

# Evolução temporal de processos fracamente turbulentos na presença de interações colisionais

Tese de Doutorado

---

Doutoranda: Sabrina Tigik Ferrão

Orientador: Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell

3 de outubro de 2019

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Física, sala M206

e-mail: [sabrina.tigik@ufrgs.br](mailto:sabrina.tigik@ufrgs.br)



## 1. Introdução

Teoria cinética de plasmas

Teoria de turbulência fraca

## 2. Teoria de turbulência fraca para plasmas colisionais

Não automodos não alteram a equação quasilinear das ondas

Contribuição dos não automodos para a equação cinética das partículas

Contribuição dos não automodos para a equação cinética não linear das ondas

## 3. Análise de processos colisionais na teoria de turbulência fraca

## 4. Publicação não relacionada à pesquisa da tese

## 5. Entre a entrega da tese e a defesa um artigo foi aceito

# Introdução

---

# Introdução

---

Teoria cinética de plasmas

- No contexto da teoria cinética, processos que envolvem ondas e instabilidades cinéticas são quase que exclusivamente associados a situações em que os efeitos de dissipação colisional podem ser desprezados;

- No contexto da teoria cinética, processos que envolvem ondas e instabilidades cinéticas são quase que exclusivamente associados a situações em que os efeitos de dissipação colisional podem ser desprezados;
- O que ocorre quando o fenômeno estudado evolui em uma escala de tempo muito menor do que o tempo de relaxação colisional do plasma em questão;

- No contexto da teoria cinética, processos que envolvem ondas e instabilidades cinéticas são quase que exclusivamente associados a situações em que os efeitos de dissipação colisional podem ser desprezados;
- O que ocorre quando o fenômeno estudado evolui em uma escala de tempo muito menor do que o tempo de relaxação colisional do plasma em questão;
- Nesses casos, a dinâmica do plasma pode ser descrita através do sistema Vlasov-Maxwell de equações acopladas;

- No contexto da teoria cinética, processos que envolvem ondas e instabilidades cinéticas são quase que exclusivamente associados a situações em que os efeitos de dissipação colisional podem ser desprezados;
- O que ocorre quando o fenômeno estudado evolui em uma escala de tempo muito menor do que o tempo de relaxação colisional do plasma em questão;
- Nesses casos, a dinâmica do plasma pode ser descrita através do sistema Vlasov-Maxwell de equações acopladas;
- Na presença de oscilações de baixa amplitude, este sistema de equações pode ser aproximado com o uso da teoria de perturbação;



- No contexto da teoria cinética, processos que envolvem ondas e instabilidades cinéticas são quase que exclusivamente associados a situações em que os efeitos de dissipação colisional podem ser desprezados;
- O que ocorre quando o fenômeno estudado evolui em uma escala de tempo muito menor do que o tempo de relaxação colisional do plasma em questão;
- Nesses casos, a dinâmica do plasma pode ser descrita através do sistema Vlasov-Maxwell de equações acopladas;
- Na presença de oscilações de baixa amplitude, este sistema de equações pode ser aproximado com o uso da teoria de perturbação;
- Com esse método obtém-se uma cadeia de aproximações perturbativas, composta pelas aproximações linear, quasilinear e não linear; sendo esta última conhecida como *teoria de turbulência fraca*.

- Na ausência de colisões, a dinâmica do plasma é descrita pela equação de Vlasov

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha} = 0;$$

- Na ausência de colisões, a dinâmica do plasma é descrita pela equação de Vlasov

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = 0;$$

- Onde os campos são dados pelas equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

- Em uma abordagem estatística, a densidade de carga e a densidade de corrente dependem da função de distribuição de velocidades do plasma:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_v f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v,$$
$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_v \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v.$$

- Em uma abordagem estatística, a densidade de carga e a densidade de corrente dependem da função de distribuição de velocidades do plasma:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_v f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v,$$
$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_v \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v.$$

- Essas equações formam um sistema de equações não linear, fechado e autoconsistente;

- Em uma abordagem estatística, a densidade de carga e a densidade de corrente dependem da função de distribuição de velocidades do plasma:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_v f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v,$$
$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_v \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v.$$

- Essas equações formam um sistema de equações não linear, fechado e autoconsistente;
- A solução do sistema Vlasov-Maxwell irá depender das características do plasma e do fenômeno que está sendo estudado.

## Premissas básicas adotadas neste trabalho

- Estamos interessados em descrever oscilações eletrostáticas de baixa amplitude propagando em um plasma :
  - de hidrogênio, totalmente ionizado:  $n_e = n_i = n$ ;
  - homogêneo;
  - não magnetizado:  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ .

## Premissas básicas adotadas neste trabalho

- Estamos interessados em descrever **oscilações eletrostáticas de baixa amplitude** propagando em um plasma :
  - de hidrogênio, totalmente ionizado:  $n_e = n_i = n$ ;
  - homogêneo;
  - não magnetizado:  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ .
- Nesse caso, a equação de Vlasov assume a seguinte forma

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = 0,$$

onde o campo elétrico é dado pela forma diferencial da Lei de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{\mathbf{v}} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v.$$



## Premissas básicas adotadas neste trabalho

- Estamos interessados em descrever **oscilações eletrostáticas de baixa amplitude** propagando em um plasma :
  - de hidrogênio, totalmente ionizado:  $n_e = n_i = n$ ;
  - homogêneo;
  - não magnetizado:  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ .
- Nesse caso, a equação de Vlasov assume a seguinte forma

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = 0,$$

onde o campo elétrico é dado pela forma diferencial da Lei de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{\mathbf{v}} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v.$$

- Para oscilações de baixa amplitude:  $f_{\alpha} = f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1}$ ,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$ .

# Introdução

---

Teoria de turbulência fraca

- Na presença de uma instabilidade, a intensidade do campo elétrico é amplificada;

- Na presença de uma instabilidade, a intensidade do campo elétrico é amplificada;
- Com o aumento da amplitude dos campos perturbativos, os processos que envolvem a interação entre as diferentes oscilações presentes no plasma começam a ganhar importância;

- Na presença de uma instabilidade, a intensidade do campo elétrico é amplificada;
- Com o aumento da amplitude dos campos perturbativos, os processos que envolvem a interação entre as diferentes oscilações presentes no plasma começam a ganhar importância;
- Para descrever essas interações, é necessário que incorporem efeitos não lineares de segunda ordem na descrição cinética do plasma;

- Na presença de uma instabilidade, a intensidade do campo elétrico é amplificada;
- Com o aumento da amplitude dos campos perturbativos, os processos que envolvem a interação entre as diferentes oscilações presentes no plasma começam a ganhar importância;
- Para descrever essas interações, é necessário que incorporem efeitos não lineares de segunda ordem na descrição cinética do plasma;
- Se a intensidade das instabilidades estiver dentro do limite em que  $\mathcal{E}_{\text{fluc}} \ll \mathcal{E}_{\text{kin}}$ , a condição de crescimento lento é satisfeita;

- Na presença de uma instabilidade, a intensidade do campo elétrico é amplificada;
- Com o aumento da amplitude dos campos perturbativos, os processos que envolvem a interação entre as diferentes oscilações presentes no plasma começam a ganhar importância;
- Para descrever essas interações, é necessário que incorporemos efeitos não lineares de segunda ordem na descrição cinética do plasma;
- Se a intensidade das instabilidades estiver dentro do limite em que  $\mathcal{E}_{\text{fluc}} \ll \mathcal{E}_{\text{kin}}$ , a condição de crescimento lento é satisfeita;
- Nesse caso, a análise não linear ainda pode ser feita através de um método perturbativo;

- Na presença de uma instabilidade, a intensidade do campo elétrico é amplificada;
- Com o aumento da amplitude dos campos perturbativos, os processos que envolvem a interação entre as diferentes oscilações presentes no plasma começam a ganhar importância;
- Para descrever essas interações, é necessário que incorporemos efeitos não lineares de segunda ordem na descrição cinética do plasma;
- Se a intensidade das instabilidades estiver dentro do limite em que  $\mathcal{E}_{\text{fluc}} \ll \mathcal{E}_{\text{kin}}$ , a condição de crescimento lento é satisfeita;
- Nesse caso, a análise não linear ainda pode ser feita através de um método perturbativo;
- Este método é conhecido como *teoria de turbulência fraca*.



- Para oscilações de baixa amplitude, podemos escrever

$$f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = F_a(\mathbf{v}) + \delta f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t),$$
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t);$$

- Para oscilações de baixa amplitude, podemos escrever

$$f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = F_a(\mathbf{v}) + \delta f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t),$$
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t);$$

- Substituindo as expressões acima na equação de Vlasov e levando em conta que  $F_a$  é homogênea, ficamos com

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} - \frac{e_a}{m_a} \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \delta f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1)$$

- Tomando a média da Eq. (1), obtemos uma equação para a evolução de  $F_a$

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} = -\frac{e_a}{m_a} \left\langle \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle; \quad (2)$$

- Tomando a média da Eq. (1), obtemos uma equação para a evolução de  $F_a$

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} = -\frac{e_a}{m_a} \left\langle \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle; \quad (2)$$

- E, subtraindo (2) de (1), obtemos uma equação para as flutuações

$$\frac{\partial \delta f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial F_a}{\partial t} + \frac{e_a}{m_a} \left[ \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{v}} - \left\langle \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle \right] = 0; \quad (3)$$

- Tomando a média da Eq. (1), obtemos uma equação para a evolução de  $F_a$

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} = -\frac{e_a}{m_a} \left\langle \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle; \quad (2)$$

- E, subtraindo (2) de (1), obtemos uma equação para as flutuações

$$\frac{\partial \delta f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial F_a}{\partial t} + \frac{e_a}{m_a} \left[ \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{v}} - \left\langle \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle \right] = 0; \quad (3)$$

- Os termos entre colchetes, na equação acima, são descartados na teoria quasilinear;

- Tomando a média da Eq. (1), obtemos uma equação para a evolução de  $F_a$

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} = -\frac{e_a}{m_a} \left\langle \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle; \quad (2)$$

- E, subtraindo (2) de (1), obtemos uma equação para as flutuações

$$\frac{\partial \delta f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial F_a}{\partial t} + \frac{e_a}{m_a} \left[ \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{v}} - \left\langle \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle \right] = 0; \quad (3)$$

- Os termos entre colchetes, na equação acima, são descartados na teoria quasilinear;
- No formalismo não linear, contudo, eles são mantidos.

- Então, decompomos as flutuações em termos de suas transformadas de Fourier-Laplace

$$\delta f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int d^3k \int_L d\omega \delta f_{\mathbf{k},\omega}^a(\mathbf{v}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

$$\delta f_{\mathbf{k},\omega}^a(\mathbf{v}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3r \int_0^\infty dt \delta f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

$$\delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int d^3k \int_L d\omega \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}(t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

$$\delta \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}(t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3r \int_0^\infty dt \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)};$$

- Então, decompos as flutuações em termos de suas transformadas de Fourier-Laplace

$$\begin{aligned}\delta f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= \int d^3k \int_L d\omega \delta f_{\mathbf{k},\omega}^a(\mathbf{v}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \\ \delta f_{\mathbf{k},\omega}^a(\mathbf{v}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3r \int_0^\infty dt \delta f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \\ \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int d^3k \int_L d\omega \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}(t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \\ \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}(t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3r \int_0^\infty dt \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)};\end{aligned}$$

- Para os termos não lineares, a transformada de Fourier-Laplace é dada pela convolução das flutuações

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3r \int dt \delta f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = \int d^3k' \int d\omega' \delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}',\omega-\omega'}^a \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}',\omega'}.$$



## Equações cinéticas não lineares

- Das transformadas, obtemos o conjunto de equações hierárquicas da teoria de turbulência fraca;

## Equações cinéticas não lineares

- Das transformadas, obtemos o conjunto de equações hierárquicas da teoria de turbulência fraca;
- Composto pela equação cinética formal para as partículas do tipo  $a$

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} = -\frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int d^3k \int d\omega \int d^3k' \int d\omega' \langle \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}', \omega'} \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^a \rangle e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} - i(\omega + \omega')t};$$

## Equações cinéticas não lineares

- Das transformadas, obtemos o conjunto de equações hierárquicas da teoria de turbulência fraca;
- Composto pela equação cinética formal para as partículas do tipo  $a$

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} = -\frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int d^3k \int d\omega \int d^3k' \int d\omega' \langle \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}', \omega'} \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^a \rangle e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} - i(\omega + \omega')t};$$

- Pela equação para a evolução da função de distribuição perturbativa das partículas

$$\begin{aligned} \left( \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^a = & -i \frac{e_a}{m_a} \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} \cdot \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{v}} - i \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int d^3k' \int d\omega' \\ & \times \left[ \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}', \omega'} \delta f_{\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'}^a - \langle \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}', \omega'} \delta f_{\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'}^a \rangle \right]; \end{aligned}$$

## Equações cinéticas não lineares

- Das transformadas, obtemos o conjunto de equações hierárquicas da teoria de turbulência fraca;
- Composto pela equação cinética formal para as partículas do tipo  $a$

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} = -\frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int d^3k \int d\omega \int d^3k' \int d\omega' \langle \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}', \omega'} \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^a \rangle e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} - i(\omega+\omega')t};$$

- Pela equação para a evolução da função de distribuição perturbativa das partículas

$$\begin{aligned} \left( \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^a = & -i \frac{e_a}{m_a} \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} \cdot \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{v}} - i \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int d^3k' \int d\omega' \\ & \times [\delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}', \omega'} \delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^a - \langle \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}', \omega'} \delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^a \rangle]; \end{aligned}$$

- E pela forma diferencial da lei de Gauss para as flutuações do campo elétrico

$$\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} = -4\pi \hat{n} i \sum_a e_a \int d^3v \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^a.$$

- Na aproximação de dois tempos, propomos que o fator  $i(\partial/\partial t)$  seja “absorvido” em uma nova definição para a frequência angular,  $\omega \rightarrow \omega + i\partial/\partial t$ ;

- Na aproximação de dois tempos, propomos que o fator  $i(\partial/\partial t)$  seja “absorvido” em uma nova definição para a frequência angular,  $\omega \rightarrow \omega + i\partial/\partial t$ ;
- Dessa forma, a equação para a evolução da função de distribuição perturbativa pode ser resolvida iterativamente até terceira ordem para  $\delta\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}$ ;

- Na aproximação de dois tempos, propomos que o fator  $i(\partial/\partial t)$  seja “absorvido” em uma nova definição para a frequência angular,  $\omega \rightarrow \omega + i\partial/\partial t$ ;
- Dessa forma, a equação para a evolução da função de distribuição perturbativa pode ser resolvida iterativamente até terceira ordem para  $\delta\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}$ ;
- Uma vez obtida a solução iterativa desejada, ela é inserida na equação para o campo elétrico e as medias de ensemble são tomadas;

- Na aproximação de dois tempos, propomos que o fator  $i(\partial/\partial t)$  seja “absorvido” em uma nova definição para a frequência angular,  $\omega \rightarrow \omega + i\partial/\partial t$ ;
- Dessa forma, a equação para a evolução da função de distribuição perturbativa pode ser resolvida iterativamente até terceira ordem para  $\delta\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}$ ;
- Uma vez obtida a solução iterativa desejada, ela é inserida na equação para o campo elétrico e as medias de ensemble são tomadas;
- Resultando na equação não linear para o balanço espectral, que forma a base da teoria de turbulência fraca:



$$\begin{aligned}
& \frac{i}{2} \frac{\partial \epsilon(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}}{\partial t} + \text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} + i \text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \\
& - \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2 \epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) F_a(\mathbf{v}) \\
& = -2 \int d\mathbf{k}' \int d\omega' \left\{ \left[ \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') \right]^2 \left[ \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'}}{\epsilon(\mathbf{k}', \omega')} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'}}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')} \right] - \bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}', \omega' | -\mathbf{k}', -\omega' | \mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'} \right\} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \\
& + 2 \int d\mathbf{k}' \int d\omega' \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')|^2}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'} \quad (4) \\
& - \frac{4}{\pi} \int d\mathbf{k}' \int d\omega' \frac{1}{k^2 |\epsilon(\mathbf{k}', \omega')|^2} \left[ \frac{[\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')]^2}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \right. \\
& - \left. \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')|^2}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'} \right] \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}) F_a(\mathbf{v}) \\
& - \frac{4}{\pi} \int d\mathbf{k}' \int d\omega' \frac{1}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 |\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')|^2} \left[ \frac{[\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')]^2}{\epsilon(\mathbf{k}', \omega')} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \right. \\
& - \left. \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')|^2}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'} \right] \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \omega' - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}) F_a(\mathbf{v}).
\end{aligned}$$

## Na equação para o balanço espectral:

- No lado esquerdo da igualdade estão as expressões que correspondem à aproximação quasilinear;
- No lado direito estão os termos que descrevem processos não lineares;

## Na equação para o balanço espectral:

- No lado esquerdo da igualdade estão as expressões que correspondem à aproximação quasilinear;
- No lado direito estão os termos que descrevem processos não lineares;
- Nos denominadores temos a função resposta dielétrica linear  $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_a \chi_a(\mathbf{k}, \omega);$$

- Sendo:
  - $\sum_a \chi_a(\mathbf{k}, \omega)$  a susceptibilidade dielétrica linear,
  - $\sum_a \chi_a^{(2)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 | \mathbf{k}_2, \omega_2)$  a susceptibilidade não linear de segunda ordem,
  - $\sum_a \tilde{\chi}_a^{(3)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 | \mathbf{k}_2, \omega_2 | \mathbf{k}_3, \omega_3)$  a susceptibilidade não linear de terceira ordem parcial.

## Equação cinética para as partículas

- Procedimento é similar, mas com relação à equação cinética formal para as partículas;

## Equação cinética para as partículas

- Procedimento é similar, mas com relação à equação cinética formal para as partículas;
- Resultando na equação cinética generalizada para as partículas, composta por vários termos não lineares de acoplamento entre as ondas;

# Equação cinética para as partículas

- Procedimento é similar, mas com relação à equação cinética formal para as partículas;
- Resultando na equação cinética generalizada para as partículas, composta por vários termos não lineares de acoplamento entre as ondas;
- Neste trabalho, vamos usar apenas os termos correspondentes à fricção e difusão quasilinear no espaço de velocidades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_a}{\partial t} = & \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \int d\mathbf{k} \int d\omega \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \\ & \times \left[ \text{Im} \frac{m_a \epsilon(\mathbf{k}, \omega)}{2\pi^3 k |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} F_a + \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{v}} \right) \right]. \end{aligned}$$

# Equação cinética das ondas para automodos lineares

- Partindo da expressão geral para o balanço espectral, supomos que as ondas crescem lentamente, ou seja:  $|\text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, \omega)| \ll |\text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega)|$ ;
- Isso significa que o processo de amplificação das ondas não altera a dinâmica do plasma;
- A parte imaginária da equação para o balanço espectral leva à equação cinética das ondas, enquanto a parte real leva à equação de dispersão das ondas;
- Dessa forma, os modos normais de oscilação são determinados pela resposta linear do plasma;
- E as interações onda-partícula e onda-onda são descritas pelas equações cinéticas não lineares das ondas e das partículas;
- Resultando em teoria que descreve interações não lineares que envolvem os automodos lineares do plasma.

- As relações de dispersão para os modos normais lineares são dadas pela soluções da seguinte equação

$$0 = \text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}; \quad (5)$$



## Modos normais de oscilação

- As relações de dispersão para os modos normais lineares são dadas pela soluções da seguinte equação

$$0 = \text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}; \quad (5)$$

- Supondo que  $\omega = \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}$  seja a solução da equação acima;

- As relações de dispersão para os modos normais lineares são dadas pela soluções da seguinte equação

$$0 = \text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}; \quad (5)$$

- Supondo que  $\omega = \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}$  seja a solução da equação acima;
- Podemos escrever a amplitude espectral das ondas:

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = \sum_{\alpha} [I_{\mathbf{k}}^{+\alpha} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) + I_{\mathbf{k}}^{-\alpha} \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})], \quad (6)$$

onde  $\pm$  denota a direção de propagação de  $\alpha$ ;

## Modos normais de oscilação

- As relações de dispersão para os modos normais lineares são dadas pela soluções da seguinte equação

$$0 = \text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}; \quad (5)$$

- Supondo que  $\omega = \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}$  seja a solução da equação acima;
- Podemos escrever a amplitude espectral das ondas:

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = \sum_{\alpha} [I_{\mathbf{k}}^{+\alpha} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) + I_{\mathbf{k}}^{-\alpha} \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})], \quad (6)$$

onde  $\pm$  denota a direção de propagação de  $\alpha$ ;

- Sendo que os modos normais  $\alpha$ , são os modos de oscilação que satisfazem

$$\epsilon(\mathbf{k}, \pm \omega_{\mathbf{k}, \omega}^{\alpha}) \approx 0. \quad (7)$$

# Equação cinética para os modos normais eletrostáticos

- Em um plasma não magnetizado, a equação para os modos eletrostáticos é a seguinte

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\partial t} = & - \frac{2\text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} I_{\mathbf{k}}^{\alpha} + \sum_{a=e,i} \frac{4e^2}{k^2 [\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})]^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}) \\
 & - \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int d\mathbf{k}' A_{\alpha, \beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') I_{\mathbf{k}'}^{\beta} I_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sum_{a=e,i} \frac{16e_a^2}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \sum_{\sigma'=\pm 1} \sum_{\beta=L,S} \\
 & \times \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{k}' \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})|^2}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 |\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})|^2} \\
 & \times \left[ \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\epsilon(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})} - \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta}}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \right] \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] f_a(\mathbf{v}) \\
 & - 4\pi \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \sum_{\sigma''=\pm 1} \int d\mathbf{k}' \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma})|^2}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \\
 & \times \left( \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma} I_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\epsilon'(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})} + \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\beta} I_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\epsilon'(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma})} - \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\beta} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma}}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \right) \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma}),
 \end{aligned}$$

- O coeficiente  $A_{\alpha,\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  é dado por

$$A_{\alpha,\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{4}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \operatorname{Im} \left( 2 [\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})]^2 \right. \\ \left. \times \mathcal{P} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})} - \bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | -\mathbf{k}', -\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \right);$$

- Onde a seguinte notação foi usada

$$\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) = \frac{\partial \operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}{\partial \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}}.$$

## Equação cinética para ondas de Langmuir ( $L$ )

- Em um plasma não magnetizado, existem dois modos eletrostáticos, as ondas de Langmuir ( $\alpha = L$ ) e as ondas íon-acústicas ( $\alpha = S$ );

## Equação cinética para ondas de Langmuir ( $L$ )

- Em um plasma não magnetizado, existem dois modos eletrostáticos, as ondas de Langmuir ( $\alpha = L$ ) e as ondas íon-acústicas ( $\alpha = S$ );
- A equação cinética para as ondas  $L$  é dada por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} = & \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \, \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left( \hat{n} e^2 F_e(\mathbf{v}) + \pi(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \right) \\
 & - \pi\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{e^2}{2T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma''} \int d\mathbf{k}' \frac{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \left( \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \right. \\
 & \left. + \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S} \right) \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S) \\
 & + \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] \\
 & \times \left[ \frac{\hat{n} e^2}{\omega_{pe}^2} (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}) [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})] + \pi \frac{m_e}{m_i} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right].
 \end{aligned}$$

# Equação cinética para ondas íon-acústicas ( $S$ )

- Para as ondas  $S$  temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} &= \mu_{\mathbf{k}}^S \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left[ \hat{n} e^2 [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})] \right. \\
 &\quad + \pi(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L) \left( \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} \Big] \\
 &\quad - \pi\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{e^2}{4T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma''} \int d\mathbf{k}' \frac{\mu_{\mathbf{k}}^S [\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \left( \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' L} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} \right. \\
 &\quad + \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' L} \Big) \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L) \\
 &\quad + \frac{e^2 \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L}{m_e^2 \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \frac{\mu_{\mathbf{k}}^S \mu_{\mathbf{k}'}^S (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{\lambda_{De}^4 k^4 k'^4} \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^S - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] \\
 &\quad \times \left[ \frac{\hat{n} e^2}{\omega_{pe}^2} W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left( \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' S}}{\mu_{\mathbf{k}'}^S} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} \right) [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})] \right. \\
 &\quad + \frac{m_e}{m_i} \frac{\pi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \left( W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + \sigma \sigma' \frac{k'}{k} \right) \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' S}}{\mu_{\mathbf{k}'}^S} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \Big].
 \end{aligned}$$



## Equação cinética das partículas

- Por fim, temos a equação que descreve a evolução temporal das partículas considerando os efeitos de fricção e de difusão no espaço de velocidades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_a(\mathbf{v})}{\partial t} = & \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \sum_{\sigma} \sum_{\alpha=L,S} \int d^3k \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \mu_{\mathbf{k}}^{\alpha} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \\ & \times \left( \frac{m_a}{4\pi^2} \frac{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L}{k} F_a(\mathbf{v}) + \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\mu_{\mathbf{k}}^{\alpha}} \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial F_a(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right). \end{aligned}$$

## Equação cinética das partículas

- Por fim, temos a equação que descreve a evolução temporal das partículas considerando os efeitos de fricção e de difusão no espaço de velocidades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_a(\mathbf{v})}{\partial t} = & \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \sum_{\sigma} \sum_{\alpha=L,S} \int d^3k \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \mu_{\mathbf{k}}^{\alpha} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \\ & \times \left( \frac{m_a}{4\pi^2} \frac{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L}{k} F_a(\mathbf{v}) + \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\mu_{\mathbf{k}}^{\alpha}} \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial F_a(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right). \end{aligned}$$

- Nas três equações anteriores foram usadas as seguintes definições:

$$\frac{1}{\epsilon'_{\parallel}(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L)} = \frac{\sigma \mu_{\mathbf{k}}^L \omega_{\mathbf{k}}^L}{2}, \quad \frac{1}{\epsilon'_{\parallel}(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^S)} = \frac{\sigma \mu_{\mathbf{k}}^S \omega_{\mathbf{k}}^L}{2},$$

$$\mu_{\mathbf{k}}^L = 1, \quad \mu_{\mathbf{k}}^S = |k|^3 \lambda_{De}^3 \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{3T_i}{T_e} \right)^{1/2}.$$

## Teoria de turbulência fraca para plasmas colisionais

---

## Resumindo o que foi feito até este ponto

- O formalismo apresentado até o momento tem como premissa básica a suposição de que apenas as frequências que satisfazem  $\omega = \omega_{\mathbf{k}}$  têm influência significativa na dinâmica do plasma;

## Resumindo o que foi feito até este ponto

- O formalismo apresentado até o momento tem como premissa básica a suposição de que apenas as frequências que satisfazem  $\omega = \omega_{\mathbf{k}}$  têm influência significativa na dinâmica do plasma;
- Contudo, a densidade de energia espectral  $\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}$  é definida por todos  $\mathbf{k}$  e  $\omega$ ;

## Resumindo o que foi feito até este ponto

- O formalismo apresentado até o momento tem como premissa básica a suposição de que apenas as frequências que satisfazem  $\omega = \omega_{\mathbf{k}}$  têm influência significativa na dinâmica do plasma;
- Contudo, a densidade de energia espectral  $\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega}$  é definida por todos  $\mathbf{k}$  e  $\omega$ ;
- O que significa que as flutuações em que  $\omega \neq \omega_{\mathbf{k}}$ , que caracterizam os não auto modos, são completamente ignoradas, levando à seguinte expressão

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} = \sum_{\alpha} [I_{\mathbf{k}}^{+\alpha} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) + I_{\mathbf{k}}^{-\alpha} \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})];$$

## Resumindo o que foi feito até este ponto

- O formalismo apresentado até o momento tem como premissa básica a suposição de que apenas as frequências que satisfazem  $\omega = \omega_{\mathbf{k}}$  têm influência significativa na dinâmica do plasma;
- Contudo, a densidade de energia espectral  $\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}$  é definida por todos  $\mathbf{k}$  e  $\omega$ ;
- O que significa que as flutuações em que  $\omega \neq \omega_{\mathbf{k}}$ , que caracterizam os não auto modos, são completamente ignoradas, levando à seguinte expressão

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = \sum_{\alpha} [I_{\mathbf{k}}^{+\alpha} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) + I_{\mathbf{k}}^{-\alpha} \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})];$$

- Que resulta nas equações que acabamos de ver na seção anterior.

- Em um trabalho recente [P. H. Yoon et al., Phys. Rev. E 93:033203 (2016)] o formalismo eletrostático da teoria de turbulência fraca foi generalizado para a inclusão da contribuição dos não automodos de oscilação do plasma;



- Em um trabalho recente [P. H. Yoon et al., Phys. Rev. E 93:033203 (2016)] o formalismo eletrostático da teoria de turbulência fraca foi generalizado para a inclusão da contribuição dos não automodos de oscilação do plasma;
- Dessa nova abordagem resulta uma expressão generalizada para a densidade de energia espectral que inclui a contribuição desses modos não normais;

- Em um trabalho recente [P. H. Yoon et al., Phys. Rev. E 93:033203 (2016)] o formalismo eletrostático da teoria de turbulência fraca foi generalizado para a inclusão da contribuição dos não automodos de oscilação do plasma;
- Dessa nova abordagem resulta uma expressão generalizada para a densidade de energia espectral que inclui a contribuição desses modos não normais;
- Nessa seção vamos explorar a lógica por trás dessa generalização e mostrar como ela modifica as equações cinéticas das ondas e das partículas.

- Vamos considerar apenas a parte linear da equação para o balanço espectral (4):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}}{\partial t} + \operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} + i \operatorname{Im} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \\ = \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2 \epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (8)$$

onde  $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$  é a função dielétrica:

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = \sum_a \frac{4\pi e_a^2}{m_a k^2} \int d\mathbf{v} \frac{\mathbf{k} \cdot \partial f_a / \partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i0}. \quad (9)$$

## Definindo os não automodos

- Vamos considerar apenas a parte linear da equação para o balanço espectral (4):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}}{\partial t} + \operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} + i \operatorname{Im} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \\ = \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2 \epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (8)$$

onde  $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$  é a função dielétrica:

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = \sum_a \frac{4\pi e_a^2}{m_a k^2} \int d\mathbf{v} \frac{\mathbf{k} \cdot \partial f_a / \partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i0}. \quad (9)$$

- Tomando a parte real de (8), obtemos

$$\operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \left[ \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2 |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}) \right] = 0. \quad (10)$$

## Definindo os não automodos

- Em (10), temos duas possibilidades para o espaço de número de onda e frequência;

## Definindo os não automodos

- Em (10), temos duas possibilidades para o espaço de número de onda e frequência;
- Para a região de  $(\mathbf{k}, \omega)$  em que  $|\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2 \neq 0$  temos a contribuição dos não automodos

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0, \quad (11)$$

onde

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0 \equiv \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2 |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}), \quad (12)$$

cujas soluções estão definidas apenas para  $|\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2 \neq 0$ ;

## Definindo os não automodos

- Em (10), temos duas possibilidades para o espaço de número de onda e frequência;
- Para a região de  $(\mathbf{k}, \omega)$  em que  $|\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2 \neq 0$  temos a contribuição dos não automodos

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0, \quad (11)$$

onde

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0 \equiv \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2 |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}), \quad (12)$$

cujas soluções estão definidas apenas para  $|\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2 \neq 0$ ;

- Para os automodos, a solução é dada por  $\omega = \omega_{\mathbf{k}}^\alpha$ , o que leva a  $\epsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^\alpha) = 0$ ;

## Definindo os não automodos

- Em (10), temos duas possibilidades para o espaço de número de onda e frequência;
- Para a região de  $(\mathbf{k}, \omega)$  em que  $|\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2 \neq 0$  temos a contribuição dos não automodos

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0, \quad (11)$$

onde

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0 \equiv \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2 |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}), \quad (12)$$

cujas soluções estão definidas apenas para  $|\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2 \neq 0$ ;

- Para os automodos, a solução é dada por  $\omega = \omega_{\mathbf{k}}^\alpha$ , o que leva a  $\epsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^\alpha) = 0$ ;
- Logo, o denominador será não nulo apenas quando  $\omega \neq \omega_{\mathbf{k}}^\alpha$ ;



## Definindo os não automodos

- Em (10), temos duas possibilidades para o espaço de número de onda e frequência;
- Para a região de  $(\mathbf{k}, \omega)$  em que  $|\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2 \neq 0$  temos a contribuição dos não automodos

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0, \quad (11)$$

onde

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0 \equiv \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2 |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}), \quad (12)$$

cujas soluções estão definidas apenas para  $|\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2 \neq 0$ ;

- Para os automodos, a solução é dada por  $\omega = \omega_{\mathbf{k}}^\alpha$ , o que leva a  $\epsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^\alpha) = 0$ ;
- Logo, o denominador será não nulo apenas quando  $\omega \neq \omega_{\mathbf{k}}^\alpha$ ;
- Nesse caso,  $\omega$  não satisfaz a relação de dispersão;

## Definindo os não automodos

- Em (10), temos duas possibilidades para o espaço de número de onda e frequência;
- Para a região de  $(\mathbf{k}, \omega)$  em que  $|\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2 \neq 0$  temos a contribuição dos não automodos

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0, \quad (11)$$

onde

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0 \equiv \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2 |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}), \quad (12)$$

cujas soluções estão definidas apenas para  $|\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2 \neq 0$ ;

- Para os automodos, a solução é dada por  $\omega = \omega_{\mathbf{k}}^\alpha$ , o que leva a  $\epsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^\alpha) = 0$ ;
- Logo, o denominador será não nulo apenas quando  $\omega \neq \omega_{\mathbf{k}}^\alpha$ ;
- Nesse caso,  $\omega$  não satisfaz a relação de dispersão;
- Portanto,  $\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0$  representa a contribuição dos modos não normais de oscilação.

## Duas situações distintas

- Portanto, temos duas situações distintas:

## Duas situações distintas

- Portanto, temos duas situações distintas:
  - O caso em que a densidade de energia espectral pode ser descrita da forma apresentada no slide anterior.

## Duas situações distintas

- Portanto, temos duas situações distintas:
  - O caso em que a densidade de energia espectral pode ser descrita da forma apresentada no slide anterior.
  - E o formalismo padrão da teoria de turbulência fraca, em que apenas os modos normais de oscilação são importantes e a densidade de energia das flutuações do campo elétrico é dada por

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} - \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0 = \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L, S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \delta(\omega - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})$$

$$\text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) = 0;$$

## Duas situações distintas

- Portanto, temos duas situações distintas:
  - O caso em que a densidade de energia espectral pode ser descrita da forma apresentada no slide anterior.
  - E o formalismo padrão da teoria de turbulência fraca, em que apenas os modos normais de oscilação são importantes e a densidade de energia das flutuações do campo elétrico é dada por

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} - \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0 = \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L, S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \delta(\omega - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})$$

$$\text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) = 0;$$

- Com os automodos, descrevemos os processos coletivos, que envolvem ondas e instabilidades cinéticas;

## Duas situações distintas

- Portanto, temos duas situações distintas:
  - O caso em que a densidade de energia espectral pode ser descrita da forma apresentada no slide anterior.
  - E o formalismo padrão da teoria de turbulência fraca, em que apenas os modos normais de oscilação são importantes e a densidade de energia das flutuações do campo elétrico é dada por

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} - \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0 = \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L, S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \delta(\omega - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})$$

$$\text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) = 0;$$

- Com os automodos, descrevemos os processos coletivos, que envolvem ondas e instabilidades cinéticas;
- Já a inclusão dos modos não normais, leva a uma nova teoria de primeiros princípios que descreve as interações colisionais do plasma.

- Para incluir as contribuições dos automodos e dos não automodos, vamos definir a seguinte quantidade

$$\Psi_{\mathbf{k},\omega} \equiv \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} - \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega}^0 ;$$



- Para incluir as contribuições dos automodos e dos não automodos, vamos definir a seguinte quantidade

$$\Psi_{\mathbf{k},\omega} \equiv \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} - \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega}^0 ;$$

- A quantidade  $\Psi_{\mathbf{k},\omega}$  representa a *autofunção* total que pode ser expressa como

$$\Psi_{\mathbf{k},\omega} = \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \delta(\omega - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}),$$

sendo  $\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}$  o autovalor que satisfaz  $\text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) = 0$ ;

- Para incluir as contribuições dos automodos e dos não automodos, vamos definir a seguinte quantidade

$$\Psi_{\mathbf{k},\omega} \equiv \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} - \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega}^0 ;$$

- A quantidade  $\Psi_{\mathbf{k},\omega}$  representa a *autofunção* total que pode ser expressa como

$$\Psi_{\mathbf{k},\omega} = \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \delta(\omega - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}),$$

sendo  $\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}$  o autovalor que satisfaz  $\text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) = 0$ ;

- Com isso, obtemos uma expressão generalizada para as flutuações do campo elétrico:

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} = \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega}^0 + \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \delta(\omega - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}). \quad (13)$$

## Teoria de turbulência fraca para plasmas colisionais

---

Não automodos não alteram a equação  
quasilinear das ondas

## Não automodos não alteram a equação quasilinear das ondas

- Substituindo a equação (13) na parte imaginária da equação (8), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0}{\partial t} + 2 \operatorname{Im} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0 \\ & + \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha} \left[ \frac{\partial \operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}{\partial (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha}}{\partial t} + 2 \operatorname{Im} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha} \right] \delta(\omega - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \\ & = \operatorname{Im} \frac{4}{\pi k^2 \epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}); \end{aligned}$$

## Não automodos não alteram a equação quasilinear das ondas

- Substituindo a equação (13) na parte imaginária da equação (8), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0}{\partial t} + 2 \operatorname{Im} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0 \\ & + \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha} \left[ \frac{\partial \operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}{\partial (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha}}{\partial t} + 2 \operatorname{Im} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha} \right] \delta(\omega - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \\ & = \operatorname{Im} \frac{4}{\pi k^2 \epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}); \end{aligned}$$

- Fazendo uso das propriedades

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{k}, \omega)} &= \mathcal{P} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{k}, \omega)} - \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L, S} \frac{i\pi \delta(\omega - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}{\epsilon'(\mathbf{k}, \omega)} \\ \frac{1}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} &= \mathcal{P} \frac{1}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} + \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L, S} \frac{i\pi \delta(\omega - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}{\epsilon'(\mathbf{k}, \omega)}, \end{aligned}$$

onde  $\epsilon'(\mathbf{k}, \omega) = \partial \operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) / \partial \omega$ , obtemos...

- ...a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
& \epsilon'(\mathbf{k}, \omega) \frac{\partial \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0}{\partial t} + \text{Im} \frac{4}{\pi k^2 \epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}) \\
& + \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha} \left[ \epsilon'(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha}}{\partial t} + 2 \text{Im} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha} \right] \delta(\omega - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \\
& = \text{Im} \mathcal{P} \frac{4}{\pi k^2 \epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}) \\
& + \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha} \frac{4 \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{k^2 \epsilon'(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v});
\end{aligned}$$

- ...a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
& \epsilon'(\mathbf{k}, \omega) \frac{\partial \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0}{\partial t} + \text{Im} \frac{4}{\pi k^2 \epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}) \\
& + \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha} \left[ \epsilon'(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha}}{\partial t} + 2 \text{Im} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha} \right] \delta(\omega - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \\
& = \text{Im} \mathcal{P} \frac{4}{\pi k^2 \epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}) \\
& + \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha} \frac{4 \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{k^2 \epsilon'(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v});
\end{aligned}$$

- De acordo com a definição de  $\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0$ , o argumento da constante dielétrica exclui os automodos;

- ...a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
& \epsilon'(\mathbf{k}, \omega) \frac{\partial \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0}{\partial t} + \text{Im} \frac{4}{\pi k^2 \epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}) \\
& + \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha} \left[ \epsilon'(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha}}{\partial t} + 2 \text{Im} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha} \right] \delta(\omega - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \\
& = \text{Im} \mathcal{P} \frac{4}{\pi k^2 \epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}) \\
& + \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha} \frac{4 \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{k^2 \epsilon'(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v});
\end{aligned}$$

- De acordo com a definição de  $\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0$ , o argumento da constante dielétrica exclui os automodos;
- Portanto, o segundo termo do lado esquerdo da igualdade é tomado com o valor principal, cancelando o primeiro termo do lado direito.



- Supondo  $\partial \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0 / \partial t = 0$  e rearranjando a equação anterior, ficamos com

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\partial t} = -\frac{2 \operatorname{Im} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} + \frac{4}{k^2 [\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})]^2} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}),$$

que é a equação cinética quasilinear, mais o termo de emissão espontânea;

- Supondo  $\partial \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0 / \partial t = 0$  e rearranjando a equação anterior, ficamos com

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\partial t} = -\frac{2 \operatorname{Im} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} + \frac{4}{k^2 [\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})]^2} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}),$$

que é a equação cinética quasilinear, mais o termo de emissão espontânea;

- Logo, podemos concluir que a inclusão dos não automodos não altera a equação cinética das ondas na aproximação quasilinear.

# Teoria de turbulência fraca para plasmas colisionais

---

Contribuição dos não automodos para a  
equação cinética das partículas

## Contribuição dos não automodos para a equação cinética das partículas

- Relembrando a equação cinética generalizada, quasilinear, para as partículas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial t} = & \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \int d\mathbf{k} \int d\omega \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \\ & \times \left[ \text{Im} \frac{m_a \epsilon(\mathbf{k}, \omega)}{2\pi^3 k |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} f_a + \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} \right) \right]; \end{aligned}$$

# Contribuição dos não automodos para a equação cinética das partículas

- Relembrando a equação cinética generalizada, quasilinear, para as partículas:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} = \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \int d\mathbf{k} \int d\omega \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \\ \times \left[ \text{Im} \frac{m_a \epsilon(\mathbf{k}, \omega)}{2\pi^3 k |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} f_a + \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} \right) \right];$$

- Substituindo  $\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}$  pela expressão generalizada para a inclusão dos não automodos, ficamos com

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} = \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \int d\mathbf{k} \int d\omega \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left[ \text{Im} \mathcal{P} \frac{m_a}{2\pi^3 k \epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} f_a(\mathbf{v}) \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi k^2 |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \sum_b e_b^2 \int d\mathbf{v}' \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') f_b(\mathbf{v}') \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial f_a(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right) \right. \\ \left. + \sum_{\sigma} \sum_{\alpha} \frac{\pi m_a \delta(\omega - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}{2\pi^3 k \epsilon'(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} f_a(\mathbf{v}) + \sum_{\sigma} \sum_{\alpha} I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha} \delta(\omega - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial f_a(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right) \right].$$

- Integrando em  $\omega$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial t} = & \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \int d\mathbf{k} \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \left[ \mathcal{P} \frac{m_a \text{Im} \epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{2\pi^3 k |\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2} f_a(\mathbf{v}) \right. \\ & + \frac{2}{\pi k^2 |\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2} \sum_b e_b^2 \int d\mathbf{v}' \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') f_b(\mathbf{v}') \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial f_a(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right) \Big] \\ & + \frac{\pi e_a^2}{m_a} \sum_{\sigma} \sum_{\alpha} \int d\mathbf{k} \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \\ & \times \left[ \frac{\pi m_a}{2\pi^3 k \epsilon'(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} f_a(\mathbf{v}) + I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha} \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial f_a(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right) \right] \end{aligned}$$

e, fazendo uso da definição de  $\text{Im} \epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$\text{Im} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) = -\pi \sum_{\alpha} \frac{4\hat{n}\pi e_a^2}{m_a k^2} \int d\mathbf{v} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}),$$

obtemos...

- ...a equação cinética generalizada para as partículas:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_a(\mathbf{v})}{\partial t} = & \sum_b \frac{2e_a^2 e_b^2 n_b}{m_a} \frac{\partial}{\partial v_i} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{v}' \frac{k_i k_j}{k^4} \frac{\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')}{|\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2} \\
 & \times \left( \frac{\partial}{\partial v_j} - \frac{m_a}{m_b} \frac{\partial}{\partial v'_j} \right) F_a(\mathbf{v}) F_b(\mathbf{v}') \\
 & + \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \sum_{\sigma} \sum_{\alpha=L,S} \int d\mathbf{k} \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \\
 & \times \left( \frac{m_a}{2\pi^2 k \epsilon'(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L)} F_a(\mathbf{v}) + I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha} \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial F_a(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right),
 \end{aligned} \tag{14}$$

- Onde  $f_a(\mathbf{v}) = \hat{n} F_a(\mathbf{v})$  e  $\int d^3v F_a(\mathbf{v}) = 1$ .

# Teoria de turbulência fraca para plasmas colisionais

---

Contribuição dos não automodos para a  
equação cinética não linear das ondas



- Considerando os termos não lineares da equação para o balanço espectral (4);

- Considerando os termos não lineares da equação para o balanço espectral (4);
- Vamos desconsiderar todas as flutuações dos não automodos com argumento  $\mathbf{k}$  e  $\omega$ , uma vez que os não automodos não estão definidos na região em que  $\omega = \sigma\omega_{\mathbf{k}}$ ;

- Considerando os termos não lineares da equação para o balanço espectral (4);
- Vamos desconsiderar todas as flutuações dos não automodos com argumento  $\mathbf{k}$  e  $\omega$ , uma vez que os não automodos não estão definidos na região em que  $\omega = \sigma\omega_{\mathbf{k}}$ ;
- As flutuações com outros argumentos são mantidas.

$$\begin{aligned}
\text{NL} = & -2 \int d\mathbf{k}' \int d\omega' \left\{ \left[ \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') \right]^2 \right. \\
& \times \left[ \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0 + \sum_{\sigma''} \sum_{\gamma} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''\gamma} \delta(\omega - \omega' - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma})}{\epsilon(\mathbf{k}', \omega')} \right. \\
& + \left. \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'}^0 + \sum_{\sigma'} \sum_{\beta} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta} \delta(\omega' - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')} \right] - \bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}', \omega | -\mathbf{k}', -\omega' | \mathbf{k}, \omega) \\
& \times \left. \left[ \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'}^0 + \sum_{\sigma'} \sum_{\beta} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta} \delta(\omega' - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}) \right] \right\} \sum_{\sigma} \sum_{\alpha} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \delta(\omega - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \\
& + 2 \int d\mathbf{k}' \int d\omega' \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')|^2}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \left[ \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'}^0 + \sum_{\sigma'} \sum_{\beta} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta} \delta(\omega' - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}) \right] \\
& \times \left[ \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0 + \sum_{\sigma''} \sum_{\gamma} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''\gamma} \delta(\omega - \omega' - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4}{\pi} \int d\mathbf{k}' \int d\omega' \frac{1}{k^2 |\epsilon(\mathbf{k}', \omega')|^2} \left\{ \frac{[\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')]^2}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')} \sum_{\sigma} \sum_{\alpha} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \delta(\omega - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \right. \\
& - \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')|^2}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \left[ \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0 + \sum_{\sigma''} \sum_{\gamma} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''\gamma} \delta(\omega - \omega' - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma}) \right] \Big\} \\
& \times \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) F_a(\mathbf{v}) \\
& - \frac{4}{\pi} \int d\mathbf{k}' \int d\omega' \frac{1}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 |\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')|^2} \left\{ \frac{[\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')]^2}{\epsilon(\mathbf{k}', \omega')} \right. \\
& \times \sum_{\sigma} \sum_{\alpha} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \delta(\omega - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) - \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')|^2}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \\
& \times \left[ \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'}^0 + \sum_{\sigma'} \sum_{\beta} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta} \delta(\omega' - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}) \right] \Big\} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \omega' - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}) F_a(\mathbf{v}).
\end{aligned}$$

# Termos de correção dos não automodos para a equação cinética das ondas

- Usando o mesmo procedimento aplicado à equação quasilinear, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \text{corr} = & - \sum_{\sigma'} \sum_{\beta} \sum_a 8\pi e_a^2 \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta | \mathbf{k} - \mathbf{k}', (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v})|^2}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 |\epsilon[\mathbf{k} - \mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}', (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}]|^2} \\
 & \times \left[ \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\epsilon'(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta)} - \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta}}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha)} \right] \delta[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] f_a(\mathbf{v}) \\
 & - \sum_a \frac{4e_a^2}{\pi} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \text{Im} \left[ \mathcal{P} \frac{2[\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v})]^2}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v})} \right. \\
 & \left. - \bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v} | -\mathbf{k}', -\mathbf{k}' \cdot \mathbf{v} | \mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha) \right] \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{k'^2 |\epsilon(\mathbf{k}', \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v})|^2} f_a(\mathbf{v}) \\
 & + \sum_a \sum_b \frac{24e_a^2 e_b^2}{\pi} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' \frac{|\chi^{(2)}[\mathbf{k}', \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}]|^2}{k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 |\epsilon(\mathbf{k}', \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}')|^2 |\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v})|^2} \\
 & \times \frac{\delta[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{k}' \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}')] }{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha)} f_a(\mathbf{v}) f_b(\mathbf{v}').
 \end{aligned}$$

- A contribuição dos não automodos é mais importante na região de maior concentração de partículas, ou seja, em torno de  $v = 0$ ;
- Dessa forma, podemos tratar o argumento de frequência angular que aparece na função resposta linear como  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \approx 0$ , resultando em

$$\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \approx \epsilon(\mathbf{k}, 0) = 1 + \frac{2\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right);$$

- A contribuição dos não automodos é mais importante na região de maior concentração de partículas, ou seja, em torno de  $v = 0$ ;
- Dessa forma, podemos tratar o argumento de frequência angular que aparece na função resposta linear como  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \approx 0$ , resultando em

$$\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \approx \epsilon(\mathbf{k}, 0) = 1 + \frac{2\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right);$$

- Com isso obtemos a equação cinética generalizada das ondas, que inclui a contribuição dos modos não normais de oscilação:



## Equação cinética generalizada das ondas

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\partial t} = & -\frac{2\text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} I_{\mathbf{k}}^{\alpha} + \sum_a \frac{4e^2}{k^2 [\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})]^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}) \\
 & -4\pi \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \sum_{\sigma', \sigma''} \int d\mathbf{k}' \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, |\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma})|^2}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \\
 & \times \left( \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma} I_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\epsilon'(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})} + \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\beta} I_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\epsilon'(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma})} - \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\beta} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma}}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \right) \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma}) \\
 & - \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{k}' A_{\alpha, \beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') I_{\mathbf{k}'}^{\beta} I_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sum_a \frac{16e_a^2}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \sum_{\sigma'} \sum_{\beta} \\
 & \times \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{k}' \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, |\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})|^2}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 |\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})|^2} \\
 & \times \left[ \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\epsilon(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})} - \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta}}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \right] \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] f_a(\mathbf{v})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_a \frac{16e_a^2}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha)} \sum_{\sigma'} \sum_{\beta} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 \lambda_{De}^4 |\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^\beta | \mathbf{k} - \mathbf{k}', 0)|^2}{|1 + T_e/T_i + |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 \lambda_{De}^2|^2} \\
& \times \left[ \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\epsilon'(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^\beta)} - \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta}}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha)} \right] \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^\beta - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] f_a(\mathbf{v}) \\
& - \sum_a \frac{8e_a^2}{\pi} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \frac{k'^2 \lambda_{De}^4}{|1 + T_e/T_i + k'^2 \lambda_{De}^2|^2} \\
& \times \text{Im} \left[ \mathcal{P} \frac{2[\chi^{(2)}(\mathbf{k}', 0 | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha)]^2}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha)} - \bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}', 0 | -\mathbf{k}', 0 | \mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha) \right] I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} f_a(\mathbf{v}) \\
& + \sum_a \sum_b \frac{48e_a^2 e_b^2}{\pi [\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha)]^2} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' \frac{k'^2 |\chi^{(2)}(\mathbf{k}', 0 | \mathbf{k} - \mathbf{k}', 0)|^2}{|1 + T_e/T_i + k^2 \lambda_{De}^2|^2} \\
& \times \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 \lambda_{De}^8}{|1 + T_e/T_i + |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 \lambda_{De}^2|^2} \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{k}' \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}')] f_a(\mathbf{v}) f_b(\mathbf{v}').
\end{aligned}$$

## Correção para o espalhamento espontâneo

- O termo em azul claro é um termo de correção para o efeito de emissão espontânea, cuja forma final é a seguinte

$$u_{k,k'}^{L(\text{corr})} = -\frac{\hat{n}e^2}{m_e^2\omega_{pe}^4}\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |1 + T_e/T_i + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 \lambda_{De}^2|^2} \\ \times \left( \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} \right) \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})],$$

$$u_{k,k'}^{S(\text{corr})} = -\frac{\hat{n}e^2}{m_e^2\omega_{pe}^4}\mu_{\mathbf{k}}\mu_{\mathbf{k}'}\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \frac{1}{k^2 k'^2 \lambda_{De}^4} \left( 1 - \frac{T_e}{T_i} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{k'^2} \right)^2 \\ \times \left[ 1 + \frac{T_e}{T_i} + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 \lambda_{De}^2 \right]^{-2} \left( \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S I_{\mathbf{k}}^{\sigma S} - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^S I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' S} \right) \\ \times \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^S - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})].$$

## Espalhamento espontâneo corrigido para ondas $L$ e $S$

- Substituindo no termo de espalhamento espontâneo, ficamos com as seguintes expressões para as ondas  $L$  e  $S$

$$u_{k,k'}^L = \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\hat{n} e^4}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \delta[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}]$$

$$\times (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}) \left[ 1 + \frac{1}{|1 + T_e/T_i + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 \lambda_{De}^2|^2} \right] [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})],$$

$$u_{k,k'}^S = \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\hat{n} e^4}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \frac{\mu_{\mathbf{k}}}{k^2 \lambda_{De}^4} \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{k}' \frac{\mu_{\mathbf{k}'}}{k'^2} \int d\mathbf{v} [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})]$$

$$\times \left( \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' S}}{\mu_{\mathbf{k}'}} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}} \right) \delta[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}]$$

$$\times \left[ \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} W_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} + \frac{\left(1 - \frac{T_e}{T_i} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{k'^2}\right)^2}{|1 + T_e/T_i + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 \lambda_{De}^2|^2} \right].$$

- Tomando as devidas aproximações do termo em verde, obtemos as equações para o amortecimento colisional das ondas  $L$  e  $S$ :

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{k}}^{\sigma L (\text{coll})} &= \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{4\hat{n}e^4\omega_{pe}^2}{T_e^2} \int d\mathbf{k}' \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2 \lambda_{De}^4}{k^2 k'^4 |\epsilon(\mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L)|^2} \\ &\times \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 \lambda_{De}^2 \right)^{-2} \int d\mathbf{v} \mathbf{k}' \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \delta[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{k}}^{\sigma S (\text{coll})} &= \sigma \mu_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\hat{n}e^4\omega_{pe}^2}{T_e^2} \int d\mathbf{k}' \frac{1}{k^2 k'^4 |\epsilon(\mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^S)|^2} \\ &\times \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 \lambda_{De}^2 \right)^{-2} \left( 1 + \frac{2T_e}{T_i} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{k^2} \right) \\ &\times \int d\mathbf{v} \mathbf{k}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( F_e(\mathbf{v}) + \frac{m_e}{m_i} F_i(\mathbf{v}) \right) \delta[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}]. \end{aligned}$$

- O termo em rosa, descreve o processo de emissão de *bremsstrahlung* eletrostático, um efeito até então desconhecido, cujas equações para ondas  $L$  e  $S$  são as seguintes

$$P_{\mathbf{k}}^{\sigma L} = \frac{3e^2}{4\pi^3} \frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}}^L)^2} \left(1 - \frac{m_e}{m_i} \frac{T_e}{T_i}\right)^2 \frac{v_e^4}{k^2} \int d\mathbf{k}' k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 \left(1 + \frac{T_e}{T_i} + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 \lambda_D^2\right)^{-2} \\ \times \left(1 + \frac{T_e}{T_i} + k'^2 \lambda_D^2\right)^{-2} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' \delta[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{k}' \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}')] \sum_a F_a(\mathbf{v}) \sum_b F_b(\mathbf{v}')$$

$$P_{\mathbf{k}}^{\sigma S} = \mu_{\mathbf{k}} \frac{3e^2 T_e}{16\pi^3 m_e} \left(1 - \frac{T_e}{T_i}\right)^2 \frac{1}{k^2 \lambda_D^2} \int d\mathbf{k}' \left(1 + \frac{T_e}{T_i} + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 \lambda_D^2\right)^{-2} \\ \times \left(1 + \frac{T_e}{T_i} + k'^2 \lambda_D^2\right)^{-2} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' \delta[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{k}' \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}')] \sum_a F_a(\mathbf{v}) \sum_b F_b(\mathbf{v}').$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} = & \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \, \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left( \hat{n} e^2 F_e(\mathbf{v}) + \pi (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \right) \\
 & - \pi \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{e^2}{2T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma''} \int d\mathbf{k}' \frac{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \left( \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \right. \\
 & + \left. \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S} \right) \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S) \\
 & + \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] \\
 & \times \left\{ \frac{\hat{n} e^2}{\omega_{pe}^2} (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}) \left[ 1 + \frac{1}{|1 + T_e/T_i + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 \lambda_{De}^2|^2} \right] [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})] \right. \\
 & + \left. \pi \frac{m_e}{m_i} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right\} + 2I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \gamma_{\mathbf{k}}^{\sigma L} + P_{\mathbf{k}}^{\sigma L}.
 \end{aligned}$$

## Equação generalizada para ondas $S$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} &= \mu_{\mathbf{k}}^S \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left[ \hat{n} e^2 [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})] \right. \\
 &\quad + \pi (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L) \left( \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} \Big] \\
 &\quad - \pi \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{e^2}{4T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma''} \int d\mathbf{k}' \frac{\mu_{\mathbf{k}}^S [\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \left( \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' L} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} \right. \\
 &\quad + \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' L} \Big) \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L) \\
 &\quad + \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^2} \frac{\mu_{\mathbf{k}}^S}{\lambda_{De}^4} \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{k}' \frac{\mu_{\mathbf{k}'}^S}{k^2 k'^2} \int d\mathbf{v} \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] \\
 &\quad \times \left\{ \left[ \frac{\hat{n} e^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{\omega_{pe}^2 k^2 k'^2} W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + \frac{\left(1 - \frac{T_e}{T_i} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{k'^2}\right)^2}{|1 + T_e/T_i + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 \lambda_{De}^2|^2} \right] \right. \\
 &\quad \times \left( \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' S}}{\mu_{\mathbf{k}'}^S} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} \right) [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})] \\
 &\quad + \frac{m_e}{m_i} \frac{\pi (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \left( W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + \sigma \sigma' \frac{k'}{k} \right) \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' S}}{\mu_{\mathbf{k}'}^S} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \Big\} + 2I_{\mathbf{k}}^{\sigma S} \gamma_{\mathbf{k}}^{\sigma S} + P_{\mathbf{k}}^{\sigma S}.
 \end{aligned}$$



## Análise de processos colisionais na teoria de turbulência fraca

---

- O formalismo introduzido no capítulo anterior é a primeira teoria de primeiros princípios, dentro da teoria cinética, a combinar processos coletivos e interações colisionais;

## Alguns aspectos importantes sobre os resultados a serem apresentados

- O formalismo introduzido no capítulo anterior é a primeira teoria de primeiros princípios, dentro da teoria cinética, a combinar processos coletivos e interações colisionais;
- O principal objetivo deste trabalho é investigar numericamente como essas novas equações influenciam a dinâmica do plasma;

## Alguns aspectos importantes sobre os resultados a serem apresentados

- O formalismo introduzido no capítulo anterior é a primeira teoria de primeiros princípios, dentro da teoria cinética, a combinar processos coletivos e interações colisionais;
- O principal objetivo deste trabalho é investigar numericamente como essas novas equações influenciam a dinâmica do plasma;
- Para começar a análise da influência dos não automodos, supomos situações bem simples, cujos resultados, na ausência desses novos termos, eram bem conhecidos;

## Alguns aspectos importantes sobre os resultados a serem apresentados

- O formalismo introduzido no capítulo anterior é a primeira teoria de primeiros princípios, dentro da teoria cinética, a combinar processos coletivos e interações colisionais;
- O principal objetivo deste trabalho é investigar numericamente como essas novas equações influenciam a dinâmica do plasma;
- Para começar a análise da influência dos não automodos, supomos situações bem simples, cujos resultados, na ausência desses novos termos, eram bem conhecidos;
- Os resultados desses primeiros estudos estão nas publicações que serão apresentadas a seguir.

## Amortecimento colisional para ondas de plasma

---

## Collisional damping rates for plasma waves

S. F. Tigik,<sup>1,a)</sup> L. F. Ziebell,<sup>1,b)</sup> and P. H. Yoon<sup>2,3,c)</sup>

<sup>1</sup>*Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 91501-970 Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brazil*

<sup>2</sup>*Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, College Park, Maryland 20742, USA*

<sup>3</sup>*School of Space Research, Kyung Hee University, Yongin, Gyeonggi 446-701, South Korea*

(Received 22 May 2016; accepted 31 May 2016; published online 14 June 2016)

The distinction between the plasma dynamics dominated by collisional transport versus collective processes has never been rigorously addressed until recently. A recent paper [P. H. Yoon *et al.*, Phys. Rev. E **93**, 033203 (2016)] formulates for the first time, a unified kinetic theory in which collective processes and collisional dynamics are systematically incorporated from first principles. One of the outcomes of such a formalism is the rigorous derivation of collisional damping rates for Langmuir and ion-acoustic waves, which can be contrasted to the heuristic customary approach. However, the results are given only in formal mathematical expressions. The present brief communication numerically evaluates the rigorous collisional damping rates by considering the case of plasma particles with Maxwellian velocity distribution function so as to assess the consequence of the rigorous formalism in a quantitative manner. Comparison with the heuristic (“Spitzer”) formula shows that the accurate damping rates are much lower in magnitude than the conventional expression, which implies that the traditional approach over-estimates the importance of attenuation of plasma waves by collisional relaxation process. Such a finding may have a wide applicability ranging from laboratory to space and astrophysical plasmas. *Published by AIP Publishing.*

[<http://dx.doi.org/10.1063/1.4953802>]

# Amortecimento colisional para ondas de plasma

---

## Objetivos



## Objetivos do estudo

- Na modelagem de dados observacionais, quando há evidências de que colisões possam fazer parte da dinâmica, normalmente inclui-se um termo de colisões na equação das partículas e um termo de amortecimento colisional na equação das ondas;

- Na modelagem de dados observacionais, quando há evidências de que colisões possam fazer parte da dinâmica, normalmente inclui-se um termo de colisões na equação das partículas e um termo de amortecimento colisional na equação das ondas;
- O termo de amortecimento colisional é, por via de regra, uma expressão constante, adicionada à equação das ondas de maneira *ad hoc*, conhecida como fórmula de *Spitzer*:

$$\gamma_{\text{coll}} = -\frac{\pi n_e e^4 \ln \Lambda}{m_e^2 v_{Te}^3},$$

onde  $\Lambda = 4\pi n_e \lambda_{De}^3$  e  $\lambda_{De} = \sqrt{T_e / (4\pi n_e e^2)}$ ;

- Na modelagem de dados observacionais, quando há evidências de que colisões possam fazer parte da dinâmica, normalmente inclui-se um termo de colisões na equação das partículas e um termo de amortecimento colisional na equação das ondas;
- O termo de amortecimento colisional é, por via de regra, uma expressão constante, adicionada à equação das ondas de maneira *ad hoc*, conhecida como fórmula de Spitzer:

$$\gamma_{\text{coll}} = -\frac{\pi n_e e^4 \ln \Lambda}{m_e^2 v_{Te}^3},$$

onde  $\Lambda = 4\pi n_e \lambda_{De}^3$  e  $\lambda_{De} = \sqrt{T_e / (4\pi n_e e^2)}$ ;

- Neste estudo testamos a equivalência na intensidade do amortecimento colisional calculado com a nova equação de primeiros princípios com a intensidade calculada pela fórmula de Spitzer;

- Na modelagem de dados observacionais, quando há evidências de que colisões possam fazer parte da dinâmica, normalmente inclui-se um termo de colisões na equação das partículas e um termo de amortecimento colisional na equação das ondas;
- O termo de amortecimento colisional é, por via de regra, uma expressão constante, adicionada à equação das ondas de maneira *ad hoc*, conhecida como fórmula de Spitzer:

$$\gamma_{\text{coll}} = -\frac{\pi n_e e^4 \ln \Lambda}{m_e^2 v_{Te}^3},$$

onde  $\Lambda = 4\pi n_e \lambda_{De}^3$  e  $\lambda_{De} = \sqrt{T_e / (4\pi n_e e^2)}$ ;

- Neste estudo testamos a equivalência na intensidade do amortecimento colisional calculado com a nova equação de primeiros princípios com a intensidade calculada pela fórmula de Spitzer;
- Além disso, comparamos a taxa de amortecimento colisional com a taxa de amortecimento não colisional, considerando um plasma Maxwelliano.

# Amortecimento colisional para ondas de plasma

---

Métodos

- Para facilitar a análise numérica escrevemos as equações em termos das seguintes variáveis adimensionais

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{v_{te}}, \quad z_{\mathbf{q}}^{\alpha} = \frac{\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\omega_{pe}}, \quad \mathbf{q} = \frac{\mathbf{k} v_{te}}{\omega_{pe}} = \mathbf{k} \sqrt{2} \lambda_{De};$$

- Obtendo

$$\gamma_{\mathbf{q}}^{L(\text{coll})} = \frac{2gz_{\mathbf{q}}^L}{q^2} \int d\mathbf{q}' \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2}{q'^4 |\epsilon(\mathbf{q}', z_{\mathbf{q}}^L)|^2} \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} + \frac{(\mathbf{q} - \mathbf{q}')^2}{2} \right)^{-2} \\ \times \int d\mathbf{u} \mathbf{q}' \cdot \frac{\partial \Phi_e(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \delta(z_{\mathbf{q}}^L - \mathbf{q}' \cdot \mathbf{u}),$$

$$\gamma_{\mathbf{q}}^{S(\text{coll})} = \frac{2gz_{\mathbf{q}}^L}{q^2} \int \frac{d\mathbf{q}'}{q'^4 |\epsilon(\mathbf{q}', z_{\mathbf{q}}^S)|^2} \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} + \frac{(\mathbf{q} - \mathbf{q}')^2}{2} \right)^{-2} \left( 1 + \frac{2T_e}{T_i} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}'}{q^2} \right) \\ \times \int d\mathbf{u} \mathbf{q}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( \Phi_e(\mathbf{u}) + \frac{m_e}{m_i} \Phi_i(\mathbf{u}) \right) \delta(z_{\mathbf{q}}^S - \mathbf{q}' \cdot \mathbf{u}).$$

- Em  $\gamma_{\mathbf{q}}^{L(\text{coll})}$  e em  $\gamma_{\mathbf{q}}^{S(\text{coll})}$ , temos as seguintes quantidades

$$g = \frac{1}{2^{3/2}(4\pi)^2 \hat{n} \lambda_{De}^3} = \frac{1}{2^{3/2}(4\pi\Lambda)}, \quad z_{\mathbf{q}}^L = 1 + \frac{3q^2}{4}, \quad z_{\mathbf{q}}^S = q \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{1 + 3T_i/T_e}{2 + q^2};$$

- A normalização da fórmula de Spitzer é dada por

$$\bar{\gamma}_{\text{coll}} \equiv \frac{\gamma_{\text{coll}}}{\omega_{pe}} = -\frac{\pi n_e e^4 \ln \Lambda}{m_e^2 v_{Te}^3 \omega_{pe}} = -\pi g \ln \left( \frac{1}{2^{3/2}(4\pi g)} \right).$$

- As equações para o amortecimento colisional das ondas  $L$  e  $S$  foram integradas numericamente, considerando um plasma Maxwelliano e parâmetro de plasma  $g = 5 \times 10^{-3}$ ;



- As equações para o amortecimento colisional das ondas  $L$  e  $S$  foram integradas numericamente, considerando um plasma Maxwelliano e parâmetro de plasma  $g = 5 \times 10^{-3}$ ;
- A fórmula de Spitzer foi calculada para quatro valores distintos de  $g$ , usando:  
 $\bar{\gamma}_{\text{coll}}/g = \pi \ln [2^{3/2}(4\pi g)]$ .
- Comparamos também com o amortecimento de Landau das ondas  $L$  e  $S$ :

$$\gamma_{\mathbf{q}}^L = -\frac{\pi^{1/2}(z_{\mathbf{q}}^L)^2}{q^3} \exp\left(-\frac{(z_{\mathbf{q}}^L)^2}{q^2}\right),$$
$$\gamma_{\mathbf{q}}^S = -\frac{\pi^{1/2}\mu_{\mathbf{q}}z_{\mathbf{q}}^Lz_{\mathbf{q}}^S}{q^3} \sum_{a=e,i} \frac{T_e}{T_a} \left(\frac{m_a}{m_e} \frac{T_e}{T_a}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_a}{m_e} \frac{T_e}{T_a} \frac{(z_{\mathbf{q}}^S)^2}{q^2}\right).$$

# Amortecimento colisional para ondas de plasma

---

## Resultados

- A taxa de amortecimento colisional dada pela fórmula de Spitzer, aplicável apenas para ondas  $L$ , foi calculada para os seguintes valores de  $g$ :

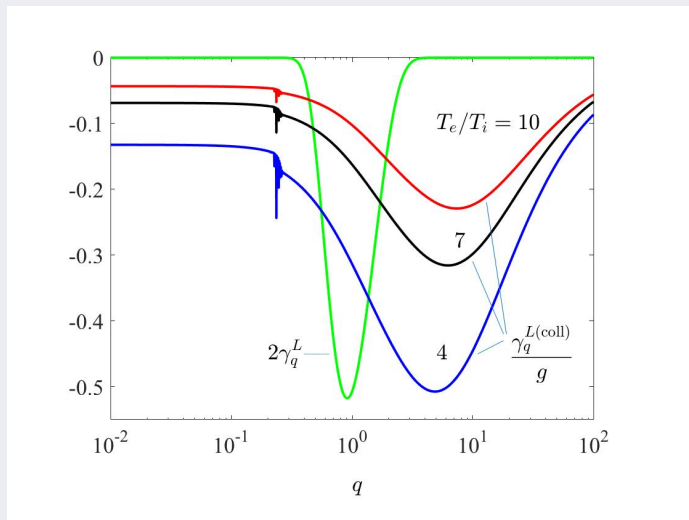
$$g = 10^{-10} \longrightarrow \bar{\gamma}_{\text{coll}}/g \sim -61.12$$

$$g = 10^{-8} \longrightarrow \bar{\gamma}_{\text{coll}}/g \sim -46.65$$

$$g = 10^{-6} \longrightarrow \bar{\gamma}_{\text{coll}}/g \sim -32.18$$

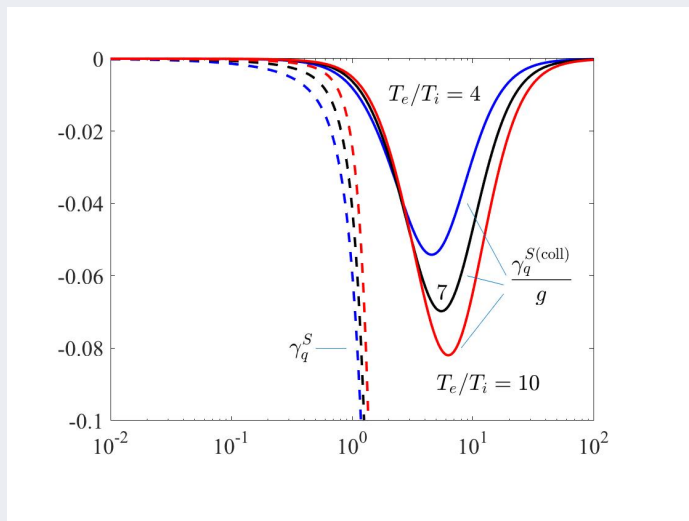
$$g = 10^{-4} \longrightarrow \bar{\gamma}_{\text{coll}}/g \sim -17.72$$

## Resultados da integração para ondas $L$



Resultados para  $\gamma_q^{L(coll)}/g$  e  $\gamma_q^L$ , considerando três temperaturas diferentes e  $g = 5 \times 10^{-3}$ .

## Resultados da integração para ondas $S$



Resultados para  $\gamma_q^{S(coll)}/g$  e  $\gamma_q^S$ , considerando três temperaturas diferentes e  $g = 5 \times 10^{-3}$ .

## Conclusões a respeito desta análise

- A taxa de amortecimento colisional, em comparação com a taxa de amortecimento não colisional, é praticamente desprezível;

## Conclusões a respeito desta análise

- A taxa de amortecimento colisional, em comparação com a taxa de amortecimento não colisional, é praticamente desprezível;
- Lembrando que, nas figuras,  $\gamma_{\mathbf{q}}^{\alpha(\text{coll})}$  está dividido por  $g = 5 \times 10^{-3}$ , enquanto  $\gamma_{\mathbf{q}}^{\alpha}$  não;

## Conclusões a respeito desta análise

- A taxa de amortecimento colisional, em comparação com a taxa de amortecimento não colisional, é praticamente desprezível;
- Lembrando que, nas figuras,  $\gamma_{\mathbf{q}}^{\alpha(\text{coll})}$  está dividido por  $g = 5 \times 10^{-3}$ , enquanto  $\gamma_{\mathbf{q}}^{\alpha}$  não;
- Quando comparamos o resultado da integração da expressão formal para o amortecimento colisional, com os valores calculados com a fórmula de Spitzer, os valores divergem por, pelo menos, seis ordens de grandeza;



## Conclusões a respeito desta análise

- A taxa de amortecimento colisional, em comparação com a taxa de amortecimento não colisional, é praticamente desprezível;
- Lembrando que, nas figuras,  $\gamma_{\mathbf{q}}^{\alpha(\text{coll})}$  está dividido por  $g = 5 \times 10^{-3}$ , enquanto  $\gamma_{\mathbf{q}}^{\alpha}$  não;
- Quando comparamos o resultado da integração da expressão formal para o amortecimento colisional, com os valores calculados com a fórmula de Spitzer, os valores divergem por, pelo menos, seis ordens de grandeza;
- Esse resultado sugere que o amortecimento colisional vem sendo superestimado na modelagem de dados observacionais;

## Conclusões a respeito desta análise

- A taxa de amortecimento colisional, em comparação com a taxa de amortecimento não colisional, é praticamente desprezível;
- Lembrando que, nas figuras,  $\gamma_{\mathbf{q}}^{\alpha(\text{coll})}$  está dividido por  $g = 5 \times 10^{-3}$ , enquanto  $\gamma_{\mathbf{q}}^{\alpha}$  não;
- Quando comparamos o resultado da integração da expressão formal para o amortecimento colisional, com os valores calculados com a fórmula de Spitzer, os valores divergem por, pelo menos, seis ordens de grandeza;
- Esse resultado sugere que o amortecimento colisional vem sendo superestimado na modelagem de dados observacionais;
- O que põe em evidência a importância de uma teoria de primeiros princípios que combine processos coletivos e interações colisionais.

Geração de elétrons  
supratérmicos por processos  
coletivos em plasmas colisionais

---

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL LETTERS, 849:L30 (5pp), 2017 November 10

© 2017. The American Astronomical Society. All rights reserved.

<https://doi.org/10.3847/2041-8213/aa956f>



## Generation of Suprathermal Electrons by Collective Processes in Collisional Plasma

S. F. Tigik<sup>1</sup> , L. F. Ziebell<sup>1</sup> , and P. H. Yoon<sup>2,3,4</sup> 

<sup>1</sup> Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 91501-970 Porto Alegre, RS, Brazil; [sabrina.tigik@ufrgs.br](mailto:sabrina.tigik@ufrgs.br), [luiz.ziebell@ufrgs.br](mailto:luiz.ziebell@ufrgs.br)

<sup>2</sup> Institute for Physical Science & Technology, University of Maryland, College Park, MD 20742, USA; [yoong@umd.edu](mailto:yoong@umd.edu)

<sup>3</sup> School of Space Research, Kyung Hee University, Yongin, Korea

<sup>4</sup> Korea Astronomy and Space Science Institute, Daejeon, Korea

*Received 2017 August 31; revised 2017 October 8; accepted 2017 October 20; published 2017 November 8*

### Abstract

The ubiquity of high-energy tails in the charged particle velocity distribution functions (VDFs) observed in space plasmas suggests the existence of an underlying process responsible for taking a fraction of the charged particle population out of thermal equilibrium and redistributing it to suprathermal velocity and energy ranges. The present Letter focuses on a new and fundamental physical explanation for the origin of suprathermal electron velocity distribution function (EVDF) in a collisional plasma. This process involves a newly discovered electrostatic bremsstrahlung (EB) emission that is effective in a plasma in which binary collisions are present. The steady-state EVDF dictated by such a process corresponds to a Maxwellian core plus a quasi-inverse power-law tail, which is a feature commonly observed in many space plasma environments. In order to demonstrate this, the system of self-consistent particle- and wave-kinetic equations are numerically solved with an initially Maxwellian EVDF and Langmuir wave spectral intensity, which is a state that does not reflect the presence of EB process, and hence not in force balance. The EB term subsequently drives the system to a new force-balanced steady state. After a long integration period it is demonstrated that the initial Langmuir fluctuation spectrum is modified, which in turn distorts the initial Maxwellian EVDF into a VDF that resembles the said core-suprathermal VDF. Such a mechanism may thus be operative at the coronal source region, which is characterized by high collisionality.

*Key words:* solar wind – Sun: corona – Sun: particle emission

- Ao contrário do amortecimento colisional, o *bremsstrahlung* eletrostático não possui um processo equivalente com o qual pudesse se comparado;
- Portanto, o principal objetivo deste estudo foi analisar como o efeito de *bremsstrahlung* eletrostático afeta a evolução temporal do plasma e tentar entender fisicamente como isso acontece.

# Geração de elétrons supratérmicos por processos coletivos em plasmas colisionais

---

Métodos

- Para evidenciar a atuação do *bremsstrahlung* eletrostático, consideramos o sistema mais simples possível;

- Para evidenciar a atuação do *bremsstrahlung* eletrostático, consideramos o sistema mais simples possível;
- Um plasma Maxwelliano que evolui de acordo com o formalismo quasilinear, que inclui emissão espontânea e difusão no espaço de velocidades.



- Para evidenciar a atuação do *bremsstrahlung* eletrostático, consideramos o sistema mais simples possível;
- Um plasma Maxwelliano que evolui de acordo com o formalismo quasilinear, que inclui emissão espontânea e difusão no espaço de velocidades.
- Nessa configuração, com uma função de distribuição monotonicamente decrescente como a Maxwelliana, esperávamos que nada fosse acontecer e então partiríamos para uma análise com a instabilidade *bump-in-tail*;

- Para evidenciar a atuação do *bremsstrahlung* eletrostático, consideramos o sistema mais simples possível;
- Um plasma Maxwelliano que evolui de acordo com o formalismo quasilinear, que inclui emissão espontânea e difusão no espaço de velocidades.
- Nessa configuração, com uma função de distribuição monotonicamente decrescente como a Maxwelliana, esperávamos que nada fosse acontecer e então partiríamos para uma análise com a instabilidade *bump-in-tail*;
- Só que não foi bem assim, como veremos em seguida;

- Para evidenciar a atuação do *bremsstrahlung* eletrostático, consideramos o sistema mais simples possível;
- Um plasma Maxwelliano que evolui de acordo com o formalismo quasilinear, que inclui emissão espontânea e difusão no espaço de velocidades.
- Nessa configuração, com uma função de distribuição monotonicamente decrescente como a Maxwelliana, esperávamos que nada fosse acontecer e então partiríamos para uma análise com a instabilidade *bump-in-tail*;
- Só que não foi bem assim, como veremos em seguida;
- Então, pela natureza das modificações ocorridas na função de distribuição, decidimos que seria interessante incluir também os efeitos de colisões binárias.

- As variáveis adimensionais são as mesmas, mas nesse caso precisamos normalizar também as equações cinéticas das partículas e das ondas e o tempo:

$$\Phi_a(\mathbf{u}) = v_e^3 F_a(\mathbf{u}), \quad \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} = \frac{(2\pi)^2 g}{m_e v_e^2} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\mu_{\mathbf{k}}^\alpha}, \quad P_{\mathbf{k}}^\alpha = \frac{m_e v_e^2}{(2\pi)^2 g} \omega_{pe} P_{\mathbf{q}}^\alpha, \quad \tau = \omega_{pe} t;$$

- A equação cinética normalizada para as ondas  $L$  é a seguinte

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} = & \mu_{\mathbf{q}}^L \frac{\pi}{q^2} \int d\mathbf{u} \, \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \\ & \times \left( g \Phi_e(\mathbf{u}) + (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_e(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right) + 2 \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \gamma_{\mathbf{q}}^{\sigma L} + P_{\mathbf{q}}^{\sigma L}; \end{aligned}$$

- Neste trabalho não analisamos o espectro das ondas  $S$ .

- As expressões normalizadas para o *bremsstrahlung* são dadas por

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{q}}^{\sigma L} = & \frac{12e^2}{\pi^3} \frac{1}{q^2} \frac{1}{(z_{\mathbf{q}}^L)^2} \left( 1 - \frac{m_e}{m_i} \frac{T_e}{T_i} \right)^2 \frac{\omega_{pe}^2}{v_e} \int d\mathbf{q}' q'^2 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2 \\ & \times \left[ 2 \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) + q'^2 \right]^{-2} \left[ 2 \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) + |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2 \right]^{-2} \\ & \times \int d\mathbf{u} \int d\mathbf{u}' \delta [\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{q}' \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')] \sum_a \Phi_a(\mathbf{u}) \sum_b \Phi_b(\mathbf{u}'). \end{aligned}$$

- Para a equação cinética adimensional para as partículas, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_a(\mathbf{u})}{\partial \tau} = & \frac{e_a^2 m_e^2}{e^2 m_a^2} \sum_{\sigma} \sum_{\alpha=L,S} \int d\mathbf{q} \left( \frac{\mathbf{q}}{q} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right) \mu_{\mathbf{q}}^{\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\alpha} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \\ & \times \left( g \frac{m_a}{m_e} \frac{\sigma z_{\mathbf{q}}^L}{q} \Phi_a(\mathbf{u}) + \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} \frac{\mathbf{q}}{q} \cdot \frac{\partial \Phi_a(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right) + \sum_b \theta_{ab}(\Phi_a, \Phi_b); \end{aligned}$$

# Forma adimensional da equação cinética das partículas e do operador colisional

- Para a equação cinética adimensional para as partículas, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_a(\mathbf{u})}{\partial \tau} = & \frac{e_a^2 m_e^2}{e^2 m_a^2} \sum_{\sigma} \sum_{\alpha=L,S} \int d\mathbf{q} \left( \frac{\mathbf{q}}{q} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right) \mu_{\mathbf{q}}^{\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\alpha} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \\ & \times \left( g \frac{m_a}{m_e} \frac{\sigma z_{\mathbf{q}}^L}{q} \Phi_a(\mathbf{u}) + \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} \frac{\mathbf{q}}{q} \cdot \frac{\partial \Phi_a(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right) + \sum_b \theta_{ab}(\Phi_a, \Phi_b); \end{aligned}$$

- Por fim, a forma adimensional do operador colisional de Landau linearizado

$$\begin{aligned} \theta_{ab}(\Phi_a, \Phi_b) = & \Gamma_{ab} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_a} \cdot \left( 2 \frac{m_a}{m_b} \Psi(u_{ab}) \frac{\mathbf{u}_a}{u_a^3} \Phi_a \right) \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_a} \cdot \left\{ \left[ \left( \Phi(u_{ab}) - \frac{1}{2u_{ab}^2} \Psi(u_{ab}) \right) \frac{\partial^2 u_a}{\partial \mathbf{u}_a \partial \mathbf{u}_a} \right] \cdot \frac{\partial \Phi_a}{\partial \mathbf{u}_a} \right\} \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_a} \cdot \left[ \left( \frac{1}{u_{ab}^2} \Psi(u_{ab}) \frac{\mathbf{u}_a \mathbf{u}_a}{u_a^3} \right) \cdot \frac{\partial \Phi_a}{\partial \mathbf{u}_a} \right] \right\}, \end{aligned}$$

onde  $u_{ab} \equiv u_a(v_{T_a}/v_{T_b})$  e  $\Gamma_{ab} = 2\pi g Z_b^2 \ln \Lambda$ , sendo  $g = 1/[2^{3/2}(4\pi)^2 \hat{n} \lambda_{De}^3]$ .

- As funções de distribuição iniciais para os íons e para os elétrons são Maxwellianas

$$F_a(\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi^{3/2} v_a^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_a^2}\right),$$

onde  $v_a = (2T_a/m_a)^{1/2}$ ;



## Condições iniciais

- As funções de distribuição iniciais para os íons e para os elétrons são Maxwellianas

$$F_a(\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi^{3/2} v_a^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_a^2}\right),$$

onde  $v_a = (2T_a/m_a)^{1/2}$ ;

- Durante a evolução temporal os íons permanecem estáticos, enquanto a função de distribuição dos elétrons evolui;

- As funções de distribuição iniciais para os íons e para os elétrons são Maxwellianas

$$F_a(\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi^{3/2} v_a^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_a^2}\right),$$

onde  $v_a = (2T_a/m_a)^{1/2}$ ;

- Durante a evolução temporal os íons permanecem estáticos, enquanto a função de distribuição dos elétrons evolui;
- A razão de temperatura entre íons e elétrons foi definida com sendo  $T_e/T_i = 7$ ;

- As funções de distribuição iniciais para os íons e para os elétrons são Maxwellianas

$$F_a(\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi^{3/2} v_a^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_a^2}\right),$$

onde  $v_a = (2T_a/m_a)^{1/2}$ ;

- Durante a evolução temporal os íons permanecem estáticos, enquanto a função de distribuição dos elétrons evolui;
- A razão de temperatura entre íons e elétrons foi definida com sendo  $T_e/T_i = 7$ ;
- O parâmetro de plasma escolhido foi  $g = 1/(n_e \lambda_{De}^3) = 5 \times 10^{-3}$ ;

- As funções de distribuição iniciais para os íons e para os elétrons são Maxwellianas

$$F_a(\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi^{3/2} v_a^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_a^2}\right),$$

onde  $v_a = (2T_a/m_a)^{1/2}$ ;

- Durante a evolução temporal os íons permanecem estáticos, enquanto a função de distribuição dos elétrons evolui;
- A razão de temperatura entre íons e elétrons foi definida com sendo  $T_e/T_i = 7$ ;
- O parâmetro de plasma escolhido foi  $g = 1/(n_e \lambda_{De}^3) = 5 \times 10^{-3}$ ;
- A condição inicial das ondas de Langmuir foi obtida balanceando os efeitos de emissão induzida e emissão espontânea, obtendo a seguinte expressão

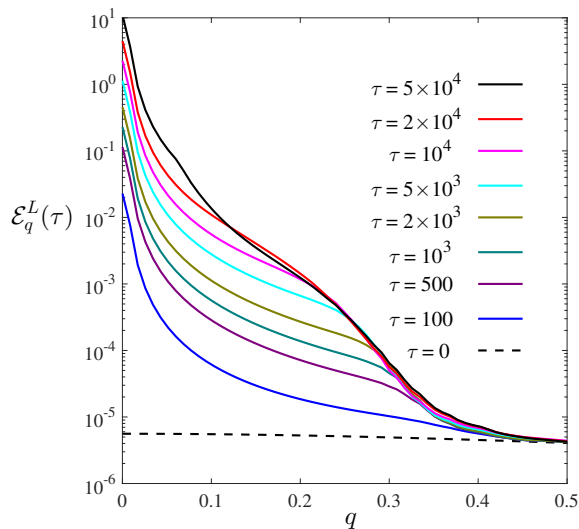
$$I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}(0) = \frac{T_e}{4\pi^2} (1 + 3k^2 \lambda_{De}^2)^{-1}.$$

# Geração de elétrons supratérmicos por processos coletivos em plasmas colisionais

---

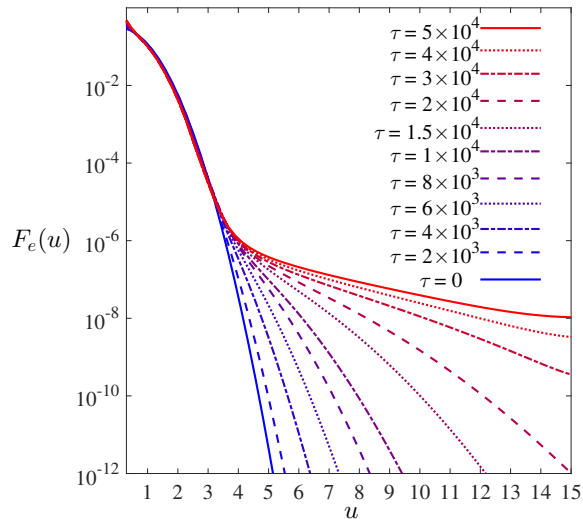
## Resultados

## Resultado para a evolução do espectro das ondas $L$



Evolução temporal do espectro das ondas de Langmuir.

## Resultado para a função de distribuição de velocidades



Evolução temporal da função de distribuição de velocidades dos elétrons.

## Por que este resultado é interessante?

- Distribuições supratérmicas, tanto de elétrons quanto de prótons, são pervasivas em plasmas espaciais;



## Por que este resultado é interessante?

- Distribuições supratérmicas, tanto de elétrons quanto de prótons, são pervasivas em plasmas espaciais;
- Elas são observadas em uma enorme variedade de ambientes e sob diferentes condições;

## Por que este resultado é interessante?

- Distribuições supratérmicas, tanto de elétrons quanto de prótons, são pervasivas em plasmas espaciais;
- Elas são observadas em uma enorme variedade de ambientes e sob diferentes condições;
- O que sugere que essas distribuições têm origem em algum processo fundamental, inerente à dinâmica das partículas carregadas e não das condições no entorno dessas partículas;

## Por que este resultado é interessante?

- Distribuições supratérmicas, tanto de elétrons quanto de prótons, são pervasivas em plasmas espaciais;
- Elas são observadas em uma enorme variedade de ambientes e sob diferentes condições;
- O que sugere que essas distribuições têm origem em algum processo fundamental, inerente à dinâmica das partículas carregadas e não das condições no entorno dessas partículas;
- Sendo necessário apenas um certo grau de ionização para que esse processo comece a atuar no sistema;

## Por que este resultado é interessante?

- Distribuições supratérmicas, tanto de elétrons quanto de prótons, são pervasivas em plasmas espaciais;
- Elas são observadas em uma enorme variedade de ambientes e sob diferentes condições;
- O que sugere que essas distribuições têm origem em algum processo fundamental, inerente à dinâmica das partículas carregadas e não das condições no entorno dessas partículas;
- Sendo necessário apenas um certo grau de ionização para que esse processo comece a atuar no sistema;
- Esses dois últimos pontos são suposições, claro. Mas são suposições que merecem investigação;

## Por que este resultado é interessante?

- Distribuições supratérmicas, tanto de elétrons quanto de prótons, são pervasivas em plasmas espaciais;
- Elas são observadas em uma enorme variedade de ambientes e sob diferentes condições;
- O que sugere que essas distribuições têm origem em algum processo fundamental, inerente à dinâmica das partículas carregadas e não das condições no entorno dessas partículas;
- Sendo necessário apenas um certo grau de ionização para que esse processo comece a atuar no sistema;
- Esses dois últimos pontos são suposições, claro. Mas são suposições que merecem investigação;
- Há evidências de que essas distribuições supratérmicas alteram a dinâmica do plasma e podem participar de processos que ainda não são totalmente compreendidos, como, por exemplo, a inversão de temperatura observada na coroa solar.

Publicação não relacionada à  
pesquisa da tese

---



## Weakly turbulent plasma processes in the presence of inverse power-law velocity tail population

S. F. Tigik,<sup>1,a)</sup> L. T. Petruzzellis,<sup>1,b)</sup> L. F. Ziebell,<sup>1,c)</sup> P. H. Yoon,<sup>2,3,4,d)</sup> and R. Gaelzer<sup>1,e)</sup>

<sup>1</sup>*Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 91501-970 Porto Alegre, RS, Brazil*

<sup>2</sup>*Korea Astronomy and Space Science Institute, Daejeon, South Korea*

<sup>3</sup>*Institute for Physical Science & Technology, University of Maryland, College Park, Maryland 20742, USA*

<sup>4</sup>*School of Space Research, Kyung Hee University, Yongin, Gyeonggi 446-701, South Korea*

(Received 20 October 2017; accepted 3 November 2017; published online 27 November 2017)

Observations show that plasma particles in the solar wind frequently display power-law velocity distributions, which can be isotropic or anisotropic. Particularly, the velocity distribution functions of solar wind electrons are frequently modeled as a combination of a background Maxwellian distribution and a non-thermal distribution which is known as the “halo” distribution. For fast solar wind conditions, highly anisotropic field-aligned electrons, denominated as the “strahl” distribution, are also present. Motivated by these observations, the present paper considers a tenuous plasma with Maxwellian ions, and electrons described by a summation of an isotropic Maxwellian distribution and an isotropic Kappa distribution. The formalism of weak turbulence theory is utilized in order to discuss the spectra of electrostatic waves that must be present in such a plasma, satisfying the conditions of quasi-equilibrium between the processes of spontaneous fluctuations and of induced emission. The kappa index and relative density of the Kappa electron distribution are varied. By taking into account the effects due to electromagnetic waves into the weak turbulence formalism, we investigate the electromagnetic spectra that satisfy the conditions of “turbulent equilibrium,” and also the time evolution of the wave spectra and of the electron distribution, which occurs in the case of the presence of an electron beam in the electron distribution. *Published by AIP Publishing.* <https://doi.org/10.1063/1.5009931>

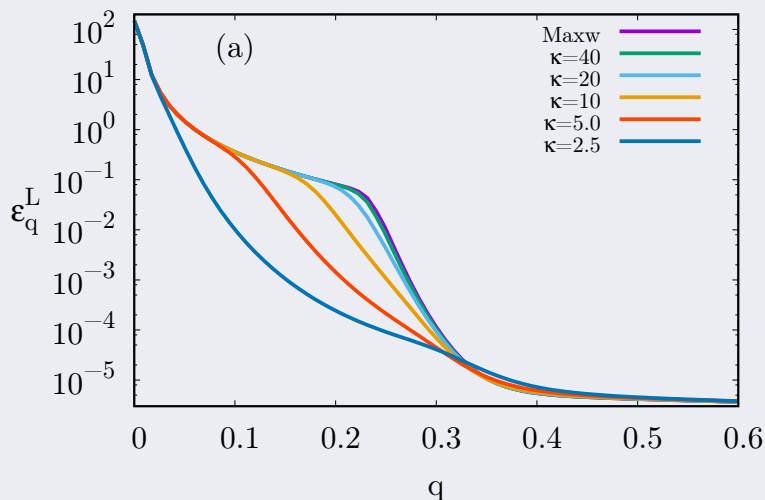
- Este trabalho envolve a análise do espectro das oscilações eletromagnéticas, em um plasma não magnetizado, na presença de uma função de distribuição com núcleo Maxwelliano e um *halo* de elétrons supratérmicos, modelados por uma função de distribuição do tipo  $\kappa$ ;



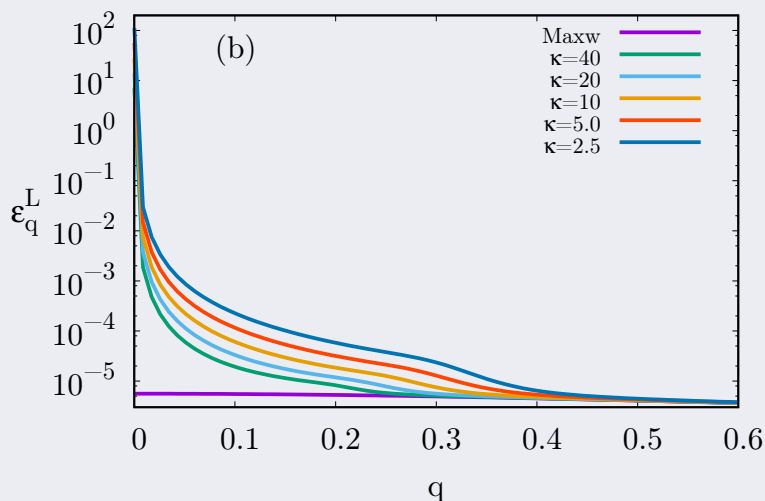
- Este trabalho envolve a análise do espectro das oscilações eletromagnéticas, em um plasma não magnetizado, na presença de uma função de distribuição com núcleo Maxwelliano e um *halo* de elétrons supratérmicos, modelados por uma função de distribuição do tipo  $\kappa$ ;
- A análise é feita com o uso da teoria de turbulência fraca, e o processo de integração é, basicamente, o mesmo;

- Este trabalho envolve a análise do espectro das oscilações eletromagnéticas, em um plasma não magnetizado, na presença de uma função de distribuição com núcleo Maxwelliano e um *halo* de elétrons supratérmicos, modelados por uma função de distribuição do tipo  $\kappa$ ;
- A análise é feita com o uso da teoria de turbulência fraca, e o processo de integração é, basicamente, o mesmo;
- Contudo, este trabalho não envolve nenhum tipo de interação colisional, enquanto o estudo apresentado até o momento considera apenas ondas eletrostáticas e função de distribuição Maxwelliana;

- Este trabalho envolve a análise do espectro das oscilações eletromagnéticas, em um plasma não magnetizado, na presença de uma função de distribuição com núcleo Maxwelliano e um *halo* de elétrons supratérmicos, modelados por uma função de distribuição do tipo  $\kappa$ ;
- A análise é feita com o uso da teoria de turbulência fraca, e o processo de integração é, basicamente, o mesmo;
- Contudo, este trabalho não envolve nenhum tipo de interação colisional, enquanto o estudo apresentado até o momento considera apenas ondas eletrostáticas e função de distribuição Maxwelliana;
- Os resultados deste trabalho mostram que, mesmo a presença de uma pequena população supratérmica na função de distribuição de velocidades dos elétrons, é capaz de alterar o espectro assintótico tanto das ondas transversais ( $T$ ), quanto das ondas de Langmuir.



Estado assintótico do espectro das ondas de Langmuir com o efeito de *bremstrahlung* eletrostático incluído, para uma função de distribuição Maxwelliana e para diversos índices  $\kappa$ .



Estado assintótico do espectro das ondas de Langmuir sem o efeito de *bremstrahlung* eletrostático incluído, para uma função de distribuição Maxwelliana e para diversos índices  $\kappa$ .

Entre a entrega da tese e a defesa  
um artigo foi aceito

---

## Bremsstrahlung emission and collisional damping rate for Langmuir waves

S. F. Tigik<sup>1</sup>, P. H. Yoon<sup>2,3,4</sup>, and L. F. Ziebell<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 91501-970 Porto Alegre, RS, Brazil

<sup>2</sup> IPST, University of Maryland, College Park, Maryland 20742-2431, USA

<sup>3</sup> School of Space Research, Kyung Hee University, Yongin-Si, Gyeonggi-Do, 446-701, Korea

<sup>4</sup> Korea Astronomy and Space Science Institute, Daejeon 34055, Korea

**Abstract.** Emission of electrostatic Langmuir waves by collisional process, termed the electrostatic bremsstrahlung emission, and the collisional damping of Langmuir waves, which can be considered as the inverse electrostatic bremsstrahlung process, are rigorously discussed. Some inaccuracies in the previous formalisms are also corrected. It is shown that the improved formulae in the case of Maxwellian particle distributions are given in forms where they satisfy the Kirchhoff's law in the balanced form.

- Os efeitos de emissão de *bremsstrahlung* eletrostático e de amortecimento colisional são processos inversos;



- Os efeitos de emissão de *bremsstrahlung* eletrostático e de amortecimento colisional são processos inversos;
- Neste trabalho fizemos uma revisão conjunta das aproximações que levam às equações que descrevem os dois efeitos;

- Os efeitos de emissão de *bremsstrahlung* eletrostático e de amortecimento colisional são processos inversos;
- Neste trabalho fizemos uma revisão conjunta das aproximações que levam às equações que descrevem os dois efeitos;
- Em trabalhos anteriores isso havia sido feito separadamente;

- Os efeitos de emissão de *bremsstrahlung* eletrostático e de amortecimento colisional são processos inversos;
- Neste trabalho fizemos uma revisão conjunta das aproximações que levam às equações que descrevem os dois efeitos;
- Em trabalhos anteriores isso havia sido feito separadamente;
- A nova forma das equações obtidas para  $P_L(\mathbf{k})$  e  $\gamma_L^{\text{CD}}(\mathbf{k})$  evidencia essa relação de complementaridade entre os processos.

A equações revisadas, já na forma adimensional, têm a seguinte forma

$$\begin{aligned}\gamma_L^{\text{cd}}(\mathbf{q}) &= -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{g}{(z_{\mathbf{q}}^L)^2} \frac{1}{q^2} Q(\mathbf{q}), \\ P_L(\mathbf{q}) &= \frac{24}{\sqrt{\pi}} \frac{g^2}{(z_{\mathbf{q}}^L)^2} \frac{1}{q^2} Q(\mathbf{q}),\end{aligned}$$

onde  $Q(\mathbf{q})$ , a *função espectral comum*, é dada por

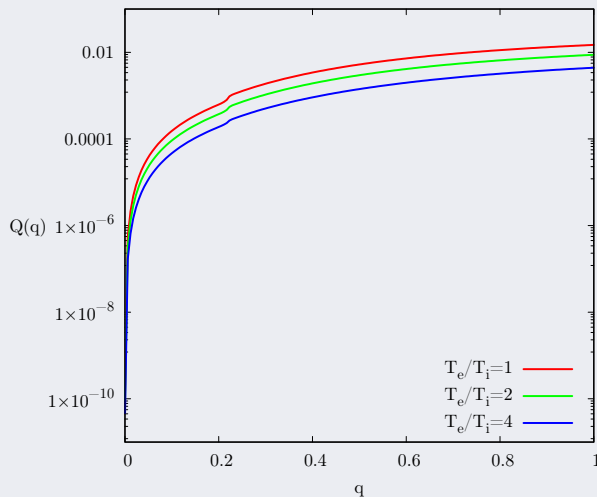
$$\begin{aligned}Q(\mathbf{q}) &= \int d\mathbf{q}' \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2}{q'^5 |\epsilon(\mathbf{q}', z_{\mathbf{q}}^L)|^2} \exp\left(-\frac{(z_{\mathbf{q}}^L)^2}{q'^2}\right) \\ &\quad \times \left[|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2 + 2\left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)\right]^{-2}.\end{aligned}$$

Entre a entrega da tese e a defesa  
um artigo foi aceito

---

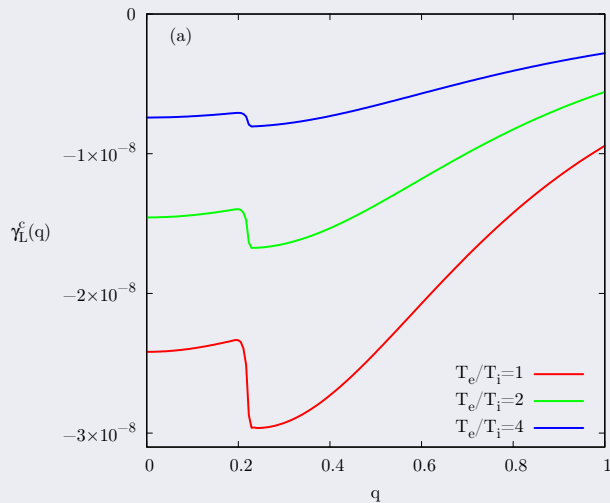
Resultados

## Resultado da integração da função espectral comum $Q(q)$



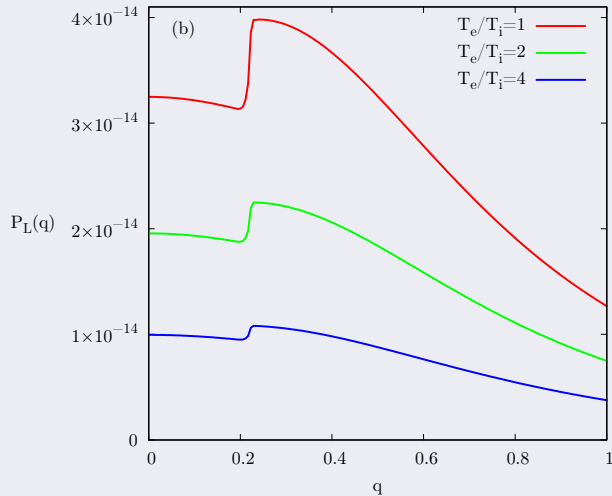
Função espectral comum para três valores diferentes de  $T_e/T_i$ .

# Espectro do amortecimento colisional



Espectro do amortecimento colisional para ondas  $L$ , para três valores diferentes de  $T_e/T_i$ .

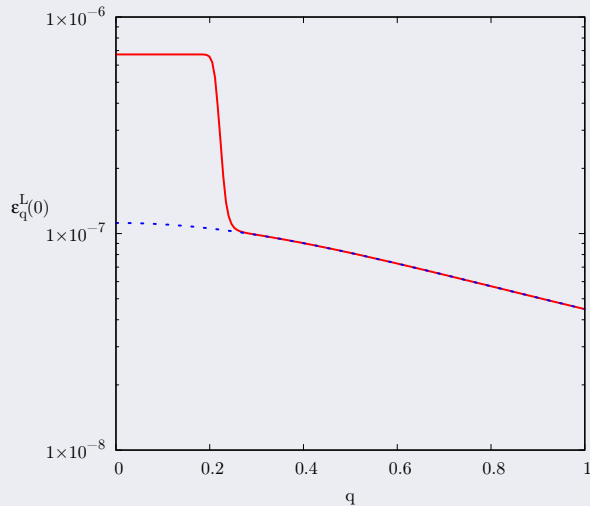
## Espectro de emissão do *bremstrahlung* eletrostático



Espectro de emissão do *bremstrahlung* eletrostático para ondas  $L$ , para três valores diferentes de  $T_e/T_i$ .



# Espectro das ondas de Langmuir



Estado estacionário das ondas de Langmuir.

# Obrigada!

Financiamento:



## Equação completa para o estado estacionário das ondas $L$

- A equação para o estado estacionário das ondas  $L$ , incluindo os novos efeitos, é obtida fazendo

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L(\tau)}{\partial \tau} = S_L(\mathbf{q}) + P_L(\mathbf{q}) + (\gamma_L^{\text{LD}}(\mathbf{q}) + 2\gamma_L^{\text{CD}}(\mathbf{q})) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L(0) = 0,$$

o que leva à

$$\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L(0) = -\frac{S_L(\mathbf{q}) + P_L(\mathbf{q})}{\gamma_L^{\text{LD}}(\mathbf{q}) + 2\gamma_L^{\text{CD}}(\mathbf{q})}.$$

- Em um plasma com função de distribuição de velocidades Maxwelliana,  $S_L(\mathbf{q})$  e  $\gamma_L^{\text{LD}}(\mathbf{q})$  dados respectivamente por

$$\begin{aligned} S_L(\mathbf{q}) &= \sqrt{\pi} \frac{g}{q^3} \exp\left(\frac{(z_{\mathbf{q}}^L)^2}{q^2}\right), \\ \gamma_L^{\text{LD}}(\mathbf{q}) &= -2\sqrt{\pi} \frac{(z_{\mathbf{q}}^L)^2}{q^3} \exp\left(\frac{(z_{\mathbf{q}}^L)^2}{q^2}\right). \end{aligned}$$

## Aproximação para a susceptibilidade dielétrica de segunda ordem

- Originalmente, a susceptibilidade dielétrica de segunda ordem foi aproximada supondo  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \approx 0$ ,  $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}' \approx 0$  e  $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{v} \approx 0$ , resultando em

$$\chi^{(2)}(\mathbf{k}', 0 | \mathbf{k} - \mathbf{k}', 0) = \frac{ie}{T_e} \frac{1}{v_{Te}^2} \left( 1 - \frac{T_e^2}{T_i^2} \frac{\omega_{pe}^2}{kk'|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \right);$$

- Essa aproximação inicialmente foi usada tanto para ondas  $L$  quanto para ondas  $S$ ;
- Mas, quando integrada, se mostrou inadequada para ondas de alta frequência, como as ondas de Langmuir, tendo de ser revisada;

## Aproximação para a susceptibilidade dielétrica de segunda ordem

- Originalmente, a susceptibilidade dielétrica de segunda ordem foi aproximada supondo  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \approx 0$ ,  $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}' \approx 0$  e  $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{v} \approx 0$ , resultando em

$$\chi^{(2)}(\mathbf{k}', 0 | \mathbf{k} - \mathbf{k}', 0) = \frac{ie}{T_e} \frac{1}{v_{Te}^2} \left( 1 - \frac{T_e^2}{T_i^2} \frac{\omega_{pe}^2}{k k' |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \right);$$

- Essa aproximação inicialmente foi usada tanto para ondas  $L$  quanto para ondas  $S$ ;
- Mas, quando integrada, se mostrou inadequada para ondas de alta frequência, como as ondas de Langmuir, tendo de ser revisada;
- Essa aproximação foi revisada para uma forma mais adequada, na qual mantemos a condição de ressonância  $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}' + (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} = \sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha$  no denominador e prosseguimos com a aproximação sob a mesma suposição;

## Aproximação para a susceptibilidade dielétrica de segunda ordem

- Originalmente, a susceptibilidade dielétrica de segunda ordem foi aproximada supondo  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \approx 0$ ,  $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}' \approx 0$  e  $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{v} \approx 0$ , resultando em

$$\chi^{(2)}(\mathbf{k}', 0 | \mathbf{k} - \mathbf{k}', 0) = \frac{ie}{T_e} \frac{1}{v_{Te}^2} \left( 1 - \frac{T_e^2}{T_i^2} \frac{\omega_{pe}^2}{k k' |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \right);$$

- Essa aproximação inicialmente foi usada tanto para ondas  $L$  quanto para ondas  $S$ ;
- Mas, quando integrada, se mostrou inadequada para ondas de alta frequência, como as ondas de Langmuir, tendo de ser revisada;
- Essa aproximação foi revisada para uma forma mais adequada, na qual mantemos a condição de ressonância  $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}' + (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} = \sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha$  no denominador e prosseguimos com a aproximação sob a mesma suposição;
- Resultando na seguinte expressão:

$$\chi^{(2)}[\mathbf{k}', \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] \simeq i \frac{2e}{T_e} \frac{\omega_{pe}^2}{k (\omega_{\mathbf{k}}^L)^2} \left( 1 - \frac{m_e}{m_i} \frac{T_e}{T_i} \right).$$

- Vamos considerar novamente ondas eletrostáticas e a ausência de campos externos;
- Tomando a média das equações microscópicas do formalismo de Klimontovich, temos

$$\langle N_a(x, t) \rangle = n_a f_a(x, t), \quad \langle \mathbf{E}^M \rangle = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (15)$$

e a identidade  $\langle \mathbf{E}^M N_a(x, t) \rangle = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) n_a f_a(x, t) + \left\langle \delta \mathbf{E}^M \delta N_a \right\rangle_{\mathbf{r}, x, t};$

- Disso obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} &= - \frac{e_a}{n_a m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \langle \delta \mathbf{E} \delta N_a \rangle_{\mathbf{r}, x, t} \equiv C_a(x, t), \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \sum_a e_a n_a \int d^3v f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \end{aligned} \quad (16)$$

- Temos ainda a equação de movimento para as flutuações aleatórias

$$\frac{\partial \delta N_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta N_a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \delta N_a}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_a n_a}{m_a} \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} = - \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\delta \mathbf{E} \delta N_a - \langle \delta \mathbf{E} \delta N_a \rangle_{\mathbf{r}, x, t}). \quad (17)$$

- Escrevendo o segundo momento em termos de  $\langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x, x', t}$

$$\langle \delta \mathbf{E} \delta N_a \rangle_{\mathbf{r}, x, t} = - \sum_b e_b \int d\mathbf{x}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x, x', t}. \quad (18)$$

- Ficamos com a seguinte expressão para o termo de colisões

$$C_a(x, t) = \frac{1}{n_a m_a} \sum_b \int d^3 r' d^3 v' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \langle \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta N_b(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \rangle. \quad (19)$$



- Ao tentarmos escrever uma equação para a evolução do segundo momento central, chegamos à seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,x',t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,x',t} + \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,x',t} \\
 & + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,x',t} + \frac{e_b}{m_b} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x,x',t} \\
 & + \frac{e_a n_a}{m_a} \langle \delta \mathbf{E} \delta N_b \rangle_{\mathbf{r},x,t} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_b n_b}{m_b} \langle \delta N_a \delta \mathbf{E} \rangle_{x,\mathbf{r}',t} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{v}'} \\
 & = - \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \langle \delta \mathbf{E} \delta N_a \delta N_b \rangle_{\mathbf{r},x,x',t} - \frac{e_b}{m_b} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \cdot \langle \delta N_a \delta \mathbf{E} \delta N_b \rangle_{x',\mathbf{r},x',t},
 \end{aligned} \tag{20}$$

- onde  $\delta \mathbf{E}$  é dado por  $\nabla \cdot \delta \mathbf{E} = 4\pi \sum_a e_a \int d^3v \delta N_a$ .
- Vemos a equação (20) mantém o sistema de equações aberto, devido a presença do terceiro momento no lado direito da igualdade.

## Parâmetro de plasma

- Precisamos truncar essa cadeia de equações, para isso, vamos definir um critério conhecido como parâmetro de plasma:
- Em gases neutros e rarefeitos, a esfera de interação molecular tem um raio da ordem do raio das moléculas,  $r_0 \sim 10^{-8} - 10^{-7} \text{ cm}$ ;
- Isso torna a interação entre três ou mais moléculas algo muito raro;
- Em plasmas, as interações entre as cargas são dominadas pela lei de Coulomb, de longo alcance, logo, a intensidade da interação decai lentamente;
- Nesse caso, uma partícula interage ao mesmo tempo com muitas outras partículas e o alcance das interações efetivas entre as cargas é dado por  $\lambda_D^2 = T/(4\pi \sum_a e_a^2 n_a)$ ;
- Na maioria dos plasmas, a esfera de Debye contém um grande número de partículas, isto é,  $n\lambda_D^3 \gg 1$ ;
- O parâmetro de plasma é definido como o inverso do número de partículas em uma esfera de Debye

$$g = \frac{1}{n\lambda_D^3}. \quad (21)$$

- Analisando as definições das quantidades  $g$  e  $\lambda_D$ , vemos que  $g$  é da mesma ordem da razão entre a energia média de interação entre duas partículas e a energia cinética de uma dessas partículas

$$g \sim \frac{e^2 n^{1/3}}{T}; \quad (22)$$

- Se  $g \ll 1$ , isto é, a energia de interação é muito menor do que a energia cinética, podemos assumir que a correlação entre as partículas seja fraca;
- Escrevendo o segundo momento central em termos da correlação de pares, temos

$$\langle \delta N_a(x, t) \delta N_b(x', t) \rangle = n_a n_b g_{ab}(x, x', t) + \delta_{ab} \delta(x - x') n_a f_a; \quad (23)$$

- Podemos supor que  $f_a \sim \mathcal{O}(1)$ ,  $g_{ab} \sim \mathcal{O}(g)$ ,  $g_{abc} \sim \mathcal{O}(g^2)$ , ...