

Obliczenia naukowe

Lista3

Stanisław Woźniak

1 Zadanie 1.

1.1 Metoda Bisekcji

1.2 Opis

Jedna z metod znajdowania miejsca zerowego funkcji ciągłej na podanym przedziale.

Metoda polega na połowieniu danego przedziału z każdą iteracją do momentu znalezienia szukanego x z dokładnością do δ lub do momentu gdy $|f(x)| < \epsilon$. Z każdą iteracją jest definiowany nowy przedział. Jeden koniec ma w połowie poprzedniego przedziału. Natomiast drugi jest wybierany z dwóch poprzednich z warunkiem, że znak wartości funkcji na krańcach przedziału jest przeciwny.

Warunki początkowe:

1. Badana funkcja posiada miejsce zerowe.
2. Badana funkcja jest ciągła na przedziale $[a, b]$
3. Na krańcach przedziału wartość funkcji musi mieć przeciwne znaki.

1.3 Pseudokod

Algorithm 1: Metoda Bisekcji

```
1 Metoda Bisekcji ( $f, a, b, \delta, \epsilon$ );  
   Input :  $f$  - funkcja,  $[a, b]$  - przedział,  $\delta$  - dokładność  $x_0$ ,  $\epsilon$  - dokładność  $f(x_0)$   
   Output:  $k, x_0, f(x_0)$   
2  $x_0 \leftarrow 0; k \leftarrow 0$ ;  
3 while  $|a - b| > \delta$  do  
4    $k++$ ;  
5   if  $f(a) * f(b) < 0$  then  
6      $x_0 \leftarrow a + \frac{b-a}{2}$ ;  
7   else  
8     return "Error: Funkcja nie zmienia znaku w przedziale";  
9   end  
10  if  $|f(x_0)| < \epsilon$  then  
11    return ( $k, x_0, f(x_0)$ );  
12  end  
13  if  $f(x_0) * f(a) < 0$  then  
14     $b \leftarrow x_0$ ;  
15  else if  $f(x_0) * f(b) < 0$  then  
16     $a \leftarrow x_0$ ;  
17  end  
18 end  
19 return ( $k, x_0, f(x_0)$ );
```

2 Zadanie 2.

2.1 Metoda Newtona (stycznych)

2.2 Opis

Jest to algorytm iteracyjny przybliżający pierwiastek funkcji. Metoda polega na wyprowadzaniu stycznych z wybranego punktu $f(x_0)$. Punkt przecięcia stworzonej stycznej z osią OX jest szukany miejscem zerowym. Jeśli się okarze, że przybliżenie jest zbyt mało dokładne czynność jest powtarzana gdzie do x_0 przypisuje się wyznaczone poprzednio miejsce zerowe.

2.3 Pseudokod

Algorithm 2: Metoda Newtona

```
1 Metoda Bisekcji ( $f, f', x_0, \delta, \epsilon, maxit$ );  
   Input :  $f$  - funkcja,  $f'$  - pochodna funkcji,  $x_0$  - przybliżenie początkowe,  $\delta$  - dokładność  $x_0$ ,  $\epsilon$  -  
           dokładność  $f(x_0)$ ,  $maxit$  - maksymalna liczba iteracji  
   Output:  $k, x_0, f(x_0)$   
2  $k \leftarrow 0; x_1 \leftarrow x_0 - 1; v \leftarrow f(x_0);$   
3 while  $|x_1 - x_0| > \delta$  do  
4    $k++;$   
5   if  $k > maxit$  then  
6      $\text{return "Error: Przekroczenie liczby iteracji";}$   
7   end  
8   if  $|f'(x_0)| < \epsilon$  then  
9      $\text{return "Error: Pochodna bliska zeru";}$   
10  end  
11   $x_1 \leftarrow x_0; x_0 \leftarrow x_0 - \frac{v}{f'(x_0)}; v \leftarrow f(x_0);$   
12  if  $|v| < \epsilon$  then  
13     $\text{return } (k, x_0, v);$   
14  end  
15 end  
16  $\text{return } (k, x_0, v);$ 
```

3 Zadanie 3.

3.1 Metoda Siecznych

3.2 Opis

Metoda wyznaczania przybliżenia miejsca zerowego funkcji. W tym algorytmie przyjmuje się, że podana funkcja jest ciągła, oraz na dostatecznie małym odcinku w przybliżeniu zmienia się w sposób liniowy. To założenie pozwala nam zastąpić dany fragment wykresu funkcji sieczną. Punkt przecięcia siecznej z osią OX jest szukany przybliżeniem miejsca zerowego. Jeśli przybliżenie nie jest wystarczająco dokładne, czynność zostaje powtarzana przyjmując punkt wyliczony w poprzedniej iteracji jako koniec siecznej.

Warunek powodzenia:

$$\bigwedge_n (f(x_n)f(x_{n-1}) < 0)$$

3.3 Pseudokod

Algorithm 3: Metoda Siecznych

```
1 Metoda Siecznych ( $f, x_0, x_1, \delta, \epsilon, maxit$ );  
   Input :  $f$  - funkcja,  $x_0, x_1$  - przybliżenia początkowe,  $\delta$  - dokładność  $x_0$ ,  $\epsilon$  - dokładność  $f(x_0)$ ,  
            $maxit$  - maksymalna liczba iteracji  
   Output:  $k, x_0, f(x_0)$   
2  $fa \leftarrow f(x_0); fb \leftarrow f(x_1); k \leftarrow 0$ ;  
3 while  $|x_1 - x_0| > \delta$  do  
4    $k++$ ;  
5   if  $k > maxit$  then  
6     return "Error: Przekroczenie liczby iteracji";  
7   end  
8   if  $|fa| > |fb|$  then  
9      $x_0 \leftrightarrow x_1; fa \leftrightarrow fb$ ;  
10  end  
11   $s \leftarrow \frac{(x_0 - x_1)}{fb - fa}$ ;  
12   $x_1 \leftarrow x_0; fb \leftarrow fa$ ;  
13   $x_0 \leftarrow x_0 - fa * s; fa \leftarrow f(x_0)$ ;  
14  if  $|fa| < \epsilon$  then  
15    return ( $k, x_0, fa$ );  
16  end  
17 end  
18 return ( $k, x_0, fa$ );
```

4 Zadanie 4.

4.1 Problem

Problem polegał na wyznaczeniu pierwiastka równania przy użyciu zaimplementowanych metod w poprzednich zadaniach.

Równanie:

$$\sin x - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 0$$

Dla każdej z metod zostały użyte te same dokładności δ oraz ϵ równe $\frac{1}{2} * 10^{-5}$. Jednakże początkowe przybliżenia oraz przedziały dla każdej z nich zostały zdefiniowane inne.

1. Metoda bisekcji - przedział początkowy $[1.5, 2]$
2. Metoda Newtona (Metoda stycznych) - przybliżenie początkowe $x_0 = 1.5$
3. Metoda siecznych - przybliżenia początkowe $x_0 = 1, x_1 = 2$

4.2 Wyniki

Na potrzeby rozwiązywania równania danymi metodami lewa strona równania została uznana za funkcję f
Oznaczenia:

r - znalezione miejsce zerowe z dokładnością do δ

v - wartość funkcji w punkcie r z dokładnością do ϵ

it - liczba wykonanych iteracji potrzebnych do znalezienia pierwiastka

err - powiadomienie o błędzie

Prawidłowy wynik: $r = 0, v = 0$.

metoda	r	v	it	err
bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	Brak błędu
stycznych	1.933749984135789	4.995107540040067e-6	13	Brak błędu
siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	Brak błędu

4.3 Wnioski

5 Zadanie 5.

5.1 Problem

Zadaniem problemem było znaleźć punkty przecięcia się wykresów dwóch funkcji.

1. $f(x) = 3x$
2. $g(x) = e^x$

Dokładność obliczeniowa wynosiła: $\delta = \epsilon = 10^{-4}$

Aby znaleźć odpowiednie punkty przecięcia należało stworzyć funkcję pomocniczą h .

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Ten sposób zapewniał znalezienie punkty przecięcia wykresów funkcji f oraz g metodą znalezienia miejsc zerowych funkcji h .

Do znalezienia rozwiązania należało użyć metodę bisekcji.

5.2 Wyniki

$[a, b]$ - przedział początkowy

r - znalezione miejsce zerowe z dokładnością do δ

v - wartość funkcji w punkcie r z dokładnością do ϵ

it - liczba wykonanych iteracji potrzebnych do znalezienia pierwiastka

err - powiadomienie o błędzie

Prawidłowy wynik (przybliżony): $r_1 = 0.619061$, $r_2 = 1.51213$.

$[a, b]$	r	v	it	err
$[0.5, 0.7]$	0.619140625	9.066320343276146e-5	9	Brak błędu
$[-1, 1]$	0.619140625	9.066320343276146e-5	10	Brak błędu
$[0.0, 1.5]$	0.61907958984375	2.091677592419572e-5	13	Brak błędu
$[1, 2]$	1.5120849609375	7.618578602741621e-5	13	Brak błędu
$[1.5, 1.7]$	1.512109375	3.868007140983565e-5	9	Brak błędu
$[-1, 2]$	-	-	-	Funkcja nie zmienia znaku na przedziale $[a, b]$
$[-10, 0]$	-	-	-	Funkcja nie zmienia znaku na przedziale $[a, b]$
$[1, 1.5]$	-	-	-	Funkcja nie zmienia znaku na przedziale $[a, b]$
$[2, 10]$	-	-	-	Funkcja nie zmienia znaku na przedziale $[a, b]$

5.3 Wnioski

6 Zadanie 6.

6.1 Problem

Należało znaleźć miejsca zerowe trzema metodami (bisekcji, stycznych oraz siecznych) dwóch funkcji:

1. $f(x) = e^{1-x} - 1$ (prawidłowe rozwiązanie: $x = 1$)
2. $g(x) = xe^{-x}$ (prawidłowe rozwiązanie: $x = 0$)

Obliczenia należało wykonać z dokładnością $\delta = \epsilon = 10^{-5}$

Także zadaniem było dobrać odpowiedni przedział i przybliżenia początkowe.

6.2 Wyniki

r - znalezione miejsce zerowe z dokładnością do δ

v - wartość funkcji w punkcie r z dokładnością do ϵ

it - liczba wykonanych iteracji potrzebnych do znalezienia pierwiastka

err - powiadomienie o błędzie

Metoda bisekcji					
funkcja	[a,b]	r	v	it	err
f	[0.5, 2]	0.9999923706054688	7.629423635080457e-6	16	Brak błędu
f	[-0.1, 2]	1.0000038146972656	-3.814689989667386e-6	17	Brak błędu
f	[0.0, 2]	1.0	0.0	1	Brak błędu
f	[-100, 100]	0.9999990463256836	9.536747711536009e-7	23	Brak błędu
f	[0.99999, 20]	1.0000081198215485	-8.119788582838794e-6	20	Brak błędu
g	[-0.5, 1]	-7.62939453125e-6	-7.629452739132958e-6	16	Brak błędu
g	[-0.5, 0.5]	0.0	0.0	1	Brak błędu
g	[-0.1, 4]	3.8146972656107834e-6	3.8146827137233106e-6	17	Brak błędu
g	[-100, 101]	4.410743713378906e-6	4.410724258761706e-6	23	Brak błędu

Metoda Newtona					
funkcja	x0	r	v	it	err
f	4	0.9999999995278234	4.721765201054495e-10	21	Brak błędu
f	1	0.9999999810061002	1.8993900008368314e-8	5	Brak błędu
f	11	NaN	NaN	2	Wyjście poza zakres
f	101	NaN	NaN	1	Pochodna bliska zeru
g	-1	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5	Brak błędu
g	1	NaN	NaN	1	Pochodna bliska zeru
g	2	14.398662765680003	8.036415344217211e-6	10	Brak błędu
g	11	14.272123938290518	9.040322779745372e-6	3	Brak błędu
g	101	NaN	NaN	1	Pochodna bliska zeru

Metoda siecznych						
funkcja	x1	x2	r	v	it	err
f	0.5	2	1.000000014307199	-1.4307198870078253e-8	6	Brak błędu
f	-0.1	2	1.0000032272298756	-3.227224668056472e-6	6	Brak błędu
f	0	2	1.0000017597132702	-1.7597117218937086e-6	6	Brak błędu
f	-100	100	100.0	-1.0	1	Brak błędu
f	0.99999	20	1.0000000009000212	-9.000211687038018e-10	2	Brak błędu
g	-1	0.5	-1.1737426154042664e-6	-1.1737439930768023e-6	7	Brak błędu
g	-0.5	0.5	5.38073548562323e-6	5.380706533386756e-6	6	Brak błędu
g	-0.1	4	14.32970132001514	8.568936563065177e-6	14	Brak błędu
g	-100	100	100.0	3.7200759760208363e-42	1	Brak błędu

6.3 Wnioski