Faculdade de Tecnologia e Ciências Sociais Aplicadas - FATECS
Curso Ciência da Computação

1ª Lista de Exercícios

Teoria de Grafos

✓ Arestas, vértices e grau de um grafo

Prof. Cleber Pinheiro

NOME:

TURNO: **SEMESTRE:**

PROFESSOR: CLEBER PINHEIRO **DATA:**

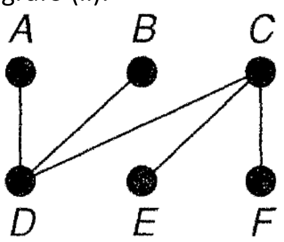
DISCIPLINA: TEORIA DE GRAFOS

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM
1ª Lista

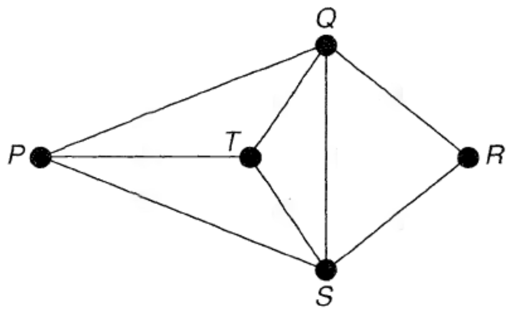
QUESTÃO 01

Arestas, vértices e grau de um grafo. Especifique o número de vértices, o número de aretas e o grau de cada vértice para:

- **A.** o grafo (i);
- **B.** o grafo (ii).



Grafo (i)



Grafo (ii)

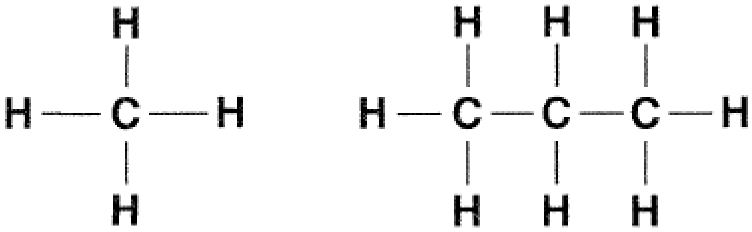
Resposta: Grafo (i)→ |V(G)|=6; |A(G)|=5;
Grau do vértice A = 1;
Grau do vértice B = 1;
Grau do vértice C = 3;
Grau do vértice D = 3;
Grau do vértice E = 1;
Grau do vértice F = 1;
Grafo (ii)→ |V(G)|=5; |A(G)|= 8;
Grau do vértice P = 3;
Grau do vértice Q = 4;
Grau do vértice R = 2;
Grau do vértice S = 4;
Grau do vértice T = 3;

Aula sugerida:
Introdução à Teoria dos Grafos:
Vídeo → https://www.youtube.com/watch?v=ZINJFcm9_uo&list=PLrVGp617x0hAm90-7zQzbRsSOnN2Vbr-I

QUESTÃO 02

Arestas, vértices e grau de um grafo. A figura abaixo representa a fórmula estrtural plana das moléculas de metano (fórmula molecular $\mathbf{CH_4}$) e propano (fórmula molecular $\mathbf{C_3H_8}$).

(i) Considerando que fórmula abaixo representa um grafo e que cada átomo está associado a um vértice do mesmo, determine o grau de cada vértice, onde as arestas representam as ligações químicas;

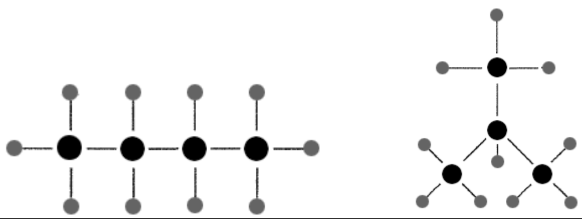


(ii) Há duas moléculas diferentes com fórmula molecular $\mathbf{C_4H_{10}}$. Desenhe os grafos correspondentes a tais moléculas

Leitura sugerida:

SZWARCFITER, J. L **Teoria Computacional de Grafos**: os algoritmos. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2018. p. 26.

Resposta: (i) cada átomo de hidrogênio representa um vértice e todos possuem grau igual a 1 (monovalente); já o átomo de carbono representa um vértice distinto e possui grau igual a 4 (tetravalente); (ii) Os grafos correspondentes são:



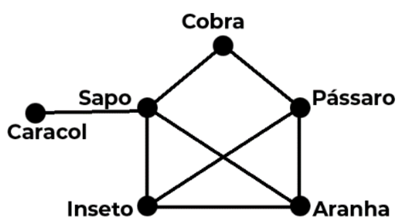
QUESTÃO 03

Arestas, vértices e grau de um grafo. Veja a seguinte cadeia ecológica alimentar: 1) cobras caçam e comem sapos e pássaros; 2) pássaros comem aranhas; 3) pássaros e aranhas caçam e comem insetos; 4) rãs comem caracóis, aranhas e insetos. Desenhe um grafo representando esse comportamento predatório.

Leitura sugerida:

NETTO, O. B. **Grafos:** teoria, modelos, algoritmos. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2011. p. 07-10.

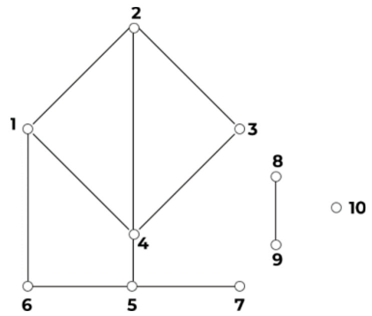
Resposta:



QUESTÃO 04

Arestas, vértices e grau de um grafo I. Para o grafo abaixo, determine:

(a) o grau de cada vértice;
(b) os graus mínimo e máximo do grafo;
(c) o grau médio do grafo



Resposta: (a) $d(v_1)= d(v_2)= d(v_5)=3$; $d(v_3)= d(v_6)=2$; $d(v_4)=4$; $d(v_7)= d(v_8)= d(v_9)=1$; $d(v_{10})=0$ (vértice isolado)
(b) $\delta(G)=0$; $\Delta(G)=4$
(c) $\bar{d}=2$

Vídeo sugerido:
Analogia entre Teoria dos grafos e o filme "A Origem":
Vídeo → https://www.youtube.com/watch?v=bhZAtxY3Zt0

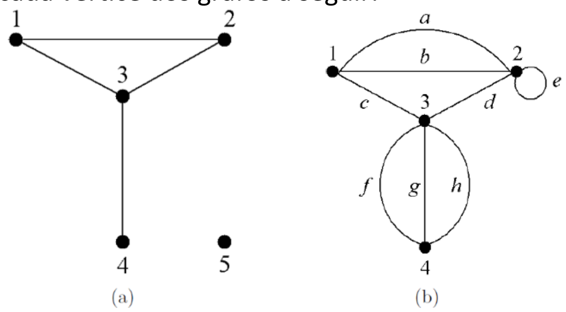
Filme sugerido:
A Origem - Trailer:
Vídeo → https://www.youtube.com/watch?v=R_VX0e0PX90&t=19s

QUESTÃO 05

Arestas, vértices e grau de um grafo. Para um grafo simples, o grau de um vértice ***v*** de um grafo G é a quantidade de vizinhos deste vértice. Para um grafo qualquer G = (V;A), o grau de um vértice ***v*** é definido pela quantidade de arestas "**n**" que unem este vértice aos demais (exceto ele próprio) e pela quantidade de laços "**p**" em v, ou seja:

$$d(v) = n + 2p\,.$$

Nesse sentido, determine o grau de cada vértice dos grafos a seguir:



Resposta: (a) d(1)=2; d(2)=2; d(3)=3; d(4)=1; d(5)=0; δ(G)=0 e Δ(G)=3; (b) d(1)=3; d(2)=5; d(3)=5; d(4)=3; δ(G)=3 e Δ(G)=5

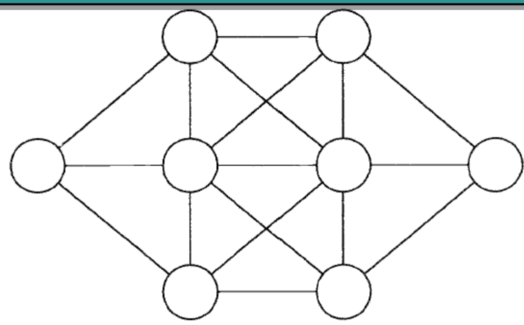
QUESTÃO 06

Arestas, vértices e grau de um grafo. Considere as letras ***A***, ***B***, ***C***, ***D***, ***E***, ***F***, ***G*** e ***H***.

A) classifique o tipo de grafo dado;

B) determine o número total de possibilidades quanto à disposição de tais letras nos vértices do grafo ao lado;

C) organize tais letras nos oito círculos da figura ao lado, de forma que nenhuma letra é adjacente a uma letra que está ao lado dela no alfabeto.



Resposta:

A) grafo simples, pois para qualquer par de vértices existe, no máximo, uma aresta conectada. Ou seja, um grafo simples é um grafo que não contém nem laços nem arestas múltiplas.

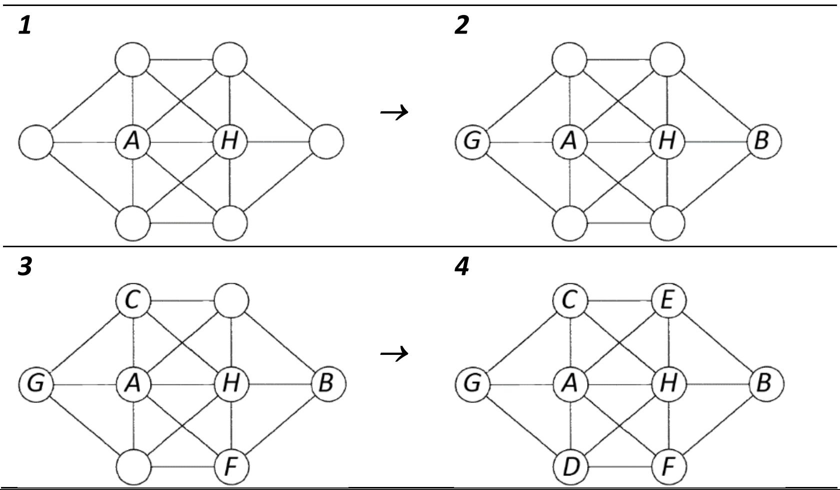
B) 40.320 possibilidades;

C) note que:

i) as letras mais fáceis para o arranjo inicial são "A" e "H", porque cada uma tem apenas uma letra à qual não pode ser adjacente (ou seja, B e G, respectivamente);

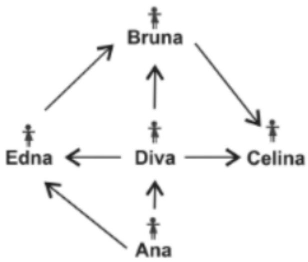
ii) os círculos mais difíceis para o preenchimento inicial são aqueles situados próximo ao centro, pois cada um é adjacente a outros seis.

Dessa forma, faça o preenchimento tomando-se pares de letras mais afastadas no conjunto do alfabeto citado: comece com {A,H}. Depois, toma-se {B,G}. Seguindo tal lógica, tem-se {C,F} e {D,E}.



QUESTÃO 07

Aplicação simples de grafos. A figura abaixo mostra como comparar as idades de cinco irmãs através de um digrafo, onde flechas partem do nome de uma irmã mais nova para o nome de uma mais velha. Qual é a irmã mais velha?



Resposta: Celina é a irmã mais velha

QUESTÃO 08

Aplicação simples de grafos. Determine o número total de arestas num grafo simples, considerando que todos os vértices estejam conectados.

Resposta: n(n-1)/2

QUESTÃO 09

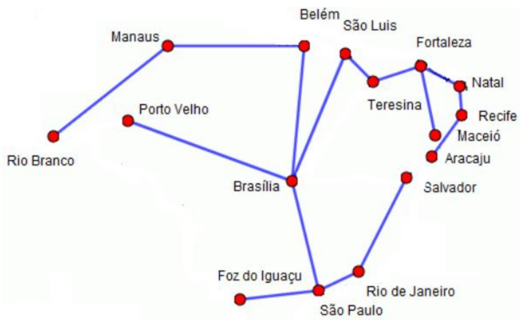
Aplicação simples de grafos. Uma companhia aérea possui permissão para voar em rotas que ligam 16 capitais do Brasil ilustradas. Um mapa (na forma de grafo) é mostrado na figura abaixo com as possibilidades de rotas entre tais capitas. No entanto, por questões de economia, esta empresa irá deixar de operar cinco rotas. As rotas excluídas são:

1. Salvador ↔ Aracaju
2. Rio Branco ↔ Porto Velho
3. Belém ↔ São Luis
4. Brasília ↔ Teresina
5. Brasília ↔ Salvador.

Obtenha um subgrafo, a partir do grafo original, que mostra todas a rotas possíveis e operadas pela companhia aérea.

Rotas aéreas

Resposta:



QUESTÃO 10

Aplicação simples de grafos. Em relação ao problema anterior, suponha que houve uma alteração na governança coorperativa na empresa aérea, permitindo assim estabelecer um melhor cenário econômico para a efetividade de rotas aéresas. Neste cenário favorável, todas as rotas possíveis no mapa original foram retomadas. Dessa forma, classifique os seguintes "passeios" executados pelos aviões desta companhia dentro das rotas autorizadas (*passeios* abertos ou fechados, *trilhas* abertas ou fechadas e *caminhos* abertos e fechados):

A. Brasília → Bélem → Manaus → Rio Branco;
B. Brasília → São Paulo → Rio de Janeiro → Brasília;
C. Salvador → Brasília → Teresina → São Luís → Brasília → São Paulo → Rio de Janeiro → Salvador;
D. Rio Branco → Porto Velho → Brasília → Salvador → Rio de Janeiro → São Paulo → Brasília → Porto Velho → Rio Branco;
E. Salvador → Brasília → Teresina → São Luís → Brasília;
F. Rio Branco → Porto Velho → Brasília → Salvador → Rio de Janeiro → São Paulo → Brasília.

Aula sugerida:
Grafos: Passeios, trilhas e caminhos:
Vídeo → https://www.youtube.com/watch?v=tlk5nVoOTiA

Resposta: A) caminho aberto; B) caminho fechado (ciclo); C) trilha fechada; D) passeio fechado; E) trilha aberta; F) trilha aberta

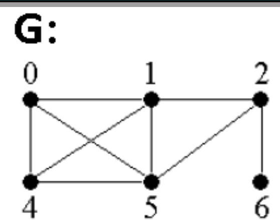
QUESTÃO 11

Aplicação simples de grafos. Considerando a questão 08, considerando como critério o grau de cada vértice ocupado pelas capitais no grafo para conexões e escalas aéreas, aponte as cidades que poderiam ser utilizadas para tal fim (com grau sendo igual ou superior a **3**).

Resposta: Brasília, Belém, São Luís, Teresina, Salvador, Fortaleza e São Paulo

QUESTÃO 12

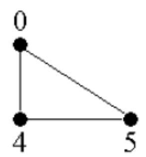
Propriedades e classificação de grafos. Considerando um grafo **G = (V;A)** e um subconjunto não-vazio $\mathbf{S_v} \subseteq \mathbf{V}$, um subgrafo de **G** induzido por $\mathbf{S_v}$, denotado por $\mathbf{G[S_v]}$, é aquele que tem como conjunto de vértices $\mathbf{S_v}$ e como conjunto de arestas todas as arestas de **G** que possuam ambas extremidades em $\mathbf{S_v}$. Nesse sentido, a partir do grafo **G** ao lado, obtenha um subgrafo de **G** induzido por $\mathbf{S_v}$ usando apenas os vértices 0, 4 e 5 (S_v={0, 4, 5}).



Leitura sugerida:

NETTO, O. B. **Grafos:** teoria, modelos, algoritmos. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2011. p. 8-9.

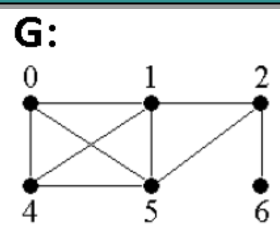
Resposta: $\mathbf{G[S_v]}$:



QUESTÃO 13

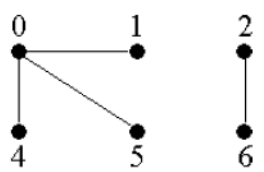
Propriedades e classificação de grafos. Considerando um grafo **G = (V;A)** e um subconjunto não-vazio $\mathbf{S_a} \subseteq \mathbf{A}$, um subgrafo de **G** induzido por $\mathbf{S_a}$, denotado por $\mathbf{G[S_a]}$, é aquele que tem como conjunto de arestas $\mathbf{S_a}$ e como conjunto de vértices as extremidades das arestas $\mathbf{S_a}$. Nesse sentido, a partir do grafo **G** ao lado, obtenha um subgrafo de **G** induzido por $\mathbf{S_a}$ usando apenas as arestas:

A) {{0, 4}, {0, 5}, {0, 1}, {2, 6}};
B) {{1, 4}, {1, 2}, {1, 5}, {2, 5}, {4, 5}}.

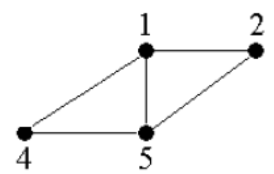


Resposta:

A) $\mathbf{G[S_a]}$:



B) $\mathbf{G[S_a]}$:



QUESTÃO 14

Propriedades e classificação de grafos. O comando "*ping*" é uma ferramenta de rede amplamente utilizada em sistemas operacionais para testar a conectividade entre dispositivos em uma rede IP (Internet Protocol), sendo usado para medir o tempo de resposta da conexão do seu computador com outros dispositivos na rede local ou Internet. A ferramenta envia pequenos pacotes de dados para sites ou endereços de IP e calcula quantos milissegundos (**ms**) o alvo demora para responder. Isso significa que quanto menor o tempo, menor é a latência da sua conexão. O recurso pode ser útil para diagnosticar problemas de rede em computadores ou servidores.

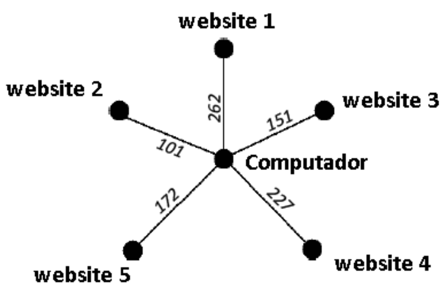
Considere um exemplo de uso deste comando em que um computador se conecta a 5 websites distintos com o tempo médio de resposta dada na tabela abaixo:

Site	Tempo Médio de Conexão
Website 1	262 ms
Website 2	101 ms
Website 3	151 ms
Website 4	227 ms
Website 5	172 ms

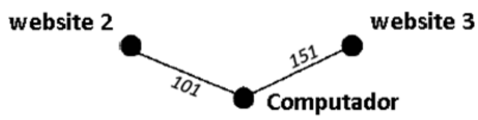
Considere ainda um grafo estrela $\mathbf{S_n}$, com **n** > 1, sendo este semelhante igual a um grafo roda $\mathbf{W_n}$, sem as arestas que compõem o grafo $\mathbf{C_n}$. Um grafo $\mathbf{S_n}$ possui **n**+1 vértices e **n** arestas, onde há um vértice central com grau igual a **n**, enquanto que os demais vértices possuem grau igual a 1. Neste contexto, construa um grafo estrela $\mathbf{S_5}$ ponderado onde há vértices que representam os websites e o computador e, as arestas, o tempo de conexão. Obtenha também um subgrafo simples valorado/ponderado contendo duas arestas, a partir do grafo estrela $\mathbf{S_5}$ ponderado anterior, representando a conectividade entre o computador e dois websites quaisquer, sob condição de menor tempo possível.

Resposta:

A)



B)



QUESTÃO 15

Sintomas de sobrecarga no acesso. Considere o número de conexões simultâneas e a quantidade média de informação transferida por cada conexão como medidas para a carga de um servidor web. Neste caso, um dos parâmetros físicos usados para realizar o acompanhamento de acesso é o tempo médio de latência. Entre os sintomas de sobrecarga de servidores ***WEB***, têm-se:

- server crash (por exaustão de recursos);
- estouro do número de processos;
- memória indisponível;
- alto tempo de resposta;
- perda de conexões de rede.

Como exemplo ilustrativo, considere um servidor hipotético **S** recebendo diversos acessos externos mostrados no mapa a seguir, as arestas representa o tempo médio de latência e os vértices, o servidor e máquinas-clientes:

Neste contexto e a partir da figura acima:

A. construa um grafo estrela **S_3** **ponderado** onde o vértice central é o servidor **S**, sob a condição de que este se conectará somente com vértices adjacentes (máquinas-clientes) na **menor** "distância" possível, em termos do **tempo médio de latência** (considere a construção das arestas a partir das **linhas pontilhadas já existentes** na figura acima);

B. construa um grafo ponderado e orientado/direcionado considerando que as arestas que partem do servidor **S** sejam orientadas diretamente até as máquinas-clientes (considere a construção das arestas a partir das **linhas pontilhadas já existentes** na figura acima).

QUESTÃO 16

Aplicação simples de grafos. Com o intuito de realizar obras com planejamento de infraestrutura rodoviária, o governo de um páis pretende construir ***n*** estradas (todas de mão dupla), sendo que cada estrada liga exatamente 2 das cidades. Há um total de 21 cidades. Considere condição que uma das cidades só pode ter uma estrada construída interligando à outra cidade. Qual o menor valor de ***n*** para que, independente de como as estradas sejam construídas, seja possível viajar entre quaisquer 2 cidades (neste caso, as estradas são construídas tal que 20 das mesmas se conectam entre si através uma únicada estrada. Dessa forma, uma viagem pode ser feita passando, possivelmente, por cidades intermediárias, se o condutor/viajante deseja realizar tal opção)?

Aula sugerida:
Introdução à Teoria dos Grafos – aplicação da contagem dupla:
Vídeo → https://www.youtube.com/watch?v=_4de5E3Oghk

Resposta: 191

QUESTÃO 17

Para o problema anterior, escreva um algoritmo para a determinação do número mínimo de estradas, onde o usuário entrará como dado de entrada o número de cidades numa região de um país.

Resposta:

Algoritmo: Determinando o Menor Número de Estradas

1. Entrada: Solicite ao usuário o número de cidades, denotado por "N".
2. Validação: Verifique se o valor de "N" é válido (ou seja, maior ou igual a 1.
   i. Se não for válido, exiba uma mensagem de erro e encerre o algoritmo.
3. Cálculo do Número Mínimo de Estradas ("**A**"):
   - Se "**N**" for igual a 1, defina " **A**" como 0, pois não há necessidade de construir estradas para uma única cidade.
   - Se "**N**" for igual a 2, defina " **A**" como 1, pois é necessária pelo menos uma estrada para conectar duas cidades.
   - Para "**N**" maior que 2, use a fórmula de combinação para calcular o número mínimo de estradas onde uma das cidades só pode ter uma estrada construída interligando à outra cidade previamente escolhida:

$$C_{N,2} = \frac{(N-1)!}{2!(N-1-2)!}$$

4. Saída: Exiba o valor de "**A**" como o menor número de estradas necessário para garantir a conectividade entre quaisquer duas cidades.
5. **Fim**: Encerre o algoritmo.

QUESTÃO 18

Aplicação simples de grafos. O ***Certificado de Depósito Interbancário*** (***CDI***) é um tipo de um título emitido pelos bancos para transações entre as instituições financeiras no mercado interbancário. O ***CDI*** é utilizado como referência para diversas operações financeiras, especialmente em investimentos de renda fixa, servindo como um indicador para a taxa de juros praticada no mercado.

Abaixo está uma série temporal do valor percentual mensal deste título para o ano de 2.023 (considere como data para fechamento de rentabilidade o final do mês):

	jan	*fev*	*mar*	*abr*	*mai*	*jun*	*jul*	*ago*	*set*	*out*	*nov*	*dez*
2023	*1,12%*	*0,92%*	*1,17%*	*0,92%*	*1,12%*	*1,07%*	*1,07%*	*1,14%*	*0,97%*	*1,00%*	*0,92%*	*0,89%*

Considere um caso em que um capital é investido em tal título no dia 31 de dezembro de 2.022. A rentabilidade é mensal. Determine:

A) um grafo direcionado contendo 13 vértices e 13 arestas, onde estes representam os meses e as taxas (mensais e acumulada), respectivamente (aqui, a data de referência é sempre no final do mês).

B) o valor da taxa percentual acumulada no ano. Neste caso, tal taxa é dada por:

$$i_{ac} = (1+i_1)\times(1+i_2)\times(1+i_3)\times\ldots\times(1+i_n) - 1,$$

onde i_{ac} é a taxa acumulada no período e i_k é a k-ésima taxa de acréscimo na forma decimal.

Resposta: B) 13,028231%, aproximadamente

QUESTÃO 19

Aplicação simples de grafos. Dado o preço de um bem ou serviço, o mesmo pode sofrer alterações durante o tempo. Tais modificações podem ser feitas através de acréscimos sucessivos e/ou simultâneos.

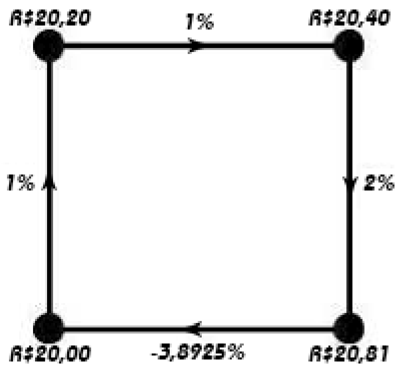
O preço de um bem/seviço com acréscimo sucessivos é dado pela expressão analítica:

$$P = P_0(1+i_1)\times(1+i_2)\times(1+i_3)\times\ldots\times(1+i_n),$$

onde:
P é o preço final;
P_0 é o preço inicial (antes do acréscimo);
i_k é a *k*-ésima taxa de acréscimo na forma decimal.

Considere que o preço inicial de um bem seja igual a R$ 20,00 e que o mesmo sofra três acréscimos sucessivos relativos às taxas de 1%, 1% e 2%, respectivamente. Em seguida, devido ao cenário momentâneo de deflação, a quarta taxa aplicada é negativa e igual a -3,89254%, aproximadamente. Construa um grafo cíclico direcionado onde os vértices representam os preços do bem/serviço e, as arestas, as taxas de acréscimos (a construção deve começar do vértice que contenha o preço inicial dado).

Resposta:



QUESTÃO 20

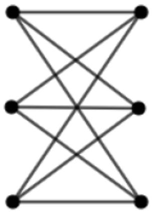
Aplicação simples de grafos. Propõe-se a ligação simultânea em três residências os sistemas de água (**A**), energia elétrica (**E**) e telefone (**T**), a partir de três centrais diferentes. Neste caso, não se permite que as ligações se cruzem. O problema pode ser ilustrado como na figura abaixo:

Construa o grafo para tais ligações, onde os vértices representam as centrais e as residências, enquanto as areastas as ligações. Classifique o tipo de grafo representativo para tal situação.

Leitura sugerida:

NETTO, O. B. **Grafos:** teoria, modelos, algoritmos. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2011. p. 12.

Resposta:



Este grafo é classificado como grafo bipartido completo.

QUESTÃO 21

Um banco de dados em grafos é um sistema de gerenciamento de banco de dados projetado para armazenar, consultar e gerenciar dados que são representados em uma estrutura de grafo. Nesse tipo de banco de dados, as informações são organizadas e armazenadas como um conjunto de nós (vértices) interconectados por meio de arestas (relações), formando uma representação gráfica das relações entre os dados.

Como aplicação e exemplo ilustrativo, em um banco de dados de redes sociais, um vértice pode representar um usuário e ter propriedades como nome, idade e cidade. Por outro lado, as arestas representam as relações ou conexões entre os vértices, podendo possuir rótulos que descrevem o tipo de relação entre os mesmos

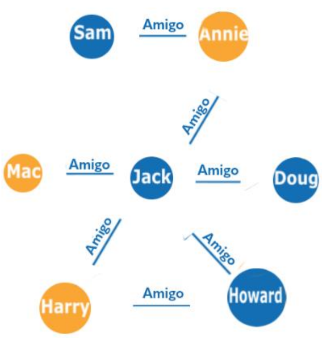
Crie um grafo não-ordenado que indique os seguintes relacionamentos entre amigos em ambiente de mídias sociais:

1) Sam e Annie são amigos;
2) Jack é amigo de Annie, Mac, Doug, Howard e Harry;
3) Harry e Howard são amigos;

Neste caso, há algum vértice com grau igual ou superior a dois? Qual é o significado deste grau?

Aula sugerida:
Introdução à Teoria dos Grafos – Soma dos graus dos vértices:
Vídeo → https://www.youtube.com/watch?v=DoQYgernzF8

Resposta:



O grau de cada vértice é caracterizado pelo número de amizades de uma determinada pessoa.

QUESTÃO 22

Considere um cluster industrial especializado na produção e distribuição de equipamentos mecânicos de alta precisão. Esse cluster é modelado como um grafo simples e não orientado em que:

01	Cada vértice representa uma entidade empresarial (por exemplo, fornecedores de matéria-prima, fabricantes de componentes, montadoras finais, distribuidores e varejistas especializados).	**02**	Cada aresta denota a existência de um contrato de fornecimento direto e ativo entre as duas empresas (associadas a vértices)

Admita que não haja múltiplas arestas entre o mesmo par de vértices e que laços (auto-relações) não existam, refletindo a natureza estritamente interempresarial das transações.

Cenário de estudo de caso:

O departamento de inteligência competitiva da Associação Industrial Regional realiza auditorias periódicas sobre a densidade e conectividade da rede de contratos no cluster.

Durante um determinado período, identificaram-se as seguintes relações comerciais (arestas):

- Fornecedor Alfa ⟷ Fabricante Beta
- Fornecedor Alfa ⟷ Fabricante Ômega
- Fabricante Beta ⟷ Distribuidora Delta
- Fabricante Ômega ⟷ Distribuidora Delta
- Distribuidora Delta ⟷ Varejista Sigma
- Distribuidora Delta ⟷ Varejista Kappa

A. Modele este sistema como um grafo rotulado, simples e não orientado;

B. Determine o grau de cada vértice. Construa uma tabela mostrando o grau de cada vértice;

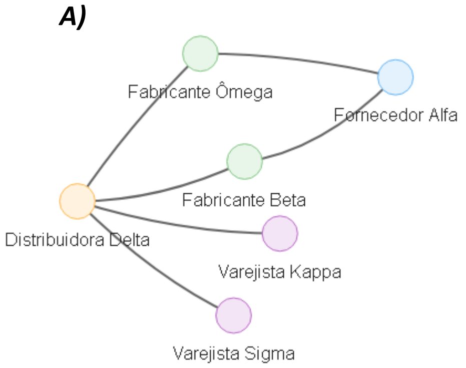
C. Use a métrica "Centralidade de Grau Normalizada" baseada nos graus dos vértices para identificar empresas altamente conectadas e discuta o impacto potencial da saída dessas empresas do cluster. Neste caso, tal métrica é definida por:

$$C(v_i) = \frac{d(v_i)}{|V| - 1}$$

onde v_i representa o vértice "v_i", $|V|$ é a ordem do grafo, $d(v_i)$ é o grau do vértice "v_i" e C é a centralidade do referido vértice.

Resposta:

A)



B)

Empresa (tipo)	Vizinhos	Grau
Alfa (fornecedor)	**Beta, Ômega**	**2**
Beta (fabricante)	**Alfa, Delta**	**2**
Ômega (fabricante)	**Alfa, Delta**	**2**
Delta (distribuidor)	**Beta, Ômega, Sigma, Kappa**	**4**
Sigma (varejista)	**Delta**	**1**
Kappa (varejista)	**Delta**	**1**

C) ***Empresa mais conectada: Delta (distribuidor), com maior probabilidade de atuar como "hub".***

Métrica de Centralidade de Grau Normalizada:

$$C(v_i) = \frac{d(v_i)}{|V| - 1}$$

Neste caso, a distribuidora Delta é a mais conectada (Centralidade de Grau Normalizada igual a 0,80); Alfa, Beta e Ômega têm conectividade intermediária (Centralidade de Grau Normalizada igual a 0,40); Sigma e Kappa são periféricos (Centralidade de Grau Normalizada igual a 0,20).

QUESTÃO 23

Pode haver um grafo simples com 15 vértices, cada um com grau 5?

Resposta:
Não. O grau desse suposto grafo seria 15×5 = 75, que é um número ímpar. Sabe-se que o grau de qualquer grafo deve ser um número par (vide o teorema $\sum_i d(v_i) = 2 \times |A|$***)***

QUESTÃO 24

Quantos vértices e quantas arestas têm os grafos abaixo?

(a) K_n (grafo completo)

(b) $K_{m,n}$ (grafo bipartido completo)

(c) C_n (grafo ciclo)

(d) Q_n (grafo cubo)

(e) W_n (grafo roda)

Resposta:

(a) $|V| = n; |A| = n \times (n-1)/2$
(b) $|V| = m + n; |A| = m \times n$
(c) $|V| = n; |A| = n$
(d) $|V| = 2^n; |A| = 2^n \times n/2$
(e) $|V| = n+1; |A| = 2\,n$

QUESTÃO 25

Como a estrutura da rede ***WWW*** (***world wide web***) pode ser representada por um grafo? Explique.

Resposta:
A estrutura da rede WWW pode ser representada por um grafo: os vértices são as páginas HTML e os arcos são os links que apontam de uma página para outra. Navegar na rede é pular de um vértice a outro seguindo os arestas orientadas (arcos).

QUESTÃO 26

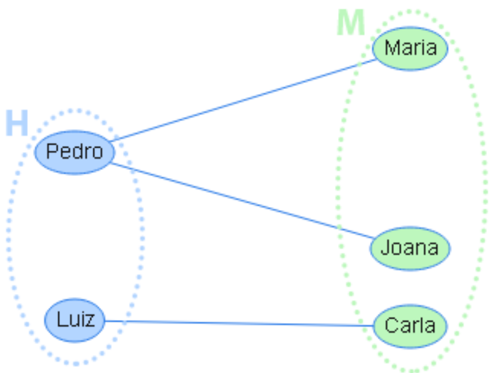
Sejam os conjuntos H={Pedro, Luiz} e M={Maria, Joana, Carla} e o grafo G(V,A) onde:

i) V = H U M;

ii) A = {(v,w) | (v ∈ H e w ∈ M) ou (v ∈ M e w ∈ H) e <v é amigo de w>}.

Construa uma proposta de grafo que represente as arestas e vértices especificados. Classifique tal grafo.

Resposta:

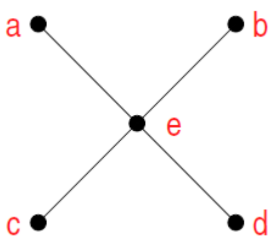


Este grafo é bipartido

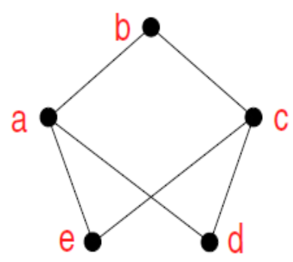
QUESTÃO 27

Verifique se os grafos são bipartidos:

A)



B)



Resposta:

A) Sim. Seja V = {a, b, c, d} e W ={e}. Não existe nenhuma aresta entre vértices de V e entre vértices de W. Toda aresta conecta algum vértice de V a algum vértice de W. Esse é o grafo bipartido completo $K_{1,4}$.

B) Sim. Seja V = {a,c} e W ={b, d, e}. Não existe nenhuma aresta entre vértices de V e entre vértices de W. Toda aresta conecta algum vértice de V a algum vértice de W. Esse é o grafo bipartido completo $K_{2,3}$.

QUESTÃO 28

Quantas arestas tem um grafo com vértices de graus 5; 2; 2; 2; 2; 1? Desenhe um possível grafo.

Resposta:
O grafo possui seis vértices e tem um grau total de 5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 14. Isso signica que existem sete arestas.
vide o teorema $\sum_i d(v_i) = 2 \times |A|$ **:**

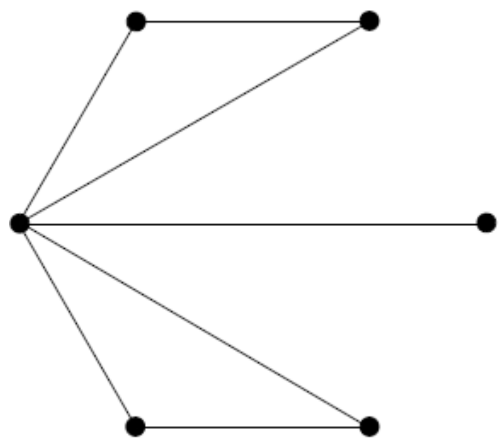
$$\sum_i d(v_i) = 2 \times |A|$$

$$\sum_{i=1}^{6} d(v_i) = d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_6)$$

$$\sum_{i=1}^{6} d(v_i) = 5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 14$$

$$2 \times |A| = 14$$

$$|A| = 7$$



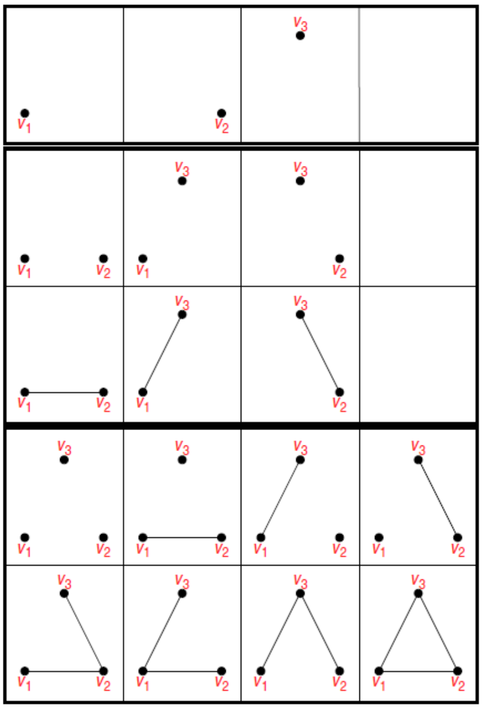
QUESTÃO 29

Quantos subgrafos com pelo menos um vértice tem K_3?

Resposta:
São os subgrafos com um, dois e três vértices. Temos, então, três casos:

I. ***Um vértice: existem três subgrafos com um vértice e, consequentemente, nenhuma aresta;***
II. ***Dois vértices: existem C(3; 2) = 3 possibilidades de escolher subgrafos com dois vértices (de um conjunto com três vértices, devemos escolher dois). Para cada possibilidade, podemos incluir ou não a aresta, i.e., 3×2 = 6 subgrafos com dois vértices;***
III. ***Três vértices: neste caso, para uma das três arestas que podemos ter, podemos incluí-la ou não, ou seja, para cada aresta temos duas possibilidades. Assim, temos 222 = 8 possibilidades. Uma outra forma de analisarmos este caso é que temos um conjunto E com três arestas. O conjunto potência de E nos dá todos os subconjuntos de aresta que podemos escolher. Assim, temos 23 = 8 possibilidades de subconjuntos distintos.***

Assim, a quantidade total de subgrafos com pelo menos um vértice é a soma de 3 + 6 + 8 = 17.
A fgura abaixo mostra possíveis soluções de tais subgrafos:



QUESTÃO 30

Para que valores de n os grafos abaixo são regulares?

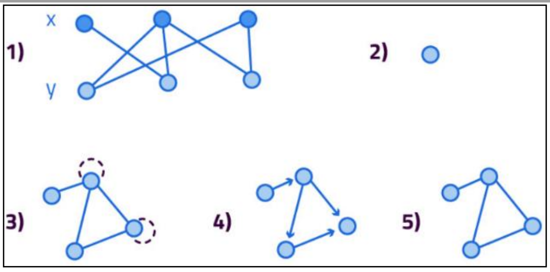
(a) K_n;
(b) C_n;
(c) W_n;
(d) Q_n;

Aula sugerida:
Introdução à Teoria dos Grafos – Tipos especiais de grafos:
Vídeo → https://www.youtube.com/watch?v=Wm1c5jcPP1A

Resposta:

(a) O grafo completo K_n é regular para todos os valores de $n \geq 1$, já que o grau de cada vértice é n - 1.
(b) O grafo ciclo C_n é regular para todos os valores de $n \geq 3$, já que o grau de cada vértice é sempre 2.
(c) No grafo roda, o grau do vértice do centro é sempre n e o grau dos vértices no ciclo é sempre 3. Assim, o grafo roda W_n é regular apenas para n = 3.
(d) O grafo ciclo Q_n é regular para todos os valores de $n \geq 0$, já que o grau de cada vértice é sempre n. Observe que Q_0 é o grafo com um vértice.

QUESTÃO 31



Definição e tipos de grafos (questão similar ao contexto das Unidades de Aprendizagem – UA's). A teoria dos grafos foi criada pelo matemático Leonhard Euler em 1736 para resolver o problema das sete pontes da Cidade de Königsberg. Os habitantes daquela cidade perguntavam-se se era possível cruzar as sete pontes em uma caminhada contínua sem passar duas vezes por qualquer uma delas.

A figura ao lado ilustra alguns tipos de grafos.

Com respeito a tais informações e utilizando os conceitos e

e utilizando os conceitos e definições da **Teoria de Grafos**, julgue os itens a seguir como CERTO (**C**) ou ERRADO (**E**).

C	E	1.	Grafo é um agrupamento formado por arestas e vértices que tem como principal função fazer a conexão entre os objetos dentro do contexto da estrutura de dados. Já o vértice é um elemento de formação simples, a qual pode ter nomes e atributos. A conexão/ligação entre dois vértices é realizada pelas arestas. As respectivas distâncias são denominadas de pesos, quando existentes.
C	E	2.	O grafo 1 é bipartido, ou seja, é o grafo que se divide em 2 conjuntos, podendo ser indicados por partições "**x**" e "**y**" na ilustração.
C	E	3.	O grafo 3 é multigrafo, ou seja, aquele que tem mais de uma aresta entre algum par de vértices.
C	E	4.	O grafo que possui maior grau médio é o grafo 5.

Resposta: C; C; E; E

QUESTÃO 32

A rotação de culturas consiste em alternar, anualmente, espécies vegetais numa mesma área agrícola. Além de proporcionar a produção diversificada de alimentos e outros produtos agrícolas, essa prática melhora as características físicas, químicas e biológicas do solo, auxilia no controle de plantas daninhas, doenças e pragas, repondo a matéria orgânica e protegendo o solo da ação dos agentes climáticos. Além disso, a rotação de culturas viabiliza uma utilização mais intensa de máquinas e equipamentos, reduzindo o custo do capital imobilizado do empreendimento agrícola.

Como exemplo ilustrativo, suponha um modelo de terreno retangular dividido em N x M parcelas de terra, onde N representa o número de fileiras/linhas e M o número de colunas. O agricultor deseja praticar a rotação de culturas em suas terras para otimizar a saúde do solo e maximizar a produção agrícola.

Neste exemplo, cada tipo de cultura pode ser plantado em uma determinada parcela de terra apenas uma vez por ano. Cada parcela de terra só pode ser usada para um tipo específico de cultura em um determinado **ano**. Acrescenta-se ainda que algumas culturas são incompatíveis entre si e **não** podem ser plantadas lado a lado. Neste caso, usa-se a representação de grafos para mapeamento deste cenário como modelo, onde os vértices do grafo representam os diferentes tipos de culturas e as arestas representam a incompatibilidade entre elas, bem como a direção da troca/rotatividade de culturas.

Desse modo, deve-se construir um "passeio" no grafo, sendo este um ciclo que passa por cada vértice do grafo exatamente uma vez.

Construa um grafo orientado que englobe as seguintes características:

1) O terreno é dividido em 3 fileiras (N = 3) e 3 colunas (M = 3), totalizando 9 parcelas de terra.

2) Tem-se 5 tipos de culturas disponíveis: Milho (A), Trigo (B) e Batata (C), Soja (D) e algodão (E).

3) Além disso, temos informações (hipotéticas) sobre incompatibilidades entre as culturas:

- **i.** Milho (A) não pode ser plantado ao lado de Trigo (B);
- **ii.** Trigo (B) não pode ser plantado ao lado de Batata (C);
- **iii.** Batata (C) não pode ser plantada ao lado de Milho (A);
- **iv.** Não há restrições para o plantio e uso de Soja e Algodão.

4) As arestas serão orientadas para cada porção de terra, respeitando o período anual de plantio e a condição de compatibilidade/incompatibilidade.

O agricultor deseja implementar um plano de rotação de culturas para maximizar a produção agrícola ao longo de 9 anos. Deve ser especificada a cultura a ser plantada cada parcela de terra em cada ano.

QUESTÃO 33

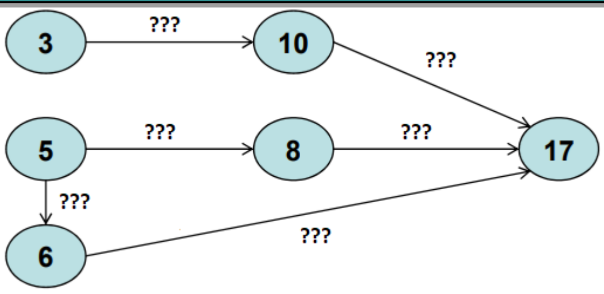
Sobre grafos, julgue os itens a seguir:

1. Um grafo ponderado é um grafo não direcionado em que todos os pares de vértices são adjacentes, isto é, há arestas ligando todos os vértices entre si.
2. Todo grafo completo tem pesos associados às suas arestas.
3. O grau de um vértice em um grafo não direcionado é o número de arestas que incidem nele.
4. Se existir um caminho c de ***x*** a ***y***, então ***x*** é alcançável a partir de **c** via **y**.

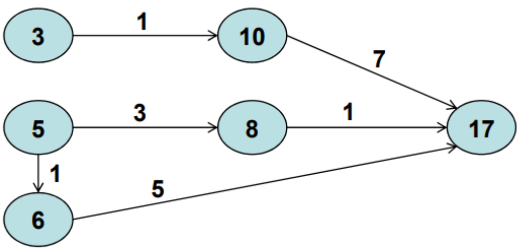
Resposta: E; E; C; E

QUESTÃO 34

O grafo ao lado é um digrafo do tipo não-ponderado. A partir do mesmo, obtenha um grafo orientado/direcionado ponderado, onde os pesos associados às arestas são iguais ao resto obtido pela divisão do inteiro posicionado no vértice da "ponta" da aresta pelo inteiro posicionado no outro vértice adjacente que compartilha a mesma aresta.



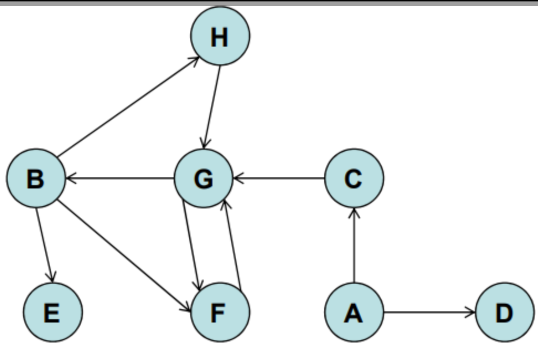
Resposta:



QUESTÃO 35

Dado o grafo ao lado, julgue os itens a seguir:

1. Existe um caminho de comprimento 1 de A até C;
2. Existe dois caminhos de comprimento 2 de B até G;
3. O passeio ACGBHGF é uma trilha;
4. O passeio BHGB é um tipo de caminho conhecido como ciclo;
5. Existem ciclos de B para B, de F para F e de H para H;
6. Existe uma trilha euleriana de B até C.



Resposta: C; C; C; C; C; E

QUESTÃO 36

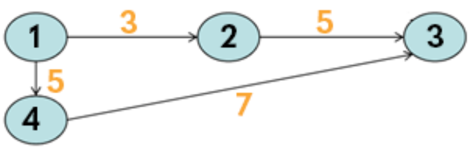
Sejam os vértices descritos abaixo. Considere ainda a função de ponderação/peso W_{ij} dada por:

$$W_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ para os vértices adjacentes } i \text{ e } j \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

A partir de tal diagramação, obtenha o grafo orientado/direcionado ponderado obedecendo às seguintes **condições**:

i. o grafo é de natureza simples;
ii. os vértices possuem grau dois;
iii. A orientação das arestas dar-se-á através da **união** dos seguintes caminhos:
   iii.1 caminho: **vértice** 1→ **vértice** 2 → **vértice** 3;
   iii.2 caminho: **vértice** 1→ **vértice** 4 → **vértice** 3.

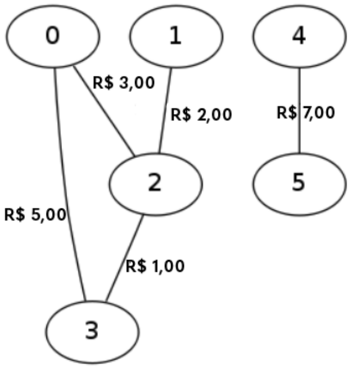
Resposta:



QUESTÃO 37

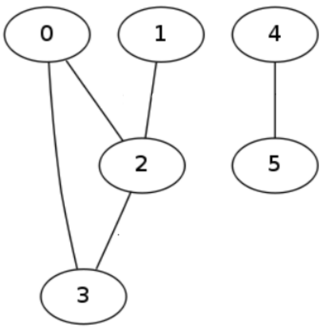
Seja o grafo ponderado **G** abaixo que representa a disposição de cidades (rotuladas por números inteiros de 0 a 5), interligadas por estradas através da arestas especificadas. Os pesos representam os valores dos pedágios nas respectivas estradas. Neste caso, determine:

A. a distância entre as cidades "0" e "3" num grafo H não-ponderado obtido a partir do grafo abaixo;
B. para o referido grafo **ponderado** na figura abaixo, determine a distância entre as cidades "0" e "3";
C. um grafo não-ponderado e orientado/direcionado em que seja possível realizar uma trilha, partindo da cidade "1" e chegando à cidade "2", considerando que o comprimento desta trilha seja igual a 4. Além disso, as cidades "4" e "5" estão conectadas entre si, mas não com as demais.
D. um multigrafo não-ponderado e não-orientado em que o pares de vértices {0,2}, {0,3}, {2,3}, {1,2} e {4,5} possuem multiplicidade 2.

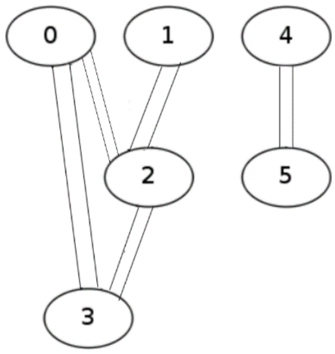


Resposta: A) $dist_G(0,3)=1$; B) $dist_H(0,3)$=R$ 4,00;

C)



D)



QUESTÃO 38

Construa um grafo ponderado e direcionado a partir da composição das funções reais abaixo, onde se deseja determinar o valor da função composta ***h(w(g(f(x))))*** para *x=2* (isto é, ***h(w(g(f(2))))***) . Neste caso, os vértices e arestas representam os valores da imagem da função, considerando um vértice subsequente sendo rotulado através da imagem obtida a partir do valor rotulado do vértice imediatamente anterior. O primeiro vértice será rotulado pelo valor do conjunto-domínio *x=2*. As arestas representam o resultado numérico através da aplicação de uma determinada função. As funções para a construção da referida composição são:

1. $f(x)=x^2$;
2. $g(x)=\log_{10}(x)$;
3. $w(x)=2x-1$;
4. $h(x)=3^x$.

Resposta:
Função peso:

$$w_i = \begin{cases} f(x_i) = x_i^2, i = 1 \\ g(x_i) = \log_{10} x_i, i = 2 \\ W(x_i) = 2x_i - 1, i = 3 \\ h(x_i) = 3^{x_i}, i = 4 \end{cases}$$

1. *x=2*
2. *f(2)=4*
3. *g(f(2))=0,602059991*
4. *w(g(f(2)))=0,204119983*
5. *h(w(g(f(2))))=1,251382226*

QUESTÃO 39

Um grafo **G** é bipartido completo quando o seu conjunto **V** de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos $\mathbf{V_1}$ e $\mathbf{V_2}$ tal que toda aresta de **G** tem uma extremidade em $\mathbf{V_1}$ e outra em $\mathbf{V_2}$. Além disso, todos os vértices de $\mathbf{V_1}$ são ligados a todos os vértices de $\mathbf{V_2}$. Sua representação matemática por sigla é $\mathbf{K_{p,q}}$, onde **p** e **q** representam o número de vértices dos conjuntos $\mathbf{V_1}$ e $\mathbf{V_2}$, respectivamente. Dessa forma, a, calcule:

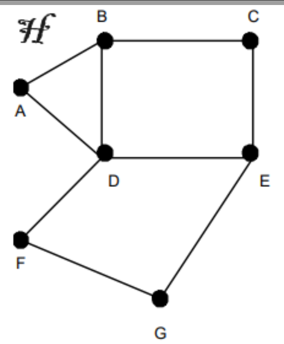
A) o número de arestas do grafo $\mathbf{K_{4,5}}$;
B) o número de arestas do grafo $\mathbf{K_{p,q}}$;
C) o grau médio do grafo $\mathbf{K_{p,q}}$.

Resposta: A) 20; B) p.q arestas; C) 2p.q/(p+q)

QUESTÃO 40

Seja o grafo $\mathcal{H}$ ao lado. Determine:

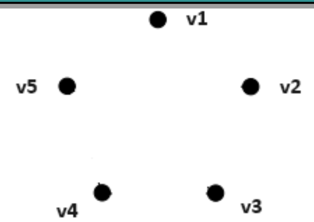
A. A distância entre os vértices A e C;
B. A distância entre os vértices A e G;
C. o diâmetro do grafo $\mathcal{H}$ (O diâmetro de $\mathcal{H}$ - representado por diam($\mathcal{H}$) - é a maior das distâncias entre todos os pares de vértices de $\mathcal{H}$).



Resposta: A) distância igual a 2; B) distância igual a 3; C) diâmetro igual a 3

QUESTÃO 41

Existe um grafo simples formado a partir de uma disposição espacial de cinco vértices (conjunto de vértices V={v_1, v_2, v_3, v_4, v_5}), sendo estes com graus iguais a 0, 1, 2, 2, 3 (veja a figura ao lado), respectivamente? Se existir, desenhe a sua representação gráfica. Determine também, se possível, o grau médio do referido grafo.



Resposta: o referido grafo existe, já que a soma dos graus é igual a 8. Portanto, o número de arestas é igual a 4; grau médio igual a 1,6.