

Rozšírenie priestorovej databázy PostgreSQL / PostGIS pre prácu s nepravidelnými trojuholníkovými sieťami

Mgr. Martin Kalivoda

Katedra kartografie, geoinformatiky a diaľkového prieskumu
Zeme

Prírodovedecká fakulta, Univerzita Komenského Bratislava,
Slovenská republika

kalivoda.martin@gmail.com

Mgr. Richard Feciskanin, Ph.D.

Katedra kartografie, geoinformatiky a diaľkového prieskumu
Zeme

Prírodovedecká fakulta, Univerzita Komenského Bratislava,
Slovenská republika

feciskanin@fns.uniba.sk

Abstract—Triangulated irregular networks (TIN) as data structures used in the digital terrain modeling are marginalized behind raster structures despite their advantages. We would like to show that TIN modeling may be effective and precise with the capabilities offered by the database system PostgreSQL with its spatial extension PostGIS. We have developed the software (extension) based on PostgreSQL/PostGIS which is able to handle a topology and doing geomorphometric analysis. The reason why we've chosen the PostgreSQL/PostGIS database system is the implementation of new data types (TIN, TRIANGLE) since the PostGIS 2.0 version, but no functions processing those data types were implemented. The capabilities of our software are presented by describing of implemented functions and by showing the SQL queries utilizing those functions. Moreover, the couple of practical use cases verify the usefulness of our extension. In these times, the LiDAR acquisition method producing clouds of points is on the rise. Therefore, we assume the utilization of a TIN modeling is more appropriate with LiDAR point clouds than a raster modeling.

I. ÚVOD

Modelovanie georeliéfu a jeho geometrickej štruktúry patrí medzi hlavné úlohy v geomorfometrii. Uplatnenie nachádza v mnohých oblastiach ľudskej činnosti ako v stavebníctve, vodohospodárstve, poľnohospodárstve, lesníctve, vojenskom sektore, vede a výskume a pod. Georeliéf je v počítačovom prostredí reprezentovaný ako digitálny výškový model (DEM), ktorý môže byť založený na rastrovej alebo vektorovej báze.

V našej práci sme sa rozhodli pre modelovanie georeliéfu pomocou nepravidelných trojuholníkových sietí (TIN) kvôli ich benefitom. TIN ako vektorový DEM začína zohrávať významnú úlohu s príchodom LiDARovej metódy zberu dát. Produktom LiDARového skenovania je nepravidelné mračno bodov. Toto mračno sa dá jednoducho triangulovať do podoby vektorovej TIN. TIN je možné redukovať (decimovať) a optimalizovať voči modelovanej ploche. "Nepravidelná" TIN je efektívnym prostriedkom modelovania práve vďaka flexibilit

pri zachytení tvarov georeliéfu, čo ju zvyhodňuje oproti rastrovým DEM. Z TIN je navyše možné počítať niektoré morfometrické parametre s vysokou mierou presnosti. Rastrové modely sa vyznačujú veľkou popularitou a medzi odborníkmi prevláda povedomie, že TIN nedokáže reprezentatívne zachytiť tvar modelovanej plochy ako raster. Pripisujú to na vrub nízkej reprezentatívnosti TIN a na výpočty náročným údajovým modelom TIN. S týmito výzvami sa ale dá vysporiadať. Reprezentatívnosť TIN možno ovplyvniť už v procese generovania trojuholníkovej siete, triangulácii. Triangulácie možno rozdeliť do dvoch kategórií: tvarovo-závislé, dátovo-závislé. Tvarovo-závislé triangulácie sledujú kritérium založené na tvare výsledného trojuholníka, ktoré kvantifikujú niektorou z geometrických charakteristík (dĺžka strán, veľkosť uhlov, výška trojuholníka a pod.). Tento typ triangulácií je v praxi značne využívaný (príkladom je Delaunayova triangulácia). Naopak, dátovo-závislé triangulácie berú do úvahy tvar modelovanej plochy, nielen tvar trojuholníkov jednotlivo, a teda výsledná TIN dokáže vernejšie reprezentovať geometrickú štruktúru modelovanej plochy. Vernosť modelujúcej TIN možno taktiež zvyšovať procesom optimalizácie (Feciskanin, 2009). Jednou z metód optimalizácie TIN je decimovanie (generalizácia) vrcholov, hrán, trojuholníkov. Feciskanin (2012) dokázal, že decimálne metódy, ktoré berú ohľad na tvar georeliéfu dokážu redukovať účinok náhodných chýb. Výpočtové operácie nad TIN možno zrýchliť vďaka zavedeniu indexov na údajový model TIN. Sofistikované údajové modely TIN umožňujú rýchle dopytovanie na trojuholníky, hrany alebo vrcholy siete. Navyše, možno z nich jednoducho získať susedné trojuholníky určitého bodu, hrany alebo trojuholníka.

Naš výskum je založený na diferenciálnej geometrii. Tvorcom diferenciálnej geometrie je Gauss, ktorý zosumarizoval svoje teórie do knihy (Gauss, 1828). Evans (1972) a Krcho (1973) naformulovali základy geomorfometrie postavené na diferenciálnej geometrii. V súlade s ich prácami je georeliéf považovaný za spojitú plochu (topografickú plochu), ktorú

možno vyjadriť rovnicou vo všeobecnom tvare $z = f(x, y)$. Danú rovnicu možno diferencovať, a tak získať parciálne derivácie topografickej plochy. Parciálne derivácie figurujú v rovniciach morfometrických parametrov. Minár et al. (2013) vo svojej práci kategorizuje množinu morfometrických parametrov do podmnožín podľa nutnosti použitia najvyššieho rádu parciálnych derivácií: morfometrické parametre nultého rádu (výška), prvého rádu (výškový gradient, sklon georeliéfu, orientácia voči svetovým stranám, ...), druhého rádu (krivosti) a tretieho rádu (zmeny krivostí). V praxi sa stretávame s problémom precízneho výpočtu parciálnych derivácií a morfometrických parametrov, pretože nepoznáme analytický tvar rovnice $z = f(x, y)$. Je teda nutné nájsť spôsob odhadu hodnôt parciálnych derivácií. V práci (Minár et al., 2013) sú kategorizované metódy odhadu hodnôt parciálnych derivácií z rastrovej reprezentácie: dve metódy centrálnych diferencií, metóda najmenších štvorcov a vážená metóda najmenších štvorcov. Pri nepravidelných trojuholníkových sieťach dokážeme jednoznačne určiť hodnoty parciálnych derivácií na trojuholníkoch na základe ich normálových vektorov. Následne dokážeme odhadnúť hodnoty parciálnych derivácií vo vrcholoch TIN zavedením váh jednotkovým normálam trojuholníkov spoločných danému vrcholu. Váhou môže byť napr. plocha trojuholníka alebo veľkosť vrcholového uhla. Proces odhadovania so sebou prináša nepresnosti. V práci (Krcho, 2001) autor definuje dva druhy nepresností: numerickú a polohovú. Numerická nepresnosť predstavuje rozdiel medzi odhadovanou a exaktnou hodnotou morfometrického parametra v určitom bode na georeliéfe. Polohová nepresnosť predstavuje vektor medzi bodom A s odhadovanou hodnotou a najbližším bodom B, v ktorom exaktná hodnota morfometrického parametra je totožná s odhadnutou hodnotou v bode A.

Práca (Wilson, 2012) podáva ucelený prehľad metód, prístupov a vývoja na poli digitálneho modelovania georeliéfu za posledných 25 rokov. Len niekoľko prác sa venuje modelovaniu georeliéfu pomocou nepravidelných trojuholníkových sietí. Príkladom sú práce (Krcho, 1976, 1990, 2001; Feciskanin, 2009, 2012; Little and Shi, 2003; Fayek, 1997). Nepravidelné trojuholníkové siete sú hlavne využívané pri generalizácii obrazu v oblasti počítačovej grafiky a videnia (Alboul et al., 200, 2005; Li and Adams, 2013). Luebke (2001) zhodnotil metódy zjednodušenia (decimovania) TIN využívané v počítačovej grafike ako vhodné aj na decimovanie TIN reprezentujúcej georeliéf (Feciskanin, 2012). Problém prehľadnej, jednoduchšej a rýchlejšej údajovej štruktúry tiež súvisí s modelovaním prostredníctvom TIN. Hlavný rozdiel medzi existujúcimi údajovými štruktúrami je v považovaní základného elementu tejto štruktúry, ktorý môže byť bod (Tucker in El-Sheimy et al., 2005; Krcho, 1990), hrana (O'Rourke, 1998) alebo

trojuholník (Kalak and Krcho, 1983; Krcho, 1990; Boissonnat et al., 2002). V iných prácach je pojednávané o vhodnom tvare trojuholníka, ktorý rešpektuje geometrické charakteristiky modelovaného povrchu (Krcho, 1990, 2001; Feciskanin, 2009, 2012). Tieto geometrické charakteristiky sú definované tvarom oskulačného paraboloidu v mieste ťažiska trojuholníka. Koncept reprezentatívnosti a správnej konfigurácie trojuholníkov bol navrhnutý za účelom minimalizácie numerických a polohových odchýlok morfometrických parametrov. Štúdia (Feciskanin, 2009) obsahuje rozsiahlejšiu analýzu vlastností odchýlok. Taktiež prezentuje kritériá správne konfigurovaného trojuholníka voči modelovanej ploche navrhnuté za účelom minimalizácie odchýlok normál, a teda aj parciálnych derivácií. Proces získania správne konfigurovaných trojuholníkov nazývame optimalizácia. Práce (Feciskanin, 2009; Kalivoda, 2014) popisujú optimalizačnú metódu založenú na preklápaní spoločnej strany dvoch susedných trojuholníkov za minimalizácie odchýlok normál trojuholníkov voči exaktným normálam. Iné optimalizačné metódy sú založené na decimovaní TIN. Feciskanin (2012) zhodnotil dve decimálne metódy vzhľadom na koncept reprezentatívnosti a správnej konfigurácie trojuholníkov: *quadric error metrics simplification* (Garland and Heckbert, 1997), *memoryless simplification* (Lindstrom and Turk, 1998).

V našom článku chceme predstaviť vlastný vyvíjaný softvér. Je ním *open-source* rozšírenie databázového systému PostgreSQL / PostGIS nazvané *pg3angles*. Toto rozšírenie prináša knižnicu funkcií určených na riešenie topológie TIN a realizovanie morfometrickej analýzy nad TIN. Motiváciou k vývoju *pg3angles* bolo zavedenie nových dátových typov *TRIANGLE* a *TIN* do PostGIS od verzie 2.0. Od verzie 2.1 bola navyše implementovaná funkcia na tvorbu TIN Delaunayovou trianguláciou. Funkcie realizujúce operácie nad TIN však PostGIS postráda. Vďaka nástroju *pg3angles* tento nedostatok kompenzujeme. Navyše, PostgreSQL a PostGIS majú veľký potenciál využitia v geokomunitě vďaka otvorenému kódu, modularnosti, škálovateľnosti a flexibilitě (Supak et al., 2012). Využitie priestorových databáz má stúpajúcu tendenciu, dôkazom čoho je aj vysoký dopyt po GIS špecialistoch ovládajúcich prácu s nimi (Ellul, 2012). Popularitu a spoľahlivosť PostgreSQL a PostGIS možno dokladovať rozmachom geoportálov, ktorých databázovú zložku tvoria (Supak et al., 2012; Fry et al., 2012; Fuijoka et al., 2012).

V článku najskôr v globále charakterizujeme disponibilné funkcie *pg3angles* vzhľadom na ich primárny účel a programovací jazyk, v ktorom sú napísané. Následne charakterizujeme jednotlivú funkcionálnosť každej z nich. Popíšeme koncept riešenia topológie TIN v *pg3angles* a následne ukážeme rôzne východiská pre volanie funkcií. V

ďalšej časti uvedieme príklady SQL dopytov volajúcich funkcie *pg3angles*, funkcionality verifikujeme na dvoch prípadových štúdiách a na záver porovnáme náš softvér so softvérom *ArcGIS* na úseku TIN modelovania.

II. MATERIÁL A METÓDY

A. PostgreSQL ako modifikovateľný databázový systém

PostgreSQL je objektovo-relačný databázový systém uvoľnený pod licenciou *The PostgreSQL Licence*, podľa ktorej je voľne šíriteľný aj modifikovateľný. Výhodou PostgreSQL oproti ostatným voľne šíriteľným databázovým systémom je jeho vysoká miera modularity, ktorá používateľom dovoľuje vytvárať vlastné dátové typy, operátory, funkcie, prípadne zásuvné moduly – extenzie.

PostgreSQL zakomponúva databázy, tabuľky, stĺpce atď. do nadradených štruktúr, ktoré sú známe pod pojmom systémové katalógy (*system catalogs*), prípadne dátové slovníky (*data dictionaries*). Oproti iným relačným databázovým systémom PostgreSQL ukladá do systémových katalógov oveľa viac informácií (napr. o dátových typoch, funkciách, prístupových metódach), čo obohacuje hierarchickú štruktúru PostgreSQL. Vďaka tomu sa však oveľa jednoduchšie prejaví vklad nového databázového komponentu alebo modifikácia pôvodného komponentu v celom systéme.

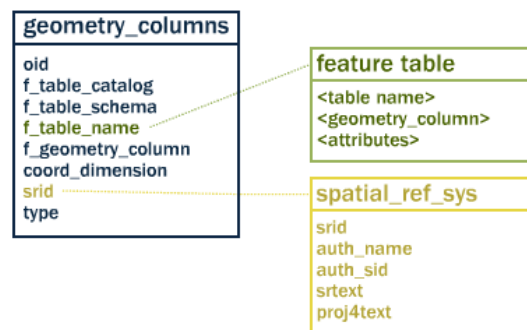
PostgreSQL podporuje mechanizmus dynamického načítania (*dynamic loading*) rozširujúcich knižníc, čo odbremenuje užívateľa od zložitej modifikácie zdrojového kódu PostgreSQL. Pre rozšírenie funkcionality stačí užívateľovi vytvoriť potrebné knižnice podľa zásad tvorby rozširujúcich programov (zásuvných modulov, extenzií), alebo rozšírenia ako funkcie písať priamo v procedurálnom databázovom jazyku.

B. Charakteristika PostGIS

PostGIS je príkladom extenzie, ktorá rozširuje databázový systém PostgreSQL o slovo "priestorový". Ide o voľne šíriteľný aj modifikovateľný softvér zastrešený licenciou *GNU General Public Licence*. Prichádza s novými dátovými typmi – *geometry*, *geography*, *raster* a pod. Okrem dátových typov rozširuje PostgreSQL o funkcie, operátory a indexy, ktoré na deklarované dátové typy aplikuje. PostGIS implementuje štandardy OGC (*Open Geospatial Consortium*); ide najmä o štandard SFSQL (*Simple Features For SQL*). Okrem štandardov OGC rešpektuje ISO normy (*International Organization For Standardization*); príkladom je norma *SQL/MM (Information technology -- Database languages -- SQL multimedia and*

application packages -- Part 3: Spatial), ktorá je založená na viacerých špecifikáciách prvotne spravovaných OGC.

Technicky je implementácia *SFSQL* a *SQL/MM* podporená prostredníctvom projektu *GEOS (Geometry Engine, Open Source)*. Štandard *SFSQL* definuje SQL schému pre podporu ukladania, dopytovania a aktualizovania kolekcii prvkov pomocou *SQL Call Level Interface (SQL/CLI)*. Prvky databázy môžu súčasne obsahovať priestorové a nepriestorové atribúty. Priestorové atribúty majú geometrickú hodnotu a *SFSQL* podporuje najviac 2D geometriu (bodové, líniové a polygónové prvky so súradnicami x, y). Štandard *SFSQL* taktiež definuje štruktúru databázy na úseku geometrie (obr. 1). Štandard *SQL/MM* rozširuje niektoré definície štandardu *SFSQL*. Ide najmä o možnosť priradenia tretej a štvrtej súradnice (z, m) geometrickým typom.



Obr. 1 Štruktúra databázy na úseku geometrie

C. Konceptia užívateľsky-definovaných funkcií v PostgreSQL

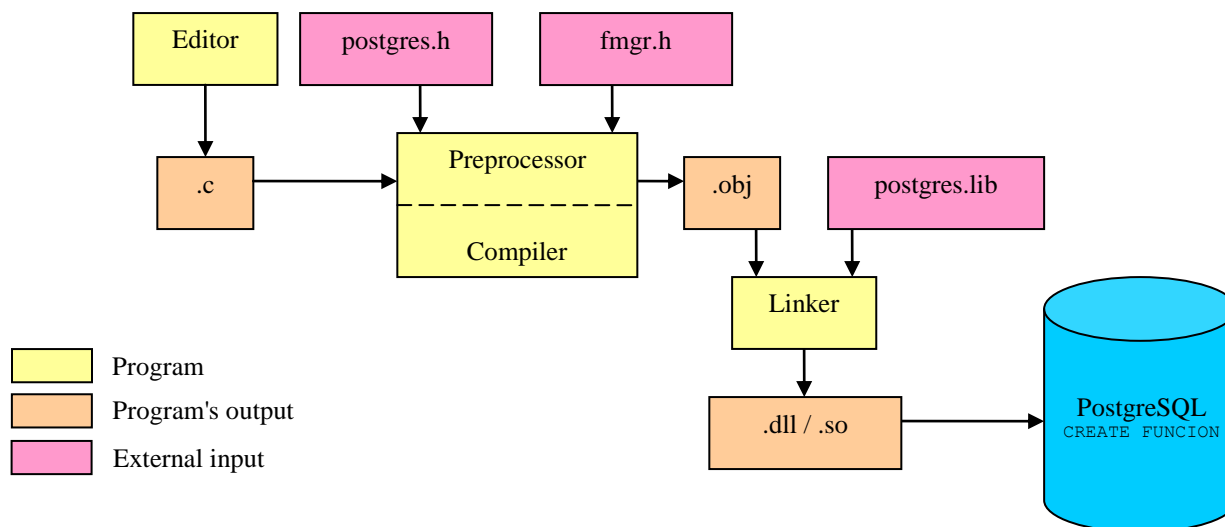
Funkcie PostgreSQL môžeme podľa typu programovacieho jazyka, v ktorom sú napísané, rozdeliť do kategórií:

- SQL funkcie,
- funkcie procedurálnych jazykov,
- funkcie naprogramované v jazyku C.

SQL funkcie sú najjednoduchším typom funkcií s minimálnou schopnosťou hlbšej modifikácie PostgreSQL. Funkcie procedurálnych jazykov sú veľmi obľúbené pre ich výpočtovú plnohodnotnosť a jednoduché vkladanie do PostgreSQL. Nevýhodou týchto jazykov je ich nižšia výpočtová rýchlosť, keďže ide o tzv. skriptovacie jazyky. Funkcie naprogramované v programovacom jazyku C sú najzložitejším typom funkcií PostgreSQL. Vyznačujú sa vysokou výpočtovou rýchlosťou, keďže jazyk C je nízko-úrovňový a navyše samotný PostgreSQL je napísaný v jazyku C.

Rozširovanie PostgreSQL funkciami napísanými v jazyku C je zložitá vzhľadom na celý proces transformácie kódu v textovej forme do strojového kódu a následného pripojenia do PostgreSQL (obr. 2). PostgreSQL ponúka *API (Application*

Programming Interface) diktujúce konvenciu písania funkcií v jazyku C pre PostgreSQL. Vzhľadom na to každý zdrojový kód



Obr. 2 Spracovanie funkcií jazyka C do PostgreSQL

musí mať vložené hlavičkové súbory *postgres.h* a *fmgr.h*. Existujú aj ďalšie hlavičkové súbory, ktoré vkladáme pri špeciálnych programátorských prípadoch. Po preložení zdrojového kódu kompilátorom (prekladačom) vznikne súbor *.obj* s relatívnym (objektovým) kódom. Pridelenie absolútnych adries relatívnemu kódu a prevedenie všetkých odkazov na doposiaľ neznáme identifikátory z knižnice *postgres.lib* realizuje linker (zostavovací program).

Z knižnice *.dll* alebo *.so* už vie databázový systém priamo načítať užívateľsky-definovanú funkciu. Realizuje sa to pomocou SQL príkazu `CREATE FUNCTION`, v ktorom štandardne špecifikujeme názov funkcie, pod akým ju bude poznať systém riadenia bázy dát, vstupné parametre funkcie a ich dátové typy, návratový parameter funkcie, adresu knižnice *.dll* alebo *.so* a názov funkcie v tejto knižnici, typ jazyka, v akom je funkcia napísaná.

Písanie a vkladanie užívateľsky-definovaných funkcií PostgreSQL v iných jazykoch je oveľa jednoduchšie práve kvôli absencii procesu prekladu a linkovania. Zdrojový kód takejto funkcie je integrovaný priamo v príkaze `CREATE FUNCTION` na mieste nasledujúcom po deklarácii mena funkcie, vstupných a výstupných parametrov. Za zdrojovým kódom nasleduje špecifikácia jazyka, v akom je kód napísaný (Obr. 3).

```

CREATE FUNCTION Hello (world text) RETURNS text AS
'$libdir/helloworld', 'helloworld'
LANGUAGE C;

-----

CREATE FUNCTION Hello (world text) RETURNS text AS
$$
BEGIN
    return 'Hello ' || world;
END
$$
LANGUAGE plpgsql;
  
```

Obr. 3 Demonštrácia použitia príkazu `CREATE FUNCTION`

D. Koncepcia zásuvných modulov PostgreSQL

Zásuvné moduly – extenzie PostgreSQL sú celky združujúce SQL komponenty pre rozširovanie databázového systému (napr. dátové typy, operátory, funkcie, triedy indexových operátorov). PostgreSQL ponúka infraštruktúru na budovanie extenzií s názvom PGXS. Tento komponent definuje konvenciu tvorby vlastných rozšírení.

Extenzia pripravená pre vklad do databázového systému pozostáva minimálne z dvoch súborov:

- skriptovacieho súboru s príponou *.sql* (script file),
- kontrolného súboru s príponou *.control* (control file).

Skriptovací súbor obsahuje SQL príkazy, ktoré sa vykonajú po príkaze vytvoriť extenziu (`CREATE EXTENSION`) v databázovom systéme. Ide o príkazy definujúce nové dátové

typy, operátory a funkcie. Kontrolný súbor konfiguruje dotknutú extenziu pre databázový systém. Môže obsahovať komentár popisujúci účel extenzie, číslo preferovanej verzie (pokiaľ extenzia existuje vo viacerých verziách), adresu skriptovacieho súboru (pokiaľ sa tento nenachádza v rovnakom priečinku ako kontrolný súbor), kódovanie znakov skriptovacieho súboru, mená extenzií, na ktorých je závislá.

Pokiaľ extenzia rozširuje PostgreSQL o funkcie jazyka C, je potrebné do balíka k spomínaným povinným súborom pripojiť aj knižnicu *.dll* alebo *.so* s predmetnými funkciami. Adresu tejto knižnice je potom potrebné uviesť v kontrolnom súbore. Pre zabezpečenie korektného vloženia extenzie do PostgreSQL je potrebné skriptovací a kontrolný súbor nakopírovať do priečinka *SHAREDIR\extension* a knižnicu funkcií nakopírovať do priečinka *LIBDIR*. Absolútnu adresu priečinkov *SHAREDIR* a *LIBDIR* vieme zistiť z konfiguračných nastavení PostgreSQL pomocou programu *pg_config*.

Majme extenziu s názvom *extension* vo verzii *1.0*. Jej kontrolný súbor sa musí volať *extension.control*. Názov skriptovacieho súboru sa musí pridávať vzoru *názov--verzia.sql*, v našom prípade *extension--1.0.sql*. Pre vytvorenie extenzie v databázovom systéme potom zavoláme SQL príkaz

```
CREATE EXTENSION extension;
```

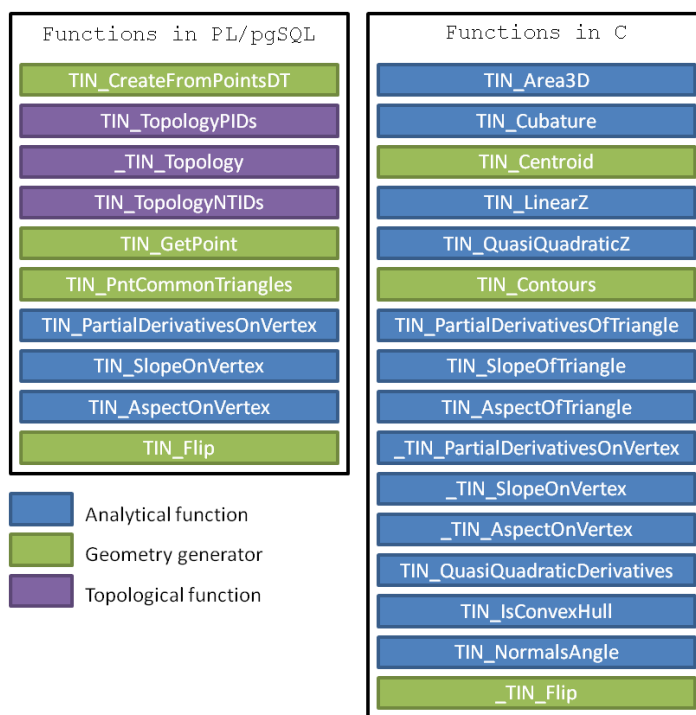
Vnútrotná ržžia PostgreSQL vykoná všetky príkazy zo súboru *extension--1.0.sql* implicitne podľa parametrov v kontrolnom súbore *extension.control*.

III. VÝSLEDKY

Výsledkom našej práce je zásuvný modul *pg3angles* vo verzii 1.01 do databázového systému PostgreSQL / PostGIS. Tento nástroj obsahuje 26 funkcií na prácu s nepravidelnými trojuholníkovými sieťami. Navyše, definuje koncepciu topológie TIN.

A. Klasifikácia funkcií *pg3angles*

Funkcie možno rozdeliť podľa programovacieho jazyka, v ktorom boli napísané na 16 funkcií jazyka C a 10 funkcií procedurálneho jazyka PL/pgSQL. Iné delenie vychádza z primárneho účelu jednotlivých funkcií. Takto dostaneme 3 kategórie: analytické funkcie (16), funkcie generujúce novú geometriu (7) a topologické funkcie (3). Celkový pohľad na funkcie *pg3angles* podáva obr. 4.



Obr. 4 Zoznam a klasifikácia funkcií *pg3angles*

B. Charakteristika funkcií *pg3angles*

Teraz prejdeme k charakteristike každej funkcie dostupnej v *pg3angles* vo verzii *1.01*. Uvádame prototyp volania funkcie a jej stručný popis.

```
text TIN_CreateFromPointsDT(tintable text, pntstable
text, pntsgeomcol text DEFAULT 'geom'::text);
```

Funkcia generuje trojuholníkovú sieť metódou Delaunayovej triangulácie do tabuľky *tintable* na základe vstupného bodového poľa uloženého v *pntstable* v stĺpci s názvom *pntsgeomcol*.

```
text TIN_TopologyPIDs(tintable text, username text,
password text, dbname text, port text DEFAULT
'5432'::text, host text DEFAULT 'localhost'::text);
```

Funkcia edituje identifikátory vrcholov trojuholníkovej siete v *tintable*. Pracuje asynchrónne vo viacerých databázových pripojeniach, preto je potrebné zadať parametre pripojenia do databázy. Výstupom je TIN so známymi bodovými topologickými charakteristikami.

```
void _TIN_Topology(pidmin integer, pidmax integer,
tintable text, connum integer);
```

Ide o vnorenú funkciu funkcie *TIN_TopologyPIDs*.

`text TIN_TopologyNTIDs(tintable text);`
 Funkcia edituje identifikátory susedných trojuholníkov trojuholníkovej siete v *tintable*. Výstupom je TIN so známymi topologickými charakteristikami o susedných trojuholníkoch.

`double precision TIN_Area3D(triangle geometry);`
 Funkcia vracia rozlohu trojuholníka *triangle* v 3D.

`double precision TIN_Cubature(triangle geometry, basez double precision, inverse boolean DEFAULT false);`
 Funkcia vracia objem priestoru medzi trojuholníkom *triangle* a rovinou zadanou výškou *basez* v jednotkách súradnicového systému. Je možné počítať aj inverzný objem, pokiaľ parametru *inverse* predáme hodnotu *true*.

`geometry TIN_Centroid(triangle geometry);`
 Funkcia vracia ťažisko trojuholníka *triangle* ako *point z*.

`double precision TIN_LinearZ(triangle geometry, point geometry);`
 Funkcia vracia lineárne interpolovanú výšku podľa trojuholníka *triangle* v bode *point*.

`double precision TIN_QuasiQuadraticZ(triangle geometry, triangles1 geometry[], triangles2 geometry[], triangles3 geometry[], point geometry);`
 Funkcia vracia výšku interpolovanú podľa kvázi-kvadratického modelu trojuholníka *triangle* (Vencovský, 1984) v bode *point*, kde *triangles1*, *triangles2*, *triangles3* sú trojuholníky spoločné pre prvý, druhý a tretí vrchol trojuholníka *triangle*.

`geometry[] TIN_Contours(triangle geometry, deltax double precision);`
 Funkcia vracia lineárne interpolované vrstevnice trojuholníka *triangle* s rozstupom *deltax*. Základnou výškou je výška 0. Vrstevnice sú typu *linestring z*.

`double precision[] TIN_PartialDerivativesOfTriangle(triangle geometry);`
 Funkcia vracia hodnoty parciálnych derivácií roviny trojuholníka v poli $[z_x, z_y]$. Parciálne derivácie následne môžu byť využité pri morfometrickej analýze.

`double precision TIN_SlopeOfTriangle(triangle geometry);`
 Funkcia vracia sklon roviny trojuholníka *triangle* v stupňoch. Sklon je významným morfometrickým parametrom prvého rádu.

`double precision TIN_AspectOfTriangle(triangle geometry);`
 Funkcia vracia orientáciu roviny trojuholníka *triangle* voči svetovým stranám z intervalu $<0^\circ; 360^\circ$), kde 0° zodpovedá poloosi -y, 90° zodpovedá poloosi -x, 180° zodpovedá poloosi

+y, 270° zodpovedá poloosi +x. Orientácia je významným morfometrickým parametrom prvého rádu.

`double precision[] _TIN_PartialDerivativesOnVertex(point geometry, triangles geometry[]);`
 Funkcia vracia odhadované hodnoty parciálnych derivácií $[z_x, z_y]$ vo vrchole *point* na základe jeho spoločných trojuholníkov *triangles[]*. Parciálne derivácie následne môžu byť využité pri morfometrickej analýze.

`double precision _TIN_SlopeOnVertex(point geometry, triangles geometry[]);`
 Funkcia vracia odhadovanú hodnotu sklonu v stupňoch vo vrchole *point* na základe jeho spoločných trojuholníkov *triangles[]*. Sklon je významným morfometrickým parametrom prvého rádu.

`double precision _TIN_AspectOnVertex(point geometry, triangles geometry[]);`
 Funkcia vracia odhadovanú hodnotu orientácie vo vrchole *point* voči svetovým stranám z intervalu $<0^\circ; 360^\circ$) na základe jeho spoločných trojuholníkov *triangles[]*, kde 0° zodpovedá poloosi -y, 90° zodpovedá poloosi -x, 180° zodpovedá poloosi +y, 270° zodpovedá poloosi +x. Orientácia je významným morfometrickým parametrom prvého rádu.

`double precision[] TIN_QuasiQuadraticDerivatives(triangle geometry, triangles1 geometry[], triangles2 geometry[], triangles3 geometry[], point geometry);`
 Funkcia vracia hodnoty parciálnych derivácií $[z_x, z_y]$ trojuholníka *triangle* v bode *point* podľa kvázi-kvadratického modelu (Vencovský, 1984), kde *triangles1*, *triangles2*, *triangles3* sú trojuholníky spoločné pre prvý, druhý a tretí vrchol trojuholníka *triangle*.

`boolean TIN_IsConvexHull(triangle1 geometry, triangle2 geometry);`
 Funkcia vracia logickú hodnotu *TRUE* / *FALSE* podľa toho, či trojuholníky *triangle1* a *triangle2* majú / nemajú konvexný obal. Je to užitočné pri realizácii Lawsonovej lokálnej optimalizácie trojuholníkov (Desnougues a Devilliers 1995; Kolingerová 1999).

`double precision TIN_NormalsAngle(normal1 double precision[], normal2 double precision[]);`
 Funkcia vracia veľkosť uhla medzi normálami *normal1* a *normal2* v stupňoch. Normálu možno zadávať ako pole jej súradníc $[x, y, z]$ alebo ako pole parciálnych derivácií $[z_x, z_y]$. Funkcia nachádza uplatnenie pri hodnotení reprezentatívnosti TIN porovnaním normály trojuholníka a optimalizovanej normály.


```
geometry[] _TIN_Flip(triangle1 geometry, triangle2
geometry);
```

Funkcia preklápa spoločnú hranu trojuholníkov *triangle1* a *triangle2*. Nový tvar trojuholníkov vracia v dvojprvkovom poli. Funkcia nachádza uplatnenie pri Lawsonovej lokálnej optimalizácii trojuholníkov (Desnougues a Devilliers 1995; Kolingerová 1999).

```
geometry TIN_GetPoint(pid integer, tintable text);
```

Funkcia vracia bod s identifikátorom *pid* trojuholníkovej siete v *tintable*. Bod je typu *point z*.

```
geometry[] TIN_PntCommonTriangles(tid integer,
tintable text, vertexnum integer);
```

Funkcia vracia pole trojuholníkov spoločných prvému (*vertexnum* = 1), druhému (*vertexnum* = 2) alebo tretiemu (*vertexnum* = 3) vrcholu trojuholníka *tid* trojuholníkovej siete v *tintable*. Užitočné to je pri výpočte parciálnych derivácií alebo morfometrických parametrov vo vrcholoch TIN.

```
double precision[] TIN_PartialDerivativesOnVertex(pid
integer, tintable text);
```

Funkcia vracia odhadované hodnoty parciálnych derivácií [z_x , z_y] vo vrchole *pid* trojuholníkovej siete v *tintable*. Zjednodušuje prácu užívateľovi oproti funkcii *_TIN_PartialDerivativesOnVertex*. Parciálne derivácie následne môžu byť využité pri morfometrickej analýze.

```
double precision TIN_SlopeOnVertex(pid integer,
tintable text);
```

Funkcia vracia odhadovanú hodnotu sklonu v stupňoch vo vrchole *pid* trojuholníkovej siete v *tintable*. Zjednodušuje prácu užívateľovi oproti funkcii *_TIN_SlopeOnVertex*. Sklon je významným morfometrickým parametrom prvého rádu.

```
double precision TIN_AspectOnVertex(pid integer,
tintable text);
```

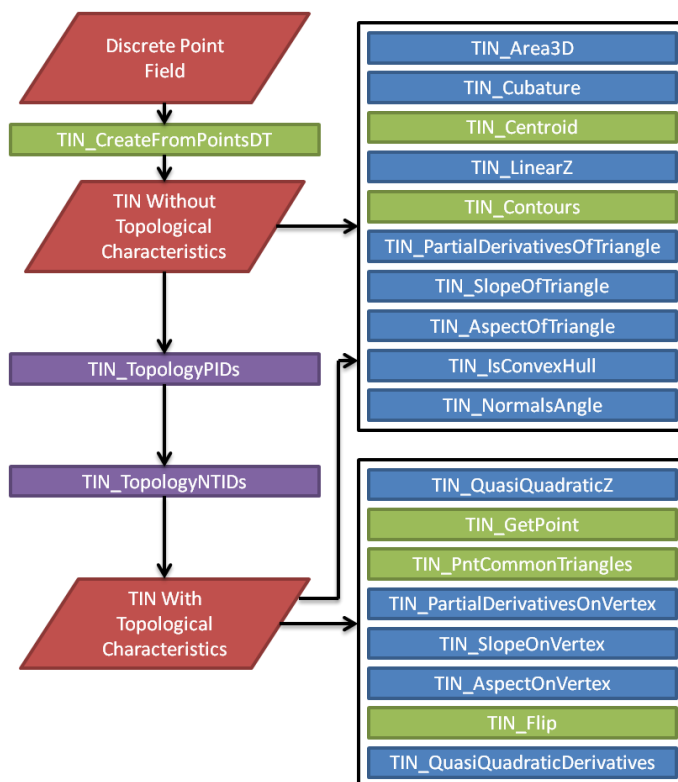
Funkcia vracia odhadovanú hodnotu orientácie vo vrchole *pid* voči svetovým stranám z intervalu $<0^\circ; 360^\circ$) trojuholníkovej siete v *tintable*, kde 0° zodpovedá poloosi -y, 90° zodpovedá poloosi -x, 180° zodpovedá poloosi +y, 270° zodpovedá poloosi +x. Zjednodušuje prácu užívateľovi oproti funkcii *_TIN_AspectOnVertex*. Orientácia je významným morfometrickým parametrom prvého rádu.

```
text TIN_Flip(tid1 integer, tid2 integer, tintable
text);
```

Funkcia preklápa spoločnú hranu trojuholníkov *tid1* a *tid2* trojuholníkovej siete v *tintable* za súčasného editovania geometrie a topológie v tabuľke *tintable*. Zjednodušuje prácu užívateľovi oproti funkcii *_TIN_Flip*. Funkcia nachádza uplatnenie pri Lawsonovej lokálnej optimalizácii trojuholníkov (Desnougues a Devilliers 1995; Kolingerová 1999).

C. Konceptia volania funkcií *pg3angles*

Práca s nepravidelnou trojuholníkovou sieťou v *pg3angles* začína od diskrétného bodového poľa. Toto pole vstupuje do funkcie *TIN_CreateFromPointsDT* za vzniku TIN. Avšak táto TIN ešte nemá známe topologické charakteristiky, no možno s ňou už pracovať v niektorých funkciách, ktoré neoperujú s topológiou trojuholníkov (obr. 5), teda ich algoritmy sú zamerané na jednotlivé trojuholníky siete nezávisle.



Obr. 5 Konceptia volania funkcií *pg3angles*

TIN_CreateFromPointsDT		TIN_TopologyPIDs			TIN_TopologyNTIDs		
tid	geom	pid1	pid2	pid3	ntid1	ntid2	ntid3
Integer	Geometry	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer
Unique triangle ID	Geometry of a triangle	Unique ID of the first vertex of a triangle	Unique ID of the second vertex of a triangle	Unique ID of the third vertex of a triangle	Unique ID of the first neighboring triangle	Unique ID of the second neighboring triangle	Unique ID of the third neighboring triangle

Obr. 6 Údajový model TIN v *pg3angles*

Keď pri práci potrebujeme poznať topologické charakteristiky trojuholníkov, na trojuholníkovú sieť bez topológie zavoláme funkcie *TIN_TopologyPIDs* a *TIN_TopologyNTIDs*. Dôležité je volať tieto funkcie v poradí, v akom sú uvedené. Po úspešnej realizácii ich procesov dostávame TIN, ktorá má vyplnené tzv. topologické charakteristiky, teda atribúty charakterizujúce identifikátory vrcholov (*pid*) a susedných trojuholníkov (*ntid*). Táto sieť už môže vstupovať do všetkých funkcií balíka *pg3angles* (obr. 5).

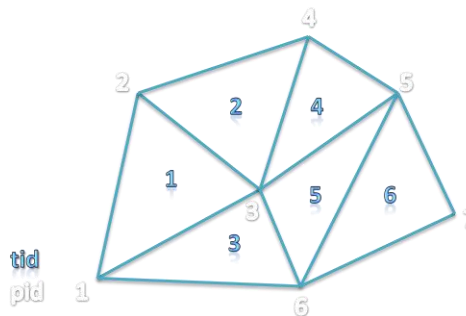
D. Topológia TIN v *pg3angles*

Ako bolo spomenuté vyššie, rýchlosť niektorých algoritmov pracujúcich s TIN sa dá markantne zvýšiť aplikovaním prehľadného údajového modelu na TIN, z ktorého je možné jednoducho zistiť informácie o susedných trojuholníkoch, stranách, bodoch pre ľubovoľný trojuholník, stranu alebo bod. Teda z daného údajového modelu máme jasnú predstavu o topológii TIN.

V *pg3angles* je využitý údajový model, ktorého základným elementom je trojuholník. Celá TIN je reprezentovaná jednou tabuľkou, v ktorej jeden riadok zodpovedá informácii o jednom trojuholníku. Táto tabuľka obsahuje osem atribútov, z ktorých každý je vyplňaný príslušnou funkciou (obr. 6).

Na obr. 7 je zobrazená demonštratívna vzorka trojuholníkovej siete. V spodnej časti je uvedená databázová tabuľka, v ktorej je táto sieť uložená. Korešpondujúc s obrázkom sa z tabuľky dá zistiť, že trojuholník s identifikátorom *tid* = 1 pozostáva z vrcholov s identifikátormi *pid1* = 1, *pid2* = 2 a *pid3* = 3. Vďaka hodnote *ntid1* = 2 vieme jednoznačne určiť, že

oproti bodu *pid1* leží trojuholník s identifikátorom *tid* = 2. Podobne je to aj s *ntid2* = 3, čo nám hovorí, že oproti bodu *pid2* leží trojuholník s identifikátorom *tid* = 3. Hodnota *ntid3* = -1, čo znamená, že oproti bodu *pid3* neleží žiadny trojuholník (teda trojuholník s *tid* = 1 leží na okraji trojuholníkovej siete). Táto logika je aplikovaná na všetky trojuholníky siete.



tid	geom	pid1	pid2	pid3	ntid1	ntid2	ntid3
1	Triangle Z ...	1	2	3	2	3	-1
2	Triangle Z ...	2	3	4	4	-1	1
3	Triangle Z ...	1	3	6	5	-1	1
4	Triangle Z ...	3	4	5	-1	5	2
5	Triangle Z ...	3	6	5	6	4	3
6	Triangle Z ...	5	6	7	-1	-1	5

Obr. 7 Koncepcia topológie TIN v *pg3angles*

E. Príklady použitia funkcií *pg3angles*

Úloha 1: tvorba TIN z diskretného bodového poľa a určenie jej topologických charakteristík pre používanie v *pg3angles*

K dispozícii máme vrstvu (tabuľku) diskretného bodového poľa s názvom *dbp*, ktorej jeden riadok zodpovedá jednému bodu. Geometria každého bodu je typu *POINT Z* a je uložená v atribúte s názvom *geometria*. Meno vrstvy obsahujúcej trojuholníky bude *tin*. Pracujeme v databáze s názvom *tindb* ako používateľ *pouzivatel* s heslom *heslo123*. Danú úlohu zrealizujeme zadaním príkazov:

```
SELECT TIN_CreateFromPointsDT ('tin', 'dbp',
    'geometria');
SELECT TIN_TopologyPIDs('tin', 'pouzivatel',
    'heslo123', 'tindb');
SELECT TIN_TopologyNTIDs('tin');
```

Úloha 2: výpočet parciálnych derivácií z_x , z_y vo vrcholoch trojuholníkovej siete. Vytvorenie výstupu pozostávajúceho z identifikátorov bodov, súradníc bodov a parciálnych derivácií na bodoch

K dispozícii máme vrstvu *tin*, ktorá je výsledkom úlohy 1. Úloha 2 spočíva vo vytvorení sekvencie *sekvencia* identifikátorov bodov, na základe ktorej sú volané funkcie *TIN_GetPoint*, *TIN_PartialDerivativesOnVertex*. Okrem týchto funkcií sú volané funkcie PostGIS-u *ST_X*, *ST_Y*. Výstup pozostáva zo stĺpcov *pid*, *X*, *Y*, z_x , z_y usporiadaných podľa *pid* vzostupne. Úlohu zrealizujeme zadaním príkazu:

```
WITH sekvencia AS (
    SELECT pid1 AS pid FROM tin UNION
    SELECT pid2 FROM tin UNION
    SELECT pid3 FROM tin
)
SELECT pid, ST_X(TIN_GetPoint(pid, 'tin')) AS X,
    ST_Y(TIN_GetPoint(pid, 'tin')) AS Y,
    (TIN_PartialDerivativesOnVertex(pid,
    'tin'))[1] AS  $z_x$ ,
    (TIN_PartialDerivativesOnVertex(pid,
    'tin'))[2] AS  $z_y$  FROM sekvencia ORDER
    BY pid;
```

Výstupom je podobná tabuľka (tab. 1).

Tab. 1 Výsledok dopytu úlohy 2

pid integer	x double precision	y double precision	zx double precision	zy double precision
1	1702	2753.083	0.152308673182072	0.0129090370642541
2	1702	2074.215	0.00685393195915506	0.0425345849922882
3	1702	2639.939	0.132359382697778	0.0126346675547728
4	2089.924	3318.808	-0.0483825273911964	0.00727877131216938
5	2089.924	2041.888	0.0173283743960027	0.0040682373979783
6	2089.924	1201.384	-0.00436098969362567	0.00417241247237097
7	2089.924	2106.542	0.0247136494336575	-0.00321659105892097
8	2089.924	1266.038	0.012638190357063	-0.00448144417599645
9	1895.962	1670.127	0.0189076970056839	0.00713646332269919
...

Úloha 3: identifikácia svahov so sklonom nad 5° orientovaných na juh a ich export do novej vrstvy (tabuľky)

K dispozícii máme vrstvu *tin*, ktorá je výsledkom úlohy 1. Úloha 3 spočíva vo vytvorení novej tabuľky *juznesvahy*, ktorá bude pozostávať z jedného atribútu typu *geometry* s názvom *geometria*. Následne bude táto tabuľka naplnená výsledkom selekcie trojuholníkov spĺňajúcich zadané kritériá. Danú úlohu zrealizujeme zadaním príkazov:

```
CREATE TABLE juznesvahy (geometria geometry);
INSERT INTO juznesvahy SELECT geom FROM tin
    WHERE TIN_SlopeOfTriangle(geom) > 5 AND
    (TIN_AspectOfTriangle(geom) > 315 OR
    TIN_AspectOfTriangle(geom) < 45);
```

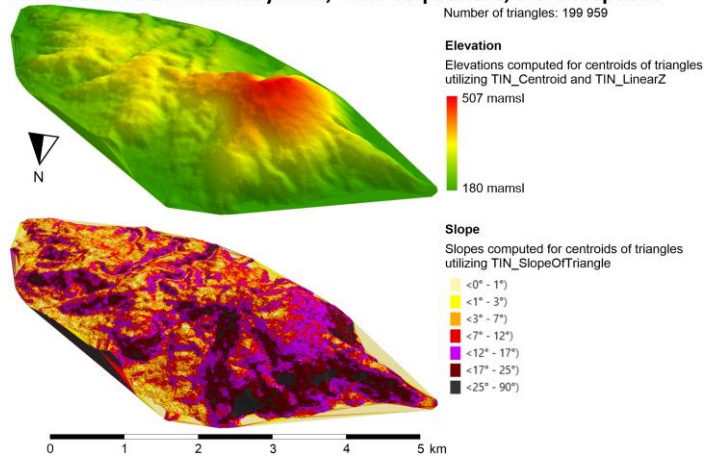
F. Verifikácia *pg3angles* na dvoch prípadových štúdiách

Na realizáciu prípadových štúdií boli využité nástroje *PostgreSQL* / *PostGIS* / *pg3angles* a *ArcGIS* so svojimi aplikáciami *ArcMap* a *ArcScene*. Podrobné diskretné bodové pole bolo vygenerované náhodne pre územie prípadových štúdií. Výšky boli prevzaté z DEM SRTM o rozlíšení 1".

Prvou prípadovou štúdiou bolo vytvorenie modelu masívu Devínskej Kobyly spadajúcej do geomorfologického celku Malých Karpát so znázornením výšky a sklonu (obr. 8). TIN bola vytvorená z diskretného bodového poľa o veľkosti 100 000 bodov. Delaunayovou trianguláciou s využitím funkcie *TIN_CreateFromPointsDT* bola vytvorená trojuholníková sieť pozostávajúca zo 199 959 trojuholníkov. Pomocou funkcií *TIN_Centroid* a *TIN_LinearZ* boli vypočítané nadmorské výšky v ťažiskách trojuholníkov, na základe ktorých bol symbolizovaný vrchný model. Pomocou funkcie *TIN_SlopeOfTriangle* boli vypočítané sklony rovin

trojuholníkov, na základe ktorých bol symbolizovaný spodný model. Hodnoty výšok a sklonov boli uložené ako ďalšie atribúty do tabuľky reprezentujúcej TIN. Táto tabuľka bola vyexportovaná z databázy do súboru ESRI Shapefile, aby mohla byť zobrazená v 2,5 D móde v *ArcScene*.

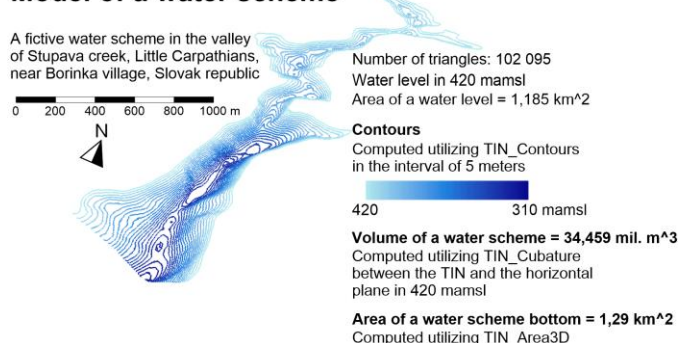
TIN model of Devinska Kobyla hill, Little Carpathians, Slovak republic



Obr. 8 TIN model masívu Devínskej Kobylky

Druhou prípadovou štúdiou bola tvorba modelu fiktívnej vodnej nádrže lokalizovanej v doline Stupavského potoka nad obcou Borinka v Malých Karpatoch, vygenerovanie vrstevníc, výpočet objemu vodnej nádrže a výpočet rozlohy dna vodnej nádrže (obr. 9). TIN bola vytvorená z diskretného bodového poľa o veľkosti 51 060 bodov. Podobne ako v predchádzajúcom prípade, Delaunayovou trianguláciou s využitím funkcie *TIN_CreateFromPointsDT* bola vytvorená trojuholníková sieť pozostávajúca zo 102 095 trojuholníkov. Vrstevnice boli vygenerované funkciou *TIN_Contours* každých 5 metrov. Rozloha dna bola vypočítaná ako suma 3D rozlôh všetkých trojuholníkov tvoriacich vodnú nádrž pomocou funkcie *TIN_Area3D*. Objem vodnej nádrže bol vypočítaný ako suma objemov hranolov tvorených zo spodnej strany plochou trojuholníka a z hornej strany rovinou vodnej hladiny vo výške 420 m n.m. s využitím funkcie *TIN_Cubature*. Vrstevnice boli vyexportované z databázy do súboru ESRI Shapefile, aby mohli byť zobrazené v 2,5 D móde v *ArcScene*.

Model of a water scheme



Obr. 9 Model vodnej nádrže

IV. DISKUSIA

Aktuálna verzia 1.01 rozšírenia *pg3angles* ponúka funkcie na prácu s nepravidelnými trojuholníkovými sieťami v databázovom systéme *PostgreSQL* s priestorovým rozšírením *PostGIS*. Trojuholníkové siete sú uložené v údajovom modeli, ktorého hlavným elementom je trojuholník. Na trhu sa takmer vôbec nevyskytujú softvéry, ktoré integrujú širšiu funkcionality zameranú na nepravidelné trojuholníkové siete. Za zmienku stojí komerčný *ArcGIS*, ktorý obsahuje nástrojovú sadu *3D Analyst*. Táto sada zakomponúva aj nástroje na prácu s TIN. Porovnanie dostupnej funkcionality súvisiacej s TIN medzi *pg3angles* a *ArcGIS* ponúka obr. 10. Možno si všimnúť, že doménou *pg3angles* je určovanie hodnôt parciálnych derivácií, sklonov a orientácií na trojuholníkoch, ale aj vo vrcholoch siete. Najväčším benefitom je však voľná dostupnosť *pg3angles*. Doménou *ArcGIS* sú algoritmy na decimovanie TIN a taktiež funkcionality súvisiace s vyplňaním objemov medzi povrchmi.

Functionality	pg3angles	ArcGIS
3D area computation	✓	✓
Volume computation	✓	✓
Contouring	✓	✓
Computation of partial derivatives of triangles / on vertices	✓ / ✓	✗ / ✗
Computation of a slope of triangles / on vertices	✓ / ✓	✓ / ✗
Computation of an aspect of triangles / on vertices	✓ / ✓	✓ / ✗
TIN decimation	✗	✓
Extruding between TINs	✗	✓
Freely available software	✓	✗

Obr. 10 Porovnanie funkcionality medzi *pg3angles* a *ArcGIS*

Prípadové štúdie opísané v predchádzajúcej stati sme úspešne realizovali aj v prostredí *ArcGIS*. Na základe nezmenených vstupných bodových polí výšok boli vygenerované totožné trojuholníkové siete a vyčíslené totožné hodnoty sledovaných morfometrických parametrov, či zostrojené totožné vrstevnice. Možno hovoriť o funkčnej rovnocennosti daných dvoch nástrojov. V neprospech *pg3angles* vypovedajú procesné časy, ktoré boli omnoho vyššie. To nás motivuje k optimalizácii algoritmov do ďalších verzií *pg3angles*.

Vývoj *pg3angles* sa teda nezastavuje. Plánujeme doň zakomponovať decimálne algoritmy *memoryless simplification* a *quadric error metrics simplification*, ktoré budú zjednodušovať a optimalizovať trojuholníkovú sieť voči modelovanej ploche, čo bude cenené pri tvorbe TIN z LiDARového mračna bodov. Vychádzajúc zo štúdie (Feciskanin and Iring, 2013) sú tieto algoritmy vhodnejšie na generalizovanie TIN ako decimálne algoritmy implementované v *ArcGIS* práve vďaka optimalizačným kritériám, ktoré naplňujú. Navyše, za zmienku stojí iniciatíva vytvorenia tenkého či hrubého klienta, ktorý by ponúkal grafické užívateľské rozhranie pre ovládanie *pg3angles*.

V. ZÁVER

Modelovanie georeliéfu a jeho priestorovej štruktúry prostredníctvom modelov nepravidelných trojuholníkových sietí je v úzadí oproti modelovaniu pomocou rastrových modelov.

Pritom modely TIN dokážu presnejšie zachytiť rôznorodé tvary georeliéfu bez redundancie. Účelom rozšírenia *pg3angles* je prispieť na geoinformatický trh nástrojmi integrujúcimi algoritmy pre komplexnú prácu s nepravidelnými trojuholníkovými sieťami. Prepojenie s databázovým systémom *PostgreSQL* s priestorovým rozšírením *PostGIS* navyše tomuto nástroju dáva pevný základ pre dynamický rozvoj. Čím viac na popularite naberajúce LiDARové technológie majú potenciál byť so svojimi výstupmi, mračnami bodov, hnacím elementom tohto rozširujúceho riešenia.

V článku sme popisali pozadie vývoja nástroja *pg3angles* determinované konceptom *PostgreSQL*, *PostGIS* a štandardov definujúcich narábanie s geografickými informáciami v počítačovom prostredí. Dôvodom výberu prostredia *PostgreSQL* / *PostGIS* pre vývoj funkcií na prácu s TIN je fakt, že *PostGIS* od verzie 2.0 disponuje dátovými typmi *TIN* a *TRIANGLE*, ale postráda funkcie na prácu s nimi. V texte sme podrobne funkcie obsiahnuté v *pg3angles* opísali po stránke ich genézy, ale aj funkcionality. Charakterizovali sme využitý údajový model nepravidelnej trojuholníkovej siete v databáze pozostávajúcej z jednej tabuľky, ktorej hlavným elementom je trojuholník. Táto tabuľka zlučuje identifikátory trojuholníkov, geometriu trojuholníkov, identifikátory vrcholových bodov trojuholníkov a identifikátory susedných trojuholníkov, a tým stanovuje jednoznačnú topológiu nepravidelnej trojuholníkovej siete. Známe topologické charakteristiky TIN zvyšujú rýchlosť dopytov na sieť. Na príkladoch SQL dopytov sme demonštrovali použitie funkcií *pg3angles* v praxi. Využitelnosť a aplikovateľnosť nášho nástroja sme predviedli na dvoch prípadových štúdiách - modelovaní masívu geomorfologickej štruktúry a modelovaní vodnej nádrže. Nakoniec sme porovnali funkcionality *pg3angles* s funkcionality softvérového riešenia *ArcGIS* na úseku modelovania georeliéfu prostredníctvom TIN a dokázali funkčnú rovnocennosť nášho nástroja vo viacerých ohľadoch.

Extenzia *pg3angles* je voľne dostupná na stiahnutie z webovej stránky <https://github.com/KaliGIS>.

REFERENCIE

- Alboul L, Echeverria G, Rodrigues M 2005 Discrete Curvatures and Gauss Maps for Polyhedral Surfaces. In *European Workshop on Computational Geometry*. Abstracts for the Twentyfirst European Workshop on Computational Geometry Technische Universiteit Eindhoven, The Netherlands March 9–11, 2005: 69-72
- Alboul L, Kloosterman G, Traas C, van Damme R 2000 Best Data-dependent Triangulations. *Journal of Computational And Applied Mathematics* 119: 1-12

- Boissonnat J D, Devillers O, Pion S, Teillaud M, Yvinec M 2002 Triangulations in CGAL. *Computational Geometry* 22: 5-19
- Desnougues P and Devillers O 1995 A locally optimal triangulation of the hyperbolic paraboloid. In *Proceedings of the Seventh Canadian Conference on Computational Geometry*, Laval, Quebec: 49-54
- Ellul C 2012 Can Free (and Open Source) Software and Data be Used to Underpin a Self-Paced Tutorial on Spatial Databases?. *Transactions in GIS* 16: 435-54
- Evans I S 1972 General geomorphometry, derivatives of altitude and descriptive statistics. *Spatial Analysis in Geomorphology*: 17-90.
- Fayek R E 1997 Feature-based 3D surface modeling by improved constrained triangular meshes. In *International Conference On Image Processing - Proceedings. Vol II*. Santa Barbara, CA: 740-43
- Feciskanin R 2009 *Optimalizácia nepravidelných trojuholníkových sietí pre modelovanie georeliéfu*. Brno, Masarykova univerzita
- Feciskanin R 2012 Analysis of the geometric properties of derived multiresolution TIN terrain models with a view to morphometric analysis. In *GIS Ostrava 2012 - Surface models for geosciences*. 11 p.
- Feciskanin R and Iring M 2013 Porovnanie zjednodušovania modelov georeliéfu vybranými algoritmi. *Geodetický a kartografický obzor* 59: 25-31
- Fry R, Berry R, Higgs G, Orford S, Jones S 2012 The WISERD Geoportal: A Tool for the Discovery, Analysis and Visualization of Socio-economic (Meta-) Data for Wales. *Transactions in GIS* 16: 105-24
- Fujioka E, Vanden Berghe E, Donnelly B, Castillo J, Cleary J, Holmes C, McKnight S, Halpin P 2012 Advancing Global Marine Biogeography Research with Open-source GIS Software and Cloud Computing. *Transactions in GIS* 16: 143-60
- Garland M and Heckbert P S 1997 Surface simplification using quadric error metrics. In *Proceedings of SIGGRAPH*: 209-16
- Gauss C F 1828 *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Typis Dieterichianis
- Kalak A and Krcho J 1983 Štruktúra bázy údajov komplexného digitálneho modelu reliéfu a plnoautomatizované zostrojenie primárnej trojuholníkovej siete. *Geodetický a kartografický obzor* 29: 31-40
- Kalivoda M 2014 *Tvorba nástrojov na optimalizáciu nepravidelných trojuholníkových sietí pre modelovanie georeliéfu*. Bratislava, Univerzita Komenského
- Kolingerová I 1999 Genetic Approach to Data Dependent Triangulations. In *Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics*. Budmerice: 229-38
- Krcho J 1973 Morphometric analysis of relief on the basis of geometric aspect of field theory. *Acta geographica Universitatis Comenianae, Geographica physica* 1: 7-233
- Krcho J 1990 *Morfometrická analýza a digitálne modely georeliéfu*. Bratislava, Veda
- Krcho J 2001 *Modelling of Georelief and Its Geometrical Structure Using DTM: Positional and Numerical Accuracy*. Bratislava, Q111
- Krcho J, Bánska H, Karpiš Š, Folrich H, Kiliková 1976 *Digitálny model terénu na princípe automatizovanej tvorby trojuholníkovej siete a kreslenie vrstevníc. Čiastková úloha štátneho plánu rozvoja vedy a techniky P - 04 - 521 - 293 - 11 TLAP - Pre projektovanie liniových stavieb, Program C 230*. Bratislava, Dopravoprojekt
- Li P and Adams M D 2013 A Tuned Mesh-Generation Strategy for Image Representation Based on Data-Dependent Triangulation. *IEEE Transactions On Visualization And Computer Graphics* 22: 2004-18
- Lindstrom P and Turk G 1999 Evaluation of memoryless simplification. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions* 2: 98-15
- Little J J, Shi P 2003 Ordering points for incremental TIN construction from DEMs. *Geoinformatica* 7: 33-53
- Luebke D 2001 A Developer's Survey of Polygonal Simplification Algorithms. *IEEE Computer Graphics & Applications* 21: 24-35
- Minár J, Jenčo M, Evans I S, Minár Jr J, Kadlec M, Krcho J, Pacina J, Burian L, Benová, A 2013 Third-order geomorphometric variables (derivatives): definition, computation and utilization of changes of curvatures. *International Journal of Geographical Information Science* 27: 1381-402
- O'Rourke J 1998 *Computational Geometry in C*. Cambridge, Cambridge University Press
- Supak S, Luo H, Tateosian L, Fang K S, Harrell J, Harrelson C, Bailey A D, Devine, H 2012 Who's Watching Your Food? A Flexible Framework for Public Health Monitoring. *Transactions in GIS* 16: 89-104
- Wilson J P 2012 Digital terrain modeling. *Geomorphology* 137: 107-21