Obliczenia naukowe
Lista3

Stanisław Woźniak

1 Zadanie 1.

1.1 Metoda Bisekcji

1.2 Opis

Jedna z metod znajdowania miejsca zerowego funkcji ciągłej na podanym przedziale.
Metoda polega na połowieniu danego przedziału z każdą iteracją do momentu znalezienia szukanego x z dokładnością do δ lub do momentu gdy $|f(x)| < \epsilon$ Z każdą iteracją jest definiowany nowy przedział. Jeden koniec ma w połowie poprzedniego przedziału. Natomiast drugi jest wybierami z dwóch poprzednich z warunkiem, że znak wartości funkcji na krańcach przedziału jest przeciwny.
Warunki początkowe:

1. Badana funkcja posiada miejsce zerowe.
2. Badan funkcja jest ciągła na przedziale [a,b]
3. Na krańcach przedziału wartość funkcji musi mieć przeciwne znaki.

1.3 Pseudokod

Algorithm 1: Metoda Bisekcji

Metoda Bisekcji $(f, a, b, \delta, \epsilon)$;
Input : f - funkcja, [a,b] - przedział, δ - dokładność x_0, ϵ - dokładność $f(x_0)$
Output: k, x_0, $f(x_0)$
$x_0 \leftarrow 0; k \leftarrow 0;$
while $|a - b| > \delta$ **do**
    $k++;$
    if $f(a) * f(b) < 0$ **then**
        $x_0 \leftarrow a + \frac{b-a}{2};$
    else
        return "Error: Funkcja nie zmienia znaku w przedziale";
    end
    if $|f(x_0)| < \epsilon$ **then**
        return $(k, x_0, f(x_0));$
    end
    if $f(x_0) * f(a) < 0$ **then**
        $b \leftarrow x_0;$
    else if $f(x_0) * f(b) < 0$ **then**
        $a \leftarrow x_0;$
    end
end
return $(k, x_0, f(x_0));$

2 Zadanie 2.

2.1 Metoda Newtona (stycznych)

2.2 Opis

Jest to algorytm iteracyjny przybliżajacy pierwiastek funkcji. Metoda polega na wyprowadzaniu stycznych z wybranego punktu $f(x_0)$. Punkt przecięcia stworzonej stycznej z osią OX jest szukanym miejsciem zerowym. Jeśli się okarze, ze przybliżenie jest zbyt mało dokładne czynność jest powtarzana gdzie do x_0 przypisuje się wyznaczone poprzednio miejsce zerowy.

2.3 Pseudokod

Algorithm 2: Metoda Newtona

Metoda Bisekcji $(f, f', x_0, \delta, \epsilon, maxit)$;
Input : f - funkcja, f' - pochodna funkcji, x_0 - przybliżenie początkowe, δ - dokładność x_0, ϵ - dokładność $f(x_0)$, maxit - maksymalna liczba iteracji
Output: k, x_0, $f(x_0)$
$k \leftarrow 0; x_1 \leftarrow x_0 - 1; v \leftarrow f(x_0)$;
while $|x_1 - x_0| > \delta$ **do**
    $k++$;
    if $k > maxit$ **then**
        return "Error: Przekroczenie liczby iteracji";
    end
    if $|f'(x_0)| < \epsilon$ **then**
        return "Error: Pochodna bliska zeru";
    end
    $x_1 \leftarrow x_0; x_0 \leftarrow x_0 - \frac{v}{f'(x_0)}; v \leftarrow f(x_0)$;
    if $|v| < \epsilon$ **then**
        return (k, x_0, v);
    end
end
return (k, x_0, v);

3 Zadanie 3.

3.1 Metoda Siecznych

3.2 Opis

Metoda wyznaczania przybliżenia miejsca zerowego funkcji. W tym algorytmi przyjmuje się, że podana funkcja jest ciągła, oraz na dostatecznie małym odcinku w przybliżeniu zmienia się w sposób liniowy. To założenie pozwala nam zastąpić dany fragment wykresu funkcji sieczną. Punkt przecięcia siecznej z osią OX jest szukanym przybliżeniem miejsca zerowego. Jeśli przybliżenie nie jest wystarczająco dokładne, czynność zostaje powtarzana przyjmując punkt wyliczony w poprzedniej iteracji jako koniec siecznej.

Warunek powodzenia:

$$\bigwedge_{n} (f(x_n) f(x_{n-1}) < 0)$$

3.3 Pseudokod

Algorithm 3: Metoda Siecznych

Metoda Siecznych $(f, x_0, x_1, \delta, \epsilon, maxit)$;
Input : f - funkcja, x_0, x_1 - przybliżenia początkowe, δ - dokładność x_0, ϵ - dokładność $f(x_0)$, maxit - maksymalna liczba iteracji
Output: k, x_0, $f(x_0)$
$fa \leftarrow f(x_0); fb \leftarrow f(x_1); k \leftarrow 0;$
while $|x_1 - x_0| > \delta$ **do**
  $k++;$
  if $k > maxit$ **then**
    return "Error: Przekroczenie liczby iteracji";
  end
  if $|fa| > |fb|$ **then**
    $x_0 \leftrightarrow x_1; fa \leftrightarrow fb;$
  end
  $s \leftarrow \frac{(x_0 - x_1)}{fb - fa};$
  $x_1 \leftarrow x_0; fb \leftarrow fa;$
  $x_0 \leftarrow x_0 - fa * s; fa \leftarrow f(x_0);$
  if $|fa| < \epsilon$ **then**
    return (k, x_0, fa);
  end
end
return (k, x_0, fa);

4 Zadanie 4.

4.1 Problem

Problem polegał na wyznaczeniu pierwiastka równania przy użyciu zaimplementowanych metod w poprzednich zadaniach.

Równanie:

$$\sin x - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$$

Dla każdej z metod zostały użyte te same dokładności δ oraz ϵ równe $\frac{1}{2} * 10^{-5}$.
Jednakże początkowe przybliżenia oraz przedziały dla każdej z nich zostały zdefiniowane inne.

1. Metoda bisekcji - przedział początkowy $[1.5, 2]$
2. Metoda Newtona (Metoda stycznych) - przybliżenie początkowe $x_0 = 1.5$
3. Metoda siecznych - przybliżenia poczatkowe $x_0 = 1$, $x_1 = 2$

4.2 Wyniki

Na potrzeby rozwiązania równania danymi metodami lewa strona równania została uznana za funkcję f
Oznaczenia:
r - znalezione miejsce zerowe z dokładnością do δ
v - wartość funkcji w punkcie r z dokładnością do ϵ
it - liczba wykonanych iteracji potrzebnych do znalezienia pierwiastka
err - powiadomienie o błędzie

Prawidłowy wynik: r = 0 , v = 0.

metoda	r	v	it	err
bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	Brak błędu
stycznych	1.933749984135789	4.995107540040067e-6	13	Brak błędu
siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	Brak błędu

4.3 Wnioski

5 Zadanie 5.

5.1 Problem

Zadanym problemem było znaleźć punkty przecięcia się wykresów dwóch funkcji.

1. $f(x) = 3x$
2. $g(x) = e^x$

Dokładność obliczeniowe wynosiły: $\delta = \epsilon = 10^{-4}$
Aby znaleźć odpowiednie punkty przecięcia należało stworzyć funkcję pomocniczą h.

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Ten sposób zapewniał znalezienie punkty przeciecia wykresów funkcji f oraz g metodą znalezienia miejsc zerowych funkcji h.
Do znalezienia rozwiązania należało użyć metodę bisekcji.

5.2 Wyniki

[a,b] - przedział początkowy
r - znalezione miejsce zerowe z dokładnością do δ
v - wartość funkcji w punkcie r z dokładnością do ϵ
it - liczba wykonanych iteracji potrzebnych do znalezienia pierwiastka
err - powiadomienie o błędzie

Prawidłowy wynik (przybliżony): $r_1 = 0.619061$, $r_2 = 1.51213$.

[a, b]	r	v	it	err
$[0.5, 0.7]$	0.619140625	9.066320343276146e-5	9	Brak błędu
$[-1, 1]$	0.619140625	9.066320343276146e-5	10	Brak błędu
$[0.0, 1.5]$	0.61907958984375	2.091677592419572e-5	13	Brak błędu
$[1, 2]$	1.5120849609375	7.618578602741621e-5	13	Brak błędu
$[1.5, 1.7]$	1.512109375	3.868007140983565e-5	9	Brak błędu
$[-1, 2]$	-	-	-	Funkcja nie zmienia znaku na przedziale [a,b]
$[-10, 0]$	-	-	-	Funkcja nie zmienia znaku na przedziale [a,b]
$[1, 1.5]$	-	-	-	Funkcja nie zmienia znaku na przedziale [a,b]
$[2, 10]$	-	-	-	Funkcja nie zmienia znaku na przedziale [a,b]

5.3 Wnioski

6 Zadanie 6.

6.1 Problem

Należało znaleźć miejsca zerowe trzema metodami (bisekcji, stycznych oraz siecznych) dwóch funkcji:

1. $f(x) = e^{1-x} - 1$ (prawidłowe rozwiązanie: x = 1)
2. $g(x) = xe^{-x}$ (prawidłowe rozwiązanie: x = 0)

Obliczenia należało wykonać z dokłądnością $\delta = \epsilon = 10^{-5}$
Także zadaniem było dobrać odpowiedni przedział i przybliżenia początkowe.

6.2 Wyniki

r - znalezione miejsce zerowe z dokładnością do δ
v - wartość funkcji w punkcie r z dokładnością do ϵ
it - liczba wykonanych iteracji potrzebnych do znalezienia pierwiastka
err - powiadomienie o błędzie

Metoda bisekcji					
funkcja	[a,b]	r	v	it	err
f	$[0.5, 2]$	0.9999923706054688	7.629423635080457e-6	16	Brak błędu
f	$[-0.1, 2]$	1.0000038146972656	-3.814689989667386e-6	17	Brak błędu
f	$[0.0, 2]$	1.0	0.0	1	Brak błędu
f	$[-100, 100]$	0.9999990463256836	9.536747711536009e-7	23	Brak błędu
f	$[0.99999, 20]$	1.0000081198215485	-8.119788582838794e-6	20	Brak błędu
g	$[-0.5, 1]$	-7.62939453125e-6	-7.629452739132958e-6	16	Brak błędu
g	$[-0.5, 0.5]$	0.0	0.0	1	Brak błędu
g	$[-0.1, 4]$	3.8146972656107834e-6	3.8146827137233106e-6	17	Brak błędu
g	$[-100, 101]$	4.410743713378906e-6	4.410724258761706e-6	23	Brak błędu

Metoda Newtona					
funkcja	x0	r	v	it	err
f	4	0.9999999995278234	4.721765201054495e-10	21	Brak błędu
f	2	0.9999999810061002	1.8993900008368314e-8	5	Brak błędu
f	11	NaN	NaN	2	Wyjście poza zakres
f	101	NaN	NaN	1	Pochodna bliska zeru
g	-1	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5	Brak błędu
g	1	NaN	NaN	1	Pochodna bliska zeru
g	2	14.398662765680003	8.036415344217211e-6	10	Brak błędu
g	11	14.272123938290518	9.040322779745372e-6	3	Brak błędu
g	101	NaN	NaN	1	Pochodna bliska zeru

Metoda siecznych						
funkcja	x1	x2	r	v	it	err
f	0.5	2	1.000000014307199	-1.4307198870078253e-8	6	Brak błędu
f	-0.1	2	1.0000032272298756	-3.227224668056472e-6	6	Brak błędu
f	0	2	1.0000017597132702	-1.7597117218937086e-6	6	Brak błędu
f	-100	100	100.0	-1.0	1	Brak błędu
f	0.99999	20	1.0000000009000212	-9.000211687038018e-10	2	Brak błędu
g	-1	0.5	-1.1737426154042664e-6	-1.1737439930768023e-6	7	Brak błędu
g	-0.5	0.5	5.38073548562323e-6	5.380706533386756e-6	6	Brak błędu
g	-0.1	4	14.32970132001514	8.568936563065177e-6	14	Brak błędu
g	-100	100	100.0	3.7200759760208363e-42	1	Brak błędu

6.3 Wnioski