiley 1978] R.G. Wiley, « Recovery of band-limited signals form unequally spaced samples », *IEEE Trans. On Comm.*, vol. COM-26/1, 1978, p. 135-138.

*Manuscrit reçu le 16 octobre 2000*

## LES AUTEURS

### Ludovic FONTAINE



Ludovic Fontaine est diplômé de l'École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique de Nancy (ENSEM) en 1994. Il est titulaire d'un DEA de l'Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL) en Automatique et Traitement Numérique du Signal en 1995, et d'un doctorat de l'INPL en Traitement du Signal en 1999. Ses travaux de recherche, effectués au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN), portent sur le traitement numérique des signaux à échantillonnage irrégulier.

### José RAGOT



José Ragot est Professeur des Universités à l'Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL) où il enseigne la modélisation, le diagnostic et la conduite des systèmes. Ses travaux de recherche, effectués au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN), sont orientés vers la modélisation et la surveillance de fonctionnement des processus technologiques ou environnementaux.