Obliczenia naukowe
Lista3

Stanisław Woźniak

1 Zadanie 1.

1.1 Metoda Bisekcji

1.2 Opis

Jedna z metod znajdowania miejsca zerowego funkcji ciągłej na podanym przedziale.
Metoda polega na połowieniu danego przedziału z każdą iteracją do momentu znalezienia szukanego x z dokładnością do δ lub do momentu gdy $|f(x)| < \epsilon$ Z każdą iteracją jest definiowany nowy przedział. Jeden koniec ma w połowie poprzedniego przedziału. Natomiast drugi jest wybierami z dwóch poprzednich z warunkiem, że znak wartości funkcji na krańcach przedziału jest przeciwny.
Warunki początkowe:

1. Badana funkcja posiada miejsce zerowe.
2. Badan funkcja jest ciągła na przedziale [a,b]
3. Na krańcach przedziału wartość funkcji musi mieć przeciwne znaki.

1.3 Pseudokod

Algorithm 1: Metoda Bisekcji

Metoda Bisekcji $(f, a, b, \delta, \epsilon)$;
Input : f - funkcja, [a,b] - przedział, δ - dokładność x_0, ϵ - dokładność $f(x_0)$
Output: k, x_0, $f(x_0)$
$x_0 \leftarrow 0; k \leftarrow 0;$
while $|a - b| > \delta$ **do**
  $k++;$
  if $f(a) * f(b) < 0$ **then**
    $x_0 \leftarrow a + \frac{b-a}{2};$
  else
    return "Error: Funkcja nie zmienia znaku w przedziale";
  end
  if $|f(x_0)| < \epsilon$ **then**
    return $(k, x_0, f(x_0))$;
  end
  if $f(x_0) * f(a) < 0$ **then**
    $b \leftarrow x_0;$
  else if $f(x_0) * f(b) < 0$ **then**
    $a \leftarrow x_0;$
  end
end
return $(k, x_0, f(x_0))$;

2 Zadanie 2.

2.1 Metoda Newtona (stycznych)

2.2 Opis

Jest to algorytm iteracyjny przybliżajacy pierwiastek funkcji. Metoda polega na wyprowadzaniu stycznych z wybranego punktu $f(x_0)$. Punkt przecięcia stworzonej stycznej z osią OX jest szukanym miejsciem zerowym. Jeśli się okaże, ze przybliżenie jest zbyt mało dokładne czynność jest powtarzana gdzie do x_0 przypisuje się wyznaczone poprzednio miejsce zerowe.

2.3 Pseudokod

Algorithm 2: Metoda Newtona

Metoda Bisekcji $(f, f', x_0, \delta, \epsilon, maxit)$;
Input : f - funkcja, f' - pochodna funkcji, x_0 - przybliżenie początkowe, δ - dokładność x_0, ϵ - dokładność $f(x_0)$, maxit - maksymalna liczba iteracji
Output: k, x_0, $f(x_0)$
$k \leftarrow 0; x_1 \leftarrow x_0 - 1; v \leftarrow f(x_0)$;
while $|x_1 - x_0| > \delta$ **do**
    $k++$;
    if $k > maxit$ **then**
        return "Error: Przekroczenie liczby iteracji";
    end
    if $|f'(x_0)| < \epsilon$ **then**
        return "Error: Pochodna bliska zeru";
    end
    $x_1 \leftarrow x_0; x_0 \leftarrow x_0 - \frac{v}{f'(x_0)}; v \leftarrow f(x_0)$;
    if $|v| < \epsilon$ **then**
        return (k, x_0, v);
    end
end
return (k, x_0, v);

3 Zadanie 3.

3.1 Metoda Siecznych

3.2 Opis

Metoda wyznaczania przybliżenia miejsca zerowego funkcji. W tym algorytmi przyjmuje się, że podana funkcja jest ciągła, oraz na dostatecznie małym odcinku w przybliżeniu zmienia się w sposób liniowy. To założenie pozwala nam zastąpić dany fragment wykresu funkcji sieczną. Punkt przecięcia siecznej z osią OX jest szukanym przybliżeniem miejsca zerowego. Jeśli przybliżenie nie jest wystarczająco dokładne, czynność zostaje powtarzana przyjmując punkt wyliczony w poprzedniej iteracji jako koniec siecznej.

Warunek powodzenia:

$$\bigwedge_{n>0} (f(x_n) f(x_{n-1}) < 0)$$

3.3 Pseudokod

Algorithm 3: Metoda Siecznych

Metoda Siecznych $(f, x_0, x_1, \delta, \epsilon, maxit)$;
Input : f - funkcja, x_0, x_1 - przybliżenia początkowe, δ - dokładność x_0, ϵ - dokładność $f(x_0)$, maxit - maksymalna liczba iteracji
Output: k, x_0, $f(x_0)$
$fa \leftarrow f(x_0); fb \leftarrow f(x_1); k \leftarrow 0;$
while $|x_1 - x_0| > \delta$ **do**
    $k++;$
    if $k > maxit$ **then**
        return "Error: Przekroczenie liczby iteracji";
    end
    if $|fa| > |fb|$ **then**
        $x_0 \leftrightarrow x_1; fa \leftrightarrow fb;$
    end
    $s \leftarrow \frac{(x_0 - x_1)}{fb - fa};$
    $x_1 \leftarrow x_0; fb \leftarrow fa;$
    $x_0 \leftarrow x_0 - fa * s; fa \leftarrow f(x_0);$
    if $|fa| < \epsilon$ **then**
        return (k, x_0, fa);
    end
end
return (k, x_0, fa);

4 Zadanie 4.

4.1 Problem

Problem polegał na wyznaczeniu pierwiastka równania przy użyciu zaimplementowanych metod w poprzednich zadaniach.

Równanie:

$$\sin x - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$$

Dla każdej z metod zostały użyte te same dokładności δ oraz ϵ równe $\frac{1}{2} * 10^{-5}$.
Jednakże początkowe przybliżenia oraz przedziały dla każdej z nich zostały zdefiniowane inne.

1. Metoda bisekcji - przedział początkowy $[1.5, 2]$
2. Metoda Newtona (Metoda stycznych) - przybliżenie początkowe $x_0 = 1.5$
3. Metoda siecznych - przybliżenia poczatkowe $x_0 = 1$, $x_1 = 2$

4.2 Wyniki

Na potrzeby rozwiązania równania danymi metodami lewa strona równania została uznana za funkcję f
Oznaczenia:
r - znalezione miejsce zerowe z dokładnością do δ
v - wartość funkcji w punkcie r z dokładnością do ϵ
it - liczba wykonanych iteracji potrzebnych do znalezienia pierwiastka
err - powiadomienie o błędzie

Prawidłowy wynik: $r_0 = 0$, $r_1 = 1.93375$, $v_0 = v_1 = 0$.

metoda	r	v	it	err
bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	Brak błędu
stycznych	1.933749984135789	4.995107540040067e-6	13	Brak błędu
siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	Brak błędu

4.3 Wnioski

Analizując wyniki, można zauważyć, że każda z metod podała jeden z dwóch prawidłowych pierwiastków. Metoda bisekcji nie podała drugiego ponieważ w podanym przedziale znajdował się tylko jeden, ale także dlatego, że algorytm działa poprawnie, kiedy w przedziale (początkowym lub stworzonym w czasie działania algorytmu) znajduje się nieparzysta ilość pierwiastków (tzn. wartości funkcji na krańcach przedziału mają różne znaki). Natomiast metoda stycznych znalazła pierwiastek najbliższy w kierunku zbieżności, ponieważ przybliżenie początkowe było ustalone w taki sposób, że metoda Newtona z tego punktu zbiegała do pierwiastka r_1. Metoda siecznych wyznaczyła także to samo miejsce zerowe, ponieważ przybliżenia początkowe zostały tak dobrane, że pomiędzy nimi był tylko jeden punkt zerowy. Jednakże metoda siecznych nie działałaby poprawnie gdyby pomiędzy tymi punktami znalazłby się także drugi pierwiastek, gdyż założeniem poprawności tejmetody jest, że wartości funkcji na podanych przybliżeniach są różnego znaku.

Porównując wartości z tabeli także można zauważyć, że metoda bisekcji do znalezienia pierwiastka potrzebowała najwiecej iteracji. Zachodzi takie zjawisko, ponieważ metoda bisekcji ma zbieżność liniową, natomiast metody Newtona i siecznych mają zbieżność kwadratową.

5 Zadanie 5.

5.1 Problem

Zadanym problemem było znaleźć punkty przecięcia się wykresów dwóch funkcji.

1. $f(x) = 3x$
2. $g(x) = e^x$

Dokładność obliczeniowe wynosiły: $\delta = \epsilon = 10^{-4}$
Aby znaleźć odpowiednie punkty przecięcia należało stworzyć funkcję pomocniczą h.

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

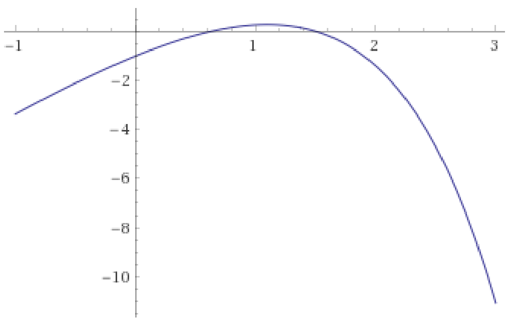
Ten sposób zapewniał znalezienie punkty przeciecia wykresów funkcji f oraz g metodą znalezienia miejsc zerowych funkcji h.
Do znalezienia rozwiązania należało użyć metodę bisekcji.

5.2 Wyniki

[a,b] - przedział początkowy
r - znalezione miejsce zerowe z dokładnością do δ
v - wartość funkcji w punkcie r z dokładnością do ϵ
it - liczba wykonanych iteracji potrzebnych do znalezienia pierwiastka
err - powiadomienie o błędzie

Prawidłowy wynik (przybliżony): $r_1 = 0.619061$, $r_2 = 1.51213$.

Rysunek 1: Funkcja h



[a, b]	r	v	it	err
$[0.5, 0.7]$	0.619140625	9.066320343276146e-5	9	Brak błędu
$[-1, 1]$	0.619140625	9.066320343276146e-5	10	Brak błędu
$[0.0, 1.5]$	0.61907958984375	2.091677592419572e-5	13	Brak błędu
$[1, 2]$	1.5120849609375	7.618578602741621e-5	13	Brak błędu
$[1.5, 1.7]$	1.512109375	3.868007140983565e-5	9	Brak błędu
$[-1, 2]$	-	-	-	Funkcja nie zmienia znaku na przedziale [a,b]
$[-10, 0]$	-	-	-	Funkcja nie zmienia znaku na przedziale [a,b]
$[1, 1.5]$	-	-	-	Funkcja nie zmienia znaku na przedziale [a,b]
$[2, 10]$	-	-	-	Funkcja nie zmienia znaku na przedziale [a,b]

5.3 Wnioski

Przedziały, które zostały podane w tabeli zostały dobrane po obserwacji wykresu. Po wynikach można zaobserwować, że metoda bisekcji poprawnie znajduje pierwiastki tylko jesli prawidłowo zdefiniujemy przedziały. Można także zaobserwować różnice w wynikach. Jeśli wyliczony pierwiastek różni się o więcej niż δ od wyliczonego (tego samego) pierwiastka zaczynając z innego przedziału, wtedy wartość w pierwiastku ($h(r)$) jest dokładny do ϵ. Także można zaobserwować, że ilość iteracji nie jest zawsze zależna od wielkości przedziału. Dzieje się to dlatego, że może się zdarzyć, że przy połowieniu jednego przedziału znajdzie się szukane miejsce, gdy w przypadku wyliczania pierwiastka zaczynając z drugim przedziałem skończy się iteracje przy przedziale $< \delta$.

W tym zadaniu pokazane zostało, że metoda bisekcji nie jest dobrą metodą w przypadku gdy nie znamy przedziałów funkcji, w których jest tylko jedno miejsce zerowe. Po wynikach możemy zauważyć, że źle dobrane przedziały zwrócą błąd zamiast poprawnego wyniku. Można temu zapobiec przez użycie innej metody, która nie potrzebuje znajomości zmiany znaku w wartościach funkcji, albo tak jak opisane zostało powyżej, wywołanie metody bisekcji po poprzednio przeanalizowaniu wykresu funkcji.

6 Zadanie 6.

6.1 Problem

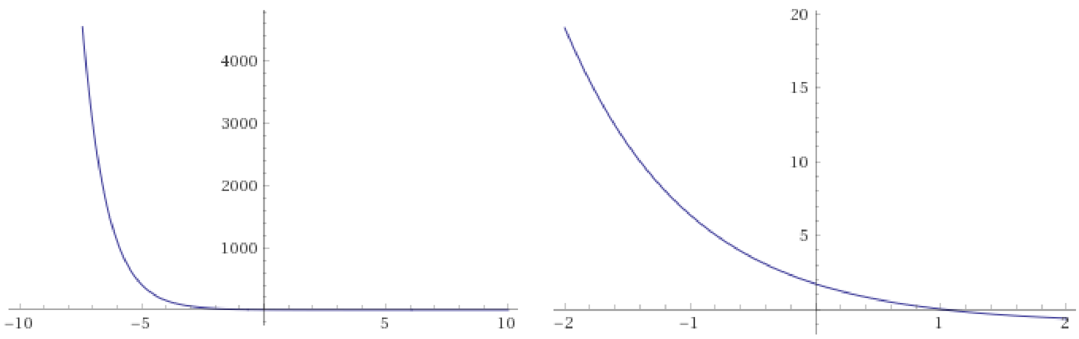
Należało znaleźć miejsca zerowe trzema metodami (bisekcji, stycznych oraz siecznych) dwóch funkcji:

1. $f(x) = e^{1-x} - 1$ (prawidłowe rozwiązanie: x = 1)
2. $g(x) = xe^{-x}$ (prawidłowe rozwiązanie: x = 0)

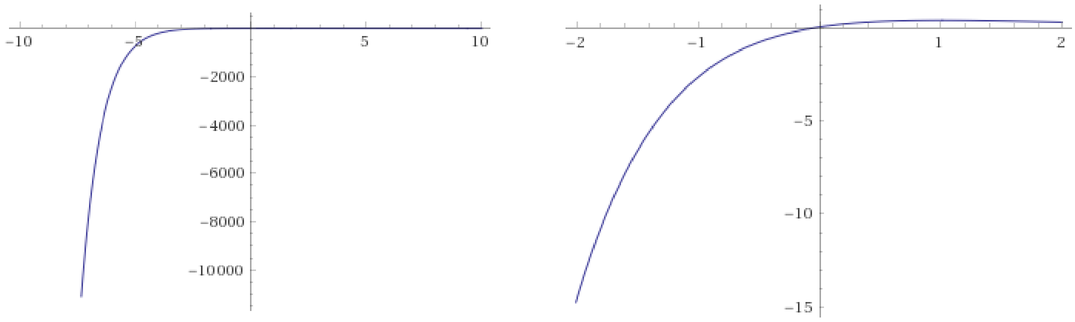
Obliczenia należało wykonać z dokłądnością $\delta = \epsilon = 10^{-5}$
Także zadaniem było dobrać odpowiedni przedział i przybliżenia początkowe.

6.2 Wyniki

Rysunek 2: Funkcja f



Rysunek 3: Funkcja g



r - znalezione miejsce zerowe z dokładnością do δ
v - wartość funkcji w punkcie r z dokładnością do ϵ
it - liczba wykonanych iteracji potrzebnych do znalezienia pierwiastka
err - powiadomienie o błędzie

Metoda bisekcji					
funkcja	[a,b]	r	v	it	err
f	$[0.5, 2]$	0.9999923706054688	7.629423635080457e-6	16	Brak błędu
f	$[-0.1, 2]$	1.0000038146972656	-3.814689989667386e-6	17	Brak błędu
f	$[0.0, 2]$	1.0	0.0	1	Brak błędu
f	$[-100, 100]$	0.9999990463256836	9.536747711536009e-7	23	Brak błędu
f	$[0.99999, 20]$	1.0000081198215485	-8.119788582838794e-6	20	Brak błędu
g	$[-0.5, 1]$	-7.62939453125e-6	-7.629452739132958e-6	16	Brak błędu
g	$[-0.5, 0.5]$	0.0	0.0	1	Brak błędu
g	$[-0.1, 4]$	3.8146972656107834e-6	3.8146827137233106e-6	17	Brak błędu
g	$[-100, 101]$	4.410743713378906e-6	4.410724258761706e-6	23	Brak błędu

Metoda Newtona					
funkcja	x0	r	v	it	err
f	4	0.9999999995278234	4.721765201054495e-10	21	Brak błędu
f	2	0.9999999810061002	1.8993900008368314e-8	5	Brak błędu
f	11	NaN	NaN	2	Wyjście poza zakres
f	101	NaN	NaN	1	Pochodna bliska zeru
g	-1	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5	Brak błędu
g	1	NaN	NaN	1	Pochodna bliska zeru
g	2	14.398662765680003	8.036415344217211e-6	10	Brak błędu
g	11	14.272123938290518	9.040322779745372e-6	3	Brak błędu
g	101	NaN	NaN	1	Pochodna bliska zeru

Metoda siecznych						
funkcja	x1	x2	r	v	it	err
f	0.5	2	1.000000014307199	-1.4307198870078253e-8	6	Brak błędu
f	-0.1	2	1.0000032272298756	-3.227224668056472e-6	6	Brak błędu
f	0	2	1.0000017597132702	-1.7597117218937086e-6	6	Brak błędu
f	-100	101	101.0	-1.0	1	Brak błędu
f	0.99999	20	1.0000000009000212	-9.000211687038018e-10	2	Brak błędu
g	-1	0.5	-1.1737426154042664e-6	-1.1737439930768023e-6	7	Brak błędu
g	-0.5	0.5	5.38073548562323e-6	5.380706533386756e-6	6	Brak błędu
g	-0.1	4	14.32970132001514	8.568936563065177e-6	14	Brak błędu
g	-100	101	101.0	1.3822248658855914e-42	1	Brak błędu

6.3 Wnioski

Obserwując wykresy obu podanych funkcji możemy odpowiednio dobrać przybliżenia początkowe. Natomiast porównując wyniki możemy zaobserwować różnice w dokładnościach metod oraz błędy w zależności od dobranych parametrów.

Metoda bisekcji, jak można zauważyć po wynikach w tabeli, w każdym testowanym przypadku znajdował prawidłowy wynik z dokładnością do δ. Jednakże porównując do pozostałych metod można zaobserwować, że algorytm potrzebuje najwiekszej liczby iteracji do wyznaczenia odpowiedniego wyniku. Dzieje się to dlatego, że metoda bisekcji zbiega liniowo, kiedy to metody Newtona i siecznych mają rząd 2, czyli zbiegają kwadratowo.

Można zauważyć, że metoda Newtona przy pewnych przybliżeniach początkowych nie zbiega do wartości liczbowej. Dzieje się to dlatego, że przy wybraniu pewnych parametrów metoda ta jest rozbieżna, co oznacza, że każdy kolejny punkt sprawdzanej stycznej odbiega od szukanego miejsca zerowego. Patrząc na błędy, które pojawiają się w przypadkach rozbieżności możemy zauważyć, że iterując po kolejnych punktach stycznych do wykresu wyszliśmy poza zakres Float64 co oznacza, że metoda jest rozbieżna. W innym przypadku metoda nie zbiega do wartości liczbowej ponieważ pochodna w znalezionym punkcie była bliska zeru, co oznacza także rozbieżność metody.

W przypadku metody siecznych, obserwując wyniki można zauważyć zauważyć, że przy funkcji g wartości r znacznie się od siebie różnią. Można wytłumaczyć to obserwując wykres oraz analizując algorytm. Algorytm kończy swoje działanie gdy znajdzie $g(x) < \epsilon$. ϵ, który został użyty do obliczeń był dokładności 10^{-5}. Natomiast w tabeli widzimi wartości funkcji g w punktach r, które są poniżej ϵ. Z tego wynika, że algorytm zadziałał poprawnie, ale wyniki odbiegają od rzeczywistego miejsca zerowego z powodu precyzji obliczeń. W przypadku funkcji f większość wyników jest prawidłowa z dokładnością do δ co oznacza, że metoda poprawnie działa dla podanych punktów poczatkowych. Jeden z testowanych przedziałów ma znacznie różniący się wynik od pozostałych. Analizując wykres można wywnioskować dlaczego tak się dzieje. Otóż algorytm działa w taki sposób, że tworzy sieczną pomiędzy danymi punktami. Punkt potrzebny do kolejnej iteracji jest ustalany poprzez sprawdzenie w którym punkcie wyznaczona sieczna przecina oś OX. Gdy spojrzy się na wykres można zauwazyć, że $f(-100)$ oraz $f(101)$ leża na układzie współrzędnych względem siebie w takich punktach, że gdy poprowadzi się sieczną pomiędzy tymi punktami, punkt przecięcia osi OX przez sieczną jest nadal w punkcie $x_0 = 101 + \delta$. Takie zjawisko sprawia, że algorytm zadziałał poprawnie, lecz zwrócił nieprawidłowy wynik.